

MASTER 2 ACOUSTIQUE, TRAITEMENT DU SIGNAL, INFORMATIQUE,  
APPLIQUÉS À LA MUSIQUE

MÉMOIRE DE STAGE

15 septembre 2024

---

# Découverte de motifs musicaux avec variations en utilisant la morphologie mathématique

---

Enguérand Tamagna

Sujet du stage : non confidentiel

Période de stage : du 26/02/2024 au 26/07/2024

Sciences et Technologies de la Musique et du Son (STMS UMR 9912), Ircam, Paris  
Laboratoire d'Informatique de Sorbonne Université (LIP6 UMR 7606), Sorbonne Université, Paris

<b>Isabelle Bloch</b>	Professeure des universités (LIP6, Sorbonne Université) <i>isabelle.bloch@sorbonne-universite.fr</i>	Encadrante
<b>Paul Lascabettes</b>	Chercheur postdoctoral (STMS, Ircam, Sorbonne Université, IRMA, Université de Strasbourg) <i>paul.lascabettes@ircam.fr</i>	Co-Encadrant



# Abstract

This dissertation is devoted to the automatic discovery of musical patterns using mathematical morphology. This mathematical theory, mostly applied in image processing and analysis, has recently been used to discover repeating patterns in musical data. We propose here to generalize some of these results to address the following issue : how can we discover musical patterns with variations in a symbolic representation of music ?

The first chapter presents the state of the art on pattern discovery in a symbolic representation of music, focusing on the notion of translatable pattern. Chapter 2 explores the theory of mathematical morphology and its application to pattern discovery, leading to original discovery methods. Chapter 3 extends these methods to include patterns repeating with variations, by introducing new operations, named variational operations. These are used to detect specific pattern variations in a symbolic representation of music. Finally, Chapter 4 generalizes the approach of Chapters 1 and 2 using Galois connection theory, offering a new perspective on musical pattern discovery.

**Key words :** Musical pattern discovery, mathematical morphology, musical pattern variations, Galois connection.

# Résumé

Ce mémoire est consacré à la découverte automatique de motifs musicaux par morphologie mathématique. Cette théorie mathématique, majoritairement appliquée en traitement et analyse d'images, a récemment été utilisée pour découvrir des motifs qui se répètent dans des données musicales. Nous proposons ici de généraliser certains de ces résultats pour aborder la problématique suivante : comment découvrir des motifs musicaux avec variations dans une représentation symbolique de la musique ?

Le premier chapitre présente l'état de l'art sur la découverte de motifs dans une représentation symbolique de la musique, en se concentrant sur la notion de motif translatable. Le chapitre 2 explore la théorie de la morphologie mathématique pour aboutir à des méthodes originales de découverte de motifs musicaux. Le chapitre 3 étend ces méthodes pour inclure les motifs se répétant avec variations, en introduisant de nouvelles opérations, dites variationnelles. Celles-ci sont utilisées pour détecter des variations spécifiques de motifs dans une représentation symbolique de la musique. Enfin, le chapitre 4 généralise l'approche des chapitres 1 et 2 en utilisant la théorie de la connexion de Galois, offrant ainsi un nouveau point de vue pour la découverte de motifs musicaux.

**Mots clés :** Découverte de motifs musicaux, morphologie mathématique, variations de motifs musicaux, connexion de Galois.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1 De la découverte de motifs musicaux</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction	5
1.2 Représentation multidimensionnelle de la musique	5
1.3 Motifs translatables	6
1.3.1 Motifs translatables maximaux ( <i>Maximal Translatable Patterns</i> (MTP))	6
1.3.2 Classe d'équivalence par translation ( <i>Translation Equivalence Class</i> (TEC))	7
1.3.3 Classe d'équivalence par translation maximale ( <i>Maximal Translational Equivalence Class</i> (MTEC))	7
1.4 Motifs transformables	8
1.5 Conclusion	9
<b>2 Morphologie mathématique</b>	<b>10</b>
2.1 Introduction	10
2.2 Dilatation et érosion binaires	10
2.2.1 Premières définitions	10
2.2.2 Propriétés principales	11
2.2.3 Une approche algébrique	12
2.3 Ouverture et fermeture binaires	13
2.3.1 Définitions	13
2.3.2 Propriétés principales	14
2.3.3 Ouverture et fermeture par une famille d'ensembles	14
2.3.4 Encore une approche algébrique	14
2.4 Découverte de motifs à l'aide de la morphologie mathématique	15
2.4.1 Une première application à la représentation symbolique de la musique	15
2.4.2 Caractérisation des motifs translatables par la morphologie mathématique	15
2.4.3 Découverte des motifs par leurs apparitions	17
2.4.4 Limites de la méthode	17
<b>3 Découverte de motifs avec variations</b>	<b>18</b>
3.1 Introduction	18
3.2 Opérations variationnelles	18
3.2.1 Classe de variations	18
3.2.2 Érosion variationnelle	19
3.2.3 Ouverture variationnelle	21
3.2.4 Lien avec les motifs transformables	22
3.2.5 Applications musicales	23
3.3 Un cas particulier : la classe à un demi-ton	24

3.3.1	Classe à un demi-ton . . . . .	24
3.3.2	Utilisation sur des données réelles . . . . .	29
3.4	Motifs translatables : une généralisation au cas variationnel . . . . .	32
3.4.1	Classe d'équivalence variationnelle ( <i>Variational Equivalence Class</i> (VEC)) . . . . .	32
3.4.2	Classe d'équivalence variationnelle maximale ( <i>Maximal Variational Equivalence Class</i> (MVEC)) . . . . .	33
3.4.3	Cas de la classe à un demi-ton . . . . .	33
3.5	Conclusion et perspectives . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Connexion de Galois</b>	<b>39</b>
4.1	Introduction . . . . .	39
4.2	Théorie algébrique . . . . .	39
4.2.1	Treillis complets et familles de Moore . . . . .	39
4.2.2	Connexion de Galois . . . . .	40
4.2.3	Cartes de Galois . . . . .	41
4.3	Application à la découverte de motifs . . . . .	41
4.3.1	Une application caractéristique . . . . .	41
4.3.2	Principaux résultats . . . . .	42
4.3.3	Équivalence des définitions de MTEC . . . . .	43
4.3.4	Famille de Moore et minimalité . . . . .	44
4.3.5	Cartes de Galois et intersections d'érosions . . . . .	45
4.4	Quid de la découverte de motifs avec variations? . . . . .	46
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>48</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>49</b>

# Introduction

Un morceau de musique est généralement composé de motifs musicaux qui se répètent, et il est important de savoir comment identifier de tels motifs. Si l'œil avisé du musicologue est en mesure de les repérer sur une partition, nous nous focaliserons ici sur une approche purement automatique pour les découvrir. Pour ce faire, des théories mathématiques peuvent être appliquées avec succès. C'est notamment le cas de la morphologie mathématique, qui est utilisée pour analyser une représentation symbolique de la musique. Ainsi, ce mémoire est articulé autour de la découverte de motifs musicaux en utilisant la morphologie mathématique dans une représentation symbolique de la musique. Si cette théorie a permis jusqu'alors de découvrir des répétitions exactes de motifs, il apparaît que, dans certains morceaux de musique, les motifs puissent se répéter de façon légèrement différente, ou avec quelques variations. Notre but est donc de comprendre dans quelle mesure la morphologie mathématique peut être appliquée dans une représentation symbolique de la musique pour découvrir des motifs avec variations.

Nous proposons dans le chapitre 1 un état de l'art concernant la découverte de motifs musicaux. Nous évoquons comment représenter des données musicales pour y trouver des motifs. Cette recherche automatique se base majoritairement sur la notion de motif translatable maximal proposée par Meredith et al. [12]. D'autres classes de motifs et propriétés y sont abordées.

Le chapitre 2 est consacré à l'état de l'art de la théorie de la morphologie mathématique (Bloch et al. [1]). Avec ces outils formels, il est possible de découvrir des motifs qui se répètent dans une représentation symbolique de la musique. Cela a été découvert par Lascabettes [7] et permet de reformuler les définitions et résultats du chapitre 1. Nous aboutissons ainsi à de nouvelles méthodes de découverte pour des répétitions exactes de motifs, rendues possibles grâce à la morphologie mathématique.

Dans le chapitre 3, nous cherchons à étendre ces procédés de découverte au cas plus général où les motifs se répètent avec variations. Nous introduisons de nouvelles opérations, toujours basées sur la morphologie mathématique, pour prendre en compte ces variations. En particulier, nous définissons la classe à un demi-ton d'un motif qui permet de découvrir automatiquement des variations spécifiques dans une représentation symbolique de la musique, et la testons sur des données réelles. Enfin, nous cherchons à étendre au cas variationnel les concepts et résultats présentés aux chapitres précédents.

Le chapitre 4, plus abstrait, vise à généraliser l'approche de Lascabettes présentée au chapitre 2. En effet, il se trouve que cette dernière peut être vue comme un cas particulier d'une théorie beaucoup plus générale : celle de la connexion de Galois (Ganter et Wille [3]). Nous présentons brièvement cette théorie algébrique avant de l'appliquer à la découverte de motifs. Grâce à ce nouveau formalisme, nous pouvons prendre du recul sur les résultats des chapitres 1 et 2 en définissant de manière différente certains des concepts qui y sont présentés. Cette nouvelle manière d'aborder le sujet permet d'aboutir aux résultats de Lascabettes [7] et offre un point de vue nouveau pour comprendre la découverte de motifs musicaux dans une représentation symbolique de la musique.

Le code source complet qui a servi à générer certains des exemples présentés dans ce mémoire est disponible sur le dépôt associé<sup>1</sup>.

---

1. <https://github.com/EnguerandTamagna/Stage-ATIAM>

# Chapitre 1

## De la découverte de motifs musicaux

### 1.1 Introduction

Ce chapitre résume l'état de la recherche actuelle à propos de la découverte de motifs dans une représentation symbolique de la musique. Nous montrons dans un premier temps comment des données musicales peuvent être représentées en plusieurs dimensions, avant de nous attarder sur une catégorie spécifique de motifs musicaux : les motifs translatables. Nous en donnons plusieurs caractérisations puis évoquons leur généralisation aux motifs transformables.

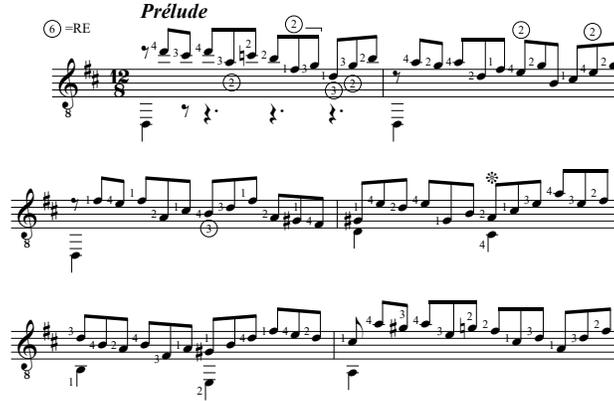
### 1.2 Représentation multidimensionnelle de la musique

Meredith et al. ont proposé des méthodes de découverte de motifs en utilisant une représentation multidimensionnelle de la musique [12]. Cette représentation considère qu'un morceau de musique peut être représenté comme un sous-ensemble fini  $X$  de  $E$ , avec usuellement  $E = \mathbb{R}^n$  (ou  $\mathbb{Z}^n$ ).  $E$  est l'espace dans lequel sont représentées les données musicales. Chaque point de  $X$  représente alors une note, et ses coordonnées en donnent les éléments caractéristiques. Par exemple, pour  $n = 4$ , on peut choisir la première coordonnée comme l'instant d'apparition d'une note, la deuxième comme sa hauteur (en MIDI), la troisième comme sa durée et la quatrième comme la voix à laquelle elle appartient. Cette formulation permet de traiter le morceau numériquement et de le représenter comme un ensemble de points. De nombreux algorithmes de détection de motifs ont été développés par Meredith, tous basés sur cette représentation [8, 10, 12]. Il existe aussi d'autres modèles de représentation, comme celle en chaînes de caractères (ou *string representation*). Dans cette dernière, la musique est représentée sous forme de chaînes de caractères à partir desquelles il est possible de trouver des répétitions de séquences identiques. Des algorithmes de reconnaissance [6, 15] permettent de trouver ces séquences à partir d'une similarité entre éléments. Cependant, convertir la musique en une représentation sous forme de chaîne n'est pas toujours pertinent. En effet, cette approche rend difficile la découverte de motifs dans la musique polyphonique (comme la musique écrite pour guitare ou piano).

Ainsi, nous nous restreindrons dans ce mémoire à une représentation multidimensionnelle de la musique, c'est-à-dire au cas où  $E = \mathbb{R}^n$ . L'intégralité de nos exemples sera donnée dans  $E = \mathbb{R}^2$ , soit une représentation des données musicales en 2 dimensions (*instant d'apparition*  $\times$  *hauteur MIDI*). La figure 1.1 donne un exemple d'une telle représentation pour un prélude de Bach. Cela permettra d'avoir une meilleure intuition des opérations effectuées et de faciliter leur compréhension.

Johann Sebastian BACH (1685-1750)  
**PRELUDE, FUGUE et ALLEGRO** BWV 998  
 EN RE MAJEUR

Adaptation pour guitare de Jean-François Delcamp



$$\left\{ \begin{array}{l} (0, 38), (1, 74), (2, 73), (3, 74), (4, 69), \\ (5, 72), (6, 71), (7, 66), (8, 67), (9, 62), \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ (68, 61), (69, 62), (70, 57), (71, 62), (72, 66) \end{array} \right\}$$

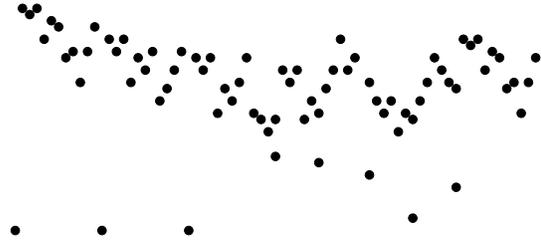


FIGURE 1.1 – Trois représentations d’un extrait du Prélude BWV 998 de Bach, arrangé pour guitare classique. En haut : partition usuelle. À gauche : représentation comme sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$  (*instant d’apparition*  $\times$  *hauteur MIDI*). À droite : nuage de points dans  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.3 Motifs translatables

### 1.3.1 Motifs translatables maximaux (*Maximal Translatable Patterns* (MTP))

Soit  $(E, +)$  un groupe abélien. Fixons des données musicales  $X \subset E$ . Meredith et al. se sont en premier lieu intéressés à la détection algorithmique de certains motifs répétitifs. Ils ont pour ce faire défini une classe particulière de motifs, les *Maximal Translatable Patterns* (i.e motifs translatables maximaux ou MTP) [12]. Ces derniers sont découverts à partir d’un vecteur comme l’ensemble des points de  $X$  dont le translaté par ce vecteur est inclus dans  $X$ . Cette idée est formalisée par la définition suivante.

**Définition 1.3.1 :** Soit  $v \in E$ . Le **MTP** pour  $v$  dans  $X$  est défini comme :

$$MTP(v, X) = \{x \in X \mid x + v \in X\}.$$

Meredith et al. ont par ailleurs montré le résultat suivant, pour  $v \in E$  :

**Proposition 1.3.1 :**  $MTP(v, X)$  est non-vidé si, et seulement si, il existe  $x, y \in X$  tels que

$$v = y - x.$$

**Exemple 1.3.1 :** La figure 1.2 introduit un vecteur  $v$  et le MTP associé. Le vecteur  $v$  est bien construit à partir de deux points  $x$  et  $y$ .

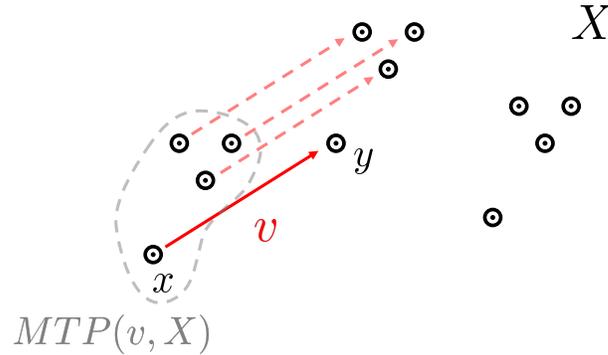


FIGURE 1.2 – Exemple d'un MTP pour  $v = y - x$  dans un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^2$ .

### 1.3.2 Classe d'équivalence par translation (*Translation Equivalence Class (TEC)*)

Ensuite, Collins et Meredith ont introduit la notion de *Translation Equivalence Class* (classe d'équivalence par translation ou TEC) [2], qui regroupe toutes les occurrences de  $P$  dans  $X$  à translation près, et permet donc de découvrir les motifs inclus dans  $X$  et égaux à  $P$  à translation près. Formellement, ceux-ci sont définis comme suit.

**Définition 1.3.2 :** Soit  $P \subset E$ . Le **TEC** de  $P$  dans  $X$  est défini comme :

$$TEC(P, X) = \{Q \subset X \mid \exists x \in E, P + x = Q\}$$

**Définition 1.3.3 :** Soit  $P \subset E$ . L'ensemble des **translateurs** de  $P$  dans  $X$  est

$$T(P, X) = \{t \in E \mid P_t \subset X\}.$$

Enfin, Meredith et al. introduisent l'ensemble suivant [9].

**Définition 1.3.4 :** Soit  $P \subset E$  et  $T = TEC(P, X)$ . L'ensemble **recouvrant**  $COV(T, X)$  de  $T$  dans  $X$  est

$$COV(T, X) = \bigcup_{P \in T} P.$$

### 1.3.3 Classe d'équivalence par translation maximale (*Maximal Translational Equivalence Class (MTEC)*)

À la suite de cela, Collins et Meredith ont défini les *Maximal Translational Equivalence Classes* (classes d'équivalence par translation maximale ou MTEC) [2], c'est-à-dire les motifs qui sont maximaux relativement à leur translabilité (on ne peut leur ajouter de points sans diminuer leurs occurrences dans  $X$ ).

**Définition 1.3.5 :** Soit  $P, X \subset E$ . Posons  $m = |\text{TEC}(P, X)|$ . On dira que  $P$  est **MTEC** si

$$\forall Q \subset E, P \subsetneq Q \implies |\text{TEC}(Q, X)| < m.$$

**Exemple 1.3.2 :** Sur la figure 1.3, le motif  $P$  est MTEC.

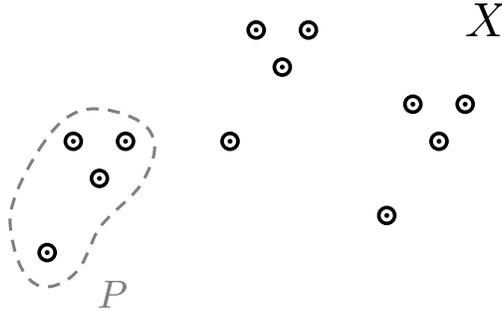


FIGURE 1.3 – Exemple d’un MTEC pour un sous-ensemble  $X$  de  $\mathbb{R}^2$ . Ici,  $P$  est MTEC.

Par ailleurs, Meredith relie cette nouvelle définition à celle des *MTP* à l’aide du résultat suivant.

**Proposition 1.3.2 :** Soit  $P \subset X$ .

$$P \text{ est MTEC} \iff P = \bigcap_{v \in T(P, X)} \text{MTP}(v, X).$$

Cela nous permet donc d’obtenir une famille de motifs relativement intéressants, puisqu’ils maximisent leur taille et leur nombre à translation près, étant donné un morceau de musique  $X$ . La question est maintenant de savoir comment les découvrir, et c’est ici qu’intervient la morphologie mathématique, présentée dans le chapitre suivant.

## 1.4 Motifs transformables

Meredith a ensuite élargi la notion de MTP. Ces derniers ont été définis à partir de translations et l’auteur les généralise à une transformation quelconque [11].

**Définition 1.4.1 :** Une **classe de transformations**  $F$  sur  $E = \mathbb{R}^n$  est une famille de bijections de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.4.2 :** Soit  $P \subset X$ .  $P$  sera dit **transformable** dans  $X$  par rapport à  $F$  s’il existe une transformation  $f \in F$  telle que  $f(P) \subset X$ .

**Définition 1.4.3 :** Soit  $P \subset X$ . L’ensemble des **transformations** de  $P$  dans  $X$  par rapport à  $F$  est

$$OS(P, D, F) = \{P\} \cup \{f(P) \mid f(P) \subset X \text{ et } f \in F\}.$$

Meredith généralise alors l’ensemble recouvrant vu en section 1.3.2.

**Définition 1.4.4 :** Soit  $P \subset X$  et  $S = OS(P, D, F)$ . L'ensemble recouvrant  $COV(S)$  de  $S$  dans  $X$  par rapport à  $F$  est

$$COV(S) = \bigcup_{P \in S} P.$$

**Définition 1.4.5 :** Soit  $f \in F$  une transformation. Le **Maximal Transformable Pattern** pour  $f$  dans  $X$  est

$$MTFP(X, f) = X \cap f^{-1}(X).$$

**Remarque :** Il s'agit de l'ensemble des points de  $X$  qui sont envoyés par  $f$  sur d'autres points de  $X$ .

**Proposition 1.4.1 :**

$$MTFP(X, f^{-1}) = f(MTFP(X, f)).$$

## 1.5 Conclusion

Nous avons vu dans ce chapitre les principaux objets qui permettent d'étudier des données musicales avec une approche multidimensionnelle. Les familles particulières formées par les motifs translatables et transformables posent un cadre formel pour l'étude et la découverte de motifs musicaux. Nous allons introduire la morphologie mathématique dans le chapitre 2 et l'utiliser pour exprimer mathématiquement les définitions et résultats précédents. Puis, au chapitre 3, nous introduisons de nouvelles opérations, dites *variationnelles*. Nous expliquons dans la section 3.2.4 les liens qu'ils forment avec les motifs transformables et dans la section 3.4, nous généralisons les notions du chapitre 1 au cas variationnel.

# Chapitre 2

## Morphologie mathématique

### 2.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit les définitions principales des algorithmes pour découvrir des motifs musicaux. Nous montrons dans ce chapitre que la morphologie mathématique (Serra [14]) est une théorie bien adaptée à ce contexte. Nous commençons par définir les opérations de base de la morphologie mathématique avant de présenter son application pour la découverte de motifs musicaux.

### 2.2 Dilatation et érosion binaires

#### 2.2.1 Premières définitions

Nous nous concentrons ici sur les deux opérations de base de la morphologie mathématique : la dilatation et l'érosion [1]. Nous nous restreignons en premier lieu à des définitions *binaires*, puisque ce sont elles qui nous serviront majoritairement. Dans toute la suite on considère  $(E, +)$  un groupe abélien, de neutre additif  $0_E$ .

**Définition 2.2.1 :** Soit  $P \subset E$  un sous-ensemble.

- Le **complémentaire** de  $P$  est

$$P^c = E \setminus P.$$

- Le **symétrique** de  $P$  est

$$\check{P} = \{-p \mid p \in P\}.$$

- Pour  $a \in E$ , le **translaté** par  $a$  de  $P$  est

$$P_a = \{p + a \mid p \in P\}.$$

**Définition 2.2.2 :** Soit  $P \subset E$ . La **dilatation**  $\delta_P$  par  $P$  est obtenue à partir de l'addition de Minkowski [5] comme

$$\begin{aligned} \delta_P : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto \delta_P(X) = X \oplus P \\ &= \{x + p \mid x \in X, p \in P\}. \end{aligned}$$

**Définition 2.2.3 :** Soit  $P \subset E$ . L'*érosion*  $\varepsilon_P$  par  $P$  est obtenue à partir de la soustraction de Minkowski [4] comme

$$\begin{aligned} \varepsilon_P : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto \varepsilon_P(X) = X \ominus P \\ &= \{x \in E \mid P_x \subset X\}. \end{aligned}$$

**Remarque :** On dira que  $X$  est l'ensemble des *données* et que  $P$  est l'*élément structurant*. Les résultats des opérations  $\delta_P(X)$  et  $\varepsilon_P(X)$  sont des données dites *transformées*.

**Exemple 2.2.1 :** La figure 2.1 illustre ces opérations sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . La dilatation augmente l'objet et déforme les coins convexes. L'érosion réduit l'objet et déforme les coins concaves.

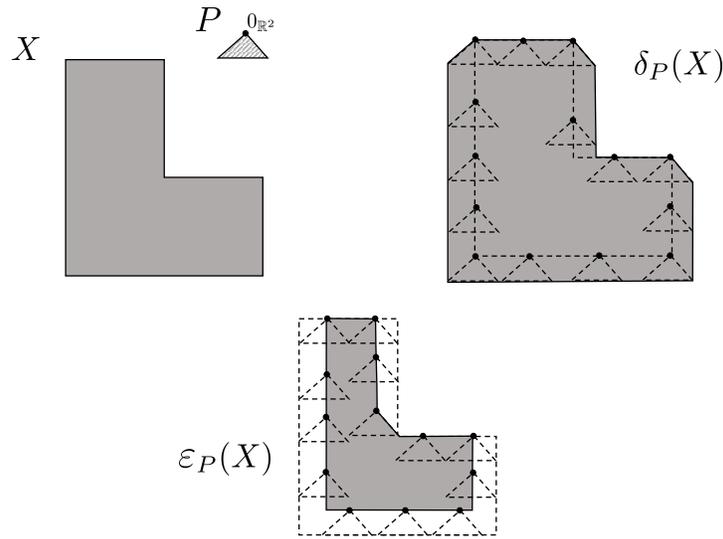


FIGURE 2.1 – Les données  $X$  sont représentées en haut à gauche. On choisit le triangle  $P$  comme élément structurant. À droite : dilatation par  $P$  de  $X$ . En bas : érosion par  $P$  de  $X$ .

**Remarque :** Ces opérations sont dites *binaires*, puisqu'elles agissent sur des sous-ensembles de  $E$  (le fait d'appartenir ou non à un sous-ensemble est binaire). Elles peuvent être associées à du traitement d'images en noir et blanc. Pour traiter des images en niveaux de gris, il faut les généraliser en des opérations *fonctionnelles* (voir par exemple Bloch et al. [1]).

## 2.2.2 Propriétés principales

On pose  $P, X \subset E$ . Décrivons les propriétés classiques vérifiées par ces opérations [1].

**Proposition 2.2.1 :** On a

$$\delta_P(X) = \bigcup_{p \in P} X_p \quad \text{et} \quad \varepsilon_P(X) = \bigcap_{p \in P} X_{-p}.$$

**Proposition 2.2.2 :** On a

$$\delta_P(X) = \{x \in E \mid (\check{P})_x \cap X \neq \emptyset\} \quad \text{et} \quad \varepsilon_P(X) = \{x \in E \mid \forall z \notin X, x \notin (\check{P})_z\}.$$

**Proposition 2.2.3 :** Les arguments de la dilatation jouent des rôles symétriques :

$$\delta_P(X) = \delta_X(P).$$

**Proposition 2.2.4 (Dualité) :** La dilatation et l'érosion sont duales par complémentarité :

$$(\delta_P(X))^c = \varepsilon_{\check{P}}(X^c) \quad \text{et} \quad (\varepsilon_P(X))^c = \delta_{\check{P}}(X^c).$$

**Proposition 2.2.5 (Extensivité) :** Supposons que  $0_E \in P$ . Alors

- La dilatation est extensive (i.e.  $X \subset \delta_P(X)$ ).
- L'érosion est anti-extensive (i.e.  $\varepsilon_P(X) \subset X$ ).

**Remarque :** Les réciproques ont vraies.

**Proposition 2.2.6 (Croissance) :**

- La dilatation est croissante au sens de l'inclusion (i.e.  $X \mapsto \delta_P(X)$  est une application croissante de  $\mathcal{P}(E)$ ).
- L'érosion est croissante au sens de l'inclusion (i.e.  $X \mapsto \varepsilon_P(X)$  est une application croissante de  $\mathcal{P}(E)$ ).
- La dilatation est croissante en l'élément structurant (i.e.  $P \mapsto \delta_P(X)$  est une application croissante de  $\mathcal{P}(E)$ ).
- L'érosion est décroissante en l'élément structurant (i.e.  $P \mapsto \varepsilon_P(X)$  est une application décroissante de  $\mathcal{P}(E)$ ).

**Proposition 2.2.7 :**

$$\delta_P(X \cup Y) = \delta_P(X) \cup \delta_P(Y) \quad \text{et} \quad \delta_P(X \cap Y) \subset \delta_P(X) \cap \delta_P(Y).$$

**Proposition 2.2.8 :**

$$\varepsilon_P(X \cap Y) = \varepsilon_P(X) \cap \varepsilon_P(Y) \quad \text{et} \quad \varepsilon_P(X \cup Y) \supset \varepsilon_P(X) \cup \varepsilon_P(Y).$$

### 2.2.3 Une approche algébrique

Plus généralement, nous pouvons définir les opérations de dilatation et érosion morphologiques de manière purement algébrique. Nous ne nous servirons de ces définitions que très ponctuellement dans la suite du mémoire, c'est pourquoi nous en donnons seulement une brève formalisation. Pour les besoins de cette présentation et l'utilité que nous en aurons, nous nous restreignons par ailleurs aux cas d'unions et d'intersections ensemblistes (voir [1] pour le cas général).

**Définition 2.2.4 :** Une application  $\delta : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  est une **dilatation algébrique** si elle commute avec l'union :

$$\forall (X_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I, \quad \delta\left(\bigcup_{i \in I} X_i\right) = \bigcup_{i \in I} \delta(X_i),$$

avec  $I$  une famille d'indices quelconque.

**Définition 2.2.5 :** Une application  $\varepsilon : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  est une **érosion algébrique** si elle commute avec l'intersection :

$$\forall (X_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I, \quad \varepsilon\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) = \bigcap_{i \in I} \varepsilon(X_i),$$

avec  $I$  une famille d'indices quelconque.

**Remarque :** Les dilatations et érosions binaires sont respectivement (et fort heureusement) des dilatations et érosions algébriques. On retrouve en particulier les propositions 2.2.7 et 2.2.8.

## 2.3 Ouverture et fermeture binaires

Nous nous penchons à présent sur deux autres opérations morphologiques fondamentales : l'ouverture et la fermeture, une fois de plus *binaires* [1].

### 2.3.1 Définitions

**Définition 2.3.1 :** Soit  $P \subset E$ . L'**ouverture**  $\gamma_P$  par  $P$  est obtenue comme la composition d'une érosion par une dilatation

$$\begin{aligned} \gamma_P : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto \delta_P \circ \varepsilon_P(X) = \{x + p \mid x \in \varepsilon_P(X) \text{ et } p \in P\}. \end{aligned}$$

**Définition 2.3.2 :** Soit  $P \subset E$ . La **fermeture**  $\varphi_P$  par  $P$  est obtenue comme la composition d'une dilatation par une érosion :

$$\begin{aligned} \varphi_P : \mathcal{P}(E) &\rightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\mapsto \varepsilon_P \circ \delta_P(X) = \{x \in E \mid P_x \subset \delta_P(X)\}. \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.1 :** La figure 2.2 illustre ces opérations sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^2$ . L'ouverture supprime les parties étroites de l'objet et déforme les coins convexes. La fermeture remplit les parties étroites de l'arrière-plan et déforme les coins concaves.

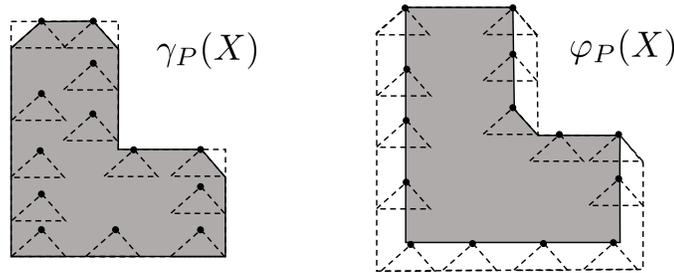


FIGURE 2.2 – Les données et l'élément structurant sont les mêmes qu'à la figure 2.1. À gauche : ouverture par  $P$  de  $X$ . À droite : fermeture par  $P$  de  $X$ .

**Remarque :** Comme pour la dilatation et l'érosion, ces opérations sont binaires et correspondent à du traitement d'images en noir et blanc. Elles peuvent également être généralisées en des opérations fonctionnelles pour traiter des images en niveaux de gris [1].

### 2.3.2 Propriétés principales

On pose  $P, X \subset E$ . Décrivons les propriétés classiques vérifiées par ces opérations [1].

**Proposition 2.3.1 (Dualité) :** *L'ouverture et la fermeture sont duales par complémentarité :*

$$\gamma_P(X) = (\varphi_{\bar{P}}(X^c))^c \quad \text{et} \quad \varphi_P(X) = (\gamma_{\bar{P}}(X^c))^c.$$

**Proposition 2.3.2 (Idempotence) :** *L'ouverture et la fermeture sont des application idempotentes, c'est-à-dire :*

$$\gamma_P \circ \gamma_P = \gamma_P \quad \text{et} \quad \varphi_P \circ \varphi_P = \varphi_P.$$

**Remarque :** Ce résultat est remarquable puisqu'il signifie que ouverture et fermeture, en tant que filtres morphologiques, extraient toute l'information possible après une seule itération.

**Proposition 2.3.3 (Extensivité) :**

- *L'ouverture est toujours anti-extensive (i.e.  $\gamma_P(X) \subset X$ ).*
- *La fermeture est toujours extensive (i.e.  $X \subset \varphi_P(X)$ ).*

**Proposition 2.3.4 (Croissance) :**

- *L'ouverture est croissante (i.e.  $X \mapsto \gamma_P(X)$  est une application croissante).*
- *La fermeture est croissante (i.e.  $X \mapsto \varphi_P(X)$  est une application croissante).*
- *L'ouverture est décroissante en l'élément structurant (i.e.  $P \mapsto \gamma_P(X)$  est une application décroissante).*
- *La fermeture est croissante en l'élément structurant (i.e.  $P \mapsto \varphi_P(X)$  est une application croissante).*

### 2.3.3 Ouverture et fermeture par une famille d'ensembles

**Définition 2.3.3 :** *Soit  $\mathfrak{P} \subset \mathcal{P}(E)$  une famille d'éléments structurants. L'ouverture  $\gamma_{\mathfrak{P}}$  par la famille  $\mathfrak{P}$  est définie comme l'union des ouvertures par les éléments de  $\mathfrak{P}$*

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathfrak{P}} : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto \bigcup_{P \in \mathfrak{P}} \gamma_P(X). \end{aligned}$$

**Définition 2.3.4 :** *Soit  $\mathfrak{P} \subset \mathcal{P}(E)$  une famille d'éléments structurants. La fermeture  $\varphi_{\mathfrak{P}}$  par la famille  $\mathfrak{P}$  est définie comme l'intersection des fermetures par les éléments de  $\mathfrak{P}$*

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathfrak{P}} : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(E) \\ X &\longmapsto \bigcap_{P \in \mathfrak{P}} \varphi_P(X). \end{aligned}$$

### 2.3.4 Encore une approche algébrique

Comme pour la dilatation et l'érosion, nous pouvons définir ces applications d'un point de vue algébrique plus général [1].

**Définition 2.3.5 :** Une *ouverture algébrique* de  $\mathcal{P}(E)$  est une application croissante, anti-extensive et idempotente.

**Définition 2.3.6 :** Une *fermeture algébrique* de  $\mathcal{P}(E)$  est une application croissante, extensive et idempotente.

**Remarque :** On peut vérifier que les ouvertures et fermetures binaires sont bien respectivement des ouvertures et fermetures algébriques, de même que la réunion d'ouvertures et l'intersection de fermetures.

## 2.4 Découverte de motifs à l'aide de la morphologie mathématique

### 2.4.1 Une première application à la représentation symbolique de la musique

Nous proposons à présent de décrire comment la théorie de la morphologie mathématique est utilisée pour la découverte de motifs musicaux. Dans un premier temps, nous relierons certains concepts musicaux aux définitions morphologiques vues précédemment.

Dans toute la suite, on se placera sur  $E = \mathbb{R}^n$ .

Soit  $X \in \mathcal{P}(E)$  un ensemble représentant des données musicales, telles que décrites dans la section 1.2.

**Définition 2.4.1 :** Un *motif* est un sous-ensemble fini  $P \in \mathcal{P}(E)$ .

**Remarque :** On peut avoir  $P \subset X$  ou bien  $P \not\subset X$ . Ce qui nous intéresse ici n'est pas de savoir si  $P$  est dans  $X$  mais de savoir s'il "apparaît" dans  $X$  (au sens défini ci-dessous). Nous sommes donc amenés à poser les définitions suivantes, à partir d'opérations morphologiques.

Posons  $P \in \mathcal{P}(E)$  un motif.

**Définition 2.4.2 :** L'*ensemble des apparitions* de  $P$  dans  $X$  est donné par  $\varepsilon_P(X)$ . On dira que  $P$  *apparaît* dans  $X$  si  $\varepsilon_P(X) \neq \emptyset$ .

Cette définition nous donne l'ensemble des points de départ de  $P$  dans  $X$ , ce qui correspond à l'idée que  $P$  "apparaît" à ces endroits. La figure 2.3a illustre cette définition.

**Définition 2.4.3 :** L'*ensemble des occurrences* de  $P$  dans  $X$  est donné par  $\gamma_P(X)$ .

**Remarque :** Si  $P$  n'apparaît pas dans  $X$  (i.e.  $\varepsilon_P(X) = \emptyset$ ), alors  $P$  n'a aucune occurrence dans  $X$  (i.e.  $\gamma_P(X) = \emptyset$ ).

Cette définition nous donne l'ensemble des motifs inclus dans  $X$  semblables à  $P$  à translation près. La figure 2.3b illustre cette définition.

### 2.4.2 Caractérisation des motifs translatables par la morphologie mathématique

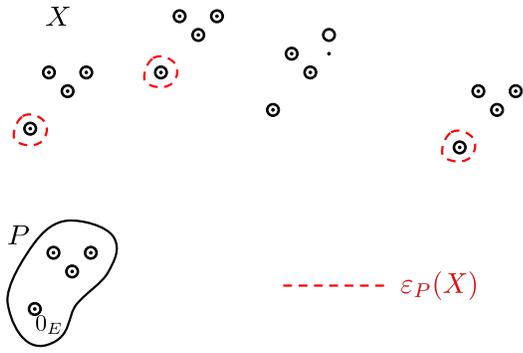
Les résultats présentés ici établissent un lien profond entre les définitions concernant les motifs translatables vues au chapitre 1 et la morphologie mathématique. Ils ont été établis par Lascabettes [7].

Dans toute la suite, on considère  $X \in \mathcal{P}(E)$  fini et  $P$  un motif.

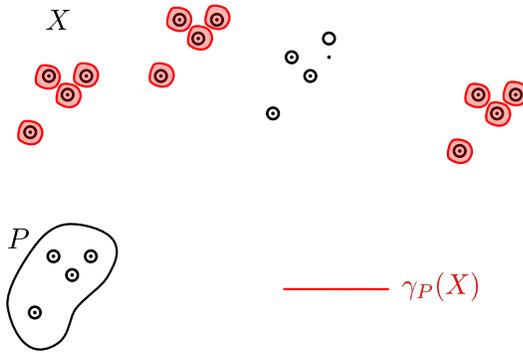
Dans un premier temps, Lascabettes traduit morphologiquement les définitions vues dans les sections 1.3.1 et 1.3.2.

**Proposition 2.4.1 :** Soit  $v \in E$ . On a

$$MTP(v, X) = \varepsilon_{\{0,v\}}(X)$$



(a) Érosion par un motif  $P$  de  $X$ .



(b) Ouverture par un motif  $P$  de  $X$ .

FIGURE 2.3 – Exemple d’application de deux opérations morphologiques à des données  $X$  de  $\mathbb{R}^2$  par un motif  $P$ .

**Proposition 2.4.2 :**

$$TEC(P, X) = \{\delta_t(P) \mid t \in \varepsilon_P(X)\}.$$

**Proposition 2.4.3 :**

$$T(P, X) = \varepsilon_P(X).$$

**Proposition 2.4.4 :** Posons  $T = TEC(P, X)$ . Alors

$$COV(T, X) = \gamma_P(X).$$

Ensuite, Lascabettes reformule la définition de MTEC 1.3.5 à l’aide de la morphologie mathématique, avant d’aboutir à une caractérisation fondamentale de ceux-ci.

**Proposition 2.4.5 :**  $P$  est MTEC si, et seulement si,

$$\forall P' \in \mathcal{P}(E), P \subsetneq P' \implies |\varepsilon_{P'}(X)| < |\varepsilon_P(X)|.$$

**Lemme 2.4.1 :**

$$P \subset \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X).$$

**Lemme 2.4.2 :**

$$\varepsilon_P(X) = \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)}(X)$$

Ces lemmes permettent d'aboutir à la caractérisation fondamentale suivante.

**Théorème 2.4.1 :**

$$P \text{ est MTEC} \iff P = \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X).$$

**Corollaire 2.4.1 :**

$$P \text{ est MTEC} \iff \exists S \in \mathcal{P}(E), P = \varepsilon_S(X).$$

### 2.4.3 Découverte des motifs par leurs apparitions

Dans cette sous-partie, nous noterons  $O = \varepsilon_P(X)$  l'ensemble des apparitions de  $P$  dans  $X$ . Lascabettes [7] propose alors de découvrir les motifs à partir de leurs apparitions, en tant qu'érosion de celles-ci. Ainsi, nous voulons savoir quand l'égalité  $P = \varepsilon_O(X)$  est vérifiée. Le théorème 2.4.1 montre que c'est exactement pour les motifs MTEC qu'elle l'est.

**Définition 2.4.4 :** La paire  $(P, O)$  est dite **MTEC-conjuguée** si :

$$O = \varepsilon_P(X) \quad \text{et} \quad P = \varepsilon_O(X).$$

**Proposition 2.4.6 :** Soit  $P$  un motif quelconque, d'apparitions  $O$ . Il existe un unique  $P' \in \mathcal{P}(E)$  contenant  $P$  tel que la paire  $(P', O)$  soit MTEC-conjuguée.

Sur la figure 2.3,  $O = \varepsilon_P(X)$  nous donne les apparitions de  $P$  dans  $X$ . Puisque  $P$  est MTEC, on peut retrouver ce motif en érodant ses apparitions :  $P = \varepsilon_O(X)$ . La paire  $(P, O)$  est MTEC-conjuguée.

### 2.4.4 Limites de la méthode

Comme nous l'avons vu jusqu'ici, les opérations morphologiques nous permettent de découvrir les occurrences et apparitions d'un motif dans un morceau de musique. Cependant, on voit sur la figure 2.3 qu'une "apparition" du motif n'est pas découverte par l'érosion binaire. Cela s'explique par le fait qu'il ne s'agit pas d'une "apparition" *exacte* du motif mais plutôt d'une *variation* de ce motif. Les limites de la morphologie binaire résident dans le fait qu'elle ne prend en considération que les translats exacts d'un motif, et non les translats des variations de celui-ci. Il nous faut donc introduire de nouveaux objets si l'on souhaite découvrir aussi les variations de motifs au sein d'un morceau de musique.

# Chapitre 3

## Découverte de motifs avec variations

### 3.1 Introduction

Lors des chapitres précédents, nous avons vu comment appliquer la morphologie binaire pour découvrir des motifs musicaux. En revanche, comme nous l'avons évoqué, cette théorie ne permet de considérer que les occurrences *exactes* d'un motif. Notre objectif étant d'étendre cela à des motifs avec variations, nous allons introduire de nouvelles opérations, dites *variationnelles*. Nous en étudierons les principales caractéristiques avant de nous attarder sur un cas particulier, celui de la classe à un demi-ton. Nous illustrerons cette théorie par des exemples tirés de données musicales réelles. Enfin, nous généraliserons les notions de motifs translatables au cas variationnel. Ce chapitre propose une approche originale pour découvrir des motifs et fait état de nos recherches sur la question.

### 3.2 Opérations variationnelles

#### 3.2.1 Classe de variations

Nous proposons ici une approche originale visant à définir une opération s'apparentant à l'érosion morphologique mais qui permet de découvrir tous les motifs partageant une certaine similarité.

Pour ce faire, nous définissons un type d'application dont le but est de donner, à partir d'un motif, la classe d'autres motifs qui lui sont similaires en un certain sens (défini par le choix de l'application).

Soit  $(E, +)$  un groupe abélien, de neutre additif  $0_E$ . Soit  $P \subset E$  un sous-ensemble.

**Définition 3.2.1 :** Une *application de classe variationnelle* est une application  $Cl : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  qui à un motif  $P$  associe une famille  $Cl(P) \subset \mathcal{P}(E)$ , telle que  $P \in Cl(P)$ . On dira que  $Cl(P)$  est une *classe de variations* pour  $P$ .

**Remarque :** Une classe de variations a pour but de regrouper les motifs qui sont des *variations* de  $P$ , en un certain sens.

**Exemple 3.2.1 :**  $Cl : P \longmapsto \{P\}$  est une application de classe variationnelle sur  $E$ .  $Cl(P) = \{P\}$  est la plus petite classe de variations pour  $P$ . Cela correspond à la classe *exacte*, c'est-à-dire qu'on ne tolère aucune variation du motif.

**Exemple 3.2.2 :** Dans  $\mathbb{R}^2$ , si  $P = \{(0, 0), (1, 1)\}$ , on peut choisir

$$Cl(P) = \{P, \{(0, 1), (1, 1)\}, \{(0, -1), (1, 1)\}, \{(0, 0), (1, 2)\}, \{(0, 0), (1, 0)\}\}.$$

La figure 3.1 illustre cette classe. Ce cas, qui sera développé plus loin, revêt une importance particulière car il correspond à une tolérance d'un demi-ton sur une des notes du motif.

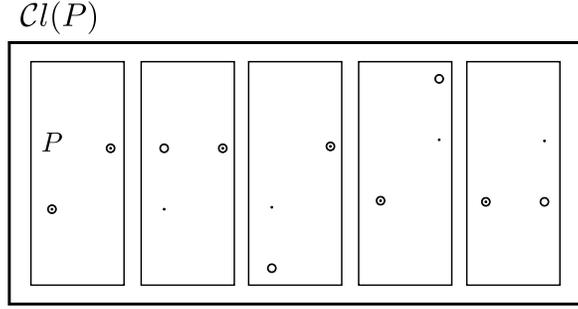


FIGURE 3.1 – Exemple de choix d'une classe de variations pour  $P = \{(0, 0), (1, 1)\}$ .

**Remarque :** Il existe autant de classes de variations pour un motif que de variations imaginables. Dans notre quête de découverte de motifs, tout l'enjeu est de définir une classe de variations adaptée à ce que l'on souhaite découvrir.

**Exemple 3.2.3 :** Notons  $F$  une famille d'applications  $f : E \rightarrow E$ . Si  $Id_E \in F$ , alors  $\mathcal{Cl}(P) = \{f(P) \mid f \in F\}$  est une classe de variations pour  $P$ . Par exemple, si  $E = \mathbb{R}^2$  et  $F = O(2, \mathbb{R})$ , alors la classe de variations associée regroupe tous les motifs égaux à  $P$  à rotation et symétrie près.

### 3.2.2 Érosion variationnelle

L'objectif est maintenant de définir une opération analogue à l'érosion binaire mais qui prend en compte les variations d'un motif au sein d'une classe.

Dans toute la suite, on considère  $X \in \mathcal{P}(E)$  un ensemble,  $P \in \mathcal{P}(E)$  un motif et  $\mathcal{Cl}$  une application de classe variationnelle.

**Définition 3.2.2 :** On définit l'érosion variationnelle par  $P$  de  $X$  selon  $\mathcal{Cl}$  comme :

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X) = \{x \in E \mid \exists Q \in \mathcal{Cl}(P), Q + x \subset X\}.$$

**Remarque :** On dira également qu'il s'agit de l'érosion variationnelle de  $X$  par  $\mathcal{Cl}(P)$ .

**Remarque :** La formule ressemble beaucoup à celle de l'érosion binaire, à ceci près que l'on prend les  $Q$  dans une classe de variations de  $P$ . Notons que l'érosion variationnelle par  $\{P\}$ , c'est-à-dire par la classe exacte, n'est autre que l'érosion par  $P$  :

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\{P\}}(X) &= \{x \in E \mid \exists Q \in \{P\}, Q + x \subset X\} \\ &= \{x \in E \mid P + x \subset X\} \\ &= \varepsilon_P(X). \end{aligned}$$

**Remarque :** L'érosion variationnelle permet de trouver l'ensemble des occurrences de tous les motifs similaires à  $P$ , relativement à une certaine classe de variations choisie.

**Proposition 3.2.1 :**

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Cl}(P)} \varepsilon_Q(X).$$

*Démonstration.*

En repartant de la définition 3.2.2, il suit :

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X) = \{x \in E \mid \exists Q \in \mathcal{Cl}(P), Q + x \subset X\} = \{x \in E \mid \exists Q \in \mathcal{Cl}(P), x \in \varepsilon_Q(X)\} = \bigcup_{Q \in \mathcal{Cl}(P)} \varepsilon_Q(X).$$

■

**Remarque :** L'érosion variationnelle n'est en général pas une érosion algébrique, au sens de la définition 2.2.5, c'est pourquoi nous la qualifierons plutôt de *pseudo-érosion*.

En effet, posons  $\mathcal{Cl}$  telle que  $\mathcal{Cl}(P) = \{P, P'\}$ , ainsi que représentée sur la figure 3.2. On a  $X_1 = \{a, b\}$  et  $X_2 = \{a, c\}$ . Alors  $X_1 \cap X_2 = \{a\}$ , donc  $\varepsilon_P(X_1 \cap X_2) = \varepsilon_{P'}(X_1 \cap X_2) = \emptyset$ , d'où  $\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X_1 \cap X_2) = \emptyset$ .

En revanche,  $\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X_1) = \varepsilon_P(X_1) \cup \varepsilon_{P'}(X_1) = \{a\}$  et  $\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X_2) = \varepsilon_P(X_2) \cup \varepsilon_{P'}(X_2) = \{a\}$ . Donc  $\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X_1) \cap \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X_2) = \{a\}$ .

Finalement,  $\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X_1 \cap X_2) \neq \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X_1) \cap \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X_2)$ . Il n'y a donc pas commutativité de cette application avec l'intersection.

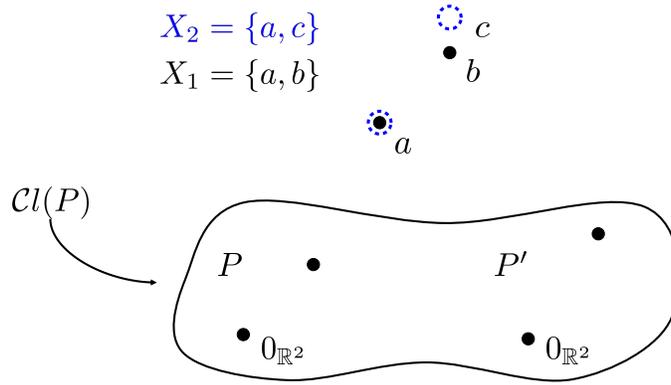


FIGURE 3.2 – Contre-exemple montrant que l'érosion variationnelle n'est pas une érosion algébrique (l'érosion variationnelle par  $\mathcal{Cl}(P)$  de  $X_1 \cap X_2$  n'est pas égale à l'érosion variationnelle par  $\mathcal{Cl}(P)$  de  $X_1$  intersectée avec l'érosion variationnelle par  $\mathcal{Cl}(P)$  de  $X_2$ ).

**Proposition 3.2.2 :**

$$\varepsilon_P(X) \subset \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X).$$

*Démonstration.*

Puisque  $P \in \mathcal{Cl}(P)$ , le résultat est immédiat. ■

**Remarque :** Ainsi, pour la découverte des occurrences d'un motif dans un morceau de musique, on ne perd pas d'information en utilisant l'érosion variationnelle plutôt que l'érosion binaire.

**Remarque :** On n'a en général pas anti-extensivité de  $\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}$ , i.e  $\varepsilon_{\mathcal{Cl}(P)}(X) \not\subset X$ , et ce même si  $0_E \in P$ . En effet, il est tout à fait possible d'avoir un  $Q \in \mathcal{Cl}(P)$  tel que  $0_E \notin Q$ .

Bien que l'érosion variationnelle ne soit pas une érosion algébrique, on peut toutefois montrer qu'elle vérifie certains résultats analogues.

**Proposition 3.2.3 :** Soit  $Y \in \mathcal{P}(E)$ .

L'érosion variationnelle vérifie les propriétés suivantes :

- $\tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}$  est une application croissante :  $X \subset Y \implies \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X) \subset \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(Y)$ .
- $\tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X \cap Y) \subset \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X) \cap \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(Y)$ .
- $\tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X) \cup \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(Y) \subset \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X \cup Y)$ .

*Démonstration.*

- Supposons que  $X \subset Y$ .

Par croissance de l'érosion,  $\forall Q \in Cl(P)$ ,  $\varepsilon_Q(X) \subset \varepsilon_Q(Y)$ . Donc  $\bigcup_{Q \in Cl(P)} \varepsilon_Q(X) \subset \bigcup_{Q \in Cl(P)} \varepsilon_Q(Y)$ , puis  $\tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X) \subset \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(Y)$ . Cela montre le premier point.

- On a :

$$\tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X \cap Y) \stackrel{\text{prop } 3.2.1}{=} \bigcup_{Q \in Cl(P)} \varepsilon_Q(X \cap Y) \stackrel{\text{prop } 2.2.2}{=} \bigcup_{Q \in Cl(P)} \varepsilon_Q(X) \cap \varepsilon_Q(Y).$$

Soit  $x \in \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X \cap Y)$ . Alors il existe  $Q \in Cl(P)$  tel que  $x \in \varepsilon_Q(X)$  et  $x \in \varepsilon_Q(Y)$ . En particulier, il existe  $Q_1 = Q$  tel que  $x \in \varepsilon_{Q_1}(X)$ , et il existe  $Q_2 = Q$  tel que  $x \in \varepsilon_{Q_2}(Y)$ . Donc  $x \in \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X) \cap \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(Y)$ . Cela montre le deuxième point.

- On a :

$$\tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X) \cup \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(Y) = \left( \bigcup_{Q \in Cl(P)} \varepsilon_Q(X) \right) \cup \left( \bigcup_{Q \in Cl(P)} \varepsilon_Q(Y) \right) = \bigcup_{Q \in Cl(P)} (\varepsilon_Q(X) \cup \varepsilon_Q(Y)).$$

Or, par la propriété 2.2.2, on sait que pour tout  $Q \in Cl(P)$ ,  $\varepsilon_Q(X) \cup \varepsilon_Q(Y) \subset \varepsilon_Q(X \cup Y)$ . Il suit que

$$\tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X) \cup \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(Y) \subset \bigcup_{Q \in Cl(P)} \varepsilon_Q(X \cup Y) = \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X \cup Y),$$

ce qui achève la démonstration. ■

### 3.2.3 Ouverture variationnelle

De même que nous l'avons fait pour l'érosion, nous allons généraliser la notion d'ouverture à une classe de variations. Nous conservons les notations précédentes.

**Définition 3.2.3 :** On définit l'**ouverture variationnelle** par  $P$  de  $X$  selon  $Cl$  comme :

$$\tilde{\gamma}_{Cl(P)}(X) = \{x + q \mid x \in \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X), q \in \bigcup_{\substack{Q \in Cl(P) \\ Q+x \subset X}} Q\}.$$

**Remarque :** Celle-ci est également définie par analogie avec l'ouverture binaire.

**Proposition 3.2.4 :**

$$\tilde{\gamma}_{Cl(P)}(X) = \bigcup_{Q \in Cl(P)} \gamma_Q(X).$$

**Remarque :** Cette définition de l'ouverture variationnelle coïncide avec la définition de l'ouverture par une famille d'ensembles de la définition 2.3.3, à savoir que

$$\tilde{\gamma}_{\mathcal{Cl}(P)}(X) = \gamma_{\mathcal{Cl}(P)}(X).$$

En particulier, l'ouverture variationnelle est bien une ouverture algébrique au sens de la définition 2.3.5 (elle est croissante, idempotente et anti-extensive) et vérifie donc toutes les propriétés qui en découlent.

*Démonstration.*

Soit  $y \in \gamma_{\mathcal{Cl}(P)}(X) = \bigcup_{Q \in \mathcal{Cl}(P)} \gamma_Q(X)$ . Alors il existe  $Q \in \mathcal{Cl}(P)$  tel que  $y = q + x$ , avec  $q \in Q$  et  $Q + x \subset X$ .

Puisque  $Q + x \subset X$ ,  $x \in \varepsilon_Q(X)$  et donc  $x \in \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X)$  car  $Q \in \mathcal{Cl}(P)$ . Par ailleurs,  $q \in Q$  donc

$$q \in \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Cl}(P) \\ Q+x \subset X}} Q.$$

Finalement,  $y \in \tilde{\gamma}_{\mathcal{Cl}(P)}(X)$ .

Réciproquement, supposons que  $y \in \tilde{\gamma}_{\mathcal{Cl}(P)}(X)$ . Alors  $y = q + x$ , avec  $x \in \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X)$  et  $q \in \bigcup_{\substack{Q \in \mathcal{Cl}(P) \\ Q+x \subset X}} Q$ . En particulier, il existe  $Q \in \mathcal{Cl}(P)$  tel que  $q \in Q$  et  $Q + x \subset X$ . Donc il existe  $Q \in \mathcal{Cl}(P)$  tel que  $y = q + x$ , avec  $q \in Q$  et  $Q + x \subset X$ , i.e  $x \in \varepsilon_Q(X)$ . D'où

$$y \in \bigcup_{Q \in \mathcal{Cl}(P)} \gamma_Q(X) = \gamma_{\mathcal{Cl}(P)}(X).$$

■

**Remarque :** Dans le cas de la classe exacte, on retrouve bien sûr  $\tilde{\gamma}_{\{P\}}(X) = \gamma_{\{P\}}(X) = \gamma_P(X)$ .

### 3.2.4 Lien avec les motifs transformables

Nous proposons ici d'établir un lien entre notre formalisme d'opérations variationnelles et les *motifs transformables* décrits par Meredith (*Transformable Patterns* [11]) et présentés en section 1.4.

Nous nous plaçons sur  $E = \mathbb{R}^n$ . Soit  $F$  une classe de transformations sur  $\mathbb{R}^n$ , i.e. un ensemble de bijections de  $\mathbb{R}^n$ . Soient par ailleurs  $X \in \mathcal{P}(E)$  une donnée musicale et  $P \subset X$  un motif.

Dans toute cette sous-partie, on considère la classe

$$\mathcal{Cl} : Q \mapsto \{f(Q) \mid f \in F \cup \{Id_{\mathbb{R}^n}\}\}.$$

**Rappel :**  $Id_{\mathbb{R}^n}$  représente l'application identité de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposition 3.2.5 :**

$$OS(P, X, F) = \mathcal{Cl}(P) \cap \mathcal{P}(X).$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} Q \in OS(P, X, F) &\stackrel{\text{def 1.4.3}}{\iff} Q \subset X \text{ et } \exists f \in F \cup \{Id_{\mathbb{R}^k}\}, Q = f(P) \\ &\iff Q \in \mathcal{P}(X) \text{ et } Q \in \mathcal{Cl}(P). \end{aligned}$$

■

**Corollaire 3.2.1 :**

$$COV(OS(P, X, F)) = \bigcup_{Q \in Cl(P) \cap \mathcal{P}(X)} Q = \bigcup_{\substack{Q \in Cl(P) \\ Q \subset X}} Q.$$

**Remarque :** Dans son article, Meredith a généralisé les résultats du chapitre 1, et notamment les *Maximal Translatable Patterns*. Il les change en *Maximal Transformable Patterns*, où la correspondance des motifs ne se fait plus à *translation* près mais à *transformation* près. La translation ne joue donc plus un rôle central mais est considérée comme une transformation quelconque. La différence fondamentale avec l’approche que nous proposons est que nous conservons la translation comme opération clé. Nous choisissons de continuer à considérer des motifs à translation près, mais nous regardons aussi les translations des *variations* de ces motifs. Cette méthode permet donc de découvrir des motifs à *translation* et *variation* près.

**Remarque :** Ce choix d’approche nous permet de continuer à nous appuyer sur les opérations morphologiques binaires, même si nous les généralisons. En effet, la morphologie binaire est étroitement liée à l’idée de translation, puisque l’érosion binaire est construite à partir d’additions : on somme un ensemble par un vecteur, c’est-à-dire on translate l’ensemble. Nous pourrions envisager de généraliser les notions de *Transformable Patterns* à l’aide de la morphologie mais, pour ce faire, il nous faudrait définir une nouvelle érosion algébrique non plus basée sur la translation mais sur la transformation en question (voir aussi [13]).

### 3.2.5 Applications musicales

Les opérations d’érosion et ouverture variationnelles agissent bien selon nos espérances, à savoir qu’elles trouvent dans un morceau  $X$  tous les motifs  $P$ , modulo certaines variations. La figure 3.3 en donne un exemple. On y découvre les apparitions (3.3b) et les occurrences (3.3c) de la ligne de basse de la *Lettre à Élise*. Cette ligne de basse est constituée d’un motif  $P$  et de sa variation  $P'$ . On voit ici qu’une simple érosion par  $P$  n’aurait pas permis de trouver toutes ses occurrences à *variation* près. La prise en compte de  $P'$  dans notre analyse est nécessaire pour découvrir la totalité des apparitions du motif.

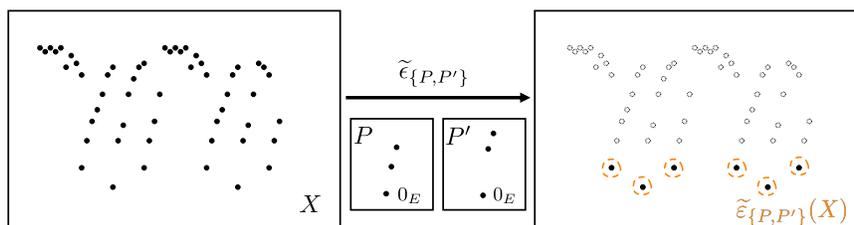
Cependant, la variation  $P'$  a ici été choisie a posteriori. Connaissant la partition, on en a déduit que ce motif était une variation de  $P$  et on l’a ajoutée à sa classe de variations. Autrement dit, pour découvrir  $P'$ , nous avons eu besoin de... la connaissance de  $P'$  ! Pour remédier à cela et découvrir des variations de motifs sans connaissance préalable, il nous faut définir une classe de variations a priori.

## "Lettre à Elise"

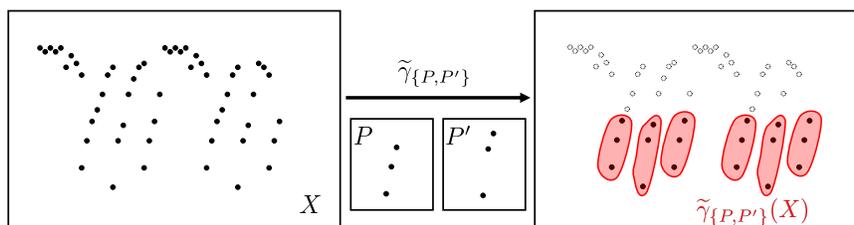
Bagatelle No. 25 en La mineur (WoO 59)



(a) Extrait de la Lettre à Élise de Beethoven. En rouge : ouverture variationnelle de l'extrait par la classe  $\{P, P'\}$  (cf. figure 3.3c).



(b) Érosion variationnelle de l'extrait par la classe  $\{P, P'\}$ . Les résultats sont obtenus à partir d'un algorithme codé en Python



(c) Ouverture variationnelle de l'extrait par la classe  $\{P, P'\}$ . Les résultats sont obtenus à partir d'un algorithme codé en Python

FIGURE 3.3 – Érosion et ouverture variationnelles d'un extrait de la Lettre à Élise WoO 59 de Beethoven.

### 3.3 Un cas particulier : la classe à un demi-ton

Dans cette section, nous examinons une classe de variations qui nous semble revêtir une importance particulière. Nous souhaitons ici découvrir, dans un morceau de musique, les motifs apparaissant avec de *petites* variations. Pour ce faire, nous allons considérer les plus *petites* variations imaginables, c'est-à-dire les cas où le motif apparaît avec au plus un point augmenté ou diminué d'un demi-ton.

#### 3.3.1 Classe à un demi-ton

Dans tout ce qui suit, on se place sur  $E = \mathbb{R}^n$  et on désigne par  $(e_1, \dots, e_n)$  sa base canonique. On suppose aussi que dans la représentation  $X \subset E$  d'un morceau de musique, la deuxième coordonnée traduit la hauteur des notes. Nous supposons par ailleurs que cette hauteur est représentée par la valeur MIDI de la note, à savoir que deux notes ont leur seconde coordonnée distantes de 1 si, et seulement si, elles diffèrent d'un demi-ton (par exemple sur la figure 3.4 :  $C4$  a une valeur MIDI de 60 et  $C\#4$  de 61).

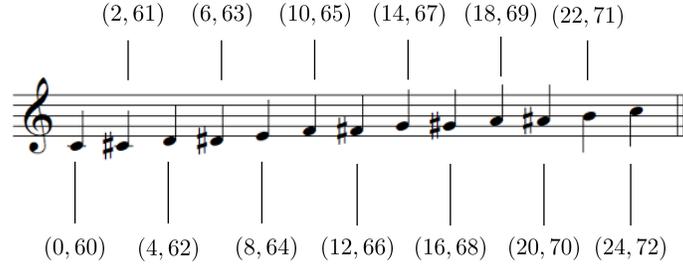


FIGURE 3.4 – Gamme chromatique de Do. Chaque note est accompagnée de sa représentation en 2 dimensions (*demi-temps d'apparition*  $\times$  *hauteur MIDI*).

Afin de construire cette classe, nous avons besoin des quelques définitions suivantes.

**Définition 3.3.1 :** Soit  $A \in \mathcal{P}(E)$ . On désignera par  $f_A^+$  et  $f_A^-$  les applications suivantes

$$f_A^+ = Id_E + \mathbf{1}_A \cdot e_2 \quad \text{et} \quad f_A^- = Id_E - \mathbf{1}_A \cdot e_2.$$

**Rappel :**  $\mathbf{1}_A$  désigne l'application indicatrice de  $A$ , à savoir

$$\forall x \in E, \quad \mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin A \\ 1 & \text{si } x \in A \end{cases}.$$

On a donc

$$\forall x \in E, \quad f_A^+(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin A \\ x + e_2 & \text{si } x \in A \end{cases} \quad \text{et} \quad f_A^-(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin A \\ x - e_2 & \text{si } x \in A \end{cases}.$$

Puisque la hauteur des notes est représentée par la deuxième coordonnée, sommer un point  $x$  avec le vecteur  $e_2$  revient à incrémenter de 1 la hauteur de  $x$ , donc à considérer la note un demi-ton supérieur. Idem avec  $x - e_2$ , où l'on considère le demi-ton inférieur. En d'autres termes,  $f_A^+(x)$  (resp.  $f_A^-(x)$ ) augmente (resp. diminue) d'un demi-ton la hauteur de  $x$  si  $x \in A$ .

**Remarque :** Lorsque  $A = \{a\}$  est un singleton, on notera simplement  $f_{\{a\}}^+ = f_a^+$  et  $f_{\{a\}}^- = f_a^-$  afin d'alléger les notations.

**Rappel :** Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ . L'ensemble image de  $P$  par  $f_A^+$  est l'ensemble

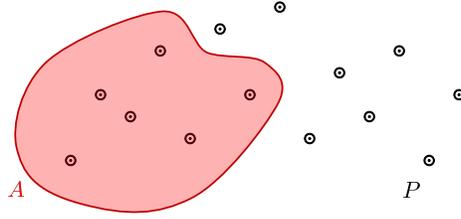
$$f_A^+(P) = \{f_A^+(x) \mid x \in P\} = \bigcup_{x \in P} \{f_A^+(x)\}.$$

De même

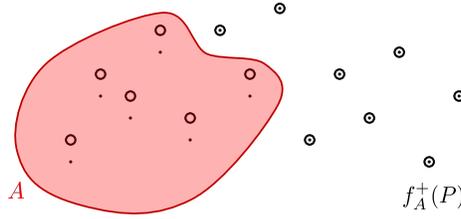
$$f_A^-(P) = \{f_A^-(x) \mid x \in P\} = \bigcup_{x \in P} \{f_A^-(x)\}.$$

Appliquer  $f_A^+$  (resp.  $f_A^-$ ) au motif  $P$  va donc augmenter (resp. diminuer) d'un demi-ton les points de  $P$  qui sont dans  $A$  et laisser les autres inchangés, comme illustré sur la figure 3.5.

Nous sommes à présent en mesure de définir l'application de classe à un demi-ton. Celle-ci est l'application de classe variationnelle qui, à un motif, associe l'ensemble de ses variations à *au plus un demi-ton près*. Formellement, cela donne la définition suivante.



(a) Un motif  $P$  (les 14 points) et un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ .



(b) Application de  $f_A^+$  à  $P$ .

FIGURE 3.5 – Exemple d'application de  $f_A^+$  à un motif  $P$ , pour un sous-ensemble  $A$  de  $\mathbb{R}^2$ .

**Définition 3.3.2 :** *L'application de classe à un demi-ton, notée  $Cl_{1/2}$ , est l'application de  $\mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$  qui à un  $P \in \mathcal{P}(E)$  associe*

$$Cl_{1/2}(P) = \{P\} \cup \{f_a^+(P), f_a^-(P) \mid a \in P\}.$$

*On dira que  $Cl_{1/2}(P)$  est la **classe à un demi-ton** de  $P$ .*

**Exemple 3.3.1 :** La figure 3.6 montre l'ensemble de la classe à un demi-ton d'un motif  $P$ .

L'application  $Cl_{1/2}$  nous fournit donc des classes de variations à priori, à partir desquelles nous pouvons éroder le morceau  $X$ . La figure 3.7 illustre ce procédé. Le calcul de  $\tilde{\varepsilon}_{Cl_{1/2}(P)}(X)$  permet donc, à partir du simple choix de  $P$ , de découvrir toutes les apparitions des variations de ce motif, à au plus un demi-ton près. De même,  $\tilde{\gamma}_{Cl_{1/2}(P)}(X)$  découvre les occurrences des variations du motif, à un demi-ton près. Il convient à présent d'illustrer ce procédé formel par des exemples tirés de données réelles.

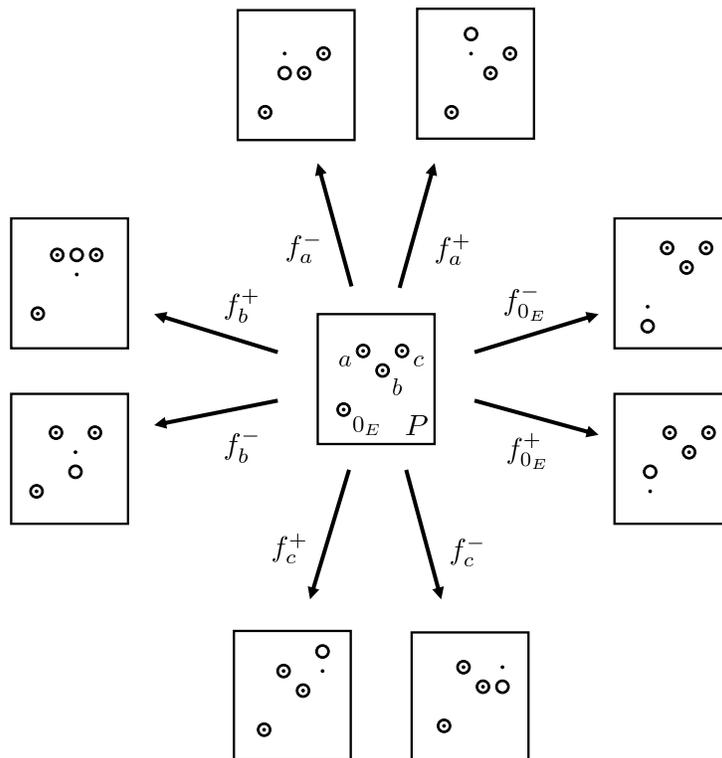
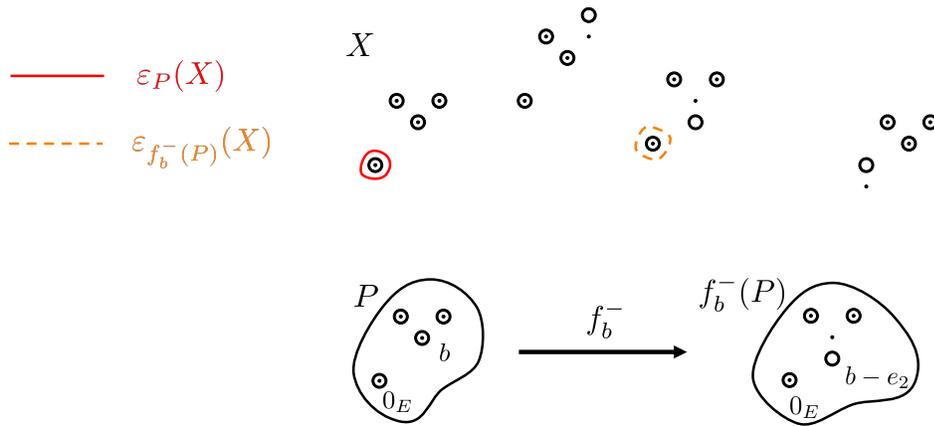
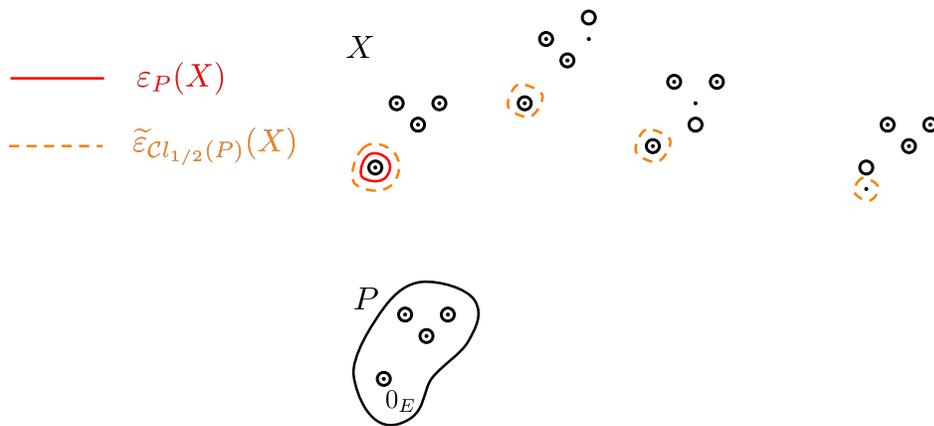


FIGURE 3.6 – Représentation de tous les éléments de la classe à un demi-ton d'un motif  $P$ .



(a) Érosion de  $X$  par  $P$  et  $f_b^-(P)$ .



(b) Érosion binaire et variationnelle de  $X$  par  $P$  et par sa classe à 1/2-ton.

FIGURE 3.7 – Procédé d'érosion variationnelle par la classe à un demi-ton d'un motif  $P$ .

### 3.3.2 Utilisation sur des données réelles

Dans cette sous-partie, nous proposons d'appliquer les résultats précédents sur des données musicales.

La figure 3.8 traite d'un extrait de la Symphonie No. 5 de Beethoven (arrangée pour piano par Liszt). Le thème d'ouverture de cette symphonie, très célèbre, illustre parfaitement l'idée de répétition d'un même motif au sein d'une œuvre. Dans la figure 3.8b, nous exposons deux cas : celui d'une ouverture binaire et celui d'une ouverture par une classe à un demi-ton. Le motif dont on cherche les occurrences est naturellement celui présent au début du morceau, noté  $P$ . On constate que l'érosion binaire ne permet de découvrir que ses répétitions *exactes*, comme attendu. Cependant, ici, la limite de cette méthode est flagrante puisque les mesures 3 et 4 sont clairement constituées du "même" motif que les mesures 1 et 2. On échoue donc à récupérer une bonne partie de l'information musicalement pertinente. À l'inverse, l'ouverture par  $\mathcal{C}l_{1/2}(P)$  identifie les motifs des mesures suivantes comme des variations du motif  $P$  et découvre les occurrences associées. Si on savait déjà trouver des motifs dans un morceaux de musique, nous sommes à présent en mesure de découvrir certaines de leurs variations caractéristiques. On note donc le réel gain dans la compréhension et la découverte des motifs musicaux apporté par les opérations variationnelles.

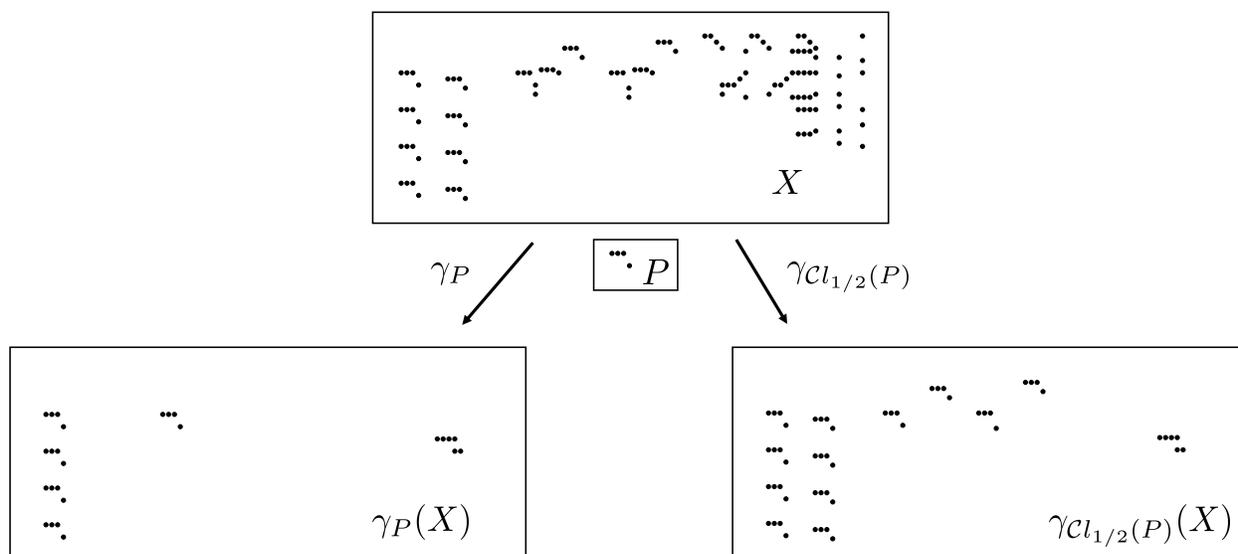
Sur la figure 3.9, nous proposons d'étudier deux ouvertures par des classes à un demi-ton de deux motifs différents  $P$  et  $Q$ . Ces opérations semblent efficaces pour décrire une grande partie de la partition, avec seulement deux motifs (les deux premiers motifs à 3 notes du morceau, si l'on omet la ligne de basse). Dans la figure 3.9c, nous avons retranscrit directement sur la partition les occurrences de ces motifs. Cette visualisation permet de mieux appréhender la disposition de chaque motif (et de ses variations) au sein de l'extrait, disposition qui, par ailleurs, semble être assez symétrique.

Les objets introduits dans ce chapitre généralisent donc la découverte de motifs par opérations morphologiques binaires, exacte par essence, à des cas avec variations. Par ailleurs, les différents exemples étudiés mettent en relief la robustesse des opérations variationnelles, et en particulier de la classe à un demi-ton, quant à la découverte au sein d'un morceau de musique des variations d'un motif. Une fois ces opérations introduites, nous sommes en mesure de nous questionner sur les relations qu'elles vérifient, et de leur profond lien avec la compréhension de la structure musicale. Il est alors souhaitable de parvenir à généraliser les résultats de Lascabettes [7] au cas variationnel.

Franz Liszt  
Symphony No. 5 in C Minor, Op. 67  
(by Beethoven)

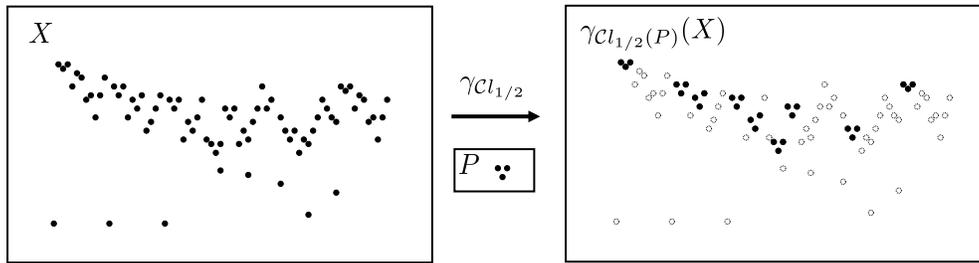


(a) Extrait de la Symphonie No. 5 de Beethoven.

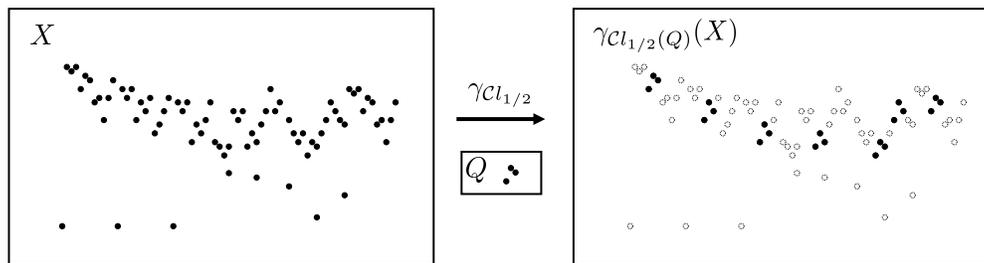


(b) Représentation bi-dimensionnelle de l'extrait (en haut). Ouverture binaire par  $P$  (à gauche). Ouverture par la classe à un demi-ton de  $P$  (à droite). Les résultats sont obtenus à partir d'un algorithme codé en Python.

FIGURE 3.8 – Comparaison entre l'ouverture binaire et l'ouverture par la classe à un demi-ton d'un extrait de la Symphonie No. 5 de Beethoven (arrangée pour piano).



(a) Ouverture du prélude de Bach par la classe à un demi-ton d'un motif  $P$ . Les résultats sont obtenus à partir d'un algorithme codé en Python.



(b) Ouverture du prélude de Bach par la classe à un demi-ton d'un motif  $Q$ . Les résultats sont obtenus à partir d'un algorithme codé en Python.

Johann Sebastian BACH (1685-1750)  
**PRELUDE, FUGUE et ALLEGRO** BWV 998  
 EN RE MAJEUR  
 Adaptation pour guitare de Jean-François Delcamp

—  $\gamma_{Cl_{1/2}}(P)(X)$   
 - - -  $\gamma_{Cl_{1/2}}(Q)(X)$

**Prélude**

The musical score for the Prelude of BWV 998 is shown in three staves. The first staff starts with a circled '6 = RE' and a treble clef. The music is in G major (one sharp). The score includes various guitar techniques such as triplets and fingerings (e.g., 4, 3, 4, 2, 1, 2, 3, 2, 4, 2, 3, 2, 4, 2). Red and blue shaded regions highlight specific motifs. Red circles and dashed lines indicate motifs related to  $\gamma_{Cl_{1/2}}(P)(X)$ , while blue circles and dashed lines indicate motifs related to  $\gamma_{Cl_{1/2}}(Q)(X)$ . A circled '2' appears above several notes, and a circled '3' appears below others. A circled '4' is also present in the second staff.

(c) Retranscription sur partition des ouvertures précédentes.

FIGURE 3.9 – Ouvertures d'un extrait du prélude BWV 998 de Bach (arrangé pour guitare classique) par la classe à un demi-ton de deux motifs.

## 3.4 Motifs translatables : une généralisation au cas variationnel

### 3.4.1 Classe d'équivalence variationnelle (*Variational Equivalence Class (VEC)*)

Dans cette sous-partie, nous entendons généraliser la notion de MTEC définie par Collins et Meredith [2] vue en section 1.3.3 et étudiée morphologiquement par Lascabettes [7]. Cette généralisation se base sur les classes de variations que nous avons décrites précédemment. Elle pose, à partir d'une classe, des définitions analogues au cas sans variations (cf. chapitres 1 et 2). Ces nouveaux concepts engendrent des propriétés et questionnements que nous tâcherons d'aborder dans le cas particulier de la classe à un demi-ton.

Soit  $(E, +)$  un groupe abélien. Fixons une donnée musicale  $X \in \mathcal{P}(E)$  et une application de classe  $\mathcal{Cl}$ . On suppose de plus que  $X$  est *fini*.

Premièrement, nous généralisons les définitions de la section 1.3.2.

**Définition 3.4.1 :** Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ . Le **VEC** (pour *Variational Equivalence Class*, ou *classe d'équivalence variationnelle*) de  $P$  dans  $X$  selon  $\mathcal{Cl}$  est défini comme :

$$VEC(P, X, \mathcal{Cl}) = \{R \subset X \mid \exists Q \in \mathcal{Cl}(P), \exists t \in E, Q_t = R\}.$$

**Définition 3.4.2 :** Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ . L'ensemble des *translateurs variationnels* de  $P$  dans  $X$  selon  $\mathcal{Cl}$  est

$$V(P, X, \mathcal{Cl}) = \{t \in E \mid \exists Q \in \mathcal{Cl}(P), Q_t \subset X\}.$$

**Définition 3.4.3 :** Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$  et  $VEC = VEC(P, X, \mathcal{Cl})$ . L'ensemble *recouvrant variationnel* de  $P$  dans  $X$  selon  $\mathcal{Cl}$  est

$$COV(VEC, X) = \bigcup_{R \in VEC} R.$$

De même qu'à la section 2.4.2, nous pouvons réinterpréter ces résultats morphologiquement, à l'aide des opérations variationnelles décrites plus haut. Posons  $P \in \mathcal{P}(E)$ . Nous obtenons les résultats suivants.

**Proposition 3.4.1 :**

$$VEC(P, X, \mathcal{Cl}) = \{\delta_t(Q) \mid Q \in \mathcal{Cl}(P) \text{ et } t \in \varepsilon_Q(X)\}.$$

*Démonstration.*

Soit  $R \in VEC(P, X, \mathcal{Cl})$ . Alors il existe  $Q \in \mathcal{Cl}(P)$  et  $t \in E$  tels que  $R = Q_t$ . Donc  $R = \delta_t(Q)$ . Comme  $Q_t = R \subset X$ ,  $t \in \varepsilon_Q(X)$ . Donc  $R \in \{\delta_t(Q) \mid Q \in \mathcal{Cl}(P) \text{ et } t \in \varepsilon_Q(X)\}$  et

$$VEC(P, X, \mathcal{Cl}) \subset \{\delta_t(Q) \mid Q \in \mathcal{Cl}(P) \text{ et } t \in \varepsilon_Q(X)\}.$$

Réciproquement, supposons que  $R \in \{\delta_t(Q) \mid Q \in \mathcal{Cl}(P) \text{ et } t \in \varepsilon_Q(X)\}$ . Alors  $R = \delta_t(Q) = Q_t$ , avec  $Q \in \mathcal{Cl}(P)$  et  $t \in \varepsilon_Q(X)$ . Donc  $R \subset X$  puis  $R \in VEC(P, X, \mathcal{Cl})$ .

Finalement,

$$VEC(P, X, \mathcal{Cl}) = \{\delta_t(Q) \mid Q \in \mathcal{Cl}(P) \text{ et } t \in \varepsilon_Q(X)\}.$$

■

**Proposition 3.4.2 :**

$$V(P, X, \mathcal{Cl}) = \widetilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X).$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
t \in V(P, X, Cl) &\iff \exists Q \in Cl(P), Q_t \subset X \\
&\iff \exists Q \in Cl(P), t \in \varepsilon_Q(X) \\
&\iff t \in \tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X).
\end{aligned}$$

■

**Proposition 3.4.3 :** *Si on pose  $VEC = VEC(P, X, Cl)$ , alors*

$$COV(VEC, X) = \tilde{\gamma}_{Cl(P)}(X).$$

*Démonstration.*

$$COV(VEC, X) = \bigcup_{Q \in VEC} Q = \bigcup_{\substack{Q \in Cl(P) \\ t \in \tilde{\varepsilon}_Q(X)}} \delta_t(Q) = \bigcup_{Q \in Cl(P)} \bigcup_{t \in \varepsilon_Q(X)} \delta_Q(t) \stackrel{2.2.4}{=} \bigcup_{Q \in Cl(P)} \delta_Q(\varepsilon_Q(X)) = \tilde{\gamma}_{Cl(P)}(X).$$

■

### 3.4.2 Classe d'équivalence variationnelle maximale (*Maximal Variational Equivalence Class* (MVEC))

Pour généraliser la notion de MTEC au cas avec variations, il nous faut être plus prudent. Nous allons en effet la généraliser à partir de la caractérisation morphologique donnée par Lascabettes (cf. proposition 2.4.5) et non à partir de la définition originelle de Collins et Meredith [2]. Avec les notations précédentes :

**Définition 3.4.4 :** *Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ . On dira que  $P$  est **MVEC** (pour *Maximal Variational Equivalence Class*, ou *classe d'équivalence variationnelle maximale*) pour  $X$  selon  $Cl$  si*

$$\forall P' \in \mathcal{P}(E), P \subsetneq P' \implies |\tilde{\varepsilon}_{Cl(P')}(X)| < |\tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X)|.$$

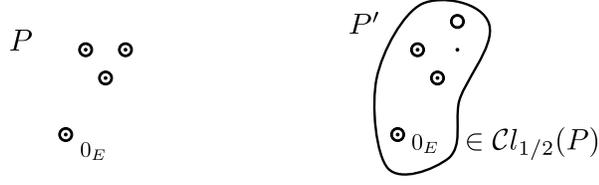
**Remarque :** Nous choisissons de définir les MVEC ainsi et non à partir des VEC. Ces deux définitions ne sont cependant pas équivalentes car  $|VEC(P, X, Cl)| \neq |\tilde{\varepsilon}_{Cl(P)}(X)|$  en général (voir figure 3.10). Dans le cas sans variations, les deux définitions coïncident (cf. proposition 2.4.5) justement parce que  $|TEC(P, X)| = |\varepsilon_P(X)|$ . La perte de cette équivalence est donc un prix à payer si nous souhaitons généraliser la notion de MTEC.

**Exemple 3.4.1 :** La figure 3.11 illustre la définition de MVEC dans le cas de la classe à un demi-ton.

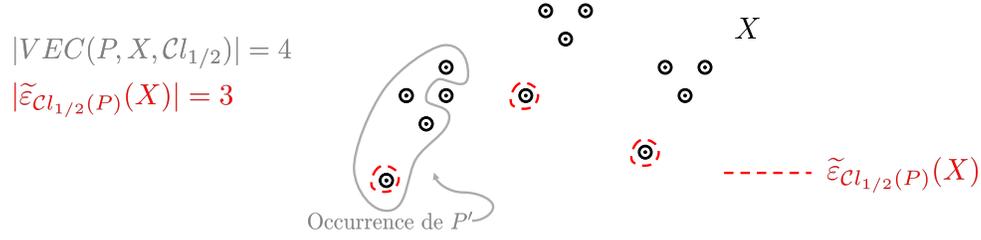
### 3.4.3 Cas de la classe à un demi-ton

Nous nous intéressons ici aux propriétés vérifiées par les MVEC dans le cas particulier de la classe à un demi-ton définie en section 3.3.

Dans tout ce qui suit, on se place sur  $E = \mathbb{R}^n$  et on désigne par  $(e_1, \dots, e_n)$  sa base canonique. Fixons  $X \in \mathcal{P}(E)$  des données musicales et  $P \in \mathcal{P}(E)$  un motif. On suppose que dans la représentation  $X \subset E$ , la deuxième coordonnée traduit la hauteur MIDI des notes.



(a) Un motif  $P$  et sa variation  $P' \in \mathcal{Cl}_{1/2}(P)$ .



(b) On compte dans  $X$  trois occurrences de  $P$  et une de  $P'$ , donc  $|VEC(P, X, \mathcal{Cl})| = 4$ . Comme la première occurrence de  $P$  partage le même point d'apparition que  $P'$ , il suit que  $|\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X)| = 3$ .

FIGURE 3.10 – Illustration du fait que  $|VEC(P, X, \mathcal{Cl})| \neq |\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}(P)}(X)|$  dans le cas de la classe à un demi-ton.

**Rappel :**  $\mathcal{Cl}_{1/2}(P)$  désigne la classe à un demi-ton de  $P$  et pour  $A \in \mathcal{P}(E)$ ,  $f_A^+$  et  $f_A^-$  sont les applications suivantes

$$f_A^+ = Id_E + \mathbf{1}_A \cdot e_2 \quad \text{et} \quad f_A^- = Id_E - \mathbf{1}_A \cdot e_2.$$

Dans tout ce qui suit, on note  $V = V(P, X, \mathcal{Cl}_{1/2}) = \tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}_{1/2}(P)}(X)$  l'ensemble des translateurs variationnels de  $P$  dans  $X$  selon  $\mathcal{Cl}_{1/2}$ .

**Remarque :** On note que

$$V = \bigcup_{Q \in \mathcal{Cl}_{1/2}(P)} \varepsilon_Q(X) = \varepsilon_P(X) \cup \bigcup_{a \in P} (\varepsilon_{f_a^+(P)}(X) \cup \varepsilon_{f_a^-(P)}(X)).$$

**Définition 3.4.5 :** On pose  $\Phi_{P,X}$  l'application suivante

$$\begin{aligned} \Phi_{P,X} : \mathcal{P}(E) &\longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(E)) \\ O &\longmapsto \{f_{\varepsilon_{f_a^-(P)}(X)}^- \circ f_{\varepsilon_{f_a^+(P)}(X)}^+(O) \mid a \in P\}. \end{aligned}$$

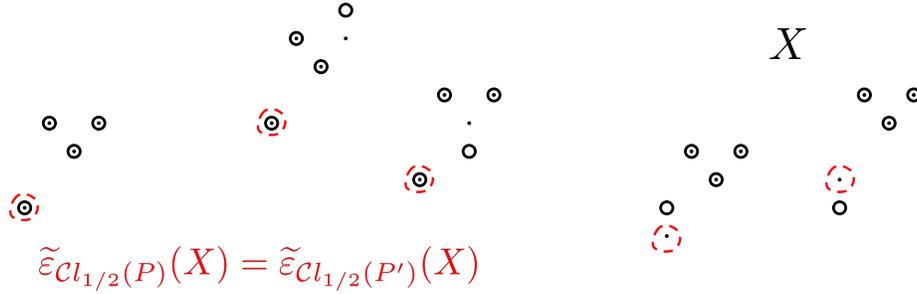
Cette application va nous permettre d'exposer le résultat suivant qui est l'analogie du lemme 2.4.1 pour le cas variationnel.

**Théorème 3.4.1 :**

$$P \subset \tilde{\varepsilon}_{\Phi_{P,X}(V)}(X) = \tilde{\varepsilon}_{\Phi_{P,X}(\tilde{\varepsilon}_{\mathcal{Cl}_{1/2}(P)}(X))}(X).$$



(a) Deux motifs  $P$  et  $P'$  avec  $P \subset P'$ .



(b)  $P$  n'est pas MVEC pour  $X$  selon  $Cl_{1/2}$  puisqu'il est contenu dans  $P'$  et que  $|\tilde{\varepsilon}_{Cl_{1/2}(P)}(X)| = |\tilde{\varepsilon}_{Cl_{1/2}(P')}(X)|$ . En revanche,  $P'$  est MVEC pour  $X$  selon  $Cl_{1/2}$ .

FIGURE 3.11 – Illustration de la notion de MVEC pour la classe à un demi-ton. On introduit deux motifs dont l'un seulement est MVEC.

**Exemple 3.4.2 :** Nous illustrons le procédé de construction de  $\tilde{\varepsilon}_{\Phi_{P,X}(V)}(X) = \tilde{\varepsilon}_{\Phi_{P,X}(\tilde{\varepsilon}_{Cl_{1/2}(P)}(X))}(X)$  dans la figure 3.12.

**Rappel :** Pour  $A \in \mathcal{P}(E)$ , on a

$$\forall x \in E, \quad f_A^+(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin A \\ x + e_2 & \text{si } x \in A \end{cases} \quad \text{et} \quad f_A^-(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin A \\ x - e_2 & \text{si } x \in A \end{cases} .$$

*Démonstration.*

Soit  $a \in P$ . Montrons que  $a \in \tilde{\varepsilon}_{\Phi_{P,X}(V)}(X)$ . Puisque  $\tilde{\varepsilon}_{\Phi_{P,X}(V)}(X) = \bigcup_{Q \in \Phi_{P,X}(V)} \varepsilon_Q(X)$ , il suffit de trouver un  $Q \in \Phi_{P,X}(V)$  bien choisi tel que  $a \in \varepsilon_Q(X)$ . Posons  $Q = f_{\varepsilon_{f_a^-(P)}(X)}^- \circ f_{\varepsilon_{f_a^+(P)}(X)}^+(V)$ . Alors  $Q \in \Phi_{P,X}(V)$  par définition. Montrons donc que  $a \in \varepsilon_Q(X)$  (il suffit de montrer que  $\forall x \in Q, a + x \in X$ ).

Afin d'alléger les notations, nous posons

$$A = \varepsilon_{f_a^+(P)}(X) \quad \text{et} \quad B = \varepsilon_{f_a^-(P)}(X).$$

Soit  $x \in Q = f_B^- \circ f_A^+(V)$ . Montrons que  $a + x \in X$ , ce qui achèvera la démonstration.

Comme  $x \in f_B^- \circ f_A^+(V)$ , il existe un  $v \in V$  tel que  $x = f_B^- \circ f_A^+(v)$ .

Nous procédons à une disjonction de cas sur  $v$  : soit  $v \notin A$ , soit  $v \in A$ .

**Cas 1 : supposons que  $v \notin A$**

Alors, par le rappel précédent,  $f_A^+(v) = v$ . Il y a deux possibilités : soit  $v \notin B$ , soit  $v \in B$ .

**Cas 1.1 : supposons que  $v \notin B$**

Alors  $f_B^- \circ f_A^+(v) = v$  (cf. rappel précédent), donc  $x = f_B^- \circ f_A^+(v) = v$ . Donc  $x \in V$  et  $x \notin A \cup B$ .

D'où

$$\begin{aligned} x \in V \setminus (A \cup B) &= \left( \varepsilon_P(X) \cup \bigcup_{b \in P} (\varepsilon_{f_b^+(P)}(X) \cup \varepsilon_{f_b^-(P)}(X)) \right) \setminus (A \cup B) \\ &\subset (\varepsilon_P(X) \setminus (A \cup B)) \cup \left( \left( \bigcup_{b \in P} \varepsilon_{f_b^+(P)}(X) \cup \varepsilon_{f_b^-(P)}(X) \right) \setminus (A \cup B) \right) \\ &\subset \varepsilon_P(X) \cup \left( \bigcup_{b \in P \setminus \{a\}} \varepsilon_{f_b^+(P)}(X) \cup \varepsilon_{f_b^-(P)}(X) \right), \end{aligned}$$

car  $A = \varepsilon_{f_a^+(P)}(X)$  et  $B = \varepsilon_{f_a^-(P)}(X)$ .

Si  $x \in \varepsilon_P(X)$ , puisque  $a \in P$ , alors  $a + x \in X$  (par définition de l'érosion binaire). Sinon, il existe un  $b \in P \setminus \{a\}$  tel que  $x \in \varepsilon_{f_b^+(P)}(X)$  ou  $x \in \varepsilon_{f_b^-(P)}(X)$ . Supposons que  $x \in \varepsilon_{f_b^+(P)}(X)$ . Puisque  $a \in P$  et  $b \neq a$ ,  $a \in f_b^+(P)$ . Donc  $a + x \in X$  (par définition de l'érosion binaire). Si  $x \in \varepsilon_{f_b^-(P)}(X)$ , on raisonne de manière analogue et  $a + x \in X$ .

**Cas 1.2 : supposons que  $v \in B$**

Alors  $f_B^- \circ f_A^+(v) = f_B^-(v) = v - e_2$  (cf. rappel précédent).

Donc  $x = v - e_2$ . Il suit que  $a + x = a + v - e_2 = v + (a - e_2)$ . Puisque  $a \in P$ ,  $a - e_2 \in f_a^-(P)$ . Or  $v \in B = \varepsilon_{f_a^-(P)}(X)$  par hypothèse, donc  $v + (a - e_2) \in X$  par définition de l'érosion binaire. Donc  $a + x \in X$ .

**Cas 2 : supposons que  $v \in A$**

Alors, par le rappel précédent,  $f_A^+(v) = v + e_2$ . Il y a deux possibilités : soit  $v + e_2 \notin B$ , soit  $v + e_2 \in B$ .

**Cas 2.1 : supposons que  $v + e_2 \notin B$**

Alors  $f_B^- \circ f_A^+(v) = f_B^-(v + e_2) = v + e_2$  (cf. rappel précédent).

Donc  $x = v + e_2$  et  $a + x = a + v + e_2 = v + (a + e_2)$ . Puisque  $a \in P$ ,  $a + e_2 \in f_a^+(P)$ . Comme  $v \in A = \varepsilon_{f_a^+(P)}(X)$  par hypothèse, il suit que  $v + (a + e_2) \in X$  par définition de l'érosion binaire. Donc  $a + x \in X$ .

**Cas 2.2 : supposons que  $v + e_2 \in B$**

Alors  $f_B^- \circ f_A^+(v) = f_B^-(v + e_2) = v + e_2 - e_2 = v$  (cf. rappel précédent).

Donc  $x = v$ . Donc  $a + x = a + v = v + e_2 + (a - e_2)$ . Comme  $a \in P$ ,  $a - e_2 \in f_a^-(P)$ . Puisque  $v + e_2 \in B = \varepsilon_{f_a^-(P)}(X)$  par hypothèse, il suit que  $v + e_2 + (a - e_2) \in X$  par définition de l'érosion binaire. Donc  $a + x \in X$ .

Dans tous les cas, on a bien que  $a + x \in X$ , ce qu'il fallait démontrer. ■

### 3.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons vu comment des variations peuvent être prises en compte pour la découverte de motifs musicaux. Cela est passé par la définition de nouvelles opérations, dites *variationnelles*. Par ailleurs, nous avons défini une classe de variations particulière : la classe à un demi-ton. Celle-ci permet de décrire les variations d'un motif à au plus une note à un demi-ton près. Grâce à cette classe, nous avons vu qu'il est possible de découvrir les occurrences de motifs à variations près dans la musique. Bien que nous ayons illustré ce fait par des exemples tirés de données réelles, nous envisageons à présent de tester les résultats de ce chapitre sur de plus vastes bases de données.

Ensuite, nous avons généralisé les motifs *translatables* du chapitre 1 en motifs *translatables avec variations*. De même que cela a été fait au chapitre 2, nous avons reformulé les définitions introduites à l'aide de la morphologie "variationnelle". Nous avons également établi le théorème 3.4.1, qui est une analogie du lemme 2.4.1 dans le cas où la classe de variation utilisée est la classe à un demi-ton. De nombreuses questions restent cependant en suspens. Si l'analogie avec le lemme 2.4.1 est concluante, il n'en est pas de même pour le lemme 2.4.2. Ce n'est pas non plus le cas pour le théorème 2.4.1, qui stipule pour un motif  $P$  que

$$P \text{ est MTEC} \iff P = \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X).$$

Notre ambition était de généraliser ce théorème et de donner une équivalence entre le fait d'être MVEC et de vérifier une certaine égalité de morphologie variationnelle. Malheureusement, le résultat pour les MTEC ne s'étend pas "tel quel", à savoir que

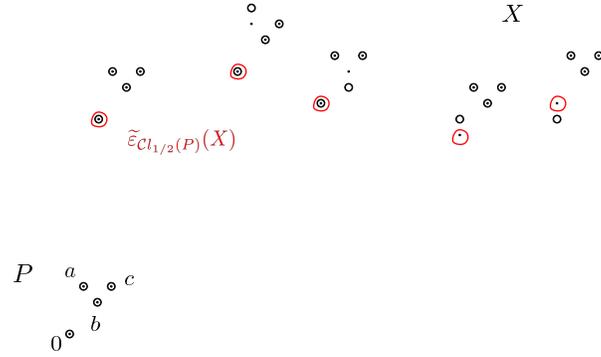
$$P \text{ est MVEC} \not\iff P = \tilde{\varepsilon}_{\Phi_{P,X}(\tilde{\varepsilon}_{c_{1/2}(P)}(X))}(X).$$

En effet, si on regarde par exemple la figure 3.11, on constate que le motif  $P$  n'est pas MVEC mais on peut vérifier que

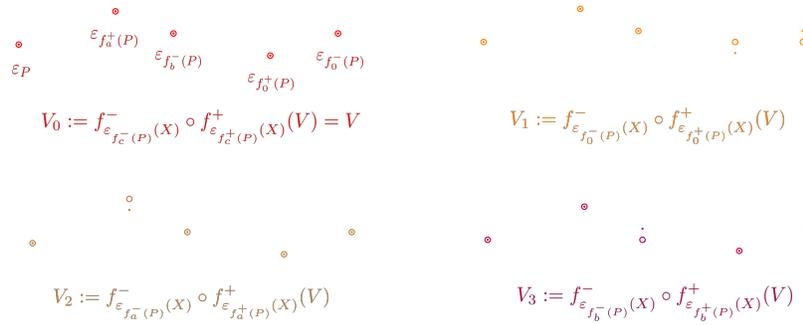
$$P = \tilde{\varepsilon}_{\Phi_{P,X}(\tilde{\varepsilon}_{c_{1/2}(P)}(X))}(X).$$

Malgré de nombreuses tentatives, nous ne sommes pas encore parvenus à exprimer ce à quoi être MVEC est équivalent morphologiquement (une des difficultés étant la complexité des formules qui explose lorsque plusieurs compositions d'opérations sont effectuées).

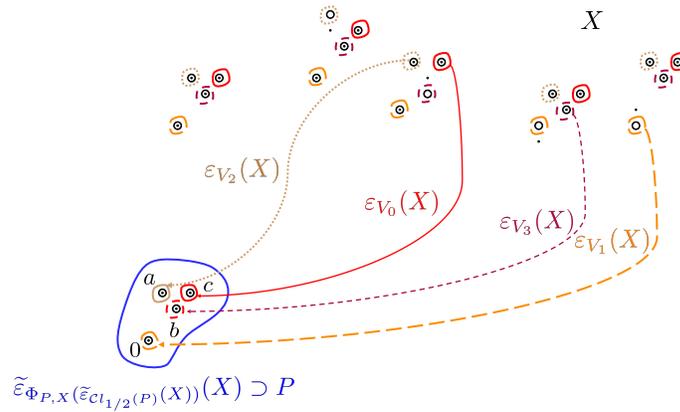
Finalement, tout cela ne concerne en dernier lieu que la classe à un demi-ton, et il faudrait généraliser à une application de classe quelconque, ou éventuellement à une famille d'applications de classes vérifiant un nombre minimal de conditions. À minima, nous pourrions envisager de généraliser le théorème 3.4.1, dont on sait qu'il est vrai, en étendant la définition de  $\Phi_{P,X}$  à des applications de classes plus générales.



(a) Une donnée  $X$  et un motif  $P$ . On représente en rouge l'érosion variationnelle de  $P$  pour  $X$  selon la classe à un demi-ton.



(b) À partir de  $V = \tilde{\mathcal{E}}_{Cl(P)}(X)$ , on construit  $\Phi_{P,X}(V)$ . Ici,  $\Phi_{P,X}(V) = \{V_0, V_1, V_2, V_3\}$ .



(c) On érode  $X$  par  $V_0, V_1, V_2$  et  $V_3$  puis on prend l'union. Le résultat obtenu est  $\tilde{\mathcal{E}}_{\Phi_{P,X}(\tilde{\mathcal{E}}_{Cl_{1/2}(P)}(X))}(X)$  (représenté en bleu sur la figure).

On a bien  $P \subset \tilde{\mathcal{E}}_{\Phi_{P,X}(\tilde{\mathcal{E}}_{Cl_{1/2}(P)}(X))}(X)$  (il y a même égalité ici).

FIGURE 3.12 – Détail des principales étapes de construction de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\Phi_{P,X}(\tilde{\mathcal{E}}_{Cl_{1/2}(P)}(X))}(X)$ .

# Chapitre 4

## Connexion de Galois

*"Nul n'est censé ignorer Galois."*

— Grégory Berhuy

### 4.1 Introduction

Nous cherchons à établir des liens entre l'utilisation de la morphologie mathématique pour la détection de motifs musicaux telle que décrite par Lascabettes [7] et la connexion d'applications au sens de Galois (Bloch et al. [1]). Nous rappelons dans un premier temps la théorie algébrique des treillis ainsi que de la connexion de Galois. À la suite de cela, nous mettons en œuvre cette théorie, qui s'avère être un cadre général à partir duquel nous pouvons retrouver bon nombre des résultats des chapitres 1 et 2. Cette généralisation constitue une approche nouvelle qui n'avait pas encore été explorée pour la découverte de motifs.

### 4.2 Théorie algébrique

#### 4.2.1 Treillis complets et familles de Moore

**Rappel :** Soit  $L$  un ensemble. Une relation d'ordre partiel sur  $L$  est une relation, notée  $\leq$ , qui est réflexive, anti-symétrique et transitive.

**Définition 4.2.1 :** Le couple  $(L, \leq)$  forme un **treillis complet** si tout sous-ensemble  $K \subset L$  possède un plus petit majorant dans  $L$  (noté  $\sup K$ ) et un plus grand minorant dans  $L$  (noté  $\inf K$ ).

**Remarque :** On note alors

$$\mathbf{1} := \sup L = \inf \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbf{0} := \inf L = \sup \emptyset.$$

**Exemple 4.2.1 :** Soit  $E$  un ensemble. Alors  $(\mathcal{P}(E), \subset)$  est un treillis complet où le sup et l'inf sont donnés par l'union et l'intersection ensembliste. On a dans ce cas  $\mathbf{1} = E$  et  $\mathbf{0} = \emptyset$ .

**Exemple 4.2.2 :** La famille  $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$  des fermés de  $\mathbb{R}^n$  est un treillis complet pour l'inclusion. L'inf d'une famille de fermés est donné par son intersection, et le sup par la fermeture de son union.

Soit  $(L, \leq)$  un ensemble ordonné.

**Définition 4.2.2 :** Un sous-ensemble  $M \subset L$  est une **famille de Moore** de  $L$  si tout élément de  $L$  a un plus petit majorant dans  $M$  :

$$\forall l \in L, (\exists a \in M, a \geq l \text{ et } [\forall m \in M, m \geq l \implies m \geq a]).$$

**Rappel :** Une application  $\psi$  de  $L$  est dite extensive si  $\psi \geq Id_L$  (c'est-à-dire si  $\forall x \in L, \psi(x) \geq x$ ). Elle est dite idempotente si  $\psi^2 = \psi$ .

**Définition 4.2.3 :** Une *fermeture* sur  $L$  est une application croissante, extensive et idempotente de  $L$ .

Les résultats suivants sont tirés de Bloch et al. [1].

**Proposition 4.2.1 :** Il y a correspondance biunivoque entre les familles de Moore de  $L$  et les fermetures sur  $L$ . Celle-ci est donnée comme suit :

- À une famille de Moore  $M$  est associée l'application  $\phi$  qui envoie chaque  $l \in L$  sur le plus petit  $a \in M$  tel que  $a \geq l$ .
- À une fermeture  $\phi$  est associée la famille  $M := \text{Fix}(\phi) = \{x \in L \mid \phi(x) = x\}$  des points fixes de  $\phi$ .

Considérons à présent le cas d'un treillis complet.

**Proposition 4.2.2 :** Soit  $L$  un treillis complet. Un sous-ensemble  $M \subset L$  est une famille de Moore si, et seulement si,  $M$  est stable par l'inf :

$$\forall S \subset M, \inf S \in M.$$

En particulier, on a que  $\inf \emptyset = \mathbf{1} \in M$ .

Si de plus on note  $\phi$  la fermeture associée à  $M$ , alors  $(M, \leq)$  est un treillis complet de plus grand élément  $\mathbf{1}$  et de plus petit élément  $\phi(\mathbf{0}) = \inf M$ , où le sup et l'inf d'une famille  $N \subset M$  sont donnés respectivement par  $\phi(\sup N)$  et  $\inf N$ .

**Proposition 4.2.3 :** Avec les notations précédentes,

$$\forall K \subset L, \phi(\sup\{\phi(P) \mid P \in K\}) = \phi(\sup K)$$

## 4.2.2 Connexion de Galois

Soient  $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$  des ensembles ordonnés et  $\alpha : B \rightarrow A, \beta : A \rightarrow B$  deux applications. Pour alléger les notations, on notera  $\leq$  les ordres sur  $A$  et  $B$ .

**Définition 4.2.4 :** On dit que  $\alpha$  et  $\beta$  forment une *connexion de Galois* si

$$\forall (a, b) \in A \times B, \quad a \leq \alpha(b) \iff b \leq \beta(a).$$

**Proposition 4.2.4 :** Si  $\alpha$  et  $\beta$  forment une connexion de Galois, alors :

1.  $\alpha$  et  $\beta$  sont décroissants.
2.  $\alpha = \alpha\beta\alpha$  et  $\beta = \beta\alpha\beta$ .
3.  $\alpha\beta$  est une fermeture sur  $A$  et  $\beta\alpha$  est une fermeture sur  $B$ .
4.  $\text{Fix}(\alpha\beta) = \text{Im}(\alpha)$  et  $\text{Fix}(\beta\alpha) = \text{Im}(\beta)$  (donc  $\text{Im}(\alpha)$  et  $\text{Im}(\beta)$  sont des familles de Moore).
5.  $\alpha|_{\text{Im}(\beta)}$  est une bijection décroissante, d'inverse  $\beta|_{\text{Im}(\alpha)}$  également décroissante.

### 4.2.3 Cartes de Galois

Soit  $A, B$  des treillis complets.

**Définition 4.2.5 :** Une application  $f : B \rightarrow A$  est une **carte de Galois** si elle échange sup et inf :

$$\forall (b_i)_{i \in I} \in B^I, \quad f(\sup_{i \in I} b_i) = \inf_{i \in I} f(b_i).$$

**Proposition 4.2.5 :** Si  $\alpha : B \rightarrow A$  et  $\beta : A \rightarrow B$  forment une connexion de Galois, alors  $\alpha$  et  $\beta$  sont des cartes de Galois.

**Proposition 4.2.6 :** Soit  $(\alpha_i)_{i \in I}$  une famille d'applications  $B \rightarrow A$  et  $(\beta_i)_{i \in I}$  une famille d'applications  $A \rightarrow B$ . Si,  $\forall i \in I$ ,  $\alpha_i$  et  $\beta_i$  forment une connexion de Galois, alors  $\inf_{i \in I} \alpha_i$  et  $\inf_{i \in I} \beta_i$  forment une connexion de Galois (et donc sont des cartes de Galois).

**Remarque :** L'inf est ici défini comme une fonction induite par l'inf sur  $A$  (resp.  $B$ ) pris point par point.

## 4.3 Application à la découverte de motifs

Dans cette partie, nous proposons une approche originale en choisissant d'adopter un point de vue différent de celui de Lascabettes [7]. Nous redéfinissons donc certains des objets vus au chapitre 2 afin de nous placer dans le formalisme algébrique précédent. Nous verrons que ces définitions sont équivalentes, ce qui mettra en relief les profonds liens existants entre la découverte de motifs et la théorie des connexions de Galois.

Soit  $(E, +)$  un groupe abélien. Nous travaillons sur  $(\mathcal{P}(E), \subset)$ , qui est un treillis complet. Soit  $X \subset E$  un sous-ensemble fini de  $E$ .

Comme précédemment,  $X$  jouera le rôle de donnée musicale et un sous ensemble fini  $P \subset E$  celui de motif. Nous rappelons par ailleurs que les apparitions de  $P$  dans  $X$  sont données par  $\varepsilon_P(X)$ , l'érosion par  $P$  de  $X$ .

### 4.3.1 Une application caractéristique

**Définition 4.3.1 :** On pose  $\alpha_X$  l'application de  $\mathcal{P}(E)$  suivante :

$$\alpha_X : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ P & \longmapsto & \varepsilon_P(X) \end{array} \quad (4.1)$$

**Définition 4.3.2 :** Un motif  $P \subset E$  sera dit **MTEC pour  $X$**  s'il appartient à l'image de  $\alpha_X$

$$\text{Im}(\alpha_X) = \{\alpha_X(P) \mid P \in \mathcal{P}(E)\} = \{Q \in \mathcal{P}(E) \mid \exists P \in \mathcal{P}(E), Q = \varepsilon_P(X)\}.$$

**Remarque :** L'application  $\alpha_X$ , et donc à fortiori le fait pour un motif d'être MTEC, dépend de l'ensemble  $X$  fixé au départ. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur celui-ci et afin d'alléger les notations, nous la noterons simplement  $\alpha$ .

**Théorème 4.3.1 :** L'application  $\alpha$  est une auto-connexion de Galois, i.e. elle vérifie

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \subset \alpha(B) \iff B \subset \alpha(A).$$

**Lemme 4.3.1 (fondamental) :** Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ . Alors  $P \subset \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$ .

Il s'agit du lemme 2.4.1, déjà établi par Lascabettes [7]. Cependant, au vu de l'aspect fondamental de ce résultat pour ce qui suit (et de la brièveté de sa démonstration), nous proposons d'en fournir une preuve malgré tout.

*Démonstration du lemme.*

Soit  $p \in P$ , montrons que  $p \in \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$ .

Si  $\varepsilon_P(X) = \emptyset$ , alors  $\varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X) = \varepsilon_{\emptyset}(X) = E$  et  $p \in \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$ . Sinon, prenons un  $x \in \varepsilon_P(X)$ . Par définition,  $\forall y \in P, x + y \in X$ . En particulier, puisque  $p \in P, x + p \in X$ . Cela montre que  $p \in \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$ . ■

*Démonstration du théorème.*

Soit  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ . Il suffit de montrer que  $A \subset \varepsilon_B(X)$  si, et seulement si,  $B \subset \varepsilon_A(X)$ .

Supposons  $A \subset \varepsilon_B(X)$ . Par décroissance de l'érosion en l'élément structurant, il suit que  $\varepsilon_{\varepsilon_B(X)}(X) \subset \varepsilon_A(X)$ . Par le lemme précédent, on obtient alors  $B \subset \varepsilon_{\varepsilon_B(X)}(X) \subset \varepsilon_A(X)$ . L'inclusion réciproque se montre de la même manière. ■

### 4.3.2 Principaux résultats

**Rappel :** L'apparition d'un motif  $P \in \mathcal{P}(E)$  est définie comme  $O = \varepsilon_P(X) = \alpha(P)$ .

De l'auto-connexité galoisienne de l'application  $\alpha$  on déduit, à l'aide de la proposition 4.2.4, les résultats suivants.

**Corollaire 4.3.1 :** *L'égalité suivante est vérifiée :*

$$\alpha^3 = \alpha.$$

*En d'autres termes, pour  $P \in \mathcal{P}(E)$  :*

$$\varepsilon_P(X) = \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)}(X).$$

**Remarque :** On retrouve donc le lemme 2.4.2, démontré directement par Lascabettes [7], qui peut ainsi être vu comme une simple conséquence de l'auto-connexité de  $\alpha$ .

**Remarque :** Si  $P \in \mathcal{P}(E)$  est d'apparition  $O = \alpha(P)$  et que  $O$  est d'apparition  $P' = \alpha(O)$ , alors l'égalité précédente se réécrit

$$O = \varepsilon_{P'}(X).$$

De l'auto-connexité de  $\alpha$ , on déduit ensuite :

**Corollaire 4.3.2 :**  $\alpha^2$  est une fermeture sur  $\mathcal{P}(E)$ .

**Corollaire 4.3.3 :**  $Im(\alpha) = Fix(\alpha^2) := \{P \in \mathcal{P}(E) \mid \alpha^2(P) = P\}$ .

**Théorème 4.3.2 :**  $P \in \mathcal{P}(E)$  est MTEC pour  $X$  si, et seulement si,  $P = \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$

*Démonstration.*

$P$  est MTEC pour  $X$  si, et seulement si,  $P \in \text{Im}(\alpha_X) = \text{Fix}(\alpha_X^2)$  si, et seulement si,

$$P = \alpha_X^2(P) = \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X).$$

■

**Remarque :** Il s'agit du théorème 2.4.1, résultat principal du chapitre 2, démontré lui-aussi directement par Lascabettes. Une fois de plus, armé du formalisme algébrique galoisien, ce théorème tombe en quelques lignes.

**Corollaire 4.3.4 :**  $\alpha|_{\text{Im}(\alpha)}$  définit une application de  $\text{Im}(\alpha)$ , qui est une bijection involutive décroissante.

**Remarque :** En particulier, à tout  $P \in \mathcal{P}(E)$  MTEC est associé un unique MTEC  $O$  par  $\alpha|_{\text{Im}(\alpha)}$ . Puisque  $\alpha|_{\text{Im}(\alpha)}$  est une involution, il suit que  $O = \alpha(P) = \varepsilon_P(X)$  et  $P = \alpha(O) = \varepsilon_O(X)$ . On retrouve ici une paire  $(P, O)$  MTEC-conjuguée, au sens de la définition 2.4.4.

Grâce à notre changement de point de vue sur la définition des MTEC et à la théorie algébrique présentée plus haut, nous sommes parvenus à retrouver la quasi-totalité des résultats démontrés par Lascabettes [7]. Cependant, pour que les propriétés retrouvées correspondent réellement à celles de Lascabettes, il nous faut vérifier que notre nouvelle définition de MTEC est équivalente à la définition utilisée au chapitre 2.

### 4.3.3 Équivalence des définitions de MTEC

Les motifs MTEC définis précédemment sont bien des *Maximal Translational Equivalence Classes* au sens de Collins et Meredith [2], c'est-à-dire qu'ils vérifient la définition 1.3.5 :

$$\forall P' \in \mathcal{P}(E), P \subsetneq P' \implies |\varepsilon_{P'}(X)| < |\varepsilon_P(X)|.$$

Cela est assuré par la proposition suivante.

**Proposition 4.3.1 :** Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ .

$$[\forall P' \in \mathcal{P}(E), P \subsetneq P' \implies |\varepsilon_{P'}(X)| < |\varepsilon_P(X)|] \iff P \in \text{Im}(\alpha_X).$$

*Démonstration.*

Nous montrons ce résultat par double contraposition.

Sens direct : supposons que  $P \notin \text{Im}(\alpha_X)$ . Montrons  $\neg[\forall P' \in \mathcal{P}(E), P \subsetneq P' \implies |\varepsilon_{P'}(X)| < |\varepsilon_P(X)|]$ .

D'après le corollaire 4.3.3,  $P \notin \text{Fix}(\alpha^2)$ . Donc  $P \neq \alpha^2(P)$ . Posons  $P' = \alpha^2(P) = \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$ .

Par le lemme 4.3.1, nous avons que  $P \subset P'$ . D'où  $P \subsetneq P'$ .

Nous avons de plus

$$\varepsilon_{P'}(X) = \varepsilon_{\varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)}(X) \stackrel{\text{cor 4.3.1}}{=} \varepsilon_P(X)$$

et donc

$$|\varepsilon_{P'}(X)| = |\varepsilon_P(X)|, \text{ avec } P \subsetneq P'.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe un  $P' \in \mathcal{P}(E)$  tel que  $|\varepsilon_{P'}(X)| \geq |\varepsilon_P(X)|$  et  $P \subsetneq P'$ .

Par décroissance de l'érosion en l'élément structurant, nous avons  $\varepsilon_{P'}(X) \subset \varepsilon_P(X)$ , donc  $|\varepsilon_{P'}(X)| \leq |\varepsilon_P(X)|$  puis  $|\varepsilon_{P'}(X)| = |\varepsilon_P(X)|$ . Ici, on ne peut pas simplement en déduire que  $\varepsilon_{P'}(X) = \varepsilon_P(X)$ , puisqu'on ne sait rien de la finitude de ces ensembles. En revanche, la proposition 2.2.1 nous assure que

$$\varepsilon_P(X) = \bigcap_{p \in P} X_{-p}.$$

Puisque  $X$  est fini par hypothèses, il suit que  $\varepsilon_P(X)$  et  $\varepsilon_{P'}(X)$  sont finis également, en tant qu'intersections d'ensembles finis. Ainsi, on a bien que

$$\varepsilon_P(X) = \varepsilon_{P'}(X).$$

Donc

$$\varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X) = \varepsilon_{\varepsilon_{P'}(X)}(X).$$

Finalement

$$P \not\subset P' \stackrel{4.3.1}{\subset} \varepsilon_{\varepsilon_{P'}(X)}(X) = \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$$

et  $P \notin \text{Fix}(\alpha^2) = \text{Im}(\alpha)$ , ce qui achève la démonstration. ■

#### 4.3.4 Famille de Moore et minimalité

**Proposition 4.3.2 :** *Toute partie de  $E$  est contenue dans un plus petit MTEC de  $X$  (au sens de l'inclusion). En d'autres termes :*

$$\forall Q \in \mathcal{P}(E), \exists P \text{ MTEC tel que : } Q \subset P \text{ et } [Q \subset P' \text{ MTEC} \implies P \subset P'].$$

*Démonstration.*

L'ensemble des motifs MTEC est donné par  $\text{Im}(\alpha)$  et  $\alpha$  est une auto-connexion de Galois. Par la proposition 4.2.4, il suit que  $\text{Im}(\alpha)$  est une famille de Moore de  $\mathcal{P}(E)$ . Ainsi, tout élément  $Q$  de  $\mathcal{P}(E)$  a un plus petit majorant dans  $\text{Im}(\alpha)$ , c'est-à-dire est inclus dans un plus petit MTEC. ■

**Théorème 4.3.3 :**  $\forall P \in \mathcal{P}(E)$ ,  $\varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$  est le plus petit MTEC de  $X$  contenant  $P$ .

*Démonstration.*

Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ . Par le corollaire 4.3.3, la famille de Moore formée par les MTEC est  $\text{Fix}(\alpha^2)$ . D'après la correspondance biunivoque de la proposition 4.2.1, l'application envoyant  $P$  sur le plus petit MTEC contenant  $P$  est donc  $\alpha^2$ . D'où  $\alpha^2(P) = \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$  est le plus petit MTEC de  $X$  contenant  $P$ . ■

**Corollaire 4.3.5 :** *Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ , d'apparition  $O = \varepsilon_P(X)$ . Il existe un unique  $P' \in \mathcal{P}(E)$  contenant  $P$  tel que la paire  $(P', O)$  soit MTEC-conjuguée.  $P'$  est alors le plus petit MTEC de  $X$  contenant  $P$ .*

**Remarque :** On retrouve ici la proposition 2.4.4 démontrée par Lascabettes [7].

*Démonstration.*

Nécessairement,  $P' = \varepsilon_O(X) = \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$ , ce qui assure son unicité et sa minimalité (par le théorème qui précède). Le corollaire 4.3.1 montre alors que  $(P', O)$  est MTEC-conjuguée. ■

**Proposition 4.3.3 :** Soit  $M \subset \text{Im}(\alpha)$  une famille de MTEC. Alors

$$\bigcap_{P \in M} P \text{ est MTEC.}$$

*Démonstration.*

$(\mathcal{P}(E), \subset)$  est un treillis complet, dont  $\text{Im}(\alpha)$  est une famille de Moore. Par la proposition 4.2.2, il suit que  $\forall M \subset \mathcal{P}(E), \inf M = \bigcap_{P \in M} P \in \text{Im}(\alpha)$ . ■

**Corollaire 4.3.6 :** Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ . Alors

$$\varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X) = \bigcap_{\substack{Q \text{ MTEC} \\ P \subset Q}} Q.$$

*Démonstration.*

Posons  $Q'$  cette intersection.  $Q'$  est un MTEC en tant qu'intersection de MTEC (en vertu de la proposition précédente). Qui plus est,  $Q'$  contient trivialement  $P$ . Supposons que  $R$  soit un MTEC contenant  $P$ . Alors  $R$  est dans la famille des MTEC contenant  $P$  et donc  $Q' \subset R$ . Par minimalité (théorème 4.3.3),  $Q' = \varepsilon_{\varepsilon_P(X)}(X)$ . ■

**Proposition 4.3.4 :** Pour toute famille de MTEC  $M \subset \text{Im}(\alpha)$ , le plus petit MTEC contenant tous les éléments de  $M$  est  $\alpha^2(\bigcup_{P \in M} P)$ ; et  $\bigcap_{P \in M} P$  est le plus grand MTEC inclus dans tous les éléments de  $M$ .

*Démonstration.*

Il suffit d'appliquer la proposition 4.2.2 avec  $\alpha^2$ . ■

### 4.3.5 Cartes de Galois et intersections d'érosions

**Théorème 4.3.4 :**  $\alpha$  est une carte de Galois.

*Démonstration.*

Nous avons vu que  $\alpha$  était une auto-connexion de Galois. Le résultat est alors immédiat avec la proposition 4.2.5. ■

**Corollaire 4.3.7 :**  $\forall (P_i)_{i \in I} \in \mathcal{P}(E)^I$ ,

$$\varepsilon_{\bigcup_{i \in I} P_i}(X) = \bigcap_{i \in I} \varepsilon_{P_i}(X).$$

**Remarque :** Ce résultat peut s'obtenir directement par dualité.

**Proposition 4.3.5 :**

$$P \subset X \text{ est MTEC} \iff P = \bigcap_{v \in \mathcal{E}_P(X)} MTP(v, X).$$

**Remarque :** On retrouve le résultat de la proposition 1.3.2 sur l'intersection de MTP, établi par Collins et Meredith [2].

**Lemme 4.3.2 :**  $X = \varepsilon_{\{0_E\}}(X)$  et  $X$  est MTEC pour  $X$ .

*Démonstration du lemme.*

$X = \{x \in E \mid x \in X\} = \{x \in E \mid \forall s \in \{0_E\}, x + s \in X\} = \varepsilon_{\{0_E\}}(X)$ . Donc  $X \in \text{Im}(\alpha_X)$  et  $X$  MTEC pour  $X$  par définition. ■

**Lemme 4.3.3 (technique) :** Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ . Alors  $[P \subset X \text{ et } P = \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X)] \iff P = \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X) \cap X$ .

*Démonstration du lemme.*

Le sens direct étant trivial, nous nous contenterons de montrer le sens indirect.

Soit  $P \in \mathcal{P}(X)$ . Supposons que  $P = \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X) \cap X$ . Premièrement, on a bien que  $P \subset X$ . Par ailleurs, le lemme 4.3.1 nous donne  $P \subset \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X)$ . Montrons donc que  $\varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X) \subset P$ , ce qui achèvera la démonstration.

Soit  $x \in \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X)$ . Puisque  $P \subset X$ , la décroissance de l'érosion en l'élément structurant nous donne  $\varepsilon_X(X) \subset \varepsilon_P(X)$  puis  $\varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X) \subset \varepsilon_{\varepsilon_X(X)}(X)$ . Or, par le lemme 4.3.2,  $X$  est MTEC pour  $X$ , donc  $\varepsilon_{\varepsilon_X(X)}(X) = X$ . Donc  $x \in X$ . Finalement,  $x \in \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X) \cap X$  et  $\varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X) \subset P$ . ■

*Démonstration de la proposition.*

Soit  $P \in \mathcal{P}(E)$ . On a :

$$\begin{aligned} P \subset X \text{ est MTEC} &\stackrel{\text{thm 4.3.2}}{\iff} P \subset X \text{ et } P = \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X) \\ &\stackrel{\text{lem 4.3.3}}{\iff} P = \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X) \cap X \\ &\stackrel{\text{lem 4.3.2}}{\iff} P = \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X)}(X) \cap \varepsilon_{\{0_E\}}(X) \\ &\stackrel{\text{cor 4.3.7}}{\iff} P = \varepsilon_{\mathcal{E}_P(X) \cup \{0_E\}}(X) \\ &\iff P = \varepsilon_{\left( \bigcup_{v \in \mathcal{E}_P(X)} \{0_E, v\} \right)}(X) \\ &\stackrel{\text{cor 4.3.7}}{\iff} P = \bigcap_{v \in \mathcal{E}_P(X)} \varepsilon_{\{0, v\}}(X) \\ &\stackrel{\text{prop 2.4.2}}{\iff} P = \bigcap_{v \in \mathcal{E}_P(X)} MTP(v, X). \end{aligned}$$

■

## 4.4 Quid de la découverte de motifs avec variations ?

Tout au long de ce chapitre, nous avons vu pourquoi la théorie algébrique de Galois était un cadre bien adapté à la découverte de motifs musicaux. Si nous sommes parvenus à retrouver les résultats établis par

Lascabettes [7], il n'en reste pas moins que ceux-ci concernent toujours la découverte de motifs *exacts* dans la musique. Nous avons néanmoins cherché à exprimer les concepts variationnels introduits en 3.4 à l'aide du formalisme de Galois, comme nous l'avons fait pour les résultats du chapitre 2. Cependant, nous ne sommes pas encore parvenus à une expression concluante de ces concepts qui aurait permis de trouver une nouvelle connexion de Galois. Trouver cette connexion serait obtenir instantanément tous les résultats qui y sont associés et donc une avancée majeure dans ce domaine. Cela permettrait probablement d'obtenir la fameuse équivalence avec le fait d'être MVEC vue dans la section 3.5 . Cependant, pour trouver cette connexion, nous nous heurtons exactement aux mêmes difficultés que celles rencontrées pour établir l'équivalence de la section 3.5, ce qui semble une fois de plus confirmer l'existence d'un lien profond entre découverte de motifs par la morphologie mathématique et connexion de Galois.

# Conclusion et perspectives

En conclusion, revenons sur les quatre chapitres présentés dans ce mémoire et sur nos contributions au sein de ceux-ci.

Dans le **chapitre 1**, nous avons introduit la représentation musicale utilisée dans le mémoire ainsi que certaines familles de motifs caractéristiques.

Dans le **chapitre 2**, nous avons présenté la théorie de la morphologie mathématique, utilisée ensuite pour découvrir des motifs musicaux.

Dans le **chapitre 3**, nous avons étendu ces procédés de découverte au cas des motifs avec variations. Nos contributions ont été d'introduire de nouvelles opérations, dites variationnelles. Nous avons défini en premier lieu les classes de variations à partir desquelles ont pu être construites les érosions et ouvertures variationnelles. Ces opérations peuvent être interprétées comme une extension de la morphologie binaire au cas variationnel. Ensuite, nous avons défini une classe particulière : la classe à un demi-ton. Celle-ci permet de découvrir les occurrences de motifs musicaux à au plus un demi-ton près. Après avoir testé la robustesse de cette nouvelle méthode sur des données musicales, nous avons généralisé au cas variationnel certaines définitions et résultats obtenus aux chapitres 1 et 2. Cependant, la reformulation morphologique des motifs qui se répètent avec variations (MVEC) reste irrésolue et il semble nécessaire de poursuivre nos travaux dans cette direction. Par ailleurs, l'approche proposée dans ce chapitre, bien qu'efficace pour parvenir à détecter des motifs avec variations, n'est pas la seule envisageable pour ce faire. La morphologie floue [1] ou encore d'autres manipulations algébriques pourraient bien permettre d'aboutir à des résultats concluants concernant la découverte de motifs MVEC.

Dans le **chapitre 4**, nous avons placé les définitions et résultats des chapitres 1 et 2 dans le contexte de la théorie algébrique de la connexion de Galois. Nos contributions ont été d'appliquer cette théorie à la découverte de motifs musicaux. Nous avons notamment redéfini la notion de MTEC directement grâce à ce formalisme. Cette nouvelle définition coïncide avec la définition usuelle et permet d'approcher les objets étudiés avec un point de vue original ainsi que de mieux comprendre leur nature. De cette réécriture découlent directement de nombreuses propriétés concernant les motifs et la manière de les découvrir. Enfin, il reste à utiliser cette théorie pour également reformuler algébriquement les opérations variationnelles vues au chapitre 3. Cela permettrait d'obtenir directement nombre de résultats concluants sur la découverte de motifs avec variations.

Les liens entre les mathématiques et la musique sont à la fois profonds et riches, offrant des perspectives uniques pour l'analyse musicale. En s'appuyant sur des théories mathématiques comme la morphologie mathématique, nous avons étudié la découverte de motifs musicaux répétitifs dans une représentation symbolique de la musique. Cette approche a révélé comment des concepts mathématiques abstraits pouvaient être appliqués pour identifier des structures musicales, même lorsque celles-ci présentent des variations subtiles. Nous avons montré que les mathématiques ne sont pas seulement un langage formel de précision, mais aussi un moyen d'appréhender la complexité et la beauté des œuvres musicales. Ce travail souligne ainsi l'harmonie profonde qui existe entre mathématiques et musique, et ouvre de nouvelles voies pour la recherche interdisciplinaire, où la rigueur des mathématiques rencontre la créativité de la musique.

# Bibliographie

- [1] Isabelle Bloch, Henk Heijmans, and Christian Ronse. Mathematical morphology. In *Handbook of Spatial Logics*, pages 857–944. Springer, 2007.
- [2] Tom Collins and David Meredith. Maximal translational equivalence classes of musical patterns in point-set representations. In *Mathematics and Computation in Music : 4th International Conference, MCM 2013, Montreal, QC, Canada, June 12-14, 2013. Proceedings 4*, pages 88–99. Springer, 2013.
- [3] Bernhard Ganter and Rudolf Wille. *Formal concept analysis : mathematical foundations*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [4] Hugo Hadwiger. Minkowskische addition und subtraktion beliebiger punktmengen und die theoreme von erhard schmidt. *Mathematische Zeitschrift*, 53(3) :210–218, 1950.
- [5] Minkowski Hermann. *Volumen und oberfläche*. Springer, 1989.
- [6] Jia-Lien Hsu, Arbee LP Chen, and C-C Liu. Efficient repeating pattern finding in music databases. In *Proceedings of the seventh international conference on Information and knowledge management*, pages 281–288, 1998.
- [7] Paul Lascabettes. *Mathematical Models for the Discovery of Musical Patterns and Structures, and for Performances Analysis*. PhD thesis, Sorbonne Université, 2023.
- [8] David Meredith. Point-set algorithms for pattern discovery and pattern matching in music. Schloss-Dagstuhl-Leibniz Zentrum für Informatik, 2006.
- [9] David Meredith. COSIATEC and SIATECCompress : Pattern discovery by geometric compression. In *International society for music information retrieval conference*. International Society for Music Information Retrieval, 2013.
- [10] David Meredith. Music analysis and point-set compression. *Journal of New Music Research*, 44(3) :245–270, 2015.
- [11] David Meredith. Understanding and compressing music with maximal transformable patterns. In *International Conference on Human-Computer Interaction*, pages 309–325. Springer, 2023.
- [12] David Meredith, Kjell Lemström, and Geraint A Wiggins. Algorithms for discovering repeated patterns in multidimensional representations of polyphonic music. *Journal of New Music Research*, 31(4) :321–345, 2002.
- [13] Jos BTM Roerdink. Group morphology. *Pattern Recognition*, 33(6) :877–895, 2000.
- [14] Jean Serra. *Image analysis and mathematical morphology*. Academic Press, Inc., 1983.
- [15] Lloyd Smith and Richard Medina. Discovering themes by exact pattern matching. In *Proceedings of the International Conference on Music Information Retrieval*, 2001.