



Mémoire final
Stage de recherche de Master 2
IReMus
Master ATIAM

LA CONCORDANCE HARMONIQUE : VERS UNE
COMPRÉHENSION ACOUSTIQUE DU
PHÉNOMÈNE HARMONIQUE

Manuel GAULHIAC

Encadrement : Jean-Marc CHOUVEL, enseignant-chercheur à la Sorbonne

Février - juillet 2017

Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement :

- Jean-Marc Chauvel pour son ouverture d'esprit, sa créativité et ses qualités humaines précieuses. Je lui dois beaucoup, pour le stage et la thèse qui va suivre. Il m'a ouvert de nouvelles perspectives en me parlant, il y a un peu plus d'un an, alors que je ne m'occupais dans mon parcours universitaire que de mathématiques fondamentales, de ses recherches sur l'harmonie. Je lui suis reconnaissant pour me permettre de réaliser un pont entre le monde des sciences dures et celui de la musique.
- Christophe Guillotel-Nothmann pour son accompagnement tout au long du stage, sa probité intellectuelle, son sourire et sa bienveillance. Nos discussions furent toujours fécondes, et son regard critique une motivation supplémentaire.
- Henri Boisgibault pour son dévouement. Son aide me fut précieuse pour le développement de l'interface sur NEUMA.
- Cécile Davy-Rigaud pour sa gentillesse. Je la remercie de m'avoir accueilli à l'IReMus pour cinq mois.
- Laurent Lapeire pour sa curiosité scientifique et son aide pour l'installation de Python et de Music21.
- Pierre Donat-Bouillud pour sa patience et ses loyaux services à mon égard, lui qui répond toujours avec une constance exemplaire à mes questions en informatique.
- Tous mes collègues de l'IReMus, grâce à qui j'ai passé cinq mois harmonieux.

Résumé

Résumé

L'étude systématique de l'harmonie, menée dans ce stage, s'articule autour de l'énergie et de sa répartition spectrale. L'énergie d'une combinaison de sons n'est pas la simple somme des énergies de chaque son : elle fait apparaître un terme de couplage. Ce terme de couplage, dans le domaine fréquentiel, s'interprète comme l'énergie partagée par les notes mises en présence. La notion de concordance harmonique ainsi définie, et introduite pour la première fois par Jean-Marc Chouvel dans son livre *Esquisses pour une pensée musicale, les métamorphoses d'Orphée* [4], constitue un outil rigoureux d'investigation statique et dynamique de l'harmonie. Elle permet en outre d'établir avec une grande pertinence un lien entre la théorie acoustique et la théorie musical, et fournit des outils d'analyse très précis montrant l'influence cruciale du timbre et du tempérament. Elle constitue de plus un moyen d'exploration de choix des univers micro-tonaux.

- **Mots clés** - Harmonie, énergie, concordance harmonique, acoustique, transformée de Fourier, spectre, intervalle, accord, succession harmonique, timbre, tempérament, musique micro-tonale

Abstract

The systematic study of harmony that was carried on during this internship revolves around energy and its spectral distribution. The energy of a combination of sounds is not simply the sum of the energy of each sound : it brings on a coupling term. This term in the frequential domain corresponds to the energy shared by the notes that are played together. The notion of *harmonic concordance* defined in this way was first introduced by Jean-Marc Chouvel in his book *Esquisses pour une pensée musicale, les métamorphoses d'Orphée* [4]. It is a rigorous tool for static and dynamic investigation of harmony. Besides, it enables us to establish a very relevant connection between acoustic theory and musical theory, and it uncovers some very accurate analytic tools that show how deeply timbre and temperament influence harmony. Furthermore, it makes it possible to investigate microtones.

- **Keywords** - Harmony, energy, harmonic concordance, acoustics, Fourier transform, spectrum, intervalle, chord, harmonic succession, timbre, temperament, microtones

Sommaire

1	Introduction	6
1.1	Sujet de stage	6
1.2	Enjeux et objectifs	6
1.3	Motivations personnelles	7
1.4	Contexte de stage	7
1.5	Déroulement du stage	8
1.6	Organisation du mémoire	9
2	État de l'art	10
2.1	Quelques références concernant l'approche <i>naturelle</i> de l'harmonie	10
2.1.1	Jean-Philippe Rameau : Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels [19]	10
2.1.2	Hermann L. F. von Helmholtz : Sur la sensation de ton comme base physiologique de la théorie de la musique [11]	10
2.2	Contributions récentes	11
3	Développement théorique	12
3.1	Intensité acoustique	12
3.2	Formalisme hermitien : représentations temporelles et fréquentielles	13
3.3	Aspects Statiques	13
3.3.1	Superposition d'ondes : termes d'interaction	13
3.3.2	Concordance entre deux notes	14
3.3.3	Concordance d'un accord	15
	Concordance harmonique d'un accord	15
3.3.4	Concordances d'ordre supérieur	16
	- Concordance totale d'un accord -	16
	- Concordance harmonique d'ordre k d'un accord -	16
3.3.5	Cohérence d'un accord	17
3.4	Aspects dynamiques : étude de l'enchaînement	17
3.4.1	Concordance différentielle d'une voix seule	17
3.4.2	Enchaînement d'accords et concordance différentielle	17
	- Cohérence différentielle -	18
	- Concordances d'ordre supérieur -	18
	- Localité vs Globalité -	19
3.4.3	Symétrie temporelle	19
4	Modèle simplifié de spectre pour une approche systématique de la concordance	20
4.1	Signal audio vs partition	20
4.2	Nécessité d'une modélisation	20
4.2.1	Choix intrinsèques aux calculs	20
4.2.2	Complexité intrinsèque aux sons réels	21
4.2.3	Discrétisation du spectre	22
4.2.4	Vers une classification par les grandeurs harmoniques	22
4.2.5	Implémentation et temps de calcul	22
4.3	Modèle de spectre en gaussiennes	22
4.4	Concordance d'un intervalle	25
4.5	Influence du paramètre σ de largeur spectrale	27

4.6	Et avec des sons inharmoniques ?	28
5	Échelle, choix et normalisations	30
5.1	Echelle logarithmique	30
5.2	Le problème du nombre de notes	31
5.3	Conditions d'indifférenciation	31
5.4	Normalisation de la concordance	33
5.5	Normalisation de la concordance d'ordre 3	34
5.6	Normalisation de la concordance totale	34
5.7	Vers une entropie de la superposition	35
5.8	Et les conditions d'indifférenciation à l'ordre n ?	36
	- À l'ordre 2 -	37
	- À l'ordre n -	37
6	La concordance comme exploration de l'harmonie : représentations géométriques	39
6.1	Étude statique	39
6.1.1	Topographie des Accords de 3 sons	39
	- Symétries -	43
	- Cohérence vs concordance -	44
6.1.2	Influence des paramètres timbraux	44
	- Influence du nombre de partiels -	45
	- Influence du facteur σ -	46
	- Influence de l'inharmonicité -	47
6.1.3	La concordance d'ordre 3 : vers une justification naturelle de l'accord mineur	48
6.1.4	Exploration de l'univers micro-tonal	51
6.2	Étude dynamique	53
6.2.1	Enchaînement de deux intervalles	53
	- Premier intervalle fixé -	53
	- Note commune entre les intervalles -	55
6.2.2	Enchaînement de deux accords de 3 sons	55
6.2.3	Limites théoriques de la concordance différentielle et perspectives	56
	- Symétries spatiales -	56
	- Symétrie temporelle -	56
7	La concordance à l'oeuvre, implémentation dans NEUMA	57
7.1	Objectifs	57
7.2	Présentation de Music21	57
7.3	Présentation de Neuma	58
7.4	Développement de l'interface	58
8	Conclusion	60
Annexe 1 : Étude statique : caractérisation des accords de la gamme tempérée		61
	Étude par arpégiation	61
	Accords de 3 et 4 sons	62
	- Accords de 3 sons -	62
	- Accords de 4 sons -	63
	Catalogue des positions	63
Annexe 2 : Code Python		64

Table des figures

3.1	Schéma de la concordance d'un intervalle	14
3.2	Schéma de la concordance d'un accord de 3 sons	15
3.3	Schéma de la concordance totale d'un accord de 3 sons	16
3.4	Schéma des concordance statiques et différentielles	18
4.1	Spectres échantillonnés	21
4.2	Spectre en gaussiennes	24
4.3	Spectre modélisé de cloche	25
4.4	Courbe de concordance des intervalles	26
4.5	Courbe de concordance des intervalles pour différentes valeurs de K	27
4.6	Surface de concordance des intervalles, influence de σ	28
4.7	Comparaison des courbes de concordance des intervalles pour un son harmonique et un son de cloche	29
5.1	Condition d'indifférenciation des unissons pour la concordance	32
5.2	Condition d'indifférenciation à l'ordre 2 pour la concordance	33
5.3	Illustration de la diminution des grandeurs harmoniques lors de la superposition à un unisson	35
5.4	Non vérification de la condition d'indifférenciation à l'ordre 3 pour la concordance	36
5.5	Non vérification de la condition d'indifférenciation à l'ordre 3 pour la concordance totale	37
6.1	Topographie des accords de trois sons	40
6.2	Topographie des accords de trois sons, zoom sur les accords Majeurs et mineurs	41
6.3	Localisation des accords majeurs	42
6.4	Localisation des accords mineurs	42
6.5	Surface de concordance des accord de 3 sons	43
6.6	Symétries de concordance des accords de 3 sons	43
6.7	Cohérence des accords de 3 sons	44
6.8	Influence de K sur la topographie des accords de 3 sons	45
6.9	Influence de σ sur la topographie des accords de 3 sons	46
6.10	Topographie des Accords de trois sons à la cloche	47
6.11	Comparaison de surfaces de concordance d'un son harmonique avec un son de Cloche	48
6.12	Série des harmoniques inverses	48
6.13	Surface de concordance totale des accords de 3 sons	49
6.14	Surface de concordance totale des accords de 3 sons et accord mineur	50
6.15	Exploration des micro-intervalles naturels	51
6.16	Surface de concordance avec quadrillage en 6^{mes} de ton	52
6.17	Enchaînement de deux intervalles, avec premier intervalle fixe	54
6.18	Enchaînement de deux intervalles, avec premier intervalle fixe, vue plongeante	54
6.19	Enchaînement de deux intervalles avec note commune	55
6.20	Enchaînement de deux accords de trois sons avec note commune	56
7.1	Premier prototype d'interface	59
8.1	Superposition de notes : évolution de la concordance	61
8.2	Superposition de notes : évolution de la concordance totale	62

8.3	Catalogue des accords de 3 sons : concordance et cohérence	62
8.4	Catalogue des septièmes d'espèce : concordances d'ordre 2, 3 et 4, et cohérence . .	63
8.5	Catalogue des positions de l'Accord Majeur	63

Chapitre 1

Introduction

1.1 Sujet de stage

Depuis l'apparition des premières polyphonies jusqu'à la création la plus contemporaine, en passant par la longue période de cristallisation de la tonalité, l'harmonie apparaît comme une notion centrale pour la musique, au point que l'on a souvent pensé son histoire en relation avec l'évolution de ce phénomène. Les problèmes que pose l'harmonie sont infiniment vastes et complexes, ce que trahit la diversité des approches et des théories. Difficile à cerner, le phénomène harmonique a une dimension à la fois verticale et horizontale, statique et dynamique, et de nombreuses notions y sont étroitement liées, elles-aussi essentielles en musique, parmi lesquelles le timbre et le tempérament. Le musicien ou le mélomane parlent de l'harmonie en termes de tensions et de détente, de repos, d'appuis, de fonctions tonales, de modulations, de directions, qui viennent enrichir les sensations de texture et de mouvement, qui sont déjà l'apanage de la note. La superposition de notes, d'un point de vue perceptif, n'est pas la simple superposition des sensations. Or l'idée que la superposition fait émerger de nouvelles caractéristiques est cruciale en physique. On la retrouve dans les phénomènes d'interférence ou de diffraction, et à une autre échelle elle régit également la formation des molécules. L'étude systématique de l'harmonie, menée dans ce stage, s'articule autour de l'énergie et de sa répartition spectrale. L'énergie d'une combinaison de sons n'est pas la simple somme des énergies de chaque élément : elle fait apparaître un terme de couplage. Ce terme de couplage, dans le domaine fréquentiel, s'interprète comme l'énergie partagée par les notes mises en présence. La notion de concordance harmonique ainsi définie, et introduite pour la première fois par Jean-Marc Chouvel dans son livre *les métamorphoses d'Orphée* [4], constitue un outil rigoureux d'investigation statique et dynamique de l'harmonie. Elle permet en outre d'établir avec une grande pertinence un lien entre la théorie acoustique et la théorie musicale et fournit des outils d'analyse très précis montrant l'influence cruciale du timbre et du tempérament. Elle constitue de plus un moyen d'exploration de choix des univers micro-tonaux.

1.2 Enjeux et objectifs

Phénomène à la portée très large, l'harmonie touche à la perception, et met en jeu des facteurs culturels et esthétiques. Mais avant d'être traité par le système perceptif et cognitif, un accord est d'abord une onde de pression se propageant dans l'air, et peut être étudié comme tel. En outre, l'approche du physicien, si elle est la plupart du temps occultée par les musiciens, se réduit généralement dans les théories de l'harmonie à un certain nombre d'hypothèses dont on tire les implications esthétiques avant de les vérifier. Il semblerait pourtant, vu l'universalité du phénomène, que le principe qui fonde la diversité et la richesse de l'harmonie doive se situer à un niveau fondamental, celui du phénomène physique mis en jeu. Un aspect fondamental de la construction harmonique en musique est la notion de consonance, qui va de pair avec sa notion duale, la dissonance, les deux mettant en jeu des facteurs culturels et esthétiques. La notion de concordance telle qu'elle est envisagée permet de faire un pas de côté par rapport aux dimensions culturelles et esthétiques du phénomène. Mais c'est pour en avoir une approche plus universelle et mieux comprendre à terme comment les choix opérés par les musiciens au fil des siècles correspondaient à une exploration du système musical et de ses propriétés. La théorie permet en outre de sortir du dilemme consonance-dissonance pour explorer d'autres dimensions de caractérisation,

multiples, et sans doute plus à même d'approcher la subtilité de l'univers sensible concerné. Enfin, avec la prise en compte des transitions, l'univers polyphonique pourra faire l'objet de représentations topologiques inédites qui pourront peut-être donner un sens aux intuitions des théoriciens du dix-neuvième siècle qui, tel Barbereau, entendaient dans la conduite des voix une application du principe de Maupertuis.

Le stage consiste à développer la notion de concordance harmonique, et les notions de concordance multiple et de cohérence qui y sont liées. Le but n'est pas de révolutionner la théorie de l'harmonie, mais d'apporter une nouvelle compréhension, plus fondamentale, qui puisse à terme donner de la cohérence aux différentes théories qui concernent le phénomène harmonique. Cette approche se veut la plus ouverte possible, étant fondée sur le son en tant que phénomène physique. Elle incorpore ainsi le paramètre timbral comme paramètre fondamental, ce que ne font pas les théories qui prennent en compte uniquement sur les rapports de fréquences. Sa généralité en fait un outil à même d'éclairer et d'explorer l'univers de la musique micronal, dont les connaissances harmoniques sont bien généralement empiriques. Afin d'être utilisable par les musicologues et compositeurs, ce travail doit se concrétiser par le développement de nouveaux outils informatiques adaptés à un usage simple pour l'analyse harmonique ou pour l'exploration et la création musicale.

1.3 Motivations personnelles

Le sujet de stage est un sujet délicat au sens où il exige un décloisonnement des disciplines pour un dialogue constructif entre musique et science. Ce décloisonnement des disciplines, je l'ai abordé au sein du master ATIAM (Acoustique, Traitement du signal et Informatique Appliquées à la Musique), en même temps que j'ai compris que le dialogue peut aller jusqu'à l'investigation les fondements même de la théorie musicale, en particulier la théorie de l'harmonie. J'ai d'ailleurs toujours été fasciné par la complexité du phénomène harmonique. Mon activité de pianiste ainsi que mes études au Conservatoire dans les classes d'écriture m'ont sensibilisé à cette complexité, et m'ont persuadé que bien des questions restaient en suspens à ce propos, questions qui n'étaient pas sans écho avec certains aspects abordés dans ma formation scientifique. Je suis maintenant persuadé que le phénomène harmonique se doit d'être mis en regard avec les problématiques de la recherche scientifique actuelle, dans les champs des mathématiques et de la physique, et c'est justement ce que je me suis proposé d'explorer dans ce stage.

1.4 Contexte de stage

J'ai réalisé mon stage à l'IReMus (Institut de Recherche en Musicologie), institut qui fait partie du plus vaste ensemble constitué par le *Collegium Musicae*, qui comprend entre autres l'IRCAM et le CNAM, dont l'aide m'a été précieuse, notamment pour le versant informatique de mon travail. Mon stage se rattache à un projet plus vaste porté par le Collegium Musicae, le projet PolyMIR (Polyphonic Music Information Retrieval) sur l'extraction de connaissances dans les musiques polyphoniques notées. C'est un projet *Émergence* de Sorbonne Universités, à l'initiative de Christophe Guillotel, qui fut mon interlocuteur privilégié durant le stage. Ce projet, dont j'ai participé au lancement, s'étendra sur au moins un an et demie. Il vise à appréhender un large corpus de musique polyphonique et à proposer des outils d'investigation sous forme d'un logiciel d'analyse musicale qui devrait permettre à terme de faire ressortir de manière systématique les structures et les systèmes sous-jacents aux œuvres afin de mieux comprendre et caractériser les langages musicaux. Les grandes étapes de ce projet consistent en la constitution d'un corpus, son encodage informatique, puis le développement de modules d'analyse et de représentation.

Mon travail s'inscrit dans la réflexion théorique sur l'harmonie et dans le développement des notions de concordance harmonique, développement qui s'est concrétisé par un module de traitement analytique sur la base de données NEUMA, sur lesquels on reviendra dans la partie 7. Ce module est un premier prototype, encore insuffisant, mais qui promet de nombreux enrichissements ultérieurs, que j'aurai l'occasion de réaliser dans le cadre de ma thèse intitulée "*Théorie et analyse des processus harmoniques dynamiques : méthodes temps-fréquence et temps-échelle*", sous la

direction de Christophe d'Alessandro du LAM, et Jean-Marc Chouvel, de l'IReMus, et qui se situe dans le prolongement de mon stage.

1.5 Déroutement du stage

La dynamique structurante du *Collegium Musicae* et le projet PolyMIR m'ont permis de me placer dans un élan fédérateur en instaurant un dialogue fécond et pluridisciplinaire à la croisée entre la musicologie, les sciences numériques et l'informatique. Le premier jalon de ce dialogue fut organisé deux semaines après mon arrivée à l'IReMus, c'est le séminaire de lancement du projet PolyMIR. Cet échec m'a permis de me plonger dès le départ dans les notions que j'allais explorer par la suite, puisque j'y ai présenté avec Jean-Marc Chouvel la notion de concordance harmonique, à côté de Christophe Guillotel-Nothmann et Cécile Davy-Rigaux pour une présentation des enjeux du projet, Philippe Rigaux sur la modélisation des partitions numérisées, et Moreno Andreatta sur le potentiel des représentations symboliques à base géométrico-topologique. Un deuxième séminaire PolyMIR a eu lieu le 4 mai, aux thématiques plus variées. Outre ces séminaires, des réunions étaient organisées toutes les deux semaines au CNAM ou à l'IReMus avec Christophe Guillotel-Nothmann de l'IReMus, Philippe Rigaud du CNAM et Florent Jacquemard de l'IRCAM. Ces réunions étaient pour moi l'occasion de présenter mon travail et de profiter de l'expertise et des conseils des informaticiens, en même temps que de me tenir au courant des différents projets inclus dans PolyMIR, tels celui sur l'annotation analytique des dissonances sur les partitions de contrepoint renaissant, mené par Christophe Guillotel-Nothmann et Philippe Rigaud. Ces réunions étaient précieuses car elles me permettaient de profiter d'un regard extérieur et toujours éclairant. Je remercie en particulier Henri Boisgibault, du CNAM, qui a largement contribué au développement informatique du module de concordance harmonique sur NEUMA. Je voyais aussi régulièrement mon directeur de stage Jean-Marc Chouvel, toutes les deux semaines environ. Ses idées et ses suggestions m'ont été d'une grande aide. J'ai été invité fin juillet à participer à un colloque de trois jours sur les micro-intervalles : "*Les univers micro-tonaux : quels concepts pour l'infra-chromatisme ?*", dans lequel j'ai présenté à des musicologues, musiciens et compositeurs la concordance harmonique comme outil d'investigation de l'univers micro-tonal, dans une intervention intitulée "*Concordance harmonique et infra-chromatisme : présentation des concepts et discussion des paramètres*". Je remercie grandement Jean-Marc Chouvel de m'avoir introduit dans ce monde micro-tonal passionnant, auquel je suis encore peu familier, et de m'avoir donné la chance de côtoyer des compositeurs et des musiciens d'envergure.

Les premières semaines de mon stage furent partagées en plusieurs tâches : d'une part, me familiariser avec la notion de concordance harmonique en vue de la présentation lors du séminaire de lancement, d'autre part, la constitution d'un corpus de livres et d'articles sur les théories harmoniques après 1950, et enfin le travail spécifiquement pour PolyMIR sur la constitution du corpus. Outre la familiarisation avec les théories musicologiques, le travail sur l'état de l'art a inclus la lecture d'articles ou de thèses scientifiques d'acoustique, de traitement du signal, ainsi que des travaux sur les représentations géométriques et topologiques des notes ou sur la perception des dissonances.

Après ces premières semaines, j'ai commencé à implémenter en Matlab la concordance, d'abord sur des sons échantillonnés. Je pensais alors que pour tester la pertinence musicale de cette notion il valait mieux prendre des sons réels, plutôt que d'adopter un modèle théorique de spectre. Mais après quelques semaines je suis arrivé à l'évidence qu'un modèle de spectre était nécessaire, car mes résultats étaient trop aléatoires et variables, et obtenir les sons un à un pour différents timbres et différents tempéraments (j'utilisais alors la bibliothèque *Garritan* de finale) était trop lourd, et j'avais finalement trop peu de maniabilité sur les paramètres.

J'ai donc commencé à implémenter le modèle de spectre en gaussiennes proposé par Jean-Marc Chouvel dans son livre *Les Métamorphoses d'Orphée* [4]. J'ai tout de suite obtenu des résultats plus contrôlables et interprétables, et la continuité de l'échelle des fréquences m'a permis d'obtenir des représentations visuelles parlantes, comme la courbe de concordance des intervalles ou la surface de concordances des accords de trois sons et des enchaînements. J'ai pu ainsi comprendre l'influence des paramètres du modèle sur la concordance, et explorer les surfaces de concordance en faisant varier le facteur σ , le nombre de partiels, la décroissance, l'inharmonicité... Cette exploration m'a incité à avoir un regard critique et interprétatif sur les notions. Notamment, si la concordance se trouvait être un outil prometteur d'une grande richesse de comportements, la concordance

différentielle ne me satisfaisait pas, en raison principalement de la symétrie temporelle (cf.3.4.3), qui n'est pas satisfaisante musicalement.

En parallèle aux réflexions théoriques visant à briser la symétrie temporelle, j'ai commencé à réfléchir à l'interface (cf partie 7). Sous les conseils de Philippe Rigaud et Christophe Guillotel-Nothmann qui venaient de créer leur premier prototype de module d'annotation des dissonances, j'ai décidé d'utiliser pour le calcul des concordances et des autres grandeurs harmoniques les outils de Music21, ensemble d'outils et de routines programmées en Python pour travailler sur les partitions, le traiter, les analyser, en extraire certaines informations... J'ai donc appris à programmer en Python, et me suis familiarisé avec l'environnement de Music21. Le développement des premiers programmes python de calcul de la concordance sur une partition a pointé une question théorique cruciale : celle de l'échelle et de la normalisation. Les réponses, qui seront présentées dans la partie 5, m'ont obligé à reconsidérer les notions de concordance vis-à-vis de la réalité musicale, et certains points restent encore irrésolus (cf.5.8). Pour rester dans l'élan du projet PolyMIR, j'ai décidé de développer l'interface graphique sur la plateforme numérique NEUMA développée par l'IREMus, et l'aide d'Henri Boisgibault fut à ce propos la bienvenue.

Enfin, la dernière étape de mon stage fut la préparation de la conférence lors du colloque sur la micro-tonalité. J'ai développé à cet effet des outils interactifs qui permettent, en se baladant sur des surfaces de concordance et en faisant entendre les accords correspondants, de faire le lien perceptif entre la concordance, qui est un attribut visuel (représenté par des couleurs ou des reliefs), et le son, en ayant la possibilité de changer les paramètres de spectre. C'est finalement cet outils qui juge la pertinence musicale de la notion de concordance.

1.6 Organisation du mémoire

Après la présentation du stage en **introduction**, le **chapitre 2** du mémoire présentera en état de l'art le terreau historique sur lequel je me place pour explorer la notion de concordance harmonique. A côté des grands noms que son Rameau et Helmholtz figurent William Sethares, auteur d'un livre remarquable sur le son [23], et Jean-Marc Chouvel, qui a supervisé le stage, qui a introduit la notion de concordance musicale en 1998 dans son livre *Les Métamorphoses d'Orphée* [4].

Dans le **chapitre 3** sera définie cette notion de concordance harmonique, ainsi que celles de concordance d'ordre n , de concordance totale et de cohérence, puis la notion de concordance différentielle pour caractériser les enchaînements harmoniques.

Le **chapitre 4** concernera le modèle de spectre adopté dans la suite de l'étude. Ce modèle permettra de contrôler de manière simple les paramètres de timbre et de voir leur effet sur la concordance. Les premières visualisations de la concordance seront présentées ici pour motiver le modèle.

Dans le **chapitre 5**, plus technique, je présenterai les choix que j'ai faits d'échelle, de normalisation et d'homogénéisation des différents calculs de grandeurs harmoniques. Quelques points théoriques seront laissés ouverts à la fin de cette partie.

Le nœud du mémoire sera le **chapitre 6**, qui explorera les notions introduites dans le chapitre 2, d'abord les aspects statiques, ensuite les aspects dynamiques. Des beaux dessins étayeront le propos, qui seront des cartographies des accords par les grandeurs harmoniques. Ces représentations permettront de se rendre compte de la richesse de comportement de la concordance et de mesurer les possibilités de cette notion. En outre, nous nous attacherons à montrer comment ces notions peuvent permettre d'explorer les tempéraments ainsi que les univers micro-tonaux.

Le **chapitre 7** présentera quant à elle le premier prototype du module informatique de concordance harmonique réalisé sur NEUMA, ainsi que les développements imaginés.

Chapitre 2

État de l'art

Nous allons dans cette partie faire une brève présentation de deux ouvrages fondateurs, le *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* [19] de Rameau (1722) et *Sur la sensation de ton comme base physiologique de la théorie de la musique* de Helmholtz (1863), dans lesquels les auteurs tentent de comprendre justifier l'harmonie par des considérations fondamentales - physiques pour Rameau, physiologiques et physiques pour Helmholtz. Après nous présenterons quelques recherches récentes.

2.1 Quelques références concernant l'approche *naturelle* de l'harmonie

2.1.1 Jean-Philippe Rameau : *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* [19]

Ce traité fondamental pour la théorie de la musique, qui se veut une synthèse des connaissances de l'époque, traduit la volonté de faire de la musique une science, en plein siècle des Lumières.

L'ouvrage se divise en quatre parties :

1. **Du rapport des raisons et proportions harmoniques**
2. **De la nature et de la propriété des accords**
3. **Principes de composition**
4. **Principes d'accompagnement**

Rameau part du principe de fonctionnement de la corde et de ses divisions pour en déduire le caractère *naturel* de l'accord majeur. Il traite ensuite du caractère *naturel* de l'accord mineur, comme cela sera expliqué dans la partie 6.1.3.

2.1.2 Hermann L. F. von Helmholtz : *Sur la sensation de ton comme base physiologique de la théorie de la musique* [11]

L'ouvrage se divise en trois parties :

1. **Composition des vibrations.** Harmoniques et timbres
2. **Des sons simultanés.** Sons résultants et battements - consonance et dissonance
3. **Affinités des sons.** Gammes et tonalités

Dans la première partie, Helmholtz développe sa théorie des résonateurs : la discrimination des hauteurs au niveau perceptif se fait par action sélective des cils de la membrane basilaire à l'intérieur du système auditif, les cils ayant chacun des fréquences de résonance différentes. Cette théorie a été remise en question par la suite.

Dans la deuxième partie, Helmholtz continue à développer sa théorie physiologique de la sensation auditive en traitant du sentiment de dissonance, qui selon lui est dû au battements entre les harmoniques. Il étudie notamment les accords de trois sons et les différences entre leurs renversements.

Alors que jusqu'alors l'aspect qualitatif de la perception se bornait au *bien-être des sens*, Helmholtz aborde ici la question du *Beau esthétique*. Et d'affirmer : *Le système des gammes, des modes et de leur enchaînement harmonique, ne repose pas sur des lois naturelles invariables, mais il est, au contraire, la conséquence de principes esthétiques qui ont varié avec le développement progressif de l'humanité, et qui varieront encore*. Cette partie traite des gammes, des accords, des règles de leur enchaînement, de la conduite mélodique.

2.2 Contributions récentes

Pour ne citer ici que deux ouvrages :

- William A. Sethares, *Tuning, timbre, spectrum, scale* (2005) [23]
- Jean-Marc Chouvel, *Esquisses pour une pensée musicale, les Métamorphoses d'Orphée* (1998) [4]

Le premier ouvrage est véritablement un ouvrage de la science du son dans sa dimension acoustique. Il traite de la fréquence, du spectre, du timbre, de la hauteur perçue, des échelles, des tempéraments, des sons harmoniques et inharmoniques, de la dissonance, des accords adaptatifs...

Dans le second ouvrage, Jean-Marc Chouvel développe ses propres réflexions, à la portée assez large, sur le pourquoi et le comment de la musique, son rapport au temps, ses connections avec les autres arts. C'est notamment dans cet ouvrage qu'il introduit la notion de concordance harmonique, qui sera la pierre de base de ce mémoire.

Chapitre 3

Développement théorique

3.1 Intensité acoustique

Dans le but de partir d'une approche fondamentale, revenons au phénomène physique qui est à l'origine de ce que l'on appelle le "son". Avant d'être traité par le système auditif et le cerveau, devenant ainsi une perception auditive, affublée de caractéristiques qui sont entre autres la hauteur, l'intensité et le timbre, le son est une propagation dans l'air d'une onde de pression. La psycho-acoustique étudie les phénomènes physiologiques qui se produisent dans l'oreille et dans les nerfs dans le but de comprendre la manière dont cette onde de pression devient une sensation nerveuse et une perception. Notre étude n'ira pas dans cette direction-là, elle se contentera d'étudier les caractéristiques physiques, et notamment énergétiques, de l'onde de pression, en développant des outils à même de traiter la superposition et l'enchaînement des sons.

L'onde de pression est caractérisé par son champ de pression $p(\vec{x}, t)$. Mais la variation temporelle de ce champ est trop importante pour être directement reliable à la perception, contrairement à l'intensité acoustique. L'intensité acoustique instantanée en un temps t et en un point \vec{x} représente la puissance transportée par l'onde par unité de surface autour de \vec{x} , elle est donnée par :

$$\mathcal{I}_{inst}(\mathcal{I}(\vec{x}, t)) = p(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t),$$

où $\vec{v}(\vec{x}, t)$ représente la vitesse de l'air qui se déplace en \vec{x} . En moyennant sur une période temporelle suffisamment grande autour de t pour effacer les oscillations internes de l'onde et avoir une valeur localement stable, mais suffisamment petite pour que cette moyenne puisse suivre les variations temporelles de l'intensité acoustique :

$$\mathcal{I}(\vec{x}, t) = \frac{1}{T} \int_0^T p(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) dt$$

En conditions de champ libre, qui correspond à une propagation sans contraintes, où l'espace est considéré de manière infinie sans parois, l'intensité acoustique est proportionnelle au carré de la pression acoustique :

$$\mathcal{I}(\vec{x}, t) \propto p(\vec{x}, t)^2$$

Les données concernant la position de l'auditeur par rapport aux instruments ou aux hauts-parleurs n'ayant que peu d'incidence sur la perception du phénomène harmonique, nous nous passerons bien ici de la dépendance, ne considérant que la dépendance temporelle. Certes, la perception peut changer du tout au tout dans une salle de concert par selon l'emplacement dans la salle, surtout s'il s'agit d'un orchestre symphonique composé d'instruments qui réagissent différemment selon l'acoustique. Certaines fréquences peuvent être étouffées par les premiers rangs de sièges, d'autres être amplifiées par des résonances. La dépendance spatiale de la perception et encore plus criante dans le cas de l'effet Doppler par exemple, mais que l'on sache, cet effet n'a jamais été utilisé des compositeurs. Nous passerons outre la dépendance spatiale et les phénomènes propagatifs en considérant directement les sons qui arrivent à notre oreille.

Ainsi :

$$\mathcal{I}(t) \propto p(t)^2$$

3.2 Formalisme hermitien : représentations temporelles et fréquentielles

Oublions maintenant que l'onde est une onde de pression, et notons $x(t)$ le signal temporel de l'onde. En pratique, $x(t)$ sera complexe, son intensité acoustique, autrement dit sa puissance, s'exprime, à un facteur de proportionnalité que nous oublierons vite, par $|x(t)|^2$. L'énergie qu'elle transporte durant un intervalle de temps \mathcal{T} est donc :

$$\mathcal{E} = \int |x(t)|^2 dt$$

On reconnaît ici la norme 2 sur l'espace des fonctions continues à support compact, issue du produit hermitien usuel :

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbf{R}} f(t) \cdot \overline{g(t)} dt,$$

où la barre désigne le conjugué, et f et g sont des fonctions complexes continues à support compact.

Ainsi : $\mathcal{E} = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$

Cette formulation a son équivalent dans le domaine fréquentiel. En effet, le théorème de Parseval nous assure que le produit hermitien est conservé. Ainsi, en notant X la transformée de Fourier de x , on a :

$$\mathcal{E} = \|x\|^2 = \|X\|^2 = \langle X|X \rangle = \int |X(f)|^2 df,$$

où l'intégrale balaye cette fois les fréquences.

3.3 Aspects Statiques

Comme expliqué dans l'introduction, nous cherchons à développer des outils de compréhension, d'analyse et d'exploration de l'harmonie qui proviennent d'une approche physique du son, et qui soient objectifs, sans a priori perceptifs, culturels ou esthétiques. Nous allons en outre nous pencher sur ce formalisme hermitien et sur la dualité entre représentations temporelle et fréquentielle, d'abord dans une vision statique de l'harmonie, c'est à dire une vision où l'on a rayé le temps pour étudier les accords individuellement, dans leur verticalité. Nos réflexions nous amèneront à définir des grandeurs associées à chaque verticalité, qui auront tous la dimension d'une puissance.

Les grandeurs de ce type sont en fait nombreuses, et il est possible de multiplier les définitions à volonté. Mais ne nous égarons pas, en gardant à l'esprit que ces outils ont une finalité musicologique. Il convient donc que ces grandeurs soient pertinentes non seulement scientifiquement mais surtout musicalement, et que chacune apporte au phénomène harmonique son éclairage qui lui est propre, sans piétiner sur les autres. Autrement dit, chaque notion se doit de servir la diversité des approches et l'enrichissement des points de vue, afin d'aboutir à une vision plus complète du phénomène harmonique.

Nous allons tâcher de développer dans cette partie les notions qui nous semblent les plus naturelles, introduites pour certaines par Jean-Marc Chauvel dans son livre *Les métamorphoses d'Orphée*, sans complexifier la chose par soucis mathématique. Le contenu musical de ces notions, et donc leur pertinence, seront fouillés ultérieurement.

3.3.1 Superposition d'ondes : termes d'interaction

L'harmonie naît dès que deux sons sont joués en même temps. Dans le cadre aux conditions physiquement raisonnables où l'on fait de la musique, l'onde de pression qui résulte de la superposition de deux ondes mère n'est rien d'autre que la superposition de ces deux ondes. Ainsi, si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ désignent les formes temporelles des deux sons de départ, la forme temporelle du son résultant est : $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$. Mais qu'en est-il de l'énergie ? Il suffit de développer le produit scalaire pour voir un terme d'interaction apparaître :

$$\mathcal{E} = \|X_1 + X_2\|^2 = \|X_1\|^2 + \|X_2\|^2 + \langle X_1|X_2 \rangle + \langle X_2|X_1 \rangle,$$

c'est à dire :

$$\mathcal{E} = \|X_1 + X_2\|^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + 2 \int |X_1(f) * X_2(f)| df \quad (3.1)$$

L'énergie résultante de la superposition de 2 sons n'est donc pas la somme des énergies des ondes qui la composent, il faut y rajouter le terme

$$\langle X_1|X_2 \rangle + \langle X_2|X_1 \rangle = 2|\langle X_1|X_2 \rangle| = 2 \int |X_1(f) * X_2(f)| df.$$

Ce terme est un terme d'*échange*, d'*interaction*, qui représente l'*énergie échangée* entre les deux ondes, l'énergie qu'elles mettent en commun. Crucial en physique classique, c'est lui qui est responsable notamment des interférences et de la diffraction en optique. Tout produit scalaire ou hermitien est d'ailleurs une manière de parler de la ressemblance de deux objets, de ce qu'ils ont en commun. À ce titre, ce terme va mesurer en un certain sens la ressemblance entre les deux sons, sens qu'il reste à préciser en termes perceptifs. Nous allons donner à ce terme le nom de concordance harmonique.

3.3.2 Concordance entre deux notes

Soient deux sons qui sont entendus simultanément, que l'on va considérer comme tenus pour ne pas s'occuper, comme ce sera le cas dans toute la partie 3.3, de la dimension temporelle. Notons X_1 et X_2 leurs spectres respectifs. On définit alors la concordance comme étant égal au terme d'interaction précédemment exposé, à un facteur près :

$$\mathcal{C} = \int |X_1(f) * X_2(f)| df \quad (3.2)$$

La concordance entre deux sons est une grandeur positive qui mesure le recouvrement des fréquences entre les deux sons. Imaginons par exemple deux sons dont le spectre se présente sous forme d'une gaussienne. La concordance est maximale lorsque les centres des gaussiennes sont confondus, par contre elle sera quasiment nulle dès que l'espacement entre les centre est plus grand que la largeur des gaussiennes. Nous illustrons ci-dessous un cas intermédiaire :

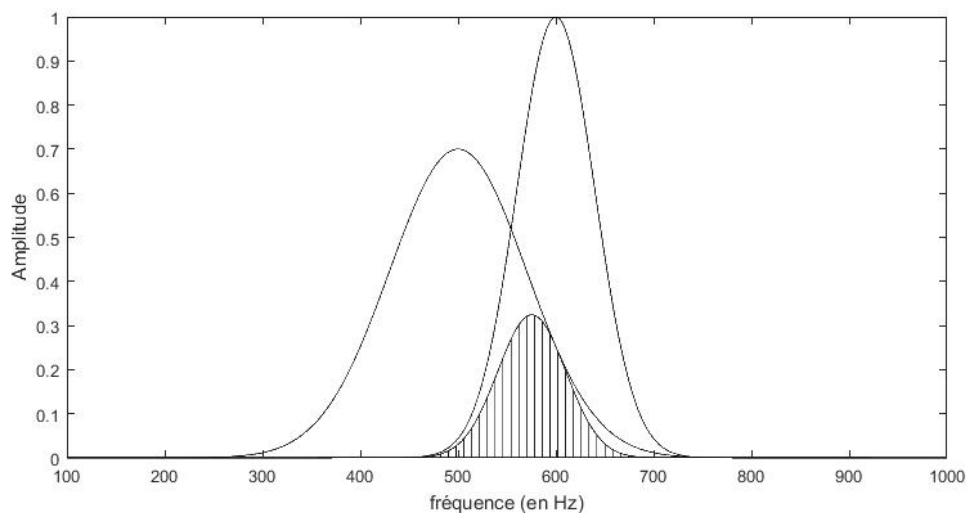


FIGURE 3.1 – Les deux spectres de départ sont représentés par les grandes gaussiennes. Le produit des deux reste une gaussienne, et son aire, hachurée, correspond à la concordance entre les deux sons.

Imaginons maintenant que ces deux gaussiennes ne sont en fait que les premiers partiels de nos deux sons, qui sont en fait des sons complexes, au sens où plusieurs partiels les composent. Dans ce cas, même si les premiers partiels sont trop éloignés pour se recouper, il n'est pas dit que les partiels d'ordres plus élevés ne se recouperont pas, important ainsi leur contribution à la concordance. Les

partiels qui se recoupent peuvent très avoir des ordres différents, et plus les harmoniques supérieurs auront de l'importance plus nombreux seront les apports à la concordance. Nous plaçant dans une perspective musicale, nous considérerons essentiellement des sons harmoniques, mais la démarche est extrêmement générale, il est possible de calculer la concordance en faisant intervenir des sons inharmoniques ou même des sons sans fréquence claire, comme des bruits. Nous n'étudierons pas ici ces derniers, c'est pourquoi nous parlerons dorénavant de notes plutôt que de sons. Nous comprendrons mieux dans la partie 4 l'influence du spectre sur la concordance.

3.3.3 Concordance d'un accord

Concordance harmonique d'un accord

Soit maintenant un accord composé de n notes. Désignons par X_1, \dots, X_n leurs spectres. L'énergie de cette superposition est alors :

$$\mathcal{E} = \langle X_1 + \dots + X_n | X_1 + \dots + X_n \rangle = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n + \sum_{i,j} \langle X_i | X_j \rangle \quad (3.3)$$

La concordance est toujours définie comme étant le terme d'interaction, il prend ici la forme $\sum_{i,j} \langle X_i | X_j \rangle$, ou encore :

$$\mathcal{C} = \sum_{i < j} | \langle X_i | X_j \rangle | \quad (3.4)$$

La concordance d'un accord est donc la somme des concordances prises deux à deux. Voici une illustration de la concordance d'un accord à 3 sons, où chaque spectre est représenté par une gaussienne. Cet exemple est uniquement pédagogique, il faut en fait imaginer que ces recouvrements ont lieu entre des partiels de nos notes de départ de rangs élevés.

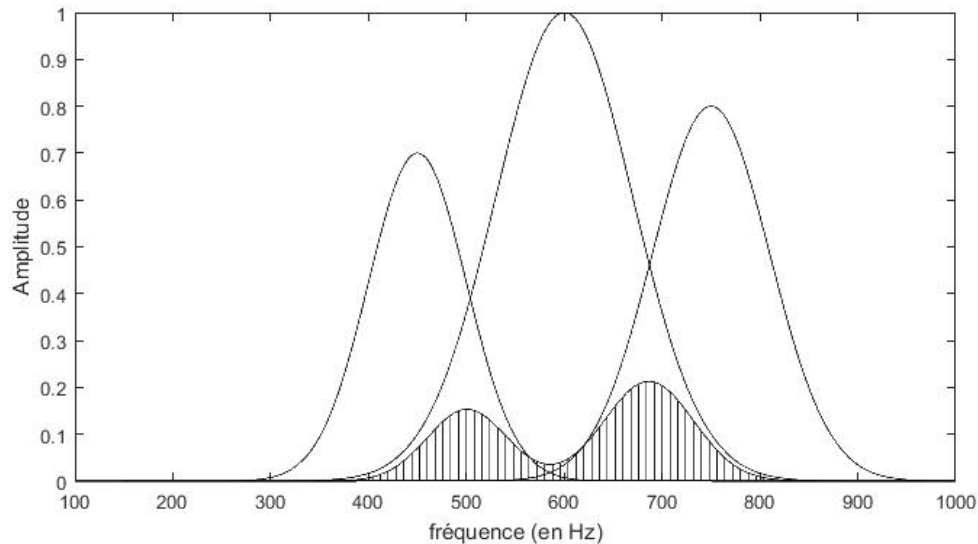


FIGURE 3.2 – Concordance d'un accord de 3 sons : Les spectres de départ sont représentés par les grandes gaussiennes. L'aire de la partie hachurée correspond à la concordance de l'accord, qui est la somme des produits deux à deux des gaussiennes.

Si l'accord comporte un unisson, on ne peut pas réduire cet unisson dans le calcul de la concordance en omettant une des notes de l'unisson, il faut en tenir compte. Cette question est en fait un point crucial, qui sera discuté dans la partie 5 qui traitera de la normalisation de la concordance pour sa représentation.

3.3.4 Concordances d'ordre supérieur

- Concordance totale d'un accord -

Étant donné que la concordance d'un intervalle mesure le recouvrement des notes sur le spectre des fréquences, il est naturel de s'intéresser, pour un accord de n notes, au recouvrement fréquentiel simultané des n , pendant que sa concordance ne mesure que le recouvrement des notes de l'accord prises deux à deux.

En définissant la concordance totale de l'accord par :

$$\mathcal{C}_T = \left(\int |X_1(f) * \dots * X_n(f)| df \right)^{2/n}, \quad (3.5)$$

on obtient une grandeur qui mesure ce recouvrement simultané.

La puissance $2/n$ permet de rendre l'expression homogène à une puissance, même si l'interprétation énergétique de cette concordance totale, bien qu'intuitive, est moins aisée que celle de la concordance, du fait qu'elle n'apparaît pas dans le développement (3.3) de l'énergie de l'accord.

Voici une illustration de la concordance totale, où chaque spectre est simple gaussienne :

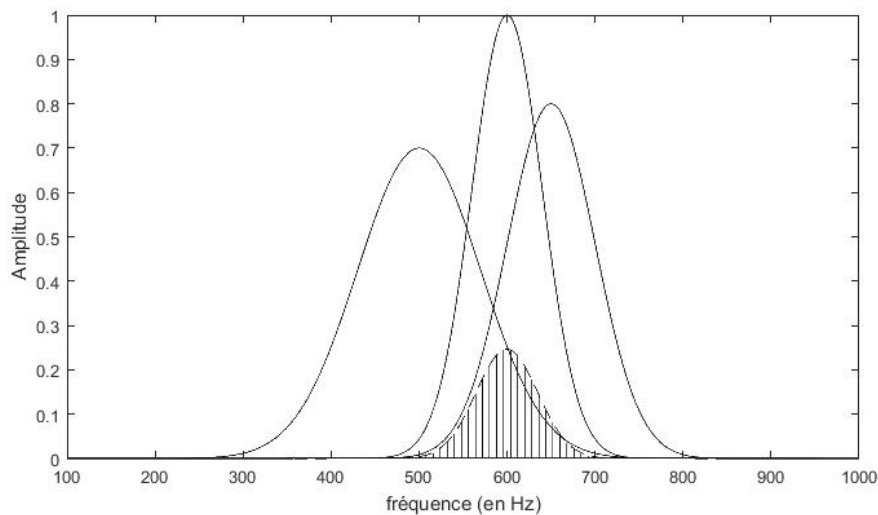


FIGURE 3.3 – Concordance totale d'un accord de trois sons : Les spectres de départ sont représentés par les grandes gaussiennes. Le produit renormalisé des trois reste une gaussienne, et son aire, hachurée, correspond à la concordance totale de l'accord.

Une plage de fréquences communes à deux notes de l'accord peut ne pas être commune aux trois notes, elle contribuera alors à la concordance mais pas à la concordance totale, si l'on considère des accords de trois notes. Par contre une plage de fréquences contribuant à la concordance totale contribuera forcément à la concordance.

- Concordance harmonique d'ordre k d'un accord -

Si l'on considère un accord de 4 notes, on en plus de s'intéresser à la concordance et à la concordance totale, il paraît naturel de s'intéresser aux fréquences partagés par les groupes de trois notes de l'accord. Comme un accord de quatre notes est composé de 3 "sous-accords" de 3 notes, on peut calculer les trois concordances totales de ces sous-accords et les sommer. Définissons de manière plus générale la concordance d'ordre k , pour un accord d'au-moins k notes, comme la somme des concordances totales des sous-accords de k notes.

En d'autres termes :

$$\mathcal{C}^{(k)} = \sum_{\text{sous-accords de } k \text{ notes}} \mathcal{C}_T \quad (3.6)$$

La concordance d'ordre k d'un accord composé de n notes, avec $k \leq n$, mesure donc l'énergie partagée par k notes de l'accord, elle traduit donc les *interaction simultanées* à k notes.

La concordance d'ordre 2 n'est rien de plus que la concordance telle que définie précédemment, et on emploiera, sauf ambiguïté, le terme de concordance. La concordance d'ordre n correspond quant à elle à la concordance totale. Une plage de fréquence contribuant à la concordance d'ordre $k+1$ contribuera à la concordance d'ordre k , mais la réciproque n'est pas vraie, ce qui incite à voir ces notions de manière ensembliste, la suite des concordances d'ordre k pour un accord fixé étant décroissante, c'est à dire que la concordance d'ordre $k+1$ est d'une certaine manière incluse dans la concordance d'ordre k .

3.3.5 Cohérence d'un accord

La concordance et les concordance d'ordre supérieur mesurent la quantité d'énergie mise en commun entre les notes, mais elles n'importent pas d'information sur la répartition de cette énergie. Notamment, à cause de la sommation dans le calcul de la concordance d'un accord des concordances des intervalles pris deux à deux, nous ne savons pas comment se répartie cette concordance globale entre les différents intervalles. C'est pourquoi nous allons introduire la cohérence d'un accord, qui est définie comme l'écart type des concordances des notes prises deux à deux. Elle mesure l'homogénéité des intervalles composant l'accord.

3.4 Aspects dynamiques : étude de l'enchaînement

Les outils introduits précédemment introduits de concordance et de cohérence sont associés à un accords, ou plus généralement à une verticalité. On parlera de verticalité quand des notes sont entendues à un même instant, quel que soit le moment de leur attaque. Ainsi une même note pourra participer de plusieurs verticalités. Mais si ces grandeurs permettent de comparer les accords, elles ne disent rien de leur enchaînement. Or l'harmonie se développe dans la dimension temporelle, et passer à côté de cette dimension, c'est passer à côté des fonctions tonales, des cadences, des mouvements, des résolutions, des modulations, et de tout un pan de l'incroyable richesse du phénomène harmonique. En s'inspirant de ce qui a été fait précédemment, nous allons introduire la notion de concordance différentielle d'un enchaînement.

3.4.1 Concordance différentielle d'une voix seule

Imaginons un instrument monophonique jouant une mélodie. Ici point d'harmonie au sens strict du terme, puisqu'il n'y a pas de polyphonie. Cependant, les notes continues à avoir des rapports entre elles, rapports à la fois spatiaux et temporels, et qui concernent l'enchaînement lui-même, et non plus la note dans sa durée et son immobilité. Mais la concordance, qui s'occupent des rapports spatiaux, a toujours un sens dans ce contexte, sens qui, s'il n'est physique, est au moins intuitif. Prendre la concordance entre deux notes qui se suivent, et non plus qui se superposent, c'est affirmer, au moins localement, la continuité de la perception qui s'inscrit dans un processus temporel, et le rôle crucial de la mémoire et du contexte en musique.

Définissons la concordance différentielle entre deux consécutives comme la concordance statique de l'intervalle constitué de ces deux notes :

$$\mathcal{C}_{diff}(X_1 \rightarrow X_2) = \mathcal{C}(\text{Intervalle}(X_1, X_2)) \quad (3.7)$$

3.4.2 Enchaînement d'accords et concordance différentielle

Comment définir la concordance différentielle d'un enchaînement d'accords, quand il y a plusieurs voix ? Précisément toujours comme l'énergie d'interaction entre le premier accord et le deuxième. Précisons cela : en notant $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ le premier accord et $Y = \{Y_1, \dots, Y_m\}$

le second, où n n'est pas nécessairement égal à m , le terme d'interaction, comme dans la formule (3.4), prend la forme

$$| \langle X|Y \rangle | = \sum_{i,j} | \langle X_i|Y_j \rangle |$$

. Ainsi :

$$\mathcal{C}_{diff}(\{X_1, \dots, X_n\} \longrightarrow \{Y_1, \dots, Y_m\}) = \sum_{i,j} \mathcal{C}(\text{Intervalle}(X_i, Y_j)) \tag{3.8}$$

Illustrons sur un même dessin la concordance différentielle et les concordances statiques de deux accords de trois sons :

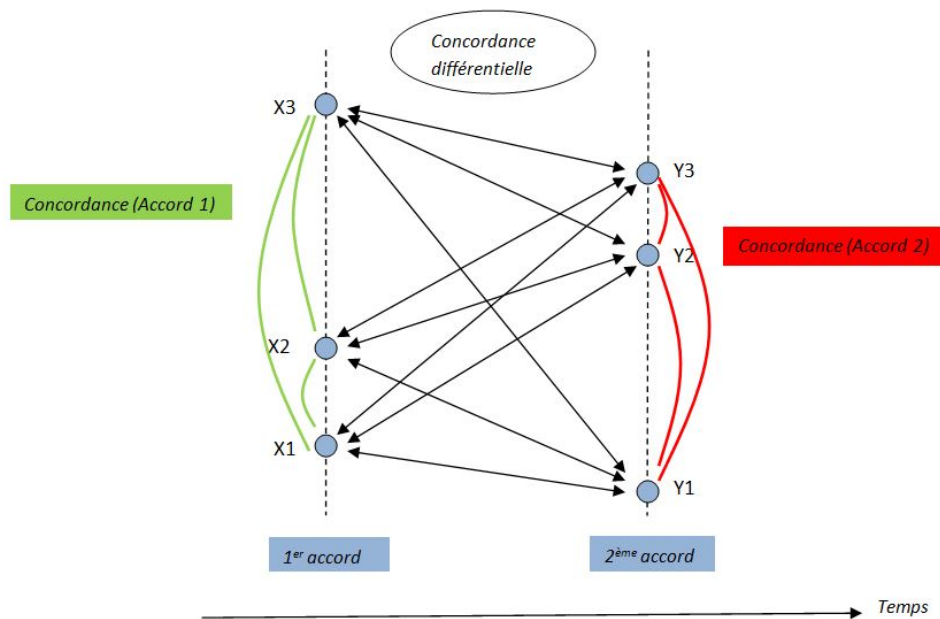


FIGURE 3.4 – Concordance statiques et concordance différentielle lors de l'enchaînement de deux accords de 3 sons. La concordance différentielle est définie comme la somme des concordances des flèches noires.

Remarquons que l'on ne prend pas en compte le suivi de chaque voix, chaque accord est considéré comme un tout. Prendre la somme des concordances des mouvements de chaque voix, outre le fait de perdre en signification sur le plan acoustique, restreindrait en effet le repertoire à un repertoire où la notion de voix a un sens, et tiendrait compte de moins d'interaction.

- Cohérence différentielle -

Nous pouvons maintenant définir le pendant dynamique de la cohérence statique, en prenant l'écart type des concordances différentielles deux-à-deux, qui mesure le changement de morphologie de la verticalité.

- Concordances d'ordre supérieur -

Il est naturel de chercher maintenant à définir une concordance différentielle totale et d'ordre k , comme on l'a fait en statique. Mais la tâche n'est pas aussi simple que pour une verticalité. Plutôt que sommer les concordances entre une note du premier accord et une du second accord, on peut penser à prendre la concordance d'ordre k d'un sous-accord de k' notes du premier accord avec un sous-accord de $k - k'$ notes du second accord, en sommant sur les sous-accords et sur k' . La concordance différentielle totale de l'enchaînement serait alors la concordance totale, c'est à

dire d'ordre $n + m$, du groupe formé par toutes les notes du premier et du second accord. Mais cette approche, si elle est séduisante mathématiquement, semble artificielle et déconnectée de la réalité musicale. Nous ne l'explorerons donc pas par la suite, nous contentons de la concordance différentielle d'ordre 2.

- Localité vs Globalité -

L'échelle ici est locale : on se contente de regarder un enchaînement strict de deux sons. On pourrait imaginer élargir notre angle de vue en développant une notion qui chapeaute plusieurs enchaînements, surtout si l'on veut avoir prise sur des mouvements généralement élargis à plus de deux accords, comme les cadences et les modulations.

À ce stade, c'est à dire sans introduire de notion fondamentalement nouvelle, on peut élargir l'échelle à une cadence, une phrase musicale, ou même un morceau, en faisant des statistiques sur toutes les verticalités, éventuellement pondérées par des durées, des concordances, concordances d'ordre supérieur et des cohérences, ainsi que faire des statistiques sur tous les enchaînements de la concordance différentielle et de la cohérence différentielle. Cependant, il est peut probable que de telles façons de procéder donnent des résultats concluants, car ils restent encore malgré tout à une échelle locale, sans tenir compte l'enchaînement global.

3.4.3 Symétrie temporelle

Les notions différentielles définies précédemment possèdent une symétrie temporelle, c'est à dire que l'enchaînement *Accord 1* \rightarrow *Accord 2* et équivalent, en terme de concordance et de cohérence différentielles, à l'enchaînement *Accord 2* \rightarrow *Accord 1*. Ainsi, dans un contexte tonal, ces notions ne distingueront pas l'enchaînement de septième de dominante vers le premier degré ($V_7 \rightarrow I$) de l'enchaînement renversé $I \rightarrow V_7$. Or cette symétrie temporelle se combine mal avec la réalité musicale, car il va sans dire que ces deux enchaînements sont très différents en terme de perception. Le premier, que Schoenberg classe parmi les progressions fortes, correspond à un mouvement de tension-détente, un mouvement de résolution vers la tonique, tandis que le deuxième, progression descendante, s'arrête sur la tension du cinquième degré, qui ne se résout pas. Si elle constitue un premier outil d'investigation des enchaînements, la concordance différentielle, telle que définie ici, passe sous silence, à cause de la symétrie temporelle, tout un pan de la réalité musicale. Après avoir présenté les résultats obtenus avec la concordance différentielle dans la partie 6.2, nous envisagerons des possibilités pour briser cette symétrie temporelle.

Chapitre 4

Modèle simplifié de spectre pour une approche systématique de la concordance

4.1 Signal audio vs partition

La concordance entre deux notes représente l'énergie partagée par les deux notes, et celle d'un accord a été définie comme la somme des concordances des notes de l'accord prises deux à deux. Mais encore faut-il pour cela pouvoir distinguer les notes entre elles. Sur une partition, cela est aisé, mais cela l'est moins dès que le matériel de départ n'est pas une partition, mais un signal auditif. Des techniques de séparation de source sur signal audio existent, qui demandent un travail conséquent pour d'aboutir à une partition, au moins virtuelle, où chaque note est différenciée et associée à un son. Nous ne nous attellerons pas ici à la séparation de source. En effet, outre les limitations et les problèmes que posent ces techniques sont nombreux. Imaginons un chœur à quatre voix. Le calcul de la concordance nécessite *a priori* de pouvoir séparer entre eux non seulement chaque pupitre, mais également chaque chanteur de chaque pupitre, afin de prendre en compte la concordance des unissons dans le calcul de la concordance. Par contre si l'on a accès à la partition ainsi qu'au spectre d'une voix de chaque pupitre - spectre qui pourra provenir d'un signal audio ou être modélisé, comme cela sera discuté dans la partie suivante - il est alors possible de calculer la concordance, soit en tenant compte des unissons, soit sans en tenir compte. Cette question des unissons, et cet *a priori*, seront discutés dans la partie 5. Outre ce problème, se pose celui de l'ambiguïté entre son partiel ou autre son. La cornemuse ou l'orgue sont des instruments où il est possible d'ajouter des quintes, des tierces et des octaves, autrement dit à donner beaucoup d'importance à certains partiels. Dans ce cas, afin de tenir compte de la richesse timbrale de tels instruments et des choix de registrations de l'interprète, il convient de ne pas séparer distinguer dans le son de l'orgue plusieurs sons complexes - par exemple à distance de quinte, mais bien d'englober cette richesse spectrale en un seul son. Le simple profil temporel du signal ne suffit donc pas au calcul de la concordance, il faut, sinon une partition et des spectres associés à chaque note, au moins de pistes séparées. Dans toute la suite de l'étude l'objet de départ nous partirons d'une partition. Il reste maintenant à associer aux notes un spectre, afin de pouvoir calculer la concordance.

4.2 Nécessité d'une modélisation

L'idée la plus simple est de travailler sur des sons échantillonnés. Mais le calcul des concordances sur des sons échantillonnés a plusieurs limites, dans l'optique qui nous intéresse :

4.2.1 Choix intrinsèques aux calculs

L'analyse temps-fréquence implique des choix inhérents à la transformée de Fourier à court terme (TFCT) :

- Fréquence d'échantillonnage

- Type de fenêtre utilisée
- Largeur de la fenêtre
- Pas du fenêtrage

Or ces choix sont autant de degrés de liberté qui complexifient un problème que l'on voudrait dans un premier temps rendre le plus simple possible. En effet, la notion de concordance harmonique et les notions dérivées étant encore relativement nouvelles, la démarche épistémologique se situe pour l'instant à un niveau presque expérimental, qui consiste dans un premier temps à implémenter ces notions et à les tester sur des accords et des enchaînements harmoniques, afin d'interroger leur pertinence musicale, de les relier à des données perceptives, de mieux jauger leur champs d'action, et enfin de les affiner. Or les choix liés au calcul de la transformée de Fourier, même s'ils constituent une étape indispensable à tout traitement de signaux réels, sont en quelque sorte artificiels car ne correspondent pas à une réalité ou à une contrainte physique, si ce n'est peut-être au système perceptif humain, mais cet aspect n'a pas été abordé dans le stage.

4.2.2 Complexité intrinsèque aux sons réels

La forme du spectre d'un instrument est dépendante de la fondamentale. Cette dépendance est évidente sur la trompette par exemple, pour laquelle les contraintes physiques liées à l'émission de la note (débit d'air, pression des lèvres...) varient avec sa hauteur, ce qui crée une forte dépendance du timbre. Mais cette dépendance est très générale, les sons aigus étant souvent moins riches en harmoniques que les sons graves.

Voici par exemple le spectre de sons échantillonnés d'un même orgue (pris dans la bibliothèque de sons Garritan), le premier correspondant à l'octave supérieure par rapport au premier. L'échelle en abscisse du second a été dilatée par deux, de manière à avoir une correspondance des harmoniques. On se rend compte par exemple qu'en passant à l'octave le troisième et le douzième harmonique disparaissent.

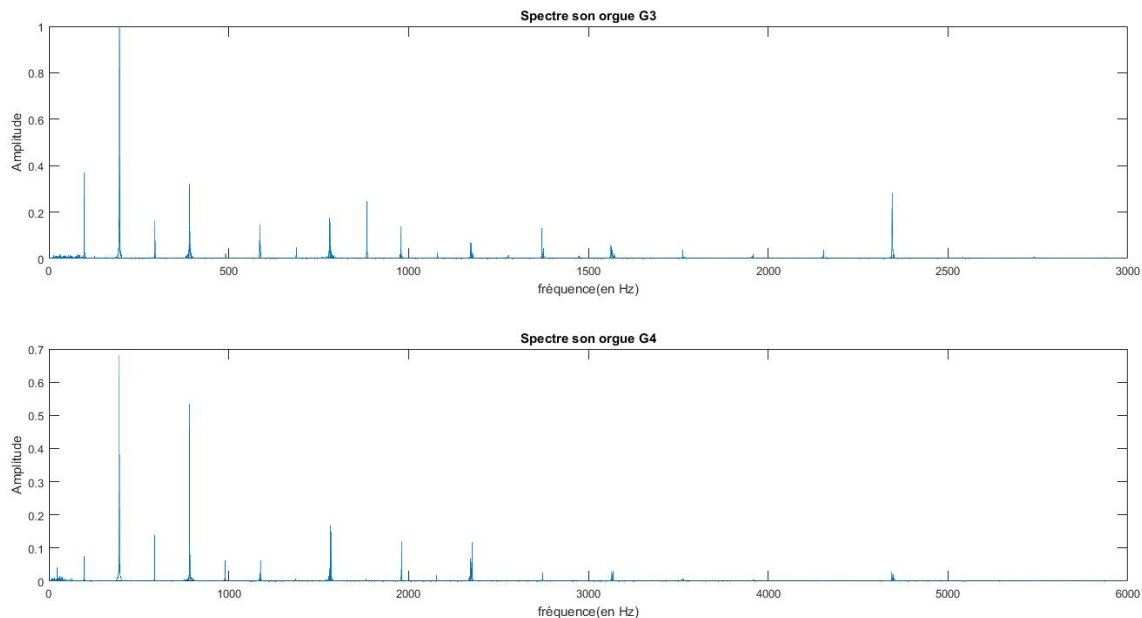


FIGURE 4.1 – Spectre de sons d'orgue échantillonnés (pris dans la bibliothèque Garritan), correspondant pour le premier à la hauteur G3, pour le second à la hauteur G4

Du fait de cette dépendance, la concordance entre deux notes séparées d'un certain intervalle dépendra non seulement de cet intervalle, mais aussi de la hauteur des notes. Quelque soit la réalité perceptive à laquelle se rattache la concordance, et que nous allons essayer de cerner, il est bien connu qu'un accord sonnera différemment selon sa tessiture. Par exemple, un accord "compact" sonnera mieux dans le médium ou dans l'aigu que dans le grave, où l'on aura plus de

mal à différencier les notes. Cette dépendance à la hauteur, si elle constitue une réalité physique, complexifie cependant la compréhension que l'on a de la concordance. Une autre réalité produit d'ailleurs le même effet : le bruit qui est présent dans toute prise de son. Or c'est précisément cette compréhension que nous souhaitons développer dans un premier temps, avant d'utiliser la concordance comme outil d'investigation de la réalité sonore dans toute sa complexité. Pour cela il faut donc que les paramètres soient le plus contrôlables possible, et les résultats les plus génériques.

Il y a un autre paramètre du son, pourtant crucial en musique, dont la prise en compte ne nous paraît pas essentielle parce qu'elle entrave le caractère générique de la concordance : c'est l'intensité sonore. Tout d'abord, la forme du spectre dépend elle-aussi bien souvent de l'intensité, pensons à un trombone qui aura un son plus cuivré quand il jouera fort, ou à un violoncelle dont le son deviendra plus rocailleux. Mais au-delà de ces phénomènes, même à considérer que la forme globale du spectre, autrement le rapport entre les partiels, ne varie pas, les amplitudes augmentent avec l'intensité. La concordance d'un accord majeur dépend donc des nuances des trois notes qui le composent, qui peuvent être différentes. Ainsi on ne peut parler de la concordance d'un accord que relativement à une distribution des nuances de ses notes. Cela n'est pas très satisfaisant, surtout si l'on s'est déjà abstrait de la dépendance à la hauteur. En gommant en plus la dépendance à la distribution de fréquence, on obtient une concordance déjà moins contingente, qui ne dépend plus que de la forme du spectre générique.

Afin de tester la pertinence des notions développées, il convient donc de ramener le problème à l'essentiel, c'est à dire d'envisager un modèle simplifié de spectre, assez riche pour tenir compte des principaux phénomènes physiques qui entrent en jeu dans l'harmonie et pour disposer d'un certain nombre de degrés de liberté ajustables nécessaires pour tester l'inertie des notions, mais assez simple pour pouvoir les relier à sa dimension perceptive.

4.2.3 Discrétisation du spectre

La principale limitation des sons échantillonnés consiste en ceci que la bande de fréquences échantillonnées est nécessairement discrète, ce qui pose une barrière à l'étude de la micro-tonalité et des tempéraments par exemple. La modélisation du spectre aura l'avantage de donner accès à une bande continue de fréquences.

4.2.4 Vers une classification par les grandeurs harmoniques

En s'abstrayant de la dépendance en hauteur absolue et de l'intensité des notes, on peut alors parler, pour une forme de spectre donnée, de la concordance d'une quinte, de la concordance d'un accord mineur, d'un accord diminué, ou encore de la concordance différentielle d'un mouvement dominante-tonique dans une position donnée, quelque soient la fondamentale et le registre. Cela aboutit à une classification, sinon une caractérisation des accords et des enchaînements, dans laquelle cependant le renversement et la morphologie des accords sont cruciales. Attention toutefois, l'indépendance de la forme du spectre à la hauteur n'entraîne pas nécessairement l'indépendance par rapport au registre. Cela est vrai pour le tempérament égal, mais dès qu'on adopte un autre tempérament, les intervalles ne se valent pas, et on a une dépendance au degré. La concordance est donc dépendante à la fois de la forme du spectre et du tempérament utilisé pour son calcul.

4.2.5 Implémentation et temps de calcul

Dans l'optique du développement d'un logiciel, qui sera présenté en 7, il convient d'avoir des programmes qui calculent vite les grandeurs harmoniques. Outre la nécessité heuristique présentée précédemment, un modèle simplifié permettra une implémentation sur l'ordinateur plus aisée, et ainsi un logiciel plus efficace. Le but de la modélisation est donc d'avoir des résultats plus facilement interprétables, plus génériques, et des procédures plus facilement implémentables.

4.3 Modèle de spectre en gaussiennes

Comme expliqué précédemment, nous allons adopter un modèle générique de spectre, dont la forme et l'amplitude seront les mêmes pour chaque fréquence. Ce modèle doit être assez souple

pour modéliser de façon suffisamment réaliste divers instruments et divers types de sons. Une idée consiste à prendre un spectre réel, de le lisser et de le traiter pour enlever le bruit, puis de le translater et le dilater pour modéliser le spectre aux autres fréquences. Mais une telle modélisation exige d'avoir un son échantillonné de chaque instrument que l'on aimerait pouvoir prendre en compte. Cela réduit drastiquement la souplesse du modèle. Le deuxième désavantage est la lourdeur dans l'implémentation, puisque cela impliquerait de pré-calculer ces spectres. Nous allons adopter une autre méthode, en modélisant le spectre de l'instrument par un tracer direct "à la main", dépendant d'un nombre réduit de paramètres.

Le modèle le plus simple consisterait à construire un spectre de raies où chaque partiel est un oscillateur sinusoïdal. Mais sans épaisseur donnée aux partiels, la concordance d'un intervalle est nulle presque partout, non nulle seulement sur un nombre fini d'intervalles qui correspondent aux notes qui ont un recoupement exact des harmoniques. Il nous faut donc un modèle qui dépasse le spectre de raies en donnant de l'épaisseur aux partiels. Outre de permettre d'avoir une concordance non presque partout nulle, cette épaisseur a des justifications plus fondamentales :

1. Musicalement, cette largeur spectrale peut correspondre à une richesse spectrale liée par exemple à un vibrato de l'instrumentiste, ou à un effet de chorus.
2. Physiquement, on peut l'interpréter de manière probabiliste comme une indétermination spectrale.

L'idée consiste à modéliser chaque partiel par une gaussienne centrée autour de ce partiel. Chaque partiel vient donc avec trois informations :

- Sa position sur le spectre
- Son amplitude
- Sa largeur (paramètre σ)

L'échelle spectrale est ici logarithmique, en \log_2 , afin de se rapprocher de la perception des hauteurs et de la logique du clavier de piano, et le spectre est directement construit sur cette échelle, autrement dit la largeur de la gaussienne est en \log_2 . L'échelle du log a été choisie pour avoir les correspondances suivantes :

$$\begin{aligned} \text{Saut d'octave} &\longleftrightarrow \pm 1 \\ \text{Saut de 1/2-ton tempéré} &\longleftrightarrow \pm 1/12 \end{aligned}$$

Pour des histoires de commodité de lecture, nous allons représenter les fréquences dans l'échelle des demi-tons tempérés, autrement dit en multipliant la valeur en \log_2 par 12.

Voici un exemple de spectre modélisé, où l'on a représenté 10 harmoniques qui ont tous le même facteur $\sigma = 0.01$, avec une décroissance en $1/k$, où k est le rang de l'harmonique. On désignera dans la suite par K le nombre de partiels.

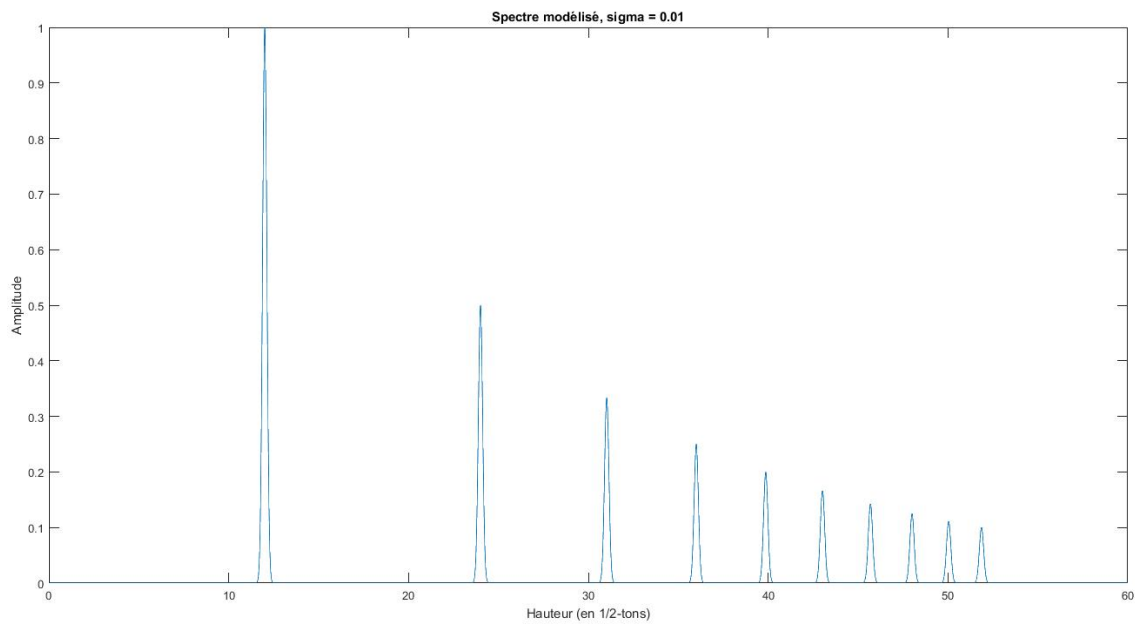


FIGURE 4.2 – Spectre modélisé par des gaussiennes, avec $\sigma = 0.01$, $K = 10$ et décroissance en $1/k$

Nous avons choisi ici un facteur σ homogène sur tout les partiels. Ce choix, que l'on conservera dans la suite du 4 et dans la partie 6, est motivée par l'interprétation 1 de la largeur spectrale comme un vibrato. Comprenons cependant que cette homogénéité n'est pas imposée par le modèle, elle n'est pas une condition de l'invariance de la concordance par translation spectrale. Dans la partie 7 concernant l'implémentation d'un logiciel représentant l'évolution de la concordance, le facteur σ sera paramétrable pour chaque partiel, en même temps que la position des partiels, qui pourront être inharmoniques, et leur amplitude.

Ce modèle permet de modéliser une grande quantité de sons, dont les sons inharmoniques. Ainsi on peut inclure l'inharmonicité des cordes du piano due à la raideur des cordes, ou modéliser de façon convaincante le son de cloche, dont voici le spectre modélisé par 8 partiels :

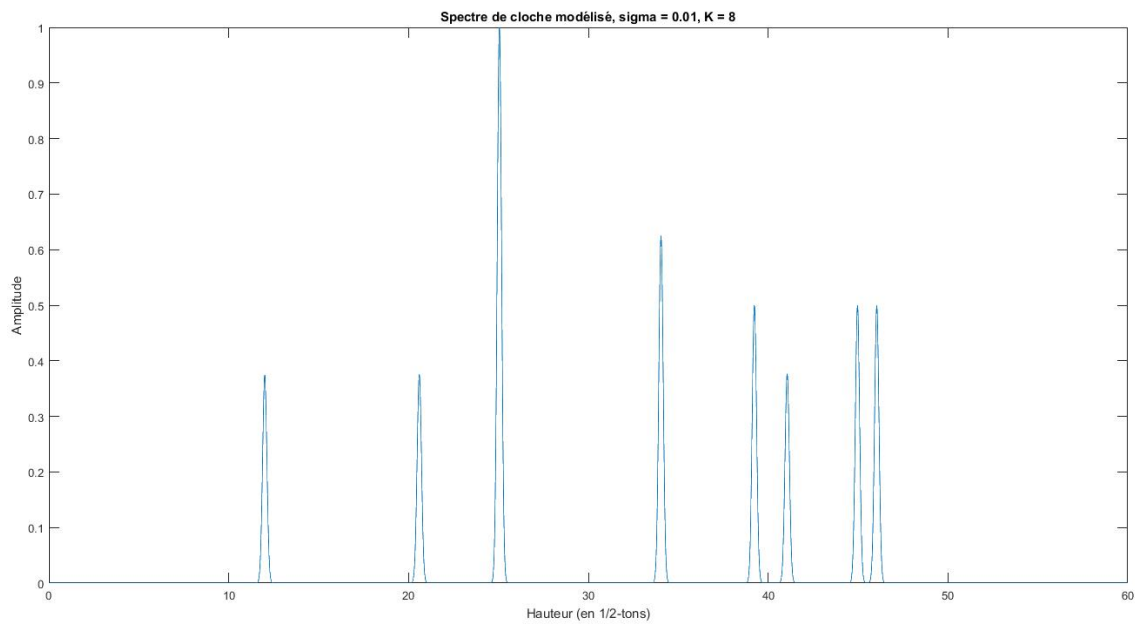


FIGURE 4.3 – Spectre modélisé de cloche, $K = 8$, $\sigma = 0.01$ répartition inharmonique des partiels. Voici les rapports des fréquences des partiels par la fréquence du premier partiel : (1.0000 1.6429 2.1250 3.5714 4.8214 7.1429 5.3571 6.7143), avec les amplitudes respectives : (0.3751 0.3751 1.0000 0.6249 0.4996 0.4996 0.3767 0.4996)

Nous savons que les partiels de la cloche n'ont pas le même profil temporel, autrement dit certains s'éteignent plus rapidement que d'autres, ce qui compte d'ailleurs parmi les propriétés caractéristiques de chaque cloche. Cette évolution temporelle du spectre, visible sur un spectrogramme, n'est pas prise en compte dans notre modèle.

Si l'inharmonicité du son influence radicalement l'allure de la concordance des accords, le nombre d'harmoniques, leur amplitude, leur largeur spectrale aura aussi une influence notable, et c'est précisément dans cette dépendance que réside la souplesse de ce modèle. Commençons par nous intéresser à la concordance entre deux notes.

4.4 Concordance d'un intervalle

L'invariance de la concordance par translation spectrale, imposée dans le modèle, permet de parler de la concordance d'un intervalle indépendamment de sa position. Comme expliqué en 4.2.4, la concordance d'une seconde majeure par exemple dépendra du tempérament et de la position de la première note par rapport à la note de référence pour l'accord. Le tempérament naturel par exemple contient par exemple deux secondes majeures différentes, l'une de rapport $\frac{9}{8}$, l'autre, plus petite, de rapport $\frac{10}{9}$. Ce n'est qu'en se plaçant en tempérament égal que tout se vaut et qu'il est possible de parler de concordance de la seconde majeure sans préciser sa première note. Une manière de ne pas créer d'ambiguïté est donner la valeur de l'intervalle en \log_2 ou en *cents*. Rappelons que le cent divise en 100 parties le demi-ton tempéré.

En implémentant sur Matlab le modèle de spectre ainsi que le calcul de la concordance, on peut représenter la courbe de la concordance des intervalles.

Voici cette courbe, sur une octave, pour $\sigma = 0.01$, $K = 3, 4$ et 20 , et décroissance en $1/k$:

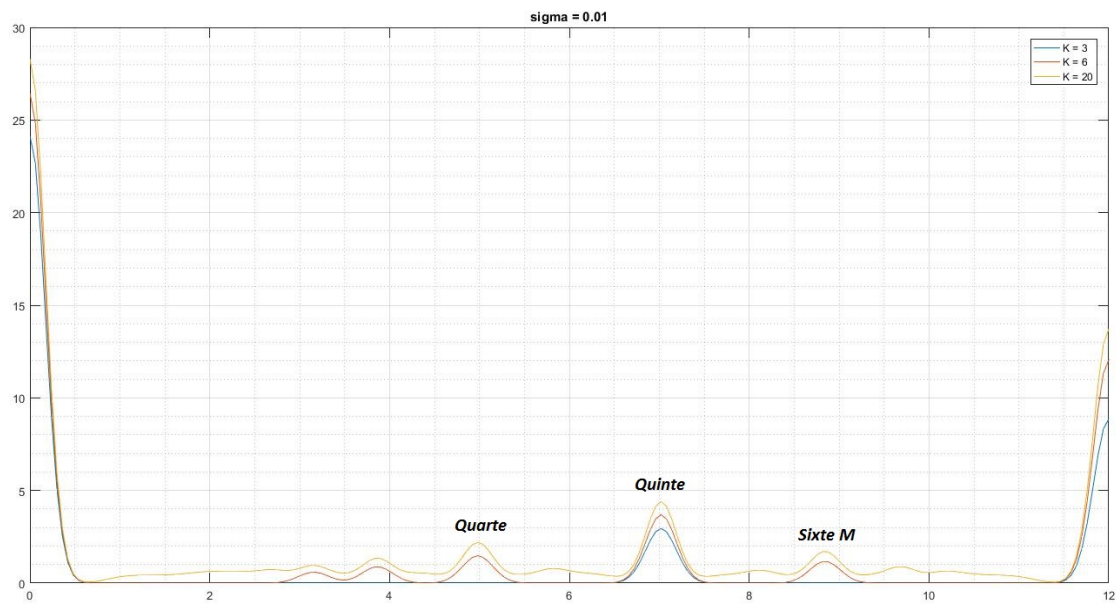


FIGURE 4.4 – Courbe de concordance des intervalles, sur une octave, pour $\sigma = 0.01$ et $K = 3, 6$ et 20 , et décroissance en $1/k$

Plus le nombre d'harmoniques pris en compte augmente, plus la courbe gagne en complexité et en relief, à condition qu'il n'y ait pas de recouvrement des gaussiennes pour les harmoniques élevés, auquel cas la courbe peut se tasser. On observe ce que le calcul permet de prévoir : certains maximums locaux de concordance ne sont présents que lorsque le nombre d'harmoniques est suffisamment élevé. Le pic de concordance au niveau de la quarte par exemple est dû au recouvrement entre l'harmonique 4 de la fondamentale et l'harmonique 3 de la deuxième note. Il apparaît donc seulement lorsque les troisième et quatrième harmoniques sont pris en compte.

Les intervalles justes correspondent aux maximaux de cette courbe. Voici la courbe de concordance sur deux octave, avec $\sigma = 0.01$ et $K = 10$, et décroissance en $1/k$, sur laquelle on a représentée en bâtonnets les intervalles de la gamme naturelle.

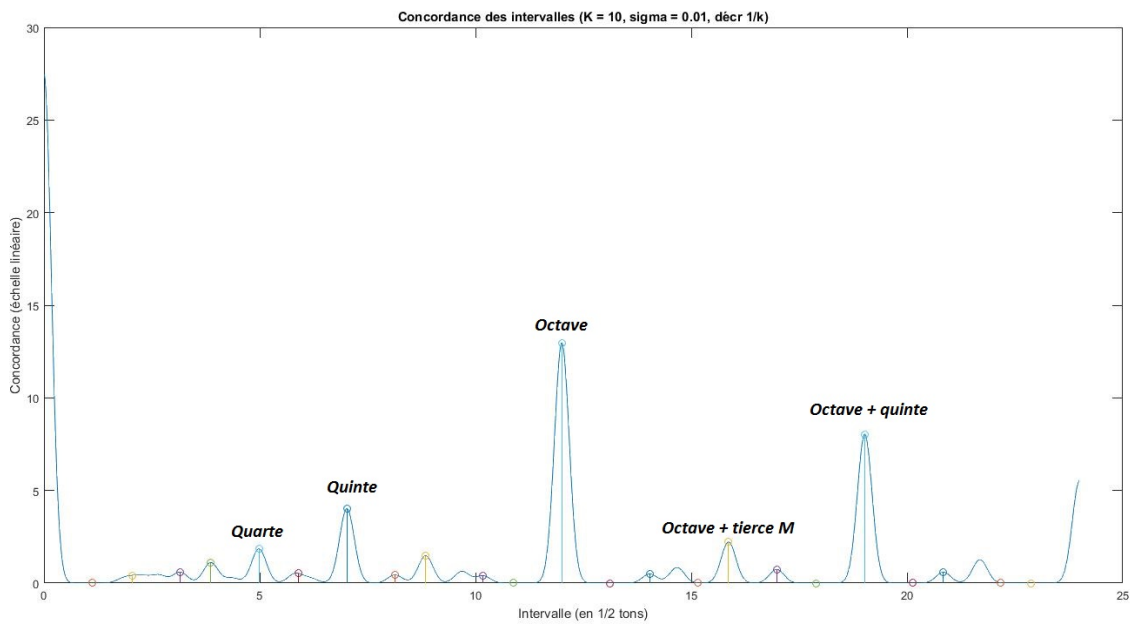


FIGURE 4.5 – Courbe de concordance des intervalles, sur une octave, pour $\sigma = 0.01$ et $K = 10$, $1/k$

On se rend compte que les intervalles proches de l'octave et de l'unisson que sont la seconde mineure et la septième majeure ont une concordance nulle, ainsi que plusieurs intervalles de la gamme naturelle dans la seconde octave, et que certains maximums locaux correspondent à des intervalles qui sont pas dans cette gamme. Les intervalles les plus concordants, en dehors de l'unisson et de la quinte, sont en tout cas la quinte et la quarte. En fait, pour chaque spectre rentré dans le modèle, les pics de concordance de la courbe des intervalles correspondent aux intervalles justes qui découlent naturellement du spectre. La dépendance du nombre, de l'emplacement et des hauteurs relatives de ces pics aux paramètres du modèle, que l'on explorera dans la partie 6, souligne une réalité musicale cruciale, et pourtant trop peu souvent discutée, qui donne à notre démarche sa pertinence, à savoir la dépendance de l'harmonie au facteur timbral. On n'écrit pas de la même manière pour chœur et pour quatuor à cordes, et ceci non pas seulement du fait des possibilités instrumentales différentes, mais également parce que tel accord ou telle disposition *sonne mieux* avec un chœur qu'avec un quatuor à cordes. Or les intervalles justes ne sont-ils pas les intervalles qui "*sonnent bien*" ? On voit déjà se dessiner le rapprochement entre la notion de concordance, qui provient uniquement de considérations physiques, et celle, connue depuis bien longtemps mais sans cesse remise en question au fil de l'évolution de la musique, de consonance. Nous aurons l'occasion dans la partie 6.1.1, de préciser cette relation en replaçant ces notions dans le contexte épistémologique qui est le leur.

4.5 Influence du paramètre σ de largeur spectrale

Le facteur σ est sans doute le paramètre le moins intuitif du modèle, c'est pourtant un paramètre crucial dans le calcul de la concordance. On a donné en 1 une interprétation de ce facteur en terme de vibrato, autrement dit il mesure l'imprécision vis-à-vis de la hauteur du son émis. Une bonne analogie est à chercher dans la peinture, où le facteur σ correspondrait à l'épaisseur du pinceau. Un pinceau fin permet de dessiner des détails, alors qu'un pinceau épais réalisant exactement les mêmes mouvements que le pinceau fin ne fera qu'un grossier pâté sur la toile, car les traits seront trop rapprochés pour être distinguables. Mais ce que perd le trait fin, c'est la visibilité. Penchons-nous maintenant sur la figure 4.5 de concordance des intervalles. Dessinée avec un $\sigma = 0.01$, elle présente un relief de creux et de bosses relativement marqué. Mais si σ augmente, la courbe aura tendance à s'aplatir vers le haut, la concordance tendant vers une valeur non nulle à peu près homogène sur la première octave. Par contre, si σ diminue, les pics de concordance deviendront de

plus en plus fins, et moins marqués, ce qui les rendra moins visibles à l'échelle de l'octave.

Illustrons cela par la surface de concordance des intervalles, qui représente l'évolution de la concordance des intervalles en fonction de σ . Le facteur σ est pris constant sur tous les partiels du spectre.

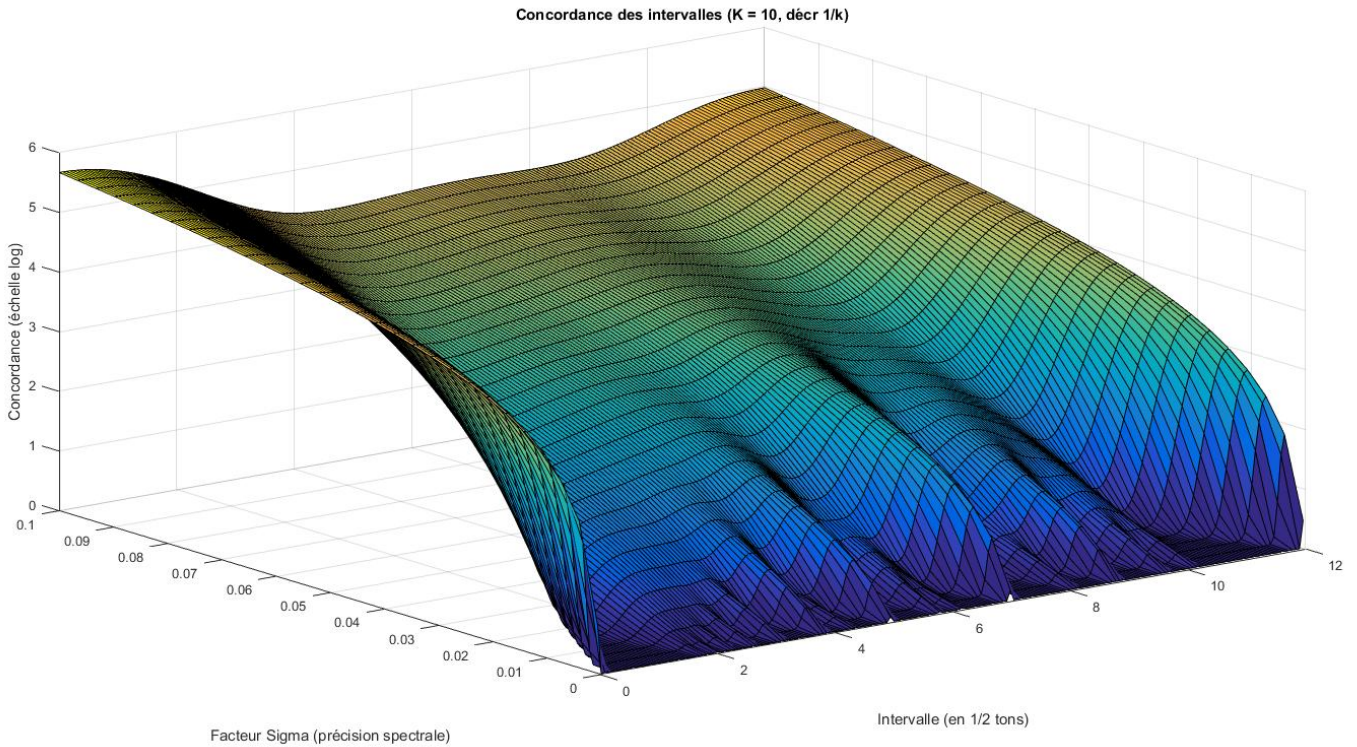


FIGURE 4.6 – Surface de concordance des intervalles, pour $\sigma = 0 \rightarrow 0.1$, $K = 10$, et décroissance en $1/k$

Afin de pouvoir discriminer les intervalles par la concordance, et ainsi rendre effective cette notion, il convient de se placer dans une région de σ qui présente suffisamment de relief, par exemple pour $\sigma : \epsilon \rightarrow 0.01$. C'est de tels σ que nous utiliserons dans la suite pour illustrer nos propos. Remarquons que nos considérations sur σ sont pour l'instant purement heuristiques : on choisi le σ qui nous arrange pour avoir des comportements les plus riches possibles, afin d'explorer les notions définies plus haut dans toute leur richesse et leur signification.

4.6 Et avec des sons inharmoniques ?

Le modèle de spectre présenté ci-dessus a l'avantage s'adapter aux spectres inharmoniques, et peut tenir compte par exemple de l'inharmonicité du piano due à la raideur des cordes, ou de spectres à forte inharmonicité comme la cloche, même de spectres dont l'irrégularité des partiels ne permet pas d'identifier une hauteur. Or les intervalles considérés comme justes comme l'octave, la quinte juste et la tierce majeure juste ne sont "justes" que dans le contexte d'un spectre harmonique. Pour un spectre inharmonique comme celui de la cloche, les intervalles justes, c'est à dire qui tombent sur les pics de concordance, ne coïncideront pas avec les intervalles justes des spectres harmoniques. Voici, pour une même valeur de σ ($\sigma = 0.001$) et le nombre de partiels ($K = 8$), la comparaison des courbe de concordance des intervalles sur une octave.

L'échelle adoptée ici, comme sur la figure 4.6 et désormais dans toute la suite de notre étude, est logarithmique en ordonnée, en $\log(1 + \text{Concordance})$, de manière à mieux mettre en évidence les pics de concordance. Ce choix a des justifications plus profondes liées à la Loi de Weber-Fechner et à la dimension perceptive de la concordance. Nous approfondirons le propos dans la partie 5.1.

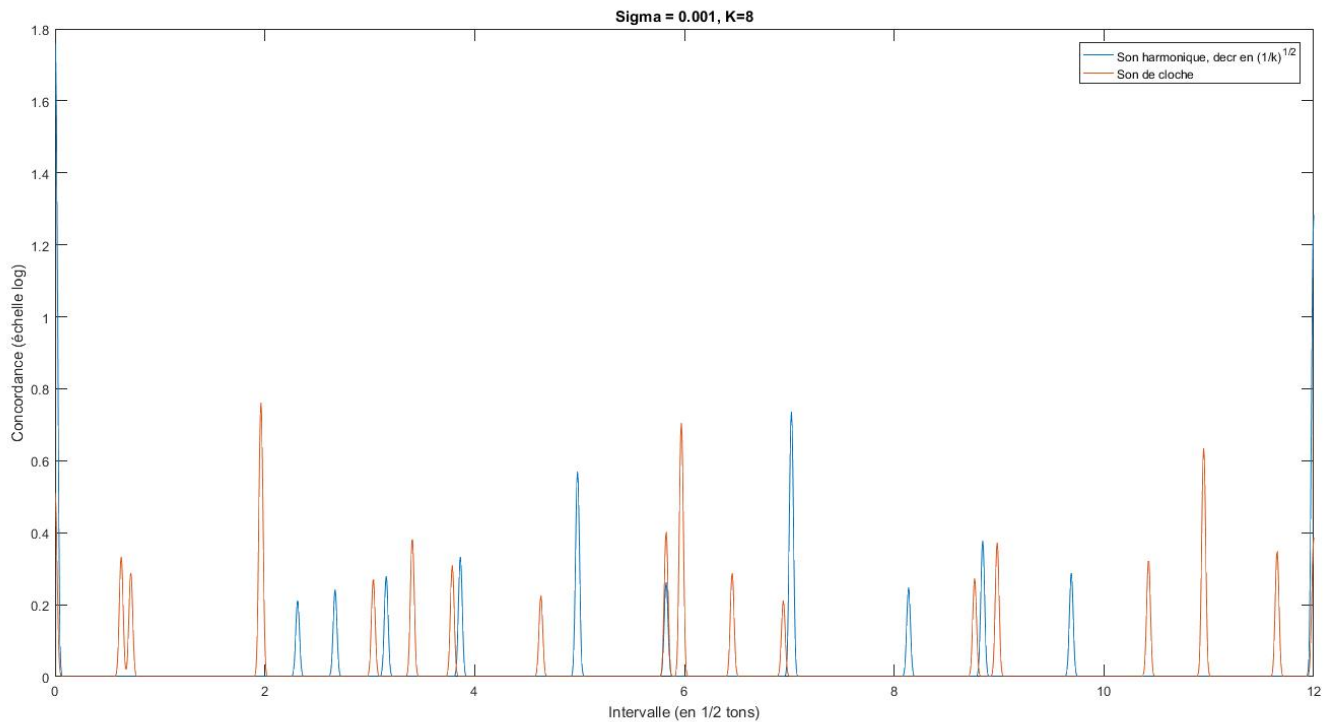


FIGURE 4.7 – Courbes de concordance des intervalles sur une octave, obtenues pour $\sigma = 0.001$ et $K = 8$, obtenues avec un spectre harmonique de décroissance $\sqrt{1/k}$ (en bleu), et le spectre inharmoine de la cloche de la figure 4.3 (en rouge)

Pour des valeurs identiques de σ et de K , on se rend compte que la courbe de la cloche présente plus de pics que celle du son harmonique, autrement dit notre son de cloche donne plus d'intervalles justes que notre son harmonique. Les principaux pics de concordance se situent sur la seconde majeure tempérée, la quarte augmentée, et la septième majeure tempérée. Alors que pour le spectre tempéré les pics principaux se situent sur ce qui forme l'accord majeur, plus la quarte, les notes de l'accord majeur ne sont pas incluses dans le spectre de la cloche, et l'accord majeur n'aura donc pas de raison de bien sonner à la cloche. Par contre, l'accord que voici, qui est dissonant avec un spectre tempéré en raison de la présence d'une quarte augmentée et d'une septième majeure, sonnera mieux à la cloche :



Plus de détails sur ce "*sonner mieux*" seront données dans la partie 6.1.1.

Avant de questionner plus en avant dans la partie 6 la pertinence musicale de la concordance et les applications possibles, revenons sur des questions théoriques d'échelle et de normalisation, qui sont cruciales pour le développement de l'interface évoquée en introduction.

Chapitre 5

Échelle, choix et normalisations

Afin d'étudier plus en détail les notions de concordance, de concordance multiple et de cohérence, il convient de développer des outils informatiques qui calculent effectivement ces grandeurs à partir d'une partition, et les représentent directement sur la partition, soit sous forme numérique, soit sous forme de graphe. On proposera dans la partie 6.2 des outils de représentation des grandeurs différentielles pré-calculées, mais pour l'interface interactive avec la partition, on implémentera uniquement les grandeurs statiques, en raison principalement des difficultés théoriques liés à ces notions différentielles. L'approche statique consiste alors, pour chaque verticalité, à calculer les grandeurs harmoniques correspondantes, et à les afficher sous la partition. Le terme de verticalité, préférable à celui d'accord, englobe ici toute nouvelle disposition de notes, qui peut inclure de nouvelles notes comme des notes tenues. Cette interface présente de vrais enjeux de représentations, qui seront précisés en même temps que les enjeux informatiques dans la partie 7. Mais au-delà de ces enjeux, le développement de l'interface soulève de vraies questions théoriques d'échelle et d'homogénéisation des données. La difficulté principale vient du fait que la concordance et les concordances d'ordre supérieur se calculent différemment selon le nombre de notes dans chaque verticalité.

Par exemple, le calcul de la concordance d'une verticalité de deux notes correspondra au calcul de la concordance de l'intervalle séparant ces notes, alors que celui d'une verticalité à 3 notes cachera en fait trois calculs de concordance, correspondant aux concordances des trois intervalles qui le composent. De même, le calcul de la concordance d'une verticalité à n notes impliquera en fait $\binom{n}{2}$ calculs de concordance d'intervalles, tandis que le calcul de sa concordance d'ordre 3 impliquera $\binom{n}{3}$ calculs de concordance d'intervalles. Les échelles varient donc avec le nombre de notes. Dès lors, comment représenter de manière unifiée sur un même graphique les concordances pour un morceau qui contient des verticalités tantôt de deux notes, tantôt de quatre, voire plus ?

Pire encore que le calcul de la concordance ou de la concordance d'ordre 3, la concordance totale pose des problèmes théoriques plus ardues. Nous avons regroupé en une même grandeur l'énergie partagée par un nombre variable de notes. Or ce nombre de notes va imposer une norme sur l'espace des spectres, qui sera la norme $\| \cdot \|_2$ lorsqu'il y a deux notes, la norme $\| \cdot \|_3$ lorsqu'il y a trois notes, la norme $\| \cdot \|_n$ lorsqu'il y a n notes. Mais comment homogénéiser des grandeurs qui font intervenir des normes différentes ?

Mais avant de se poser le problème de l'homogénéisation, posons-nous celui de l'échelle.

5.1 Echelle logarithmique

La première question à se poser concerne l'échelle à adopter, échelle linéaire ou échelle logarithmique. La loi expérimentale de Weber-Fechner, énoncée en 1860, stipule que «*la sensation varie comme le logarithme de l'excitation*». En musique, cette loi est bien connue en ce qui concerne :

- **La hauteur** : La perception de la hauteur varie comme le logarithme de la fréquence. Le clavier de piano propose ainsi la concrétisation d'une mise à l'échelle logarithmique des fréquences.

- **L'intensité** : Le décibel, qui mesure l'intensité d'un son, est défini comme le logarithme multiplié par un facteur 10 du rapport des puissances de deux ondes de pression :

Si le contenu perceptif de la concordance et des concordances d'ordre supérieur n'est pas aussi clair ni probablement aussi objectif que la hauteur et l'intensité d'un son, nous avons décidé, par analogie avec la hauteur et l'intensité, d'adopter une échelle logarithmique. Nous avons d'ailleurs déjà adopté une telle échelle pour représenter les surfaces de concordance des intervalles en fonction de σ en 4.5, ou les topographies des accords de trois sons vis-à-vis de la concordance et de la concordance d'ordre 3, ainsi que les cartes des enchaînements de deux accords vis-à-vis de la concordance différentielle. A ceci près cependant, que nous ne représentons pas directement $\log(\mathcal{C})$, mais $\log(1 + \mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$, où \mathcal{C} représente aussi bien la concordance que la concordance d'ordre 3 ou la concordance totale, et \mathcal{C}_0 est une énergie de référence, qui dépendra de la grandeur calculée, concordance, concordance triple ou concordance totale, ainsi que du spectre et du nombre de notes, comme nous le verrons dans la prochaine partie. La concordance et les concordances multiple ayant la dimension d'une énergie, la normalisation par \mathcal{C}_0 est nécessaire pour rendre l'expression. De plus, afin de coller à l'intuition que l'on a de l'énergie, il est nécessaire d'avoir des grandeurs positives, c'est pourquoi on préfère la forme $\log(1 + \mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$ à $\log(\mathcal{C}/\mathcal{C}_0)$. Pour la cohérence, nous garderons une échelle linéaire.

Il reste maintenant à préciser ce que l'on entend par "énergie de référence". Ce \mathcal{C}_0 , ou plutôt ces \mathcal{C}_0 d'homogénéisation sont en fait des paramètres cruciaux qui vont permettre de relier entre eux les différents calculs de concordance.

5.2 Le problème du nombre de notes

Comme expliqué dans l'introduction du 5, il faut trouver un moyen d'homogénéiser les concordances et les concordances multiples selon le nombre de notes impliquées. Cette question implique des choix qui conditionnent les comportements, il faut donc qu'ils soient motivés par des attentes qui seront d'ordre musical, traduisant l'intuition que l'on a pour l'instant de la concordance et des concordances multiples. L'enjeu est à double tranchant : en imposant des conditions, on donne un minimum de légitimité et de bon sens à la concordance, mais à trop lui imposer de conditions, elle ne dira plus que ce qu'on aura voulu qu'elle nous dise. Autrement dit, en forçant trop son comportement, elle risque de perdre en heuristique. De plus, il faut qu'elle conserve une cohérence formelle, en respectant les contraintes d'échelle imposées en 5.1. Nous nous restreindrons donc à une normalisation linéaire dans le logarithme, ce qui revient à jouer sur le paramètre \mathcal{C}_0 , qui représentera une énergie de référence, et dépendra du nombre de notes de la verticalité, ainsi que du spectre considéré. De même pour la concordance d'ordre 3 et la concordance totale.

Cette condition formelle posée, il restera à comprendre à quel point elle est contraignante vis-à-vis des attentes musicales sont censés motiver les choix de normalisation, et notamment si elle est assez souple pour les motiver toutes.

5.3 Conditions d'indifférenciation

Quelle(s) condition(s) imposer à la concordance ? Il semble naturel d'imposer l'égalité des concordances des unissons à n notes. Cela revient, pour $n = 1, 2$ et 3 , à imposer l'égalité des concordances des trois verticalités suivantes :



FIGURE 5.1 – Illustration de la condition d’indifférenciation des unissons pour la concordance, qui impose l’égalité des concordances des trois verticalités ci-dessus

Attention toutefois, la concordance n’a été définie en 3.3 que pour une verticalité d’au moins deux notes. Mais rien ne nous empêche de définir la concordance d’une note, en lui donnant logiquement la valeur de la concordance d’un unisson de deux notes, pour satisfaire la condition d’indifférenciation des unissons.

Si l’on pense à la musique pour piano, de tel unissons se rencontrent dans des pièces polyphoniques. Lorsque deux voix se superposent, on peut imaginer que l’interprète jouera la note du clavier plus fort que si elle ne se rencontrait que sur une voix, mais cela n’est pas systématique, moins systématique en tout cas que dans le cas des trois violons de la figure 5.1. Quoi qu’il en soit, notre modèle aplati l’intensité - cf 4.2.2, il ne différencie donc pas les différents unissons du piano. De même, si les spectres des trois violons sont modélisés de la même manière, il n’y a pas de raison non plus pour que notre modèle différencie les unissons des violons. Outre cette justification fondée sur le modèle de spectre, l’intuition musicale relativement à l’unisson isolé est que le doublement de la note isolée n’apporte, si du moins les instruments sont accordés au même diapason, aucune couleur harmonique supplémentaire. Aussi est-il naturel d’imposer cette condition à la concordance, ainsi qu’aux concordances multiples, autrement dit concordance d’ordre 3 et concordance totale.

De la manière que la concordance d’une note se définit de manière univoque sous la condition d’indifférenciation des unissons, la concordance totale d’une se définit sous cette condition de manière univoque de la même manière que la concordance. Quant à la concordance d’ordre 3, on peut la définir pour une note comme la concordance d’ordre 3 d’un unisson de trois notes, mais définition de la concordance d’ordre 3 d’un intervalle, s’il ne s’agit pas d’un unisson, pose plus de problèmes. On pourrait penser la définir comme la concordance d’ordre 3 d’un accord composé de ces deux notes et d’un unisson avec une de ces notes. Mais pourquoi cette concordance d’ordre 3 ne dépendrait pas de la note en question, autrement dit du choix de la note grave ou de la note aiguë ? Il n’y a pour l’instant pas de raison calculatoire pour que cette concordance d’ordre 3 ne dépende pas de ce choix, cependant les mêmes arguments que pour l’indifférenciation des unissons prèchent en faveur de cette indépendance.

Les observations précédentes nous amènent naturellement à exiger plus de la concordance : qu’elle ne distingue pas le cas où une note déjà présente dans un accord de n notes se rajoute à cet accord, autrement dit le cas d’un unisson entouré d’autres notes. Énonçons plus clairement ces conditions :

Condition d’indifférenciation à l’ordre n : *On va dire d’une grandeur harmonique qu’elle suit cette condition lorsqu’elle ne distingue pas une verticalité de n notes à la verticalité obtenue lorsqu’une autre voix se rajoute à cette verticalité à la même hauteur que l’une des notes déjà présentes dans l’accord, entraînant ainsi un unisson.*

Ces conditions concernent les ordres entiers à partir de 1. La condition d’indifférenciation des unissons est un cas particulier des conditions d’indifférenciation à l’ordre n . À l’ordre 1, ces deux conditions sont équivalentes, illustrée par la figure 5.1. À l’ordre 2, la condition d’indifférenciation, imposée à la concordance, force l’égalité des trois verticalités suivantes :

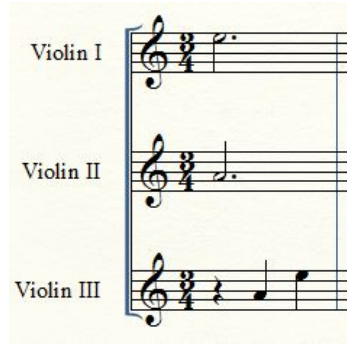


FIGURE 5.2 – Illustration de la condition d’indifférenciation à l’ordre 2 pour la concordance, qui impose l’égalité des concordances des trois verticalités ci-dessus

Une fois ces conditions posées un problème théorique fait surface : ces conditions sont-elles équivalentes ? Et si tel n’est pas le cas, est-il possible de toutes les satisfaire simultanément, étant donnée la forme relativement stricte que l’on a imposée - cf 5.1 - à la concordance ? Le même problème se pose pour la concordance d’ordre 3 et la concordance totale.

Essayons d’abord de comprendre ce que devient l’expression de la représentation de la concordance sous la condition d’indifférenciation des unissons.

5.4 Normalisation de la concordance

Considérons un intervalle d’unisson. D’après 5.1, sa concordance prend la forme

$$\log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_0^{(2)}} \right),$$

où \mathcal{C} est la concordance brute, telle qu’introduite en 3.3, et $\mathcal{C}_0^{(2)}$ est une concordance de référence à déterminer. Pour la déterminer, imposons que la concordance de l’unisson soit égale à 1, ce qui revient à poser dans ce cas particulier $\mathcal{C}_0^{(2)} = \mathcal{C}$.

Considérons maintenant un unisson de trois notes, composé donc de trois intervalles d’unisson. La condition d’indifférenciation des unissons impose une concordance égale à 1, comme dans le cas de l’intervalle d’unisson. Comme $\mathcal{C} = 3 \mathcal{C}_0^{(2)}$, la concordance de référence doit alors être égale à $3 \mathcal{C}_0^{(2)}$.

Ce résultat se généralise sans peine : un unisson à n note aura une concordance égale à 1 à condition de prendre comme concordance de référence $\binom{n}{2} \mathcal{C}_0^{(2)}$.

Prenons maintenant une verticalité quelconque à n notes. Nous avons imposé que la concordance de référence ne dépende que du nombre de notes et du spectre, ainsi elle vaudra toujours $\binom{n}{2} \mathcal{C}_0^{(2)}$, ce qui donne la forme générale de la concordance :

$$\mathfrak{C}^{(2)} = \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}}{\binom{n}{2} \mathcal{C}_0^{(2)}} \right),$$

ou encore

$$\boxed{\mathfrak{C}^{(2)} = \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}}{\frac{n(n-1)}{2} \mathcal{C}_0^{(2)}} \right)} \quad (5.1)$$

où n désigne le nombre de notes.

La concordance de référence à n notes, $\frac{n(n-1)}{2} \mathcal{C}_0^{(2)}$, correspond à la concordance brute d’un unisson, et sa concordance renormalisée, qui vaut 1, est la concordance maximale à n notes. L’unisson est la configuration la plus concordante, et tout accord de n notes autre que l’unisson aura une concordance plus petite que 1.

5.5 Normalisation de la concordance d'ordre 3

Procédons de la même manière pour la concordance d'ordre 3, en notant cette fois $\mathcal{C}_0^{(3)}$ la concordance d'ordre 3 de l'unisson à 3 notes. Imposer une concordance d'ordre 3 qui vaut 1 sur l'unisson à 3 notes revient à prendre $\mathcal{C}_0^{(3)}$ comme la concordance d'ordre 3 de référence à 3 notes. Un unisson de n notes étant composé de $\binom{n}{3}$ paquets d'unissons de 3 notes, la concordance d'ordre 3 de référence prend quand à elle la forme $\binom{n}{3} \mathcal{C}_0^{(3)}$.

Il s'ensuit que la concordance d'ordre 3 prend la forme normalisée suivante :

$$\mathfrak{C}^{(3)} = \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}^{(3)}}{\binom{n}{3} \mathcal{C}_0^{(3)}} \right),$$

ou encore

$$\boxed{\mathfrak{C}^{(3)} = \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}^{(3)}}{\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \mathcal{C}_0^{(3)}} \right)} \quad (5.2)$$

où n désigne le nombre de notes.

Comme dans le cas de la concordance, la concordance d'ordre 3 à n notes est maximale pour l'unisson à n notes, égale à 1, et inférieure à 1 dès qu'il y a deux notes de hauteurs différentes.

5.6 Normalisation de la concordance totale

Les formes des concordances d'ordre 2 et d'ordre 3 peuvent être généralisées sans difficultés aux ordres supérieurs. En effet, en désignant par $\mathcal{C}^{(k)}$ la concordance brute d'ordre k , $\mathfrak{C}^{(k)}$ sa forme normalisée, et $\mathcal{C}_0^{(k)}$ la concordance brute d'ordre k d'un unisson de k notes, il suffit de poser, pour vérifier la condition d'indifférenciation des unissons pour la concordance à l'ordre $k \geq 2$:

$$\boxed{\mathfrak{C}^{(k)} = \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}^{(k)}}{\binom{n}{k} \mathcal{C}_0^{(k)}} \right)} \quad (5.3)$$

où n désigne le nombre de notes de la verticalité, avec $n \geq k$.

Comme expliqué en 3.3, la concordance totale d'une verticalité de n notes est définie comme la concordance à l'ordre n de cette verticalité. La propriété d'indifférenciation des unissons pour les concordances à l'ordre k pour tout $k \geq 2$ assure donc l'indifférenciation des unissons pour la concordance totale, qui prendra alors la forme :

$$\boxed{\mathfrak{C}_{tot} = \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}_{tot}}{\mathcal{C}_0^{(n)}} \right)} \quad (5.4)$$

où n désigne le nombre de notes de la verticalité.

Dans l'expression de la concordance (cf. formule 5.1), le spectre apparaît dans la concordance de normalisation à travers la grandeur $\mathcal{C}_0^{(2)}$, dans celle de la concordance d'ordre 3 à travers $\mathcal{C}_0^{(3)}$, de même que dans celle de la concordance d'ordre k à travers $\mathcal{C}_0^{(k)}$. Ces grandeurs correspondent en fait à différentes normes au carré sur le spectre, qui ne sont rien de moins que les usuelles normes $\|\cdot\|_k$, définies sur les fonctions continues à support compact par :

$$\|f\|_k = \left(\int |f|^k \right)^{1/k}$$

Les spectres modélisés sont bien continus et à support compact (l'ambitus de l'audition humaine par exemple), on peut donc parler légitimement de $\mathcal{C}_0^{(k)}$. Si les concordances d'ordre 2 et 3 ne font intervenir que les normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_3$, indépendamment du nombre de notes, la concordance totale fait intervenir une norme qui s'adapte au nombre de notes, la norme $\|\cdot\|_n$, où n désigne le nombre de notes. À ce titre, la concordance totale est plus naturelle d'un point de vue mathématique que

la concordance d'ordre 2, ou que toute autre concordance à ordre fixé, même si physiquement la concordance d'ordre 2 reste la plus directement interprétable en terme d'énergie partagée. Mais la beauté formelle de la concordance totale se paye à un prix : celui du calcul des normes $\mathcal{C}_0^{(k)}$. En effet, alors que le calcul effectif de la concordance d'ordre 2 ne demande qu'un calcul préalable, celui de la concordance totale exige a priori le calcul de toutes les normes $\|\cdot\|_n$, pour $n \geq 2$. Or malheureusement pour nous, malgré la grande régularité de nos spectres, on ne peut pas exprimer $\mathcal{C}_0^{(k)}$ autrement qu'en le calculant. Heureusement pour nous, c'est là que la réalité musicale intervient : le nombre de notes en pratique est borné. Dans une musique pour piano, on peut raisonnablement le limiter à 10, dans un grand orchestre à une trentaine de pupitre. Dans l'implémentation, plutôt que de calculer sur chaque verticalité la norme du spectre correspondante, nous pré-calculerons ces normes en nous limitant à la norme 8, ce choix permettant de traiter les doubles chœurs. Pour calculer la concordance totale d'accords de plus de 8 sons nous remplacerons arbitrairement la norme $\|\cdot\|_n$ par la norme $\|\cdot\|_8$.

5.7 Vers une entropie de la superposition

Considérons maintenant un unisson de n notes. Sa concordance, sa concordance d'ordre 3 et sa concordance totale sont toutes égales à 1. Rajoutons maintenant une autre note à cet accord. Si cette note forme un unisson, alors les grandeurs restent égales à 1, sinon, elle diminuent, comme montré sur la figure ci-dessous. Nous prenons, pour cet exemple, ainsi que ceux qui vont suivre, un spectre composé de 40 partiels, avec une décroissance en $1/k$ et un σ uniforme égal à 0.01.

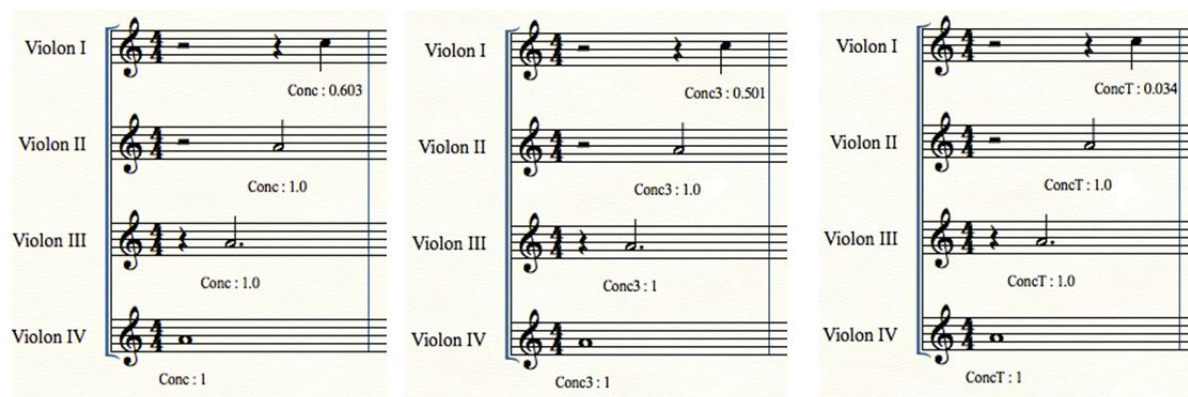


FIGURE 5.3 – Illustration de la diminution des grandeurs harmoniques lors de la superposition à un unisson. Valant 1 sur tous les unissons, la concordance passe à 0.6, la concordance d'ordre 3 à 0.5, et la concordance totale à 0.03. Ici $\sigma = 0.01$, $K = 40$, décroissance en $1/k$

Une grandeur qui ne peut que rester constante ou diminuer, et qui diminue effectivement lorsqu'on apporte de la nouveauté au système, cela n'est pas évoquer, au sens d'évolution près l'entropie, grandeur qui, selon le point de vue, thermodynamique ou informatique, mesure la quantité d'information manquante pour caractériser le système, ou encore le degré de désordre ou d'incertitude. Le parallèle est plus facilement compréhensible en regardant du côté de la thermodynamique, où un système fermé, autrement dit un système qui n'échange ni chaleur ni matière avec l'extérieur, voit son entropie, autrement dit son degré de désordre, augmenter, cette augmentation étant stricte si la transformation est irréversible. Imaginons par exemple un système formé d'un bout de métal chaud et d'une bassine d'eau froide. Si le métal est à la même température que l'eau, rien de significatif ne se passe, il n'y a pas d'échange thermique, et l'entropie reste constante. Par contre si on met le bout de méta dans la bassine, il y a transfert thermique, la transformation est irréversible, et l'entropie augmente. Revenons maintenant à la musique, en s'intéressant à ce qui dans notre parallèle serait l'analogie de l'entropie : la grandeur $\frac{1}{\mathcal{C}}$, où \mathcal{C} désigne au choix la concordance, la concordance d'ordre 3, ou la concordance totale. Imaginons un unisson de n notes, on sait que la grandeur $\frac{1}{\mathcal{C}}$ associée vaut 1. Imaginons de même une note isolée, dont le $\frac{1}{\mathcal{C}}$ vaut aussi 1. Superposons maintenant cet unisson à cette note isolée. Si cette note a la même hauteur que l'unisson, rien de significatif ne se passe, on a toujours un unisson, comportant simplement une voix en plus, la grandeur $\frac{1}{\mathcal{C}}$ associée reste égale à 1. Par contre si sa hauteur est différente, il se

passé quelque chose de significatif musicalement, une "couleur harmonique" apparaît à l'oreille, et la grandeur $\frac{1}{C}$ augmente.

Attention toutefois à ne pas prétendre que la musique se comporte comme un système dynamique, ce qui est loin d'être le cas. Lors du déroulement temporel d'un morceau, de l'énergie est créée en permanence par les musiciens, il est donc difficile de parler de système isolé. Notre analogie n'est valable que dans une certaine mesure, en posant des freins d'ordres à la fois interprétatif, et théorique. Interprétatif, car que signifie quantité d'information et désordre d'un accord, c'est ce n'est leur lien avec la grandeur $\frac{1}{C}$? Tenter de se construire approche intuitive de ces notions en musique n'est sans pas une chose absurde ni impossible, loin de là, mais nous ne nous y attaquerons pas ici. Théorique ensuite, car si la grandeur $\frac{1}{C}$ se comportait vis-à-vis de la superposition de notes réellement comme l'entropie d'un système fermé, alors cela voudrait dire que $\frac{1}{C}$ reste constante à chaque fois que le système n'est pas le lieu d'une "nouveau", autrement dit à chaque fois que la note ajoutée ne modifie pas la couleur harmonique, c'est à dire lorsque la note ajoutée par superposition était déjà présente dans la verticalité précédente, et que au contraire $\frac{1}{C}$ augmente dès qu'il y a une nouveauté. Nous savons que cela est le cas lorsque la verticalité précédente était un unisson, c'est la condition d'indifférenciation des unissons, mais est-ce toujours le cas lorsque la verticalité précédente était un unisson? Cette condition concerne directement les conditions d'indifférenciation à l'ordre n (cf.5.3).

5.8 Et les conditions d'indifférenciation à l'ordre n ?

La condition d'indifférenciation des unissons a permis de déterminer exactement les concordances de référence dans la forme imposée en 5.1. Mais les conditions d'indifférenciation à l'ordre n sont-elles implicitement vérifiées? Pour le vérifier, testons sur un exemple, avec la concordance implémentée à partir de la formule 5.1.

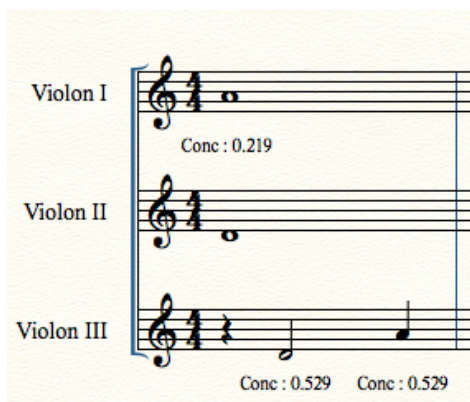


FIGURE 5.4 – Concordances non égales : la condition d'indifférenciation à l'ordre 3 n'est pas vérifiée. Ici $\sigma = 0.01$, $K = 40$, décroissance en $1/k$

Si la concordance suivait la loi d'indifférenciation à l'ordre 2, les trois verticalités suivantes auraient la même concordance, ce qui n'est pas le cas. Pire : la concordance, au lieu de diminuer entre la première verticalité et deuxième, ou la première et la troisième, comme on l'avait espéré dans la partie 5.7, augmente! L'inverse de la concordance ne se comporte pas tout à fait comme une entropie. Qu'en est-il de la concordance totale?

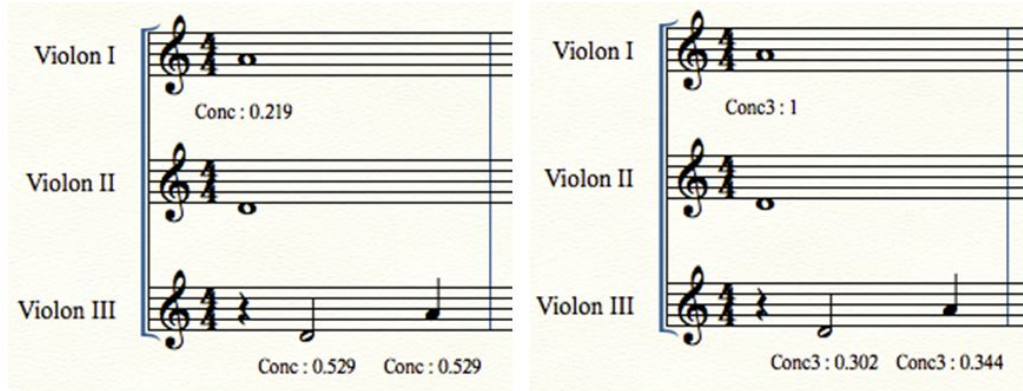


FIGURE 5.5 – Concordances totales non égales : la condition d'indifférenciation à l'ordre 3 n'est pas vérifiée. Ici $\sigma = 0.01$, $K = 40$, décroissance en $1/k$

Aïe, là non plus, ça ne marche pas ! La concordance du premier intervalle n'est pas égale à la concordance d'ordre 3 des deux verticalités suivantes. Que faire ? Cette condition d'indifférence à l'ordre n étant souhaitable, non seulement vis-à-vis du modèle, mais surtout vis-à-vis de la perception (cf. 5.3), peut-être que la forme imposée aux concordances est trop rigide. Essayons donc de modifier la forme de la concordance pour satisfaire cette condition.

- À l'ordre 2 -

Prenons, comme dans l'exemple précédent, un intervalle, noté i , pour première verticalité, et superposons-y une note qui forme un unisson avec l'une des deux notes de l'intervalle.

Gardons l'expression de la première concordance sous la forme

$$\log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}(i)}{\mathcal{C}_0^{(2)}} \right),$$

où $\mathcal{C}(i)$ représente la concordance brute de l'intervalle i , et essayons de rajouter dans le logarithme de la seconde concordance un terme, δ_2 qui viendra compenser le surplus de concordance. Posons donc :

$$\log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}(i)}{\mathcal{C}_0^{(2)}} \right) = \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}}{3 \mathcal{C}_0^{(2)}} + \delta_3 \right),$$

où $\mathcal{C} = 2 \mathcal{C}(i) + \mathcal{C}_0$ représente la concordance brute de la seconde verticalité.

Cela revient à poser

$$\delta_3 = \frac{\mathcal{C}(i) - \mathcal{C}_0}{3 \mathcal{C}_0} \quad (5.5)$$

- À l'ordre n -

Considérons une première verticalité composée de n notes, et une deuxième verticalité où l'on a rajouté une note en unisson avec une des notes déjà présentes, disons par exemple la première du grave vers l'aigu. Notons \mathcal{C}_1 la concordance brute de la première verticalité, on peut la décomposer de la sorte :

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_{adj} + \mathcal{C}_{reste},$$

où \mathcal{C}_{adj} est la somme des concordances deux-à-deux des intervalles de la première verticalité qui impliquent la première note, tandis que \mathcal{C}_{reste} est la somme des concordances deux-à-deux des intervalles dans lesquels la première note n'est pas impliquée. La concordance brute de la deuxième verticalité est alors

$$\mathcal{C}_2 = 2 \mathcal{C}_{adj} + \mathcal{C}_{reste} + \mathcal{C}_0$$

Rajoutons des termes correctifs pour forcer l'égalité des concordances normalisées :

$$\log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}_1}{\frac{n(n-1)}{2} \mathcal{C}_0^{(2)}} + \delta_n \right) = \log_2 \left(1 + \frac{\mathcal{C}_2}{\frac{(n+1)n}{2} \mathcal{C}_0^{(2)}} + \delta_{n+1} \right),$$

Ce qui impose

$$\delta_{n+1} - \delta_n = \frac{2 \mathcal{C}_{reste} - (n-3) \mathcal{C}_{adj} - (n-1) \mathcal{C}_0}{\frac{n(n+1)(n-1)}{2} \mathcal{C}_0^{(2)}} \quad (5.6)$$

Cette équation généralise la formule 5.5.

Regardons maintenant ce que l'on peut faire avec cette équation. On aimerait pouvoir exprimer δ_{n+1} de manière condensée à partir de la dernière verticalité sans discriminer les notes de manière artificielle. Dans le cas de δ_3 , cela n'est pas bien compliqué, via la formule :

$$\delta_3 = \sum_{\text{int}} \frac{\mathcal{C}(\text{int}) - \mathcal{C}_0}{6 \mathcal{C}_0},$$

où int parcourt les trois intervalles de l'accord de trois notes.

Par contre, pour δ_3 , l'expression sera déjà plus artificielle. Quant à δ_{n+1} , la tâche paraît ardue, et en tout cas *ad hoc*. Nous préférons donc pour l'instant nous en tenir à la forme (5.1), qui vérifie la condition d'indifférenciation des unissons, mais pas celle d'indifférenciation à l'ordre n . Cette question méritera de futures investigations, pour l'instant contentons-nous de la formulation (5.1).

Chapitre 6

La concordance comme exploration de l'harmonie : représentations géométriques

La normalisation des grandeurs effectuée dans le chapitre précédent, en donnant une assise théorique plus stable, permet de comparer les concordance, concordance d'ordre 3 et concordance totale calculées à partir d'accords qui diffèrent par leur nombre de notes. Ces considérations seront indispensables pour le développement de l'interface (cf. chapitre 7), et on les utilisera dans l'*Annexe 1* pour étudier l'évolution des grandeurs harmoniques lors de la superposition successive de notes. En attendant, continuant l'exploration de la concordance commencée en 4.4, en passant des intervalles aux accords. Pour les représentations géométriques, on se contentera de l'échelle $\log(1 + \text{Grandeur harmonique})$. En effet, au sein d'une représentation géométrique, typiquement une surface de concordance, le nombre de notes sera fixe.

6.1 Étude statique

6.1.1 Topographie des Accords de 3 sons

Si la courbe de concordance des intervalles propose une visualisation simple des accords de deux sons, comment représenter la concordance des accords de 3 sons ? La solution consiste à représenter l'ensemble des accords par un plan Oxy , l'origine 0 représentant une note fixe, qui sera la note la plus grave, et les axes x et y portant l'intervalle des deux autres notes par rapport à cette note fixe. Une troisième dimension, soit spatiale soit chromatique, portera la concordance de l'accord représenté par un point du plan Oxy . Avoir une note fixe ne constitue pas une restriction, en vertu du principe d'invariance de la concordance par translation spectrale.

Voici la surface de concordance des accords de trois sons, obtenue avec avec $\sigma = 0.008$, $K = 20$, décroissance en $\frac{1}{\sqrt{k}}$.

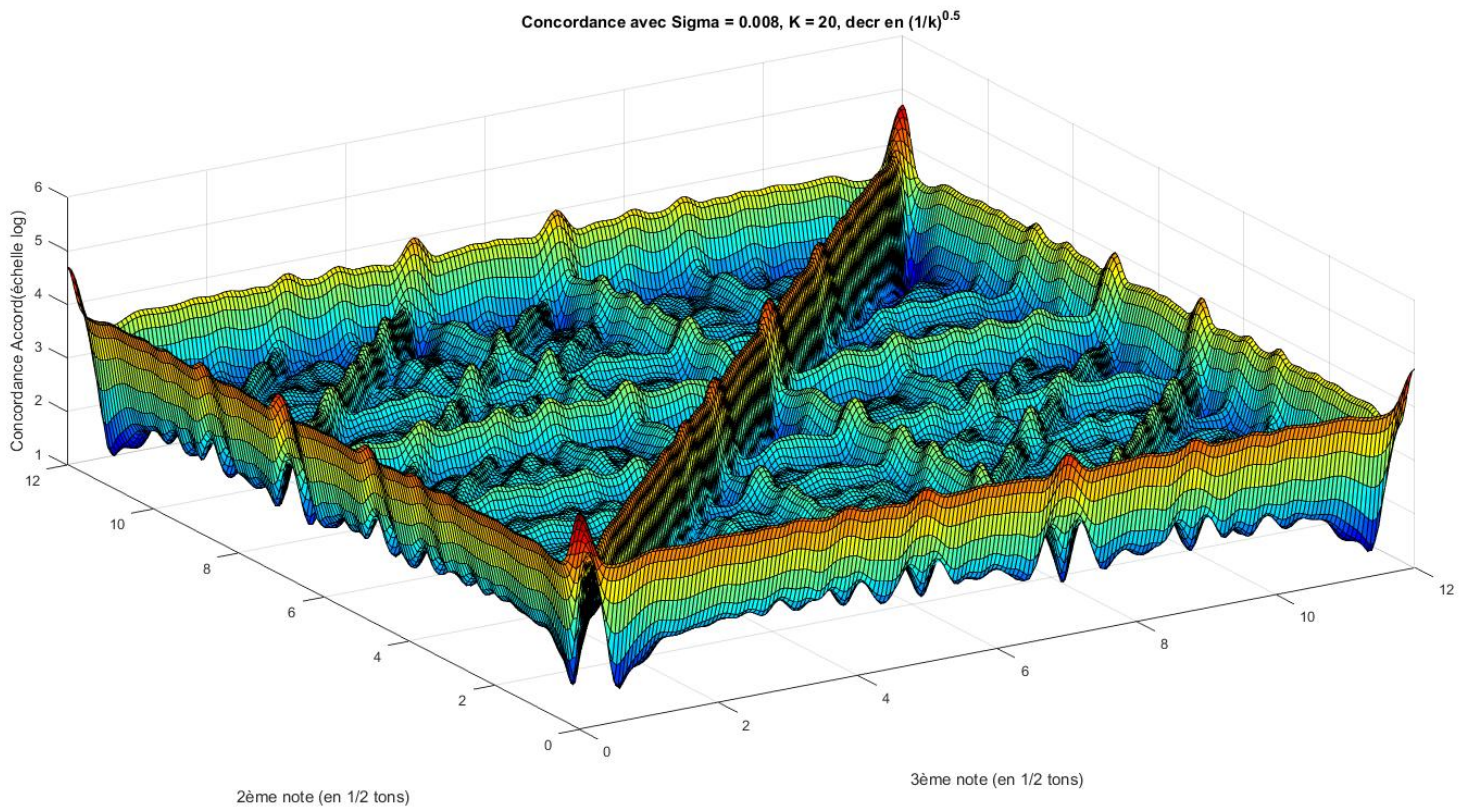


FIGURE 6.1 – Topographie des accords de trois sons, avec $\sigma = 0.008$, $K = 20$, décroissance en $\frac{1}{\sqrt{k}}$

La surface est faite de creux et de bosses, les bosses représentant les maximums de concordance, à l’instar de nos pics de concordance de la courbe de concordance des intervalles. Les accords qui se situent sur ce sommet sont les accords *naturels*, c’est à dire qui découlent directement du spectre, au même titre que les intervalles naturels (cf 4.4). Là-aussi, le nombre, la position et les rapports de ces pics dépendent des paramètres de timbre rentrés dans le modèle. Avec un spectre harmonique comme celui utilisé dans la figure précédente, les accords majeurs et mineurs font partie de ces accords *naturels*. C’est ce qui est montré sur la figure suivante :

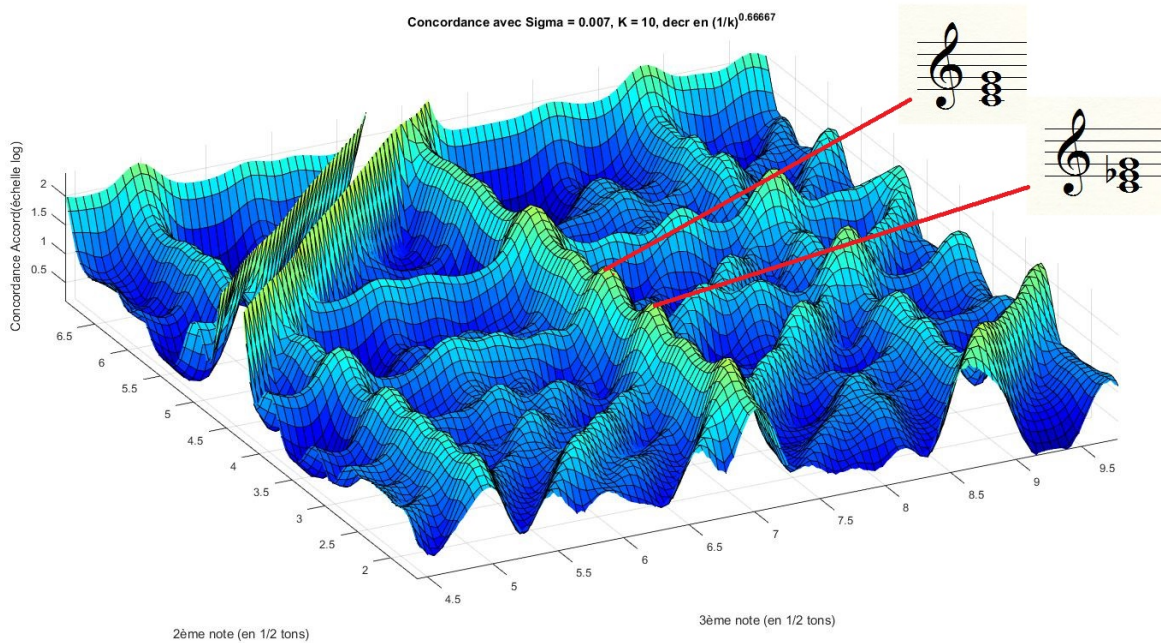


FIGURE 6.2 – Zoom sur les accords mineurs et majeurs avec $\sigma = 0.007$, $K = 10$, décroissance en $(\frac{1}{k})^{2/3}$

Mais lequel des accords mineur et majeur est le plus concordant ? En fait, les concordances des accords majeurs et mineurs sont les mêmes en position "compacte". Cette égalité vient de l'égalité du *contenu intervallique* des deux accords, qui possèdent tous deux une quinte, une tierce majeure et une tierce mineure. L'égalité des contenus intervalliques entraîne l'égalité des concordances, d'après la définition de la concordance d'un accord (cf.3.4). Pour la même raison, les deux accords que voici auront la même concordance, ainsi d'ailleurs que la même cohérence :



Remarquons par ailleurs que ces deux accords correspondent typiquement à un retard supérieur de la la tierce dans des renversements différents. La notion de contenu intervallique n'est donc pas détachée des données perceptives.

Défendons-nous toutefois d'affirmer que la concordance ne distingue pas les accords majeurs des accords mineurs. C'est vrai dans la position compacte, mais faux en général, comme le montre les topographies ci-dessous, qui s'étendent sur deux octaves, et où l'on a localisé différentes positions des accords majeurs et mineurs.

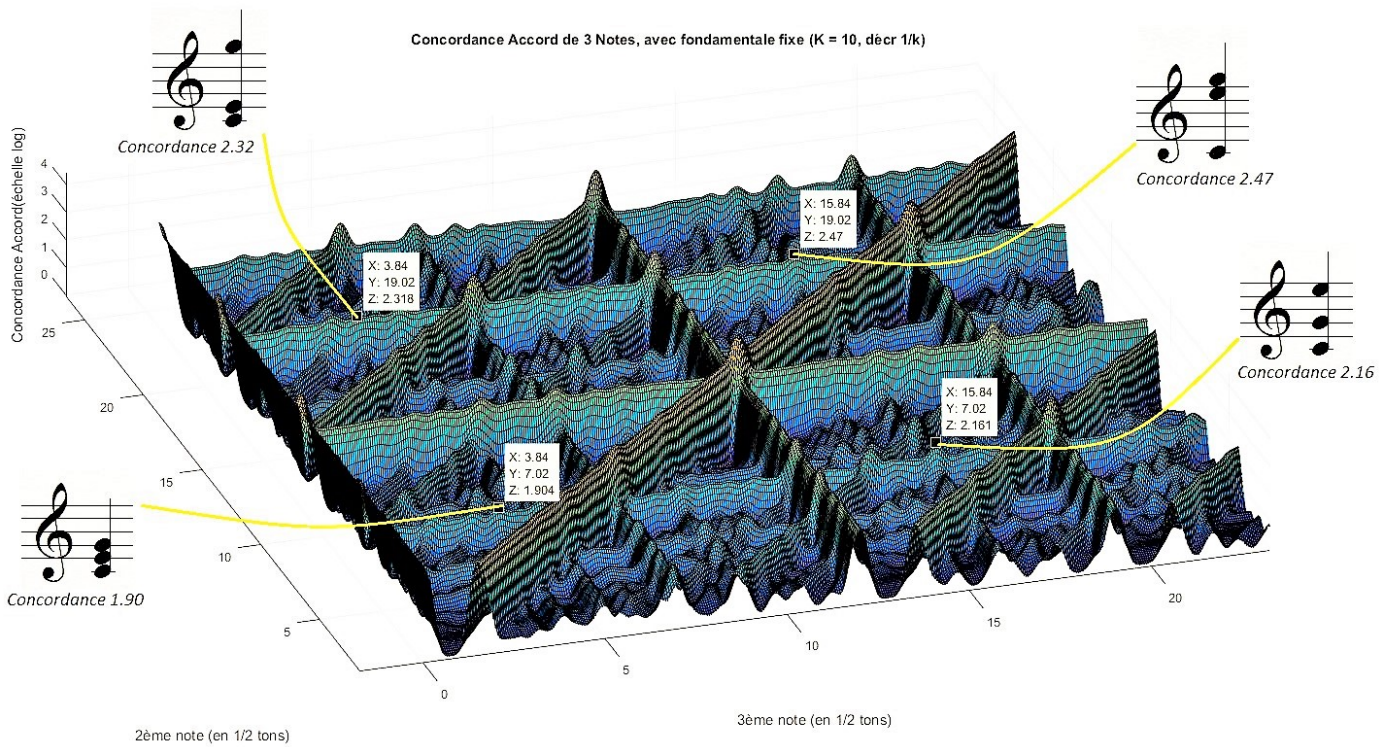


FIGURE 6.3 – Localisation des accords majeurs, avec $\sigma = 0.01$, $K = 10$ et décroissance en $1/k$

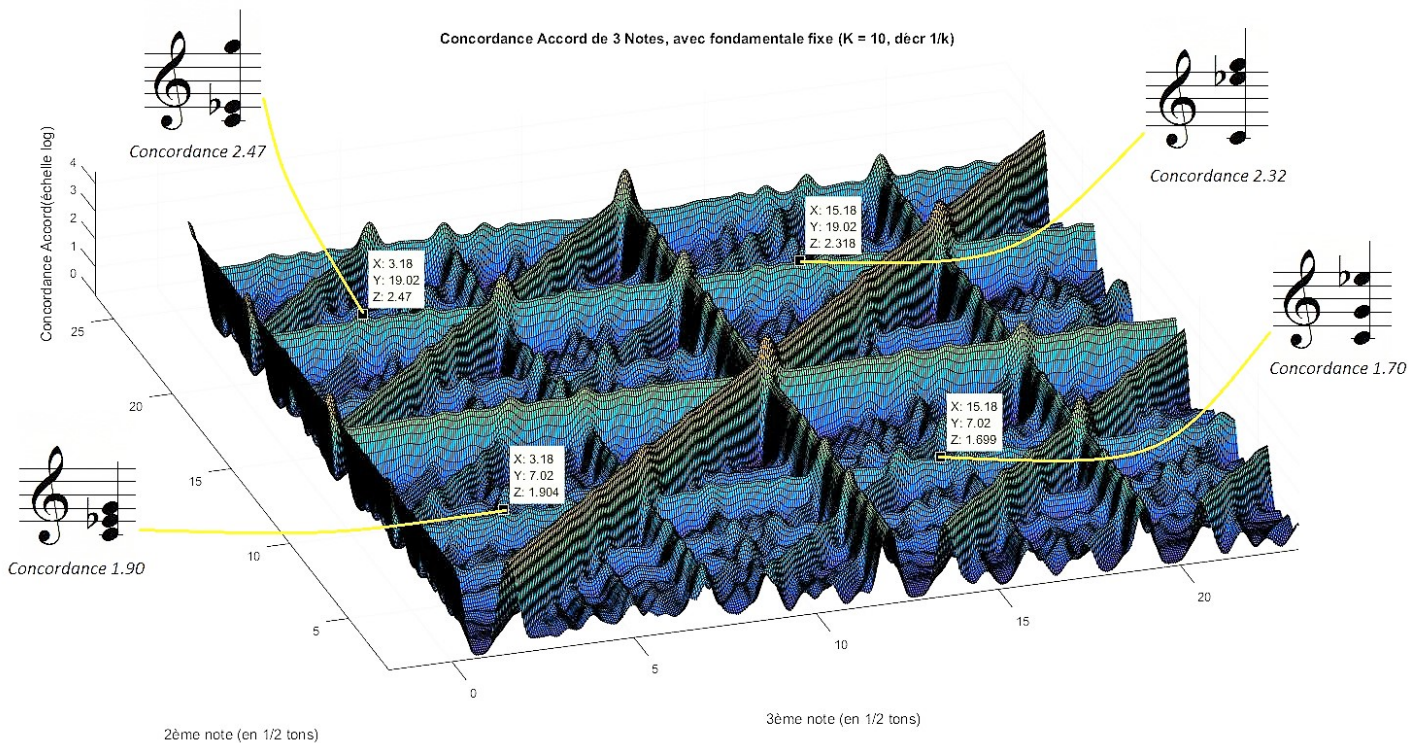


FIGURE 6.4 – Localisation des accords mineurs, avec $\sigma = 0.01$, $K = 10$ et décroissance en $1/k$

Les topographies en relief de Matlab sont assez fascinantes, et de plus facilement manipulables : on peut faire des zooms, des rotations... Mais pour gagner en lisibilité nous allons tout aplatir en regardant les reliefs d'en haut, ne restera alors que le dégradé de couleur.

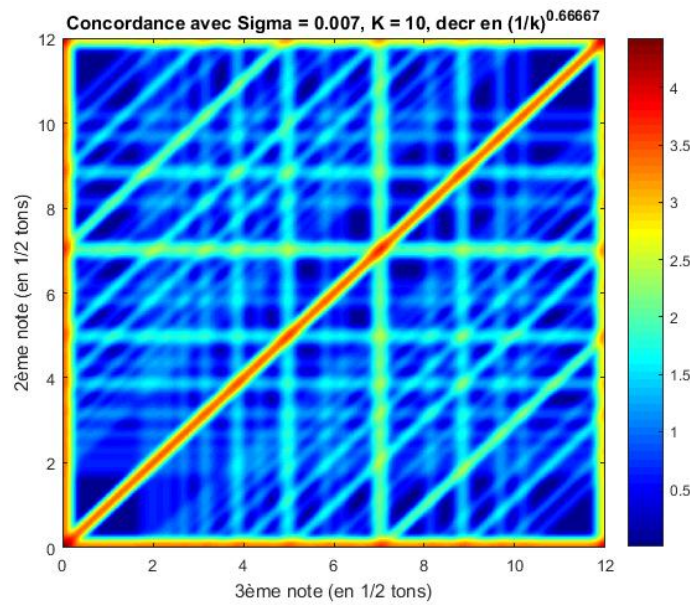


FIGURE 6.5 – Surface de concordance des accords de 3 sons, avec $\sigma = 0.007$, $K = 10$ et décroissance en $(1/k)^{2/3}$

- Symétries -

Plusieurs symétries apparaissent ici, il y a en fait deux fondamentales :

- Symétrie sur notre plan des accords par rapport à la droite "y = x/2" dans la direction de y, traduisant l' **invariance de la concordance par invariance du contenu intervallique**.
- Symétrie diagonale traduisant l' **équivalence entre la 2^{ème} note et la 3^{ème} note**

Voici les axes de ces deux symétries :

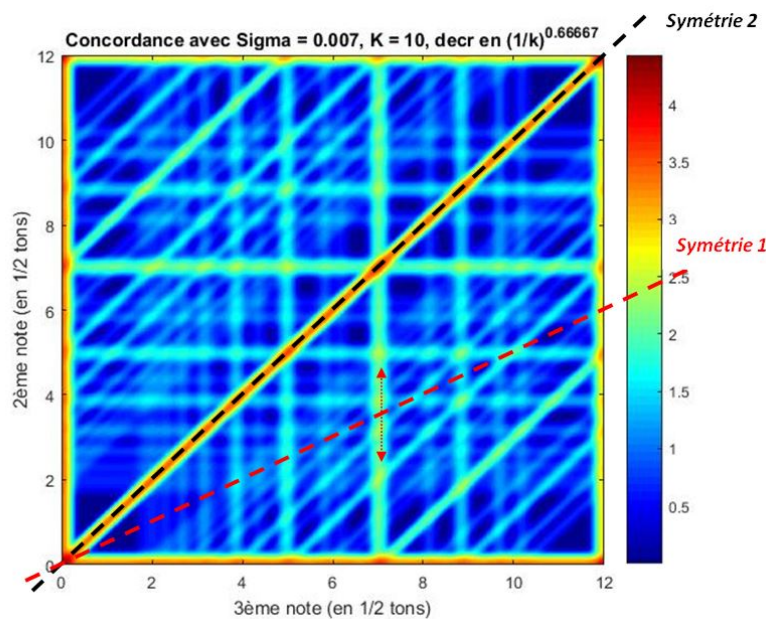


FIGURE 6.6 – Symétries de concordance des accords de 3 sons, avec $\sigma = 0.007$, $K = 10$ et décroissance en $(1/k)^{2/3}$. La symétrie 1 (en rouge) est liée à l'invariance du contenu intervallique, tandis que la symétrie 2 (en noir) traduit l'équivalence entre la 2^{ème} note et la 3^{ème} note

En vertu de ces symétries, la donnée du faisceau délimité par l'axe Ox (troisième note) et l'axe de la symétrie 1 (en pointillés rouges) permet de reconstruire la totalité de la surface de concordance.

-Cohérence vs concordance-

La cohérence des accords d'au moins 3 notes, définie en 3.3.5, n'a pas encore été creusée dans cette partie. Représentons donc la cohérence des accords de 3 sons, comme on l'a fait avec la concordance, et en regard de celle-ci.

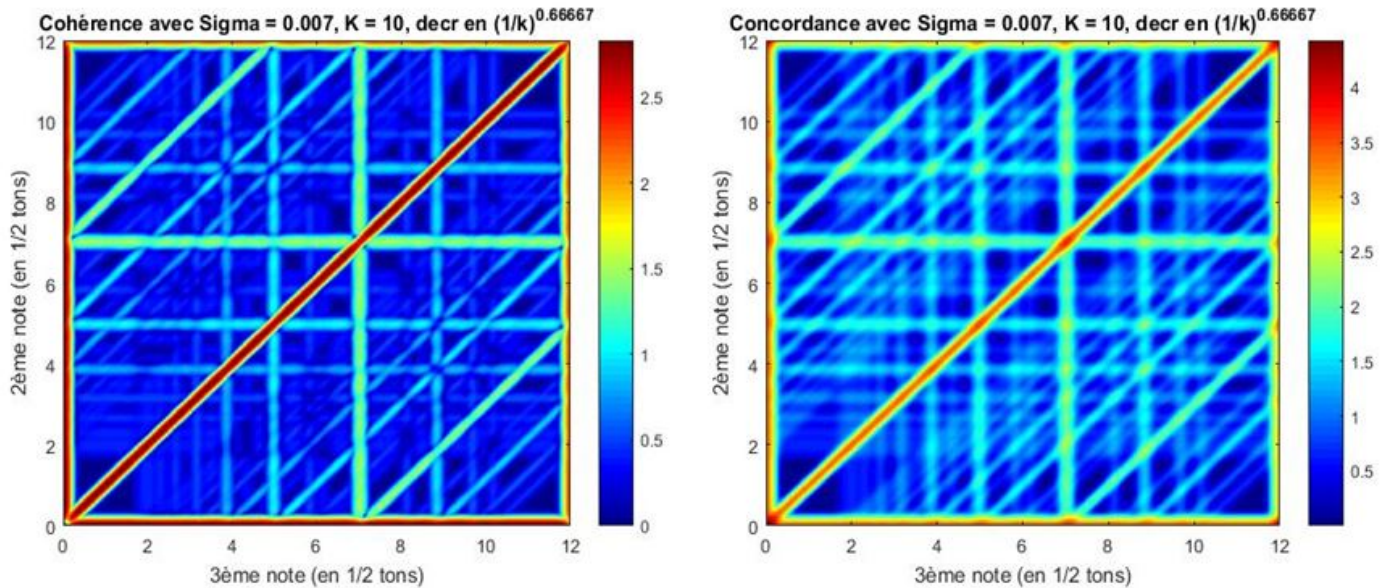


FIGURE 6.7 – Mise en regard des surfaces de cohérence et de concordance des accords de 3 sons, avec $\sigma = 0.007$, $K = 10$ et décroissance en $(1/k)^{2/3}$.

La topographie relative à la cohérence n'apporte pas de grande nouveauté par rapport à celle construite sur la concordance, c'est-à-dire qu'on observe les mêmes sommets et les mêmes lignes de crêtes. En fait, la cohérence n'est pas intéressante lorsqu'il n'y a que trois notes, elle ne le devient qu'à partir de 4 notes, c'est pourquoi elle resurgira seulement en *Annexe 1* lorsque l'on s'intéressera aux accords de 4 sons.

6.1.2 Influence des paramètres timbraux

Le timbre a une grande influence sur la perception de l'harmonie. Comme nous avons commencé à le montrer dans le chapitre 4.2 au moyen de la courbe de concordance des intervalles, la concordance est un outil qui permet de prendre la mesure de cette dépendance, par le jeu des paramètres du modèle. Intéressons-nous ici à l'influence de ces paramètres sur l'allure des surfaces de concordance des accords de trois sons.

- Influence du nombre de partiels -

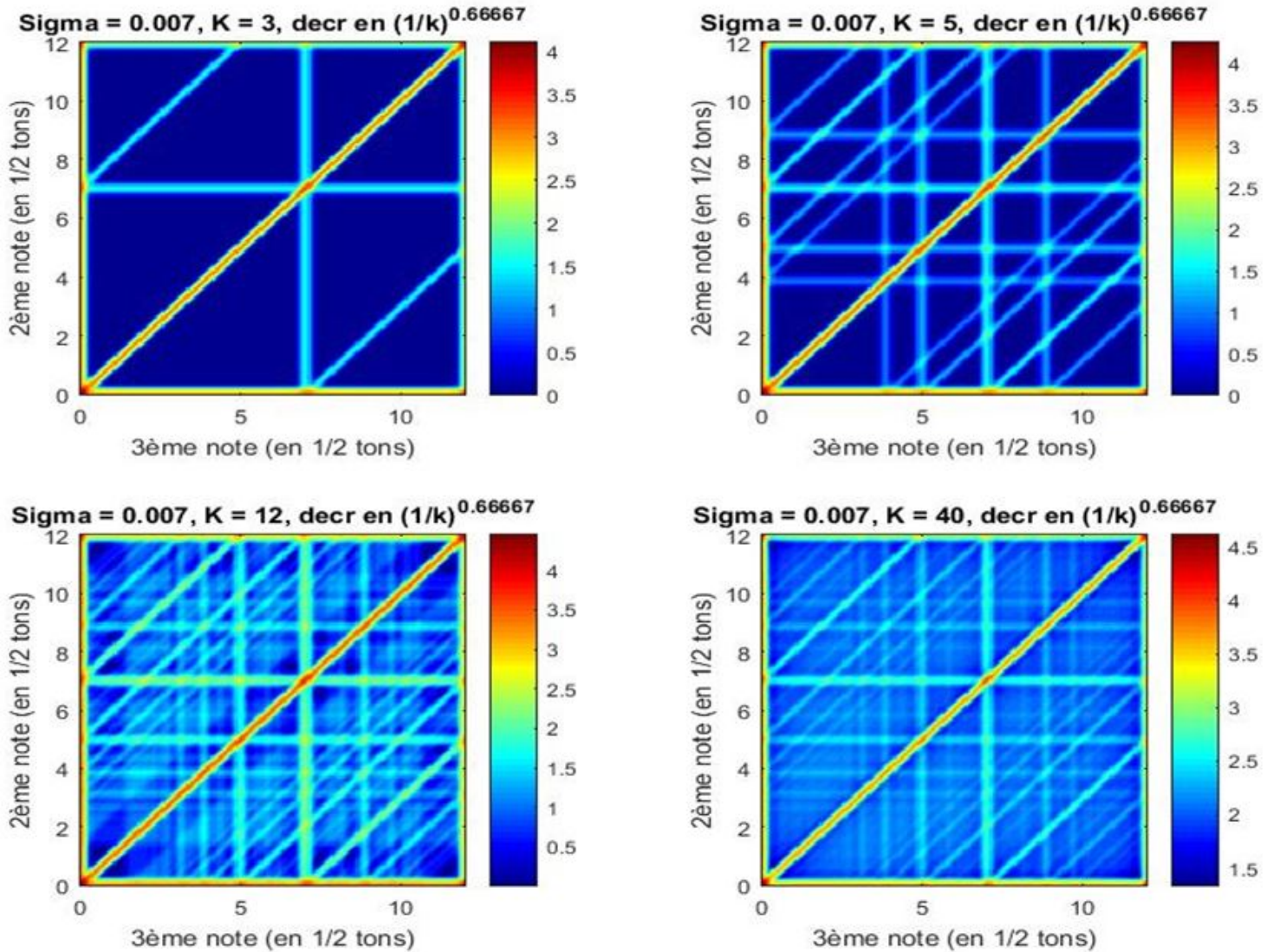


FIGURE 6.8 – Influence de K sur la topographie des accords de 3 sons, avec respectivement de haut en bas et de gauche à droite : $K = 3, 5, 12, 40$; $\sigma = 0.007$, et décroissance en $(1/k)^{2/3}$

Voici mises en regard les surfaces de concordance des accords de 3 sons pour différentes valeurs du nombre de partiels, en gardant fixes le facteur σ et la décroissance. Ici $K = 3, 5, 12, 40$. La richesse du relief augmente avec le nombre de partiels, à condition que la décroissance des partiels leur donne toujours du poids. Pour $K = 3$, les lignes de crêtes sont au nombre de trois (modulo les symétries, se reporter pour cela à la figure 6.1.1). Plus K augmente, plus le nombre de crête augmente. En fait, chaque partiel supplémentaire apporte une nouvelle crête.

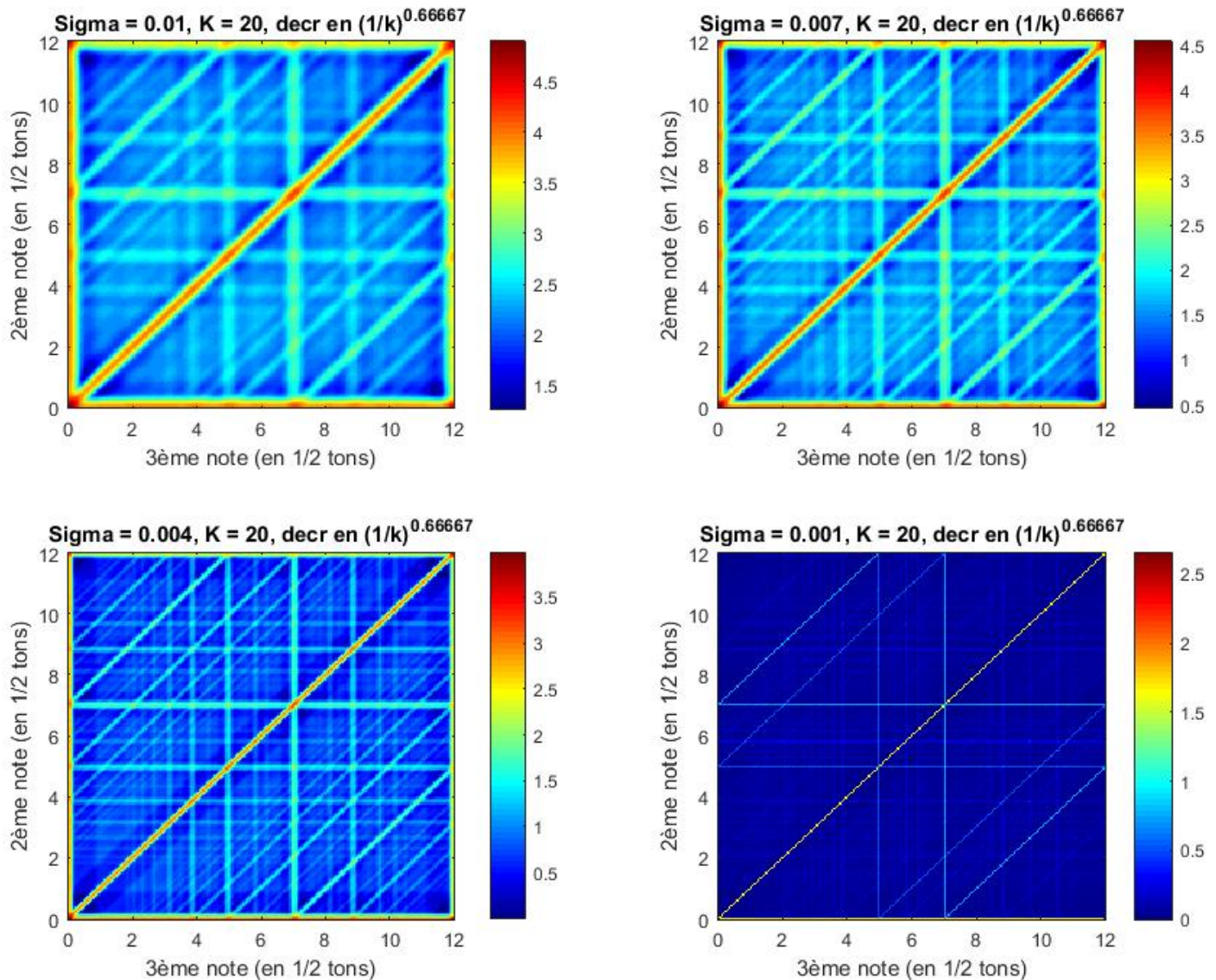
- Influence du facteur σ -

FIGURE 6.9 – Influence de σ sur la topographie des accords de 3 sons, avec respectivement de haut en bas et de gauche à droite : $\sigma = 0.01, 0.007, 0.004, 0.001$; $K = 20$ et décroissance en $(1/k)^{2/3}$

Voici maintenant mises en regard les surfaces de concordance des accords de 3 sons pour différentes valeurs de σ , en gardant fixes le nombre de partiels et la décroissance. Ici $\sigma = 0.01, 0.007, 0.004, 0.001$, soit des valeurs couvrant la bande que nous avait suggérée la surface 4.5 de concordance des intervalles en fonction de σ . Le facteur σ traduit ici le flou de notre vision, en l'occurrence de notre écoute. Avec un σ élevé, par exemple 0.01, on ne peut percevoir beaucoup de détails, il ne servira à rien d'entrer dans le modèle un nombre trop important de partiels. Le monde s'affine quand σ diminue, mais le prix à payer est que les sommets et les crêtes sont beaucoup plus localisés. Concrètement, cela signifie que l'instrumentiste devra jouer d'autant plus juste lorsque le facteur σ qui le modélise est petit. Encore une fois, l'étude que l'on est en train de mener est théorique, et le modèle de spectre sert à comprendre la signification et la pertinence de la concordance sans s'attacher pour l'instant à son réalisme, mais il convient cependant de garder à l'esprit les implications instrumentales de cette approche.

- Influence de l'inharmonicité -

Jusqu'alors, dans cette partie, nous n'avons utilisé que des sons harmoniques. Qu'en est-il des sons inharmoniques? On imagine bien, comme c'était le cas dans la pour la concordance des intervalles (partie 4.6), que l'allure des surfaces de concordance change radicalement. C'est le cas en effet, comme l'illustre la surface de concordance de la cloche dont le spectre a été vu à la figure 4.3 :

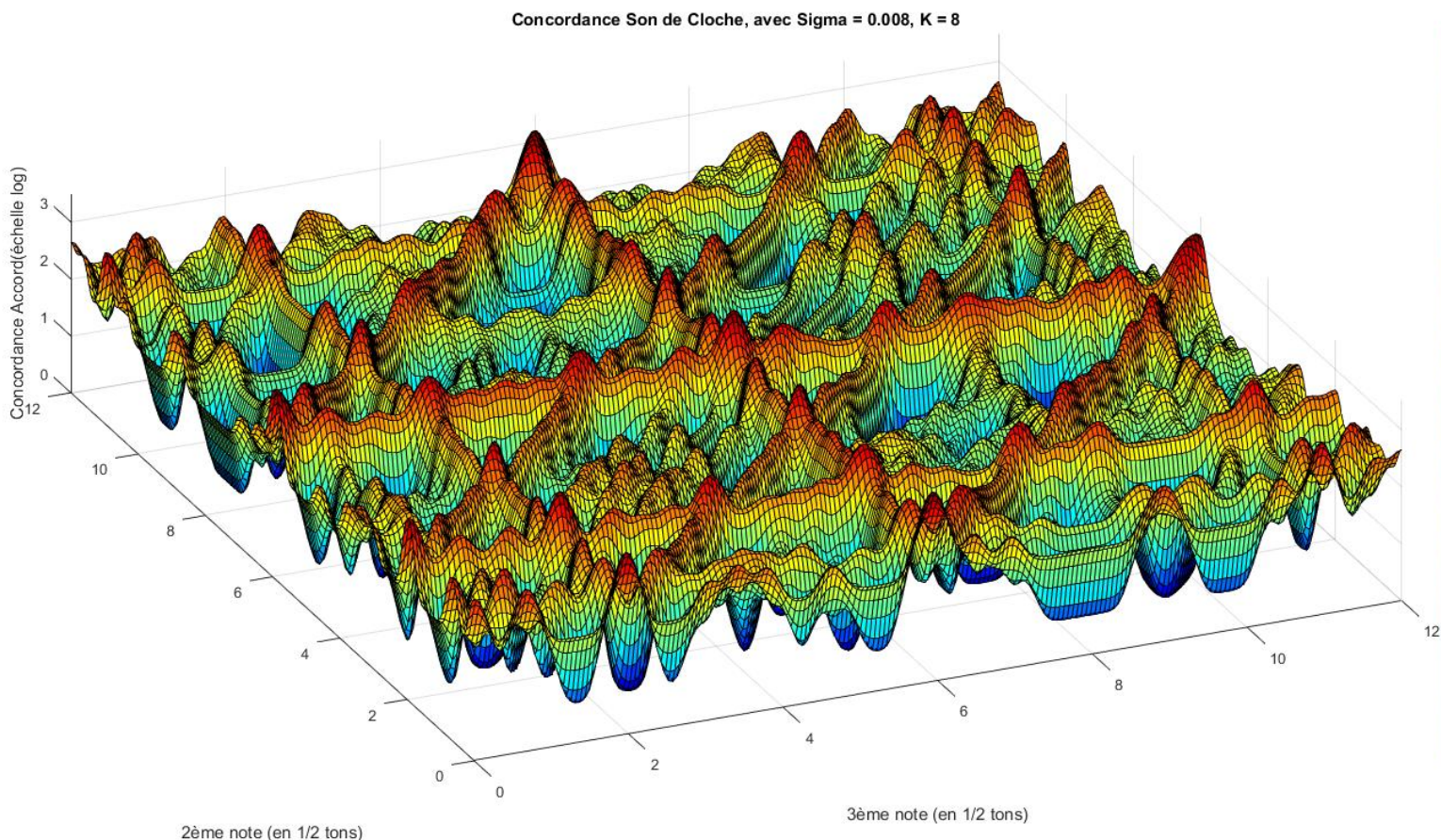


FIGURE 6.10 – Topographie des Accords de trois sons à la cloche, avec $\sigma = 0.008$ et $K = 8$

Les symétries présentées sur la figure 6.1.1 sont toujours présentes, mais la surface change radicalement d'aspect. Dans la partie 4.6 nous avons émis l'hypothèse que l'accord de triton et de septième majeure,



hautement dissonant sur un instrument harmonique, sonnait mieux à la cloche. Nous évitons dans notre étude de parler de dissonance et de consonance, puisque la concordance harmonique et les autres notions développées veulent justement explorer d'autres dimensions de l'harmonie, en allant au-delà de cette dualité et de ses enjeux culturels et contextuels. Le *sonner mieux*, finalement seule l'écoute pourra nous le faire sentir. Toujours est-il que cet accord est situé sur un sommet de concordance à la cloche, alors qu'il ne l'est pas dans le cas harmonique, et inversement pour l'accord majeur.

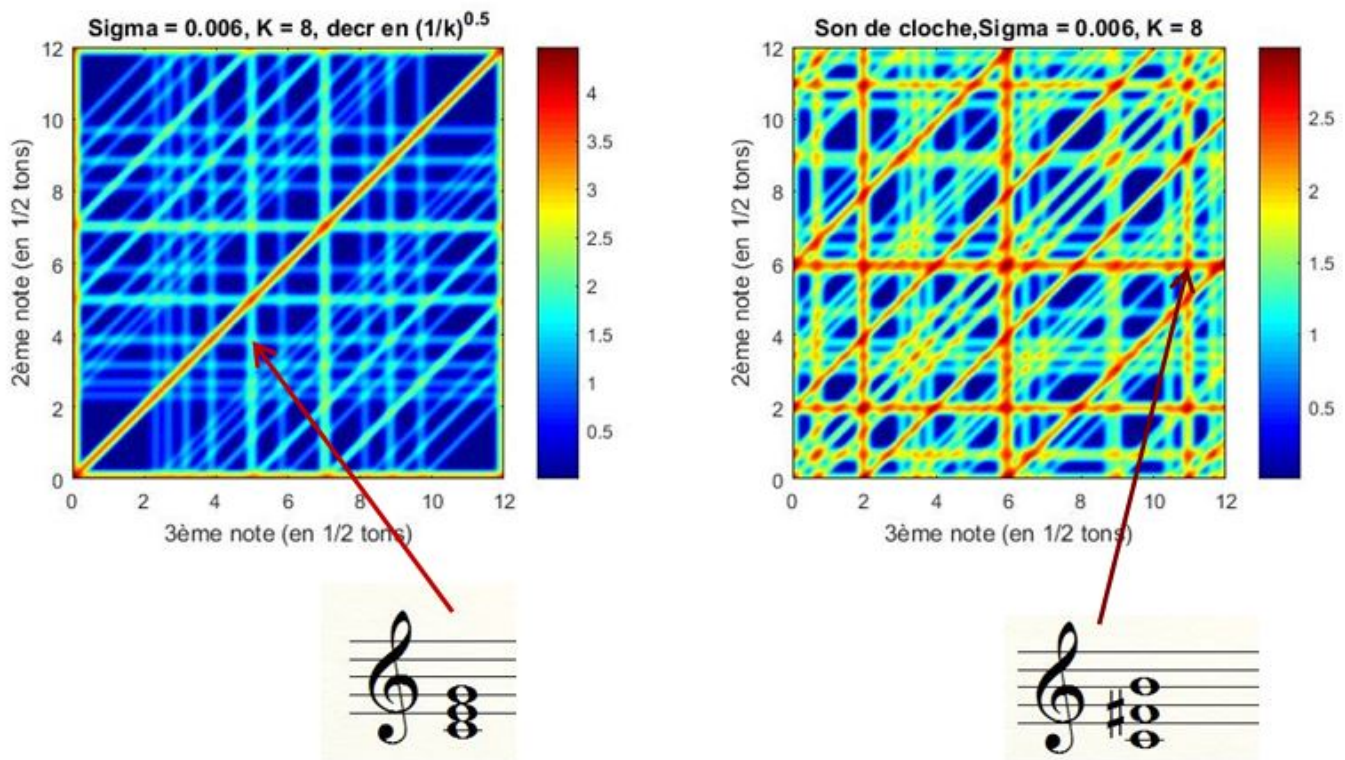


FIGURE 6.11 – Comparaison de surfaces de concordance d'un son harmonique avec un son de Cloche, avec $\sigma = 0.008$ et $K = 8$

Ces exemples pointent une remarque cruciale, qu'il est bon de toujours garder en tête : le système harmonique classique, fondé sur les accords majeurs et mineurs, doit tout à l'harmonicité du spectre. L'harmonicité perdue, de nouvelles gammes et de nouveaux systèmes apparaissent. Il suffit pour s'en convaincre d'aller voir du côté des gamelans javanais, ou de lire Sethares [23].

6.1.3 La concordance d'ordre 3 : vers une justification naturelle de l'accord mineur

Une question a longtemps occupé les théoriciens de la musique : d'où vient l'accord mineur ? Si l'accord majeur est compris dans le spectre, ce n'est pas le cas de l'accord mineur.

En 1722, Jean-Philippe Rameau publie son *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* [19], dans lequel il pose les bases "naturelles" de l'harmonie. Fort de démontrer le caractère *naturel* de l'accord parfait majeur, il montre de même le caractère *naturel* de l'accord parfait mineur, en considérant la série des harmoniques inférieures, c'est à dire dont les fréquences ne sont plus les multiples mais les diviseurs de la fréquence fondamentale. Ainsi, en partant du *Do* aigu et en déroulant la série des harmoniques inférieures, le premier accord de trois sons que l'on obtient est l'accord de *Fa* mineur :

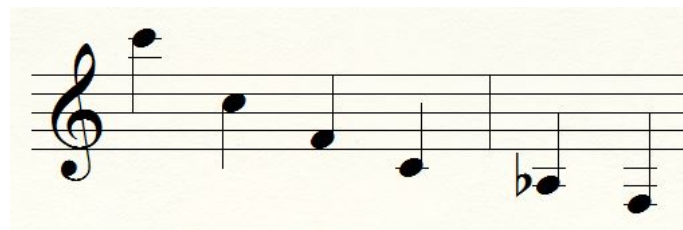


FIGURE 6.12 – Série des 6 premiers harmoniques inverses en partant du *Do* aigu

La question du caractère *naturel* de l'accord mineur est-il pour autant résolu ? Pas vraiment, puisque les harmoniques inverses n'ont pas a priori de réalité physique, ils ne sont qu'une spéculation mathématique. C'est là que la concordance d'ordre 3 va jouer un rôle...

Après la topographie des accords de trois sons régie par la concordance et la cohérence, regardons ce qu'il en est de la concordance totale, autrement dit la concordance d'ordre 3.

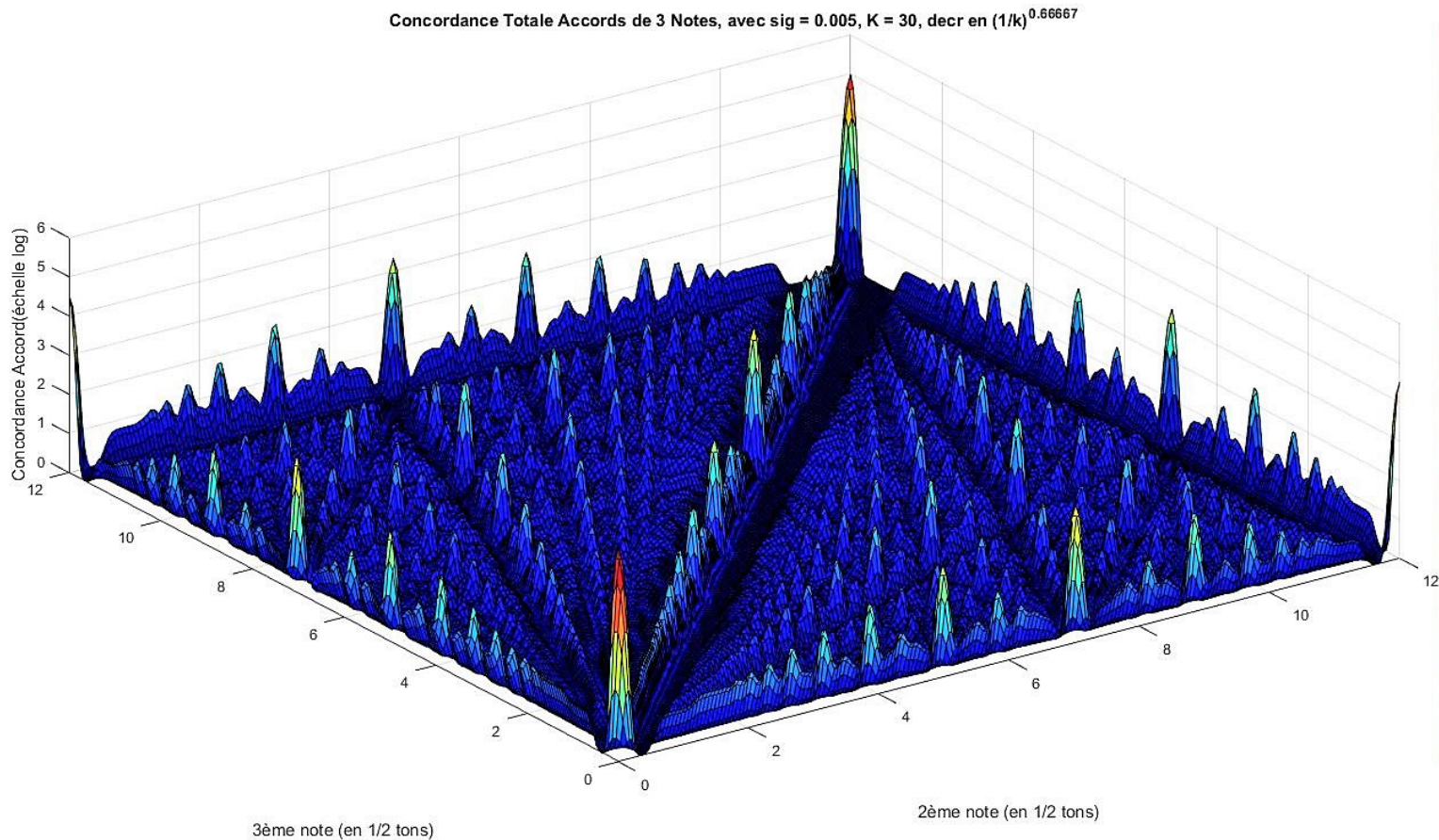


FIGURE 6.13 – Surface de concordance totale des accords de 3 sons, avec $\sigma = 0.005$, $K = 30$ et décroissance en $(1/k)^{2/3}$. L'échelle a été prise en $\log(1 + \text{ConcTotale})$, afin de mieux faire ressortir les pics

La topographie est ici très différente de ce que l'on connaît. Contrairement à la cohérence, la concordance totale va donc apporter un éclairage nouveau par rapport à la concordance d'ordre 2. Regardons sur l'aplat :

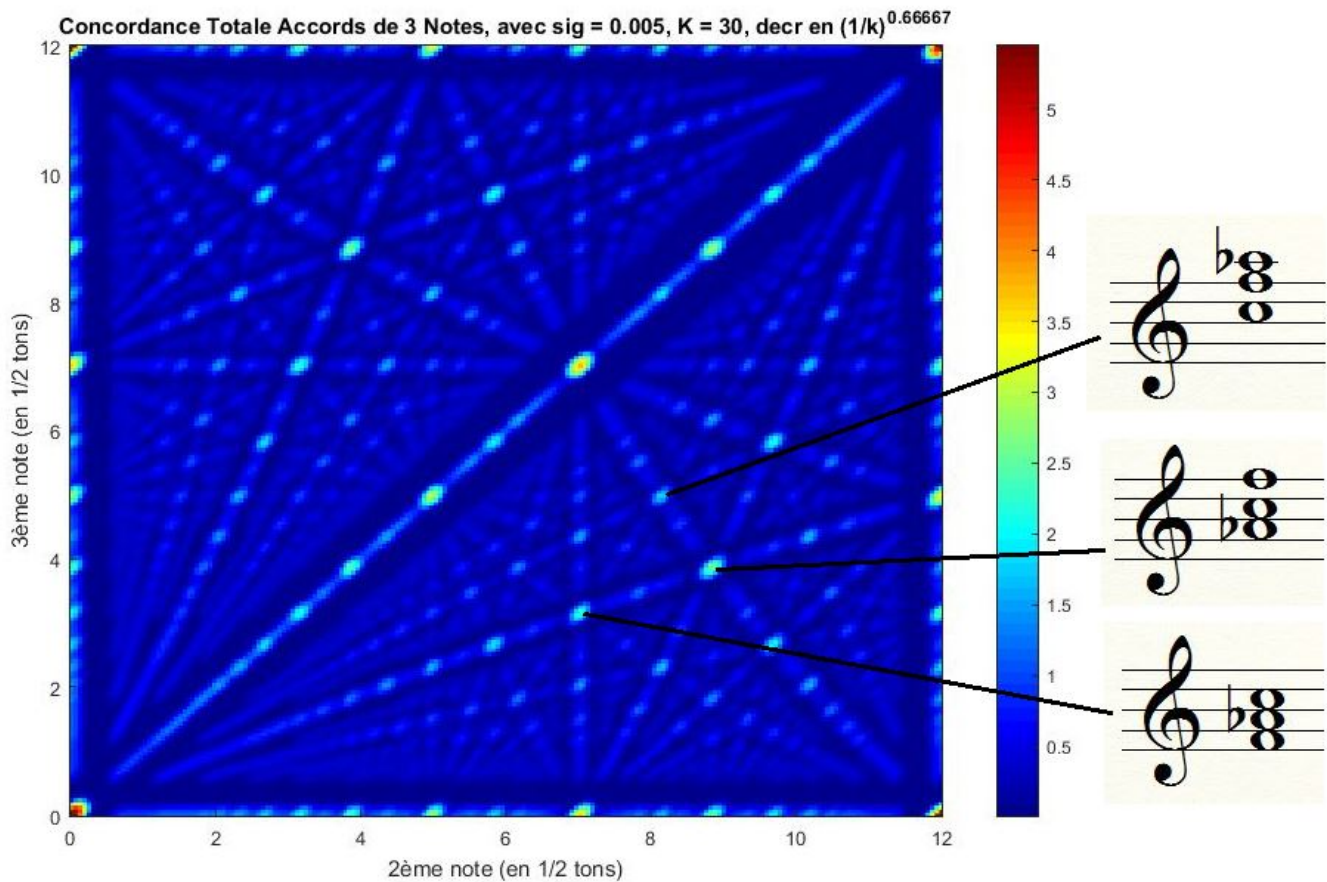


FIGURE 6.14 – Surface de concordance totale des accords de 3 sons, avec $\sigma = 0.005$, $K = 30$ et décroissance en $(1/k)^{2/3}$. L'échelle a été prise en $\log(1+20*\text{ConcTotale})$, afin de mieux faire ressortir les pics

Alors que sur la surface de concordance d'ordre 2 (figure 6.1.1) toutes les lignes crêtes sont droites, on a ici des lignes légèrement incurvées, ce qui justifie la dénomination "concordance d'ordre supérieur". Les symétries ne sont plus les mêmes : on a bien la symétrie diagonale, mais plus la symétrie relative à l'invariance par contenu intervallique. En effet, le contenu intervallique ne joue plus aucun rôle dans le calcul de la concordance d'ordre 3. Par contre, une autre invariance géométrique apparaît, qui ressemble de prime abord à la symétrie liée au contenu intervallique, mais dont l'axe de symétrie est comme plus aplati et légèrement incurvé.

Ce pseudo-axe est matérialisé par une crête, et les deux sommets principaux le long de cette crête, qui sont en fait les deux plus hauts sommets non triviaux de la surface de concordance totale, correspondent tout bonnement à l'accord mineur dans ses deux premières positions : l'état fondamental et le premier renversement. Le second renversement se trouve lui-aussi sur un sommet, en-dehors du pseudo-axe. Aussi, la concordance d'ordre 3 serait-elle intimement liée à l'accord mineur, alors que la concordance d'ordre 2 ne différencierait pas accord mineur et accord majeur dans la position compacte. D'où cela vient-il ? En fait, un accord de trois notes a une concordance totale élevée lorsque quelque part dans le spectre se trouve une plage de fréquence commune aux spectres des trois notes, autrement dit une plage de fréquence qui coïncide avec des partiels de chaque note. Si f_0 désigne la fréquence commune aux spectres des trois notes, cela veut dire que f_0 est un multiple des fréquences f_1, f_2, f_3 des trois notes, ce qui revient à dire que f_1, f_2, f_3 divisent f_0 , donc sont des harmoniques inférieurs de f_0 . En outre, les partiels inférieurs ont la même décroissance que les partiels réels, donc les premiers partiels auront plus de poids dans notre modèle. Or il se trouve que le premier accord de trois notes distinctes (modulo l'octave) présent dans la succession des harmoniques inférieurs (lire sur la figure 6.1.3) est l'accord mineur dans le premier renversement, et le deuxième l'accord mineur dans son état fondamental. Le deuxième renversement apparaît quant à lui avec l'harmonique inférieur de rang 8, à côté d'autres accords.

La concordance d'ordre 3 fait donc apparaître naturellement l'accord mineur, mais contrairement à la concordance d'ordre 2 qui est une énergie, la concordance d'ordre 3 n'est pas à proprement parler une énergie, donc l'interprétation qu'elle donne de l'accord mineur n'est pas complètement *naturelle*, autrement dit physique. Cependant, elle a l'avantage de donner corps aux harmoniques inférieurs de Rameau en en proposant une interprétation à la fois rigoureuse et intuitive.

6.1.4 Exploration de l'univers micro-tonal

Les courbes de concordance des intervalles, vues en 4.4, font apparaître les intervalles dits *naturels*, qui découlent naturellement du timbre. Or ces intervalles, lorsque leur précision est suffisante, ne tombent pas exactement, mis à part l'unisson et l'octave, sur les intervalles qui résultent d'une division égale de l'octave, et qui sont dits tempérés. La gamme tempérée du piano, qui divise l'octave en 12 demi-tons égaux, et qui sert d'ailleurs de repère à nos axes dans les courbes et surfaces de concordance, est le fruit de l'histoire complexe des tempéraments, qui a consisté au fil des siècles à favoriser certains intervalles naturels au détriment d'autres afin de réaliser un compromis entre la pureté des accords et les libertés de modulation. En donnant une mesure du caractère *naturel* des accords, la concordance et les concordances multiples constituent un outil privilégié d'étude des tempéraments par le biais de l'harmonie qui en découle. Nous avons déjà commencé à comparer la concordance des accords pour différents tempéraments et à réaliser des tables de tempéraments, mais cette investigation mérite encore de trop amples développements pour être présentée ici.

Regardons plutôt ce qu'il advient des intervalles naturels lorsque les conditions sont réunies pour qu'ils se multiplient : grand nombre de partiels, faible décroissance et facteur σ petit :

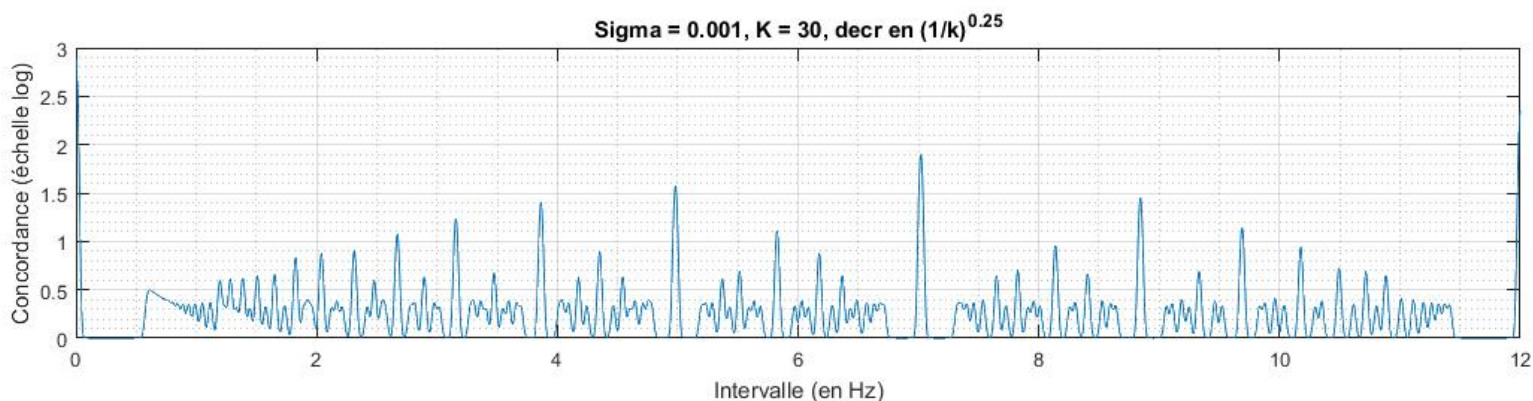


FIGURE 6.15 – Courbe de concordance des intervalles, avec $\sigma = 0.001$, $K = 30$ et décroissance en $(1/k)^{1/4}$

De nombreux pics apparaissent entre ceux correspondant aux intervalles naturels *classiques*. On dénombre ainsi entre la seconde majeure et la tierce mineure tempérées pas moins de 3 pics principaux et 9 pics secondaires. Fait intéressant : entre la tierce mineure et la tierce majeure on voit un pic de concordance à l'abscisse 3.5. Or cet intervalle est exactement une tierce mineure tempérée à laquelle a été rajoutée un quart de ton, autrement dit c'est une tierce que peuvent jouer les instruments qui ont accès aux quarts de ton. On voit là poindre un champ d'investigation des notions de concordance, de cohérence et de concordance multiple, il s'agit de l'exploration des univers micro-tonaux, c'est-à-dire des musiques qui jouent des notes entre les demi-tons.

L'atout principal de notre théorie dans cette voie est la continuité du spectre fréquentiel, atout que n'avait pas l'approche de la concordance à partir de sons échantillonnés. Notre outil est universel au sens où il ne présuppose aucune échelle et s'adapte à toutes les gammes et à tous les infrachromatismes : tempéraments non tempéré, échelle continue, quarts de ton, douzièmes de ton...

Dès le début du XX^e siècle des compositeurs se sont intéressés aux divisions régulières du ton tempéré, mettant au point des instruments pouvant jouer en quarts de tons, en tiers de ton, en

sixièmes ou en douzièmes de ton, pour ne citer que les systèmes les plus répandus. Ivan Vyschnegradsky, Aloïs Haba et Juian Carillo font partie des compositeurs ayant initié ces recherches. Mais comment écrire pour les quarts de ton ? Le système harmonique classique est fondé sur les demi-tons, et ne dit rien des quarts de tons ou des autres subdivisions. Aussi, les univers harmoniques de tels systèmes sont bien souvent empiriques. Si Vyschnegradsky s'opposait à un système harmonique micro-tonal qui puise sa justification dans le phénomène acoustique, il n'en demeure pas moins que la concordance représente un moyen d'investigation de ces univers.

Voici une surface de concordance sur laquelle on a représenté le quadrillage des sixièmes de ton. Chaque point du quadrillage représente un accord potentiellement jouable par un instrument accordé en sixièmes de ton.

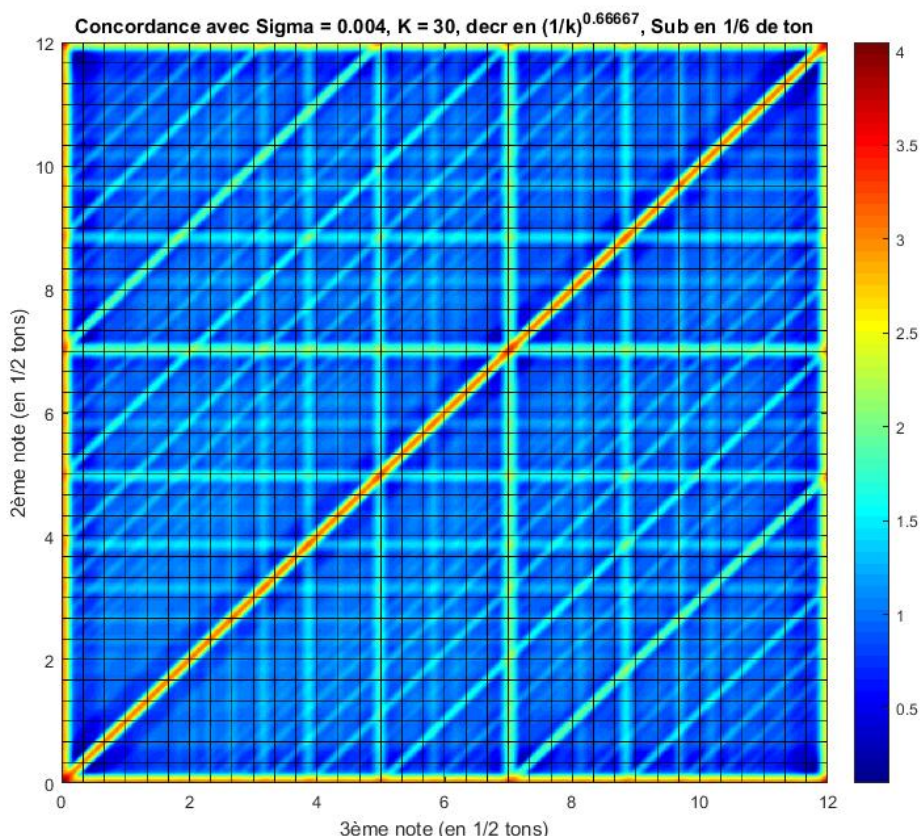


FIGURE 6.16 – Surface de concordance avec quadrillage en 6^{mes} de ton, avec $\sigma = 0.001$, $K = 30$ et décroissance en $(1/k)^{1/4}$

On remarque que l'accord mineur dont la tierce a été surélevée d'un sixième de ton n'est pas moins *fausse* que l'accord mineur tempéré, de même que l'accord majeur dont la tierce a été abaissée d'un sixième de ton est aussi *fausse* que l'accord majeur tempéré, c'est à dire que dans les deux cas l'approximation par sixième de ton de l'intervalle juste est à peu près équivalente en terme de distance à l'approximation par le système tempéré.

L'utilisation de ces outils par le compositeur peut être envisagée sous plusieurs angles : étant donné un système micro-tonal donné, le compositeur a accès aux différentes concordances des accords jouables, et il peut choisir par exemple les accords qui sont sur les pics de concordance, éventuellement sous certaines contraintes liés par exemple à des notes obligées. Le compositeur Jean-Marc Chouvel a déjà utilisé ce principe dans certaines œuvres. En aval de cette démarche, on peut imaginer, à partir d'un spectre en gaussienne qui constitue une bonne modélisation de l'instrument ou du timbre pour lequel on veut écrire, calculer la courbe de concordance correspondante, et déduire des pics de concordance le système infrachromatique le mieux adapté au timbre.

6.2 Étude dynamique

L'étude qui a été menée dans cette partie, qui a été implémentée sur Python et qui est continuée dans l'*Annexe 1*, ne concerne que l'aspect vertical de l'harmonie, où l'accord, plus généralement la verticalité, est considéré comme une entité indépendante, sécable, qu'il est possible d'extraire et d'analyser à coups de concordance, de cohérence, de concordance d'ordre k et de concordance totale. Si ces outils se révèlent être un outil d'exploration de choix de territoires peu fréquentés comme celui des tempéraments ou des univers infrachromatiques (cf. partie 6.1.4), s'ils permettent de comprendre l'influence du timbre sur la *pâte* et la sonorité d'un accord, s'ils élargissent la typologie des accords et enrichissent leur compréhension, que nous apprennent-ils des mouvements, des relations de tension-détente, des cadences, des résolutions, des surprises, des modulations, de tout l'aspect horizontal qui inscrit le phénomène harmonique dans une dimension temporelle? Très peu de choses en fait. C'est pourquoi nous avons introduit en 3.4 la notion de concordance différentielle.

À l'instar des surfaces de concordances de l'étude statique, essayons de représenter la concordance différentielle.

6.2.1 Enchaînement de deux intervalles

Commencer par nous intéresser à l'enchaînement de deux intervalles. Cet enchaînement fait intervenir 4 notes, et l'invariance par translation spectrale réduit les degrés de liberté à 3. Pour pouvoir représenter la concordance de l'enchaînement, il faut donc fixer une autre note. Deux possibilités seulement s'offrent à nous, en raison de la symétrie temporelle (cf. partie 3.4.3) :

1. Fixer le premier intervalle
2. Imposer une note commune aux deux intervalles

Examinons ces deux cas :

- Premier intervalle fixé -

Nous fixons le premier intervalle, par exemple dans les tracés ci-dessous à la tierce majeure, en repérant les notes du second intervalle toujours par rapport à la note de référence, sur deux octaves. Représentons ainsi la surface de concordance différentielle de l'enchaînement.

Enchaînement de 2 intervalles, 1er intervalle : Tierce M
 Sigma = 0.008, K = 40, decr en $(1/k)^{0.5}$

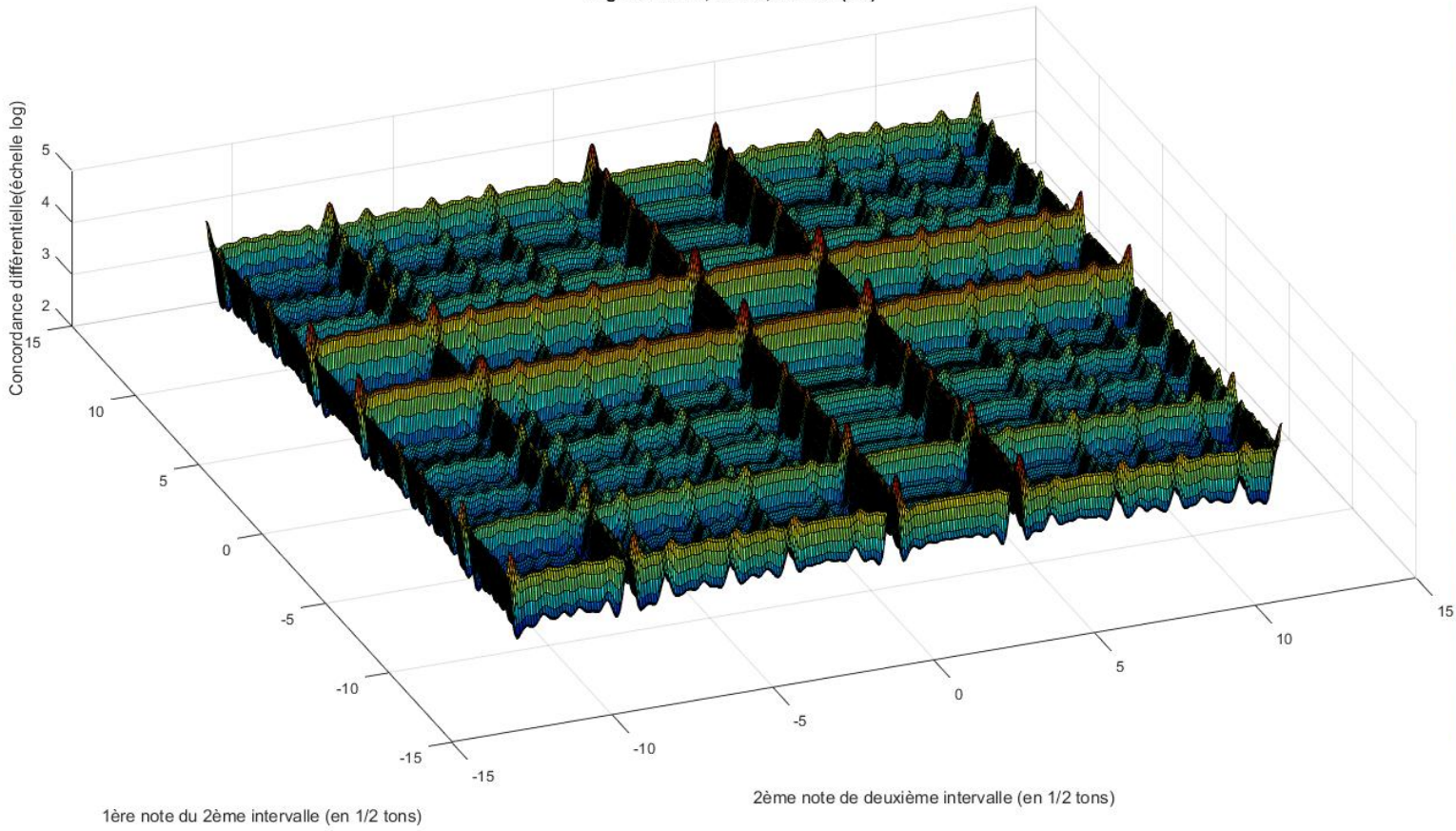


FIGURE 6.17 – Surface de concordance différentielle de l’enchaînement de deux intervalles, avec premier intervalle fixé à une Tierce Majeure, $\sigma = 0.008$, $K = 30$ et décroissance en $(1/k)^{1/2}$

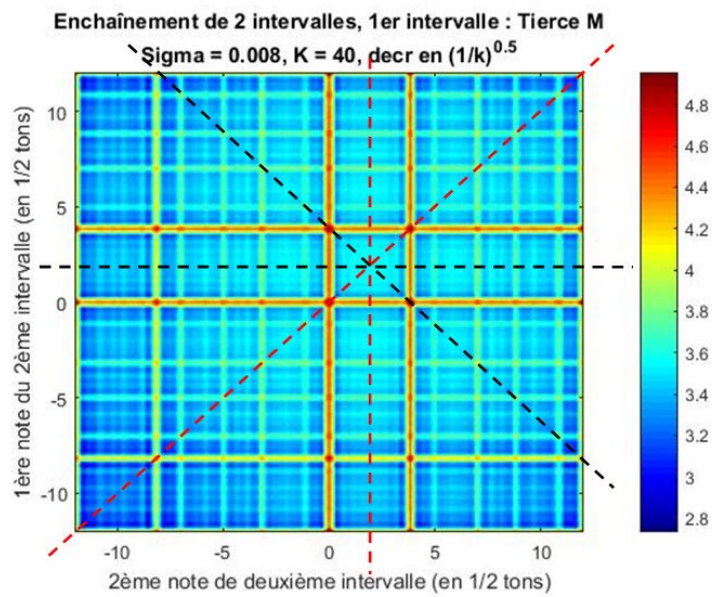


FIGURE 6.18 – Surface de concordance différentielle de l’enchaînement de deux intervalles, avec premier intervalle fixé à une Tierce Majeure, $\sigma = 0.008$, $K = 30$ et décroissance en $(1/k)^{1/2}$

La surface est très symétrique, et les symétries qui apparaissent sont les symétries du carré, autrement dit du groupe diédral d'ordre 8 : \mathcal{D}_8 . Elles sont engendrées par deux symétries élémentaires, dont les axes sont les axes rouges. L'une correspond à l'équivalence entre les deux notes, et la deuxième est une autre symétrie spatiale : c'est la symétrie spectrale par rapport à la note qui se situe au milieu du premier intervalle.

- Note commune entre les intervalles -

Passons au cas où la note de référence est commune aux les deux intervalles. Les notes portées par les axes sont les deuxièmes notes des premier et deuxième intervalles. Pour la première fois dans ce papier l'aspect temporel est intrinsèque à la représentation, puisque les deux notes représentées ont des temporalités différentes. Pourtant, on va tomber sur quelque chose que l'on connaît déjà...

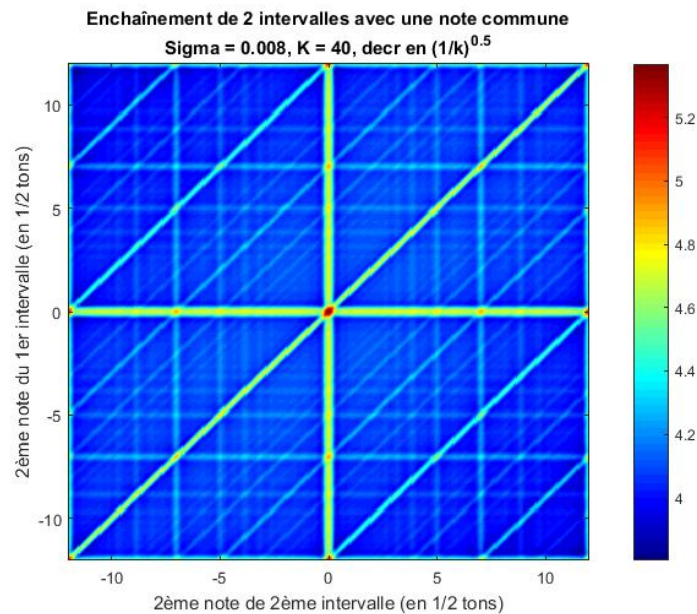


FIGURE 6.19 – Surface de concordance différentielle de l'enchaînement de deux intervalles avec note commune, $\sigma = 0.008$, $K = 30$ et décroissance en $(1/k)^{1/2}$

Le carré en haut à droite a une allure déjà connue, celle de la surface de concordance sur une octave des accords de trois sons. Le carré en bas à gauche est le renversé du premier, en vertu de la symétrie des fréquences par rapport à la note de référence, symétrie due à l'invariance de la concordance par invariance du contenu intervallique. La symétrie par rapport à la crête de la grande diagonale vient de la symétrie temporelle de la concordance différentielle. Les invariances géométriques traduisent donc à la fois des symétries spatiales et des symétries temporelles. En fait, cette figure n'est rien d'autre que la surface de concordance de 3 sons sur deux octaves, où la note de référence n'est plus cantonnée à la basse. En effet, un schéma similaire à celui de la figure 3.4 nous convainc que ce calcul de concordance différentielle fait intervenir les mêmes concordances deux-à-deux que le calcul de concordance statique de l'accord de trois sons formés de la note commune et des deux autres notes, à une constante près qui est la concordance de référence (cf. 5), qui correspond à la concordance d'un intervalle d'unisson.

On pourrait aussi imaginer représenter la concordance différentielle de l'enchaînement de deux intervalles en fixant une note de chaque intervalle, sans que ces notes soient forcément communes, mais nous ne le ferons pas ici. Passons plutôt à l'enchaînement des accords de 3 sons.

6.2.2 Enchaînement de deux accords de 3 sons

La représentation de la concordance différentielle de l'enchaînement de deux accords de trois sons sous forme de surface est contraignante et restrictive car elle oblige à fixer trois notes, ce qui donne d'ailleurs un grand nombre de possibilités. Intéressons-nous par exemple à la concordance

différentielle de l'enchaînement où le premier accord est un accord majeur dont la basse est tenue dans le second accord. Les axes représentent les deux autres notes du deuxième accord, sur une octave.

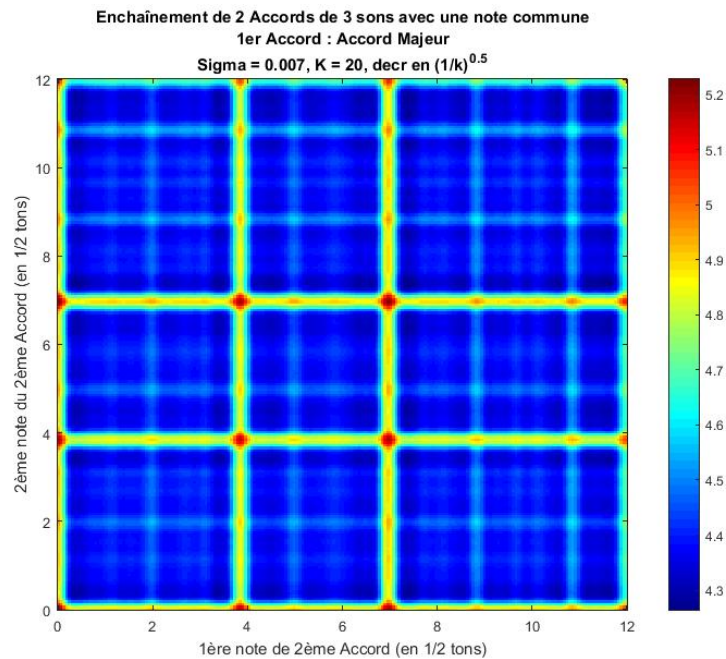


FIGURE 6.20 – Surface de concordance différentielle de l'enchaînement d'un accord majeur avec un autre accord de trois sons, et basse commune, $\sigma = 0.008$, $K = 30$ et décroissance en $(1/k)^{1/2}$

Là encore, on obtient une figure hautement symétrique.

6.2.3 Limites théoriques de la concordance différentielle et perspectives

Les figures précédentes présentent toutes de nombreuses symétries, liées à la symétrie spectrale par rapport à une note de référence et à la symétrie temporelle. Il en est de même des représentations de la cohérence différentielle, définie dans la partie 3.4. Or ces symétries, si elles sont liées à la concordance différentielle, ne sont pas satisfaisantes musicalement. Comment y remédier ?

- Symétries spatiales -

Comme expliqué dans la partie 6.1.3, la concordance totale et les concordances d'ordre supérieur, dans le cas statique, viennent briser les symétries spatiales liées au contenu intervallique, pour en introduire d'autres plus subtiles (cf. 6.1.3), qui n'ont pas été explicitées ici. Il nous reste donc, afin de briser cette symétrie dans le cas différentiel, à introduire les pendants différentiels de ces notions. Les considérations esquissées en 3.4 montrent que cette tâche n'est pas évidente. Elle sera l'objet de futures réflexions, que je ne mènerai pas ici.

- Symétrie temporelle -

La symétrie temporelle constitue la plus grande faiblesse de la concordance différentielle, et la briser reste un enjeu majeur. Il faut donc trouver une manière d'inclure la flèche du temps dans sa définition, par exemple en privilégiant un accord par rapport à l'autre. Ce sera un enjeu majeur des prochains travaux.

Chapitre 7

La concordance à l'oeuvre, implémentation dans NEUMA

Le chapitre précédent a permis de mieux comprendre les enjeux théoriques de la concordance et de prendre la mesure des possibilités qu'elle offre. Il reste maintenant à se rendre compte de ce qu'elle donne concrètement dans un contexte musical, aussi se propose-t-on de développer un logiciel de représentation des grandeurs harmoniques développées précédemment qui parte d'une partition. Seuls les aspects statiques seront implémentés, en raison des limites des outils différentiels expliquées en [6.2.3](#).

7.1 Objectifs

L'idée est d'entrer dans le logiciel une partition encodée dans un format standard, par exemple MusicXML ou MEI, et d'obtenir sur la partition l'affichage sous chaque verticalité des grandeurs harmoniques que sont la concordance, la cohérence, la concordance d'ordre 3 et la concordance totale, sous une certaine forme de spectre en gaussiennes, qui sera ajustable. Cet affichage peut se faire de deux manières :

- Pour une investigation théorique des différents accords, il peut prendre une forme numérique. C'est ce qui fait en [Annexe 2](#).
- Le module final d'analyse devra consister en une interface graphique interactive sous forme de bâtonnets colorés, ou les choix de spectre, de tempérament et d'affichage seront laissés au soin de l'utilisateur. Nous détaillerons sa conception dans la partie [7.4](#)

7.2 Présentation de Music21

Le point de départ de l'implémentation est l'environnement de Music21 développé au MIT, qui contient un ensemble d'outils de musicologie computationnelle pour l'extraction des informations et l'analyse des partitions encodées. Music21 permet par exemple d'extraire la liste des verticalités d'un morceau, et de chaque verticalité extraire sa position ainsi que la liste des fréquences de ses notes. Music21 intègre les écarts fréquentiels par rapport à la gamme tempérée, ainsi, en plus de faire gagner un temps inestimable lors de l'implémentation, il permet de prendre en compte les tempéraments et les micro-tons et se révèle donc pour nous un outil idéal.

Les calculs des grandeurs harmoniques à partir de la partition a été implémenté sous Python, langage dans lequel est écrit Music21. Le code, assorti d'une brève explication, est présenté en [Annexe 2](#). Les paramètres du modèle de spectre utilisé pour les calculs sont bien entendus modifiables, ainsi que le tempérament. On considère cependant timbre et tempérament sont des attributs d'un morceau, de sorte que l'on ne peut mélanger les timbres au sein d'un même morceau. Ces limitations sont pour l'instant inhérentes à notre théorie, c'est à dire que l'on a pas développé les outils nécessaires pour mélanger les spectres.

Grâce à un attribut *Lyric* de Music21, j'ai pu écrire sous chaque verticalité les valeurs numériques de ses grandeurs harmoniques, ce qui m'a permis de faire une étude systématique des accords les plus répandus dans le répertoire, étude qui est présentée en [Annexe 2](#).

7.3 Présentation de Neuma

Le logiciel développé a pour ambition d'être accessible et facilement utilisable par les musiciens. À cette fin, il peut s'insérer dans un projet en ligne de recensement et d'analyse de la musique. C'est là que prend sens le rattachement de mon stage au projet PolyMIR évoqué dans l'introduction. La plateforme sur laquelle se développe le projet est la base de donnée NEUMA, créée par l'IReMus, qui regroupe des partitions encodées sous format MEI ou MusicXML et met à disposition des corpus rares comme un répertoire d'airs de chansons populaires de tradition française, un recueil de psaumes français des XVIe et XVIIe siècles, ou encore un catalogue de motets imprimés en France. En outre, NEUMA propose des outils de recherche mélodique et rythmique dans le corpus, ainsi que les premiers outils d'analyse comme l'annotation des dissonances dans le contrepoint renaissant. C'est donc naturellement, et sous les conseils de Philippe Rigaud, que je me suis tourné vers NEUMA pour développer l'interface.

7.4 Développement de l'interface

Explicitons l'interface telle qu'elle a été imaginée. L'idée est de représenter les grandeurs harmoniques sous forme de bandes colorées situées sous chaque système. Sous chaque verticalité on représente un bâtonnet dont la hauteur est fonction de la valeur de la grandeur, d'après les normalisations imposées dans le chapitre 5. Malgré ces normalisations, qui permettent d'homogénéiser les calculs entre des verticalités avec des nombres de notes différents, on aimerait garder une trace du nombre de notes présentes dans la verticalité. Cela sera fait au moyen d'un dégradé dans l'intensité de la couleur du bâtonnet : plus le nombre de notes sera grand, plus cette couleur sera intense. Un menu à cocher en haut à droite de l'interface permettra de choisir au maximum trois grandeurs à représenter l'une sous l'autre, parmi la concordance, la cohérence, la concordance d'ordre 3 et la concordance totale. Un autre menu concernera le timbre, et permettra de choisir tantôt des instruments dont une modélisation par un spectre en gaussiennes aura été pré-calculée, tantôt de rentrer manuellement les paramètres de spectre. Un autre menu dédié au tempérament aura le même fonctionnement. En plus de cela, pour ne pas déplaire à Scriabine, une fine bande de couleurs sera présente juste sous le système, et chaque case de la bande sous chaque verticalité sera colorisée par synthèse RVB en fonction des valeurs des grandeurs harmoniques, par exemple le bleu étant affecté à la concordance, le rouge à la cohérence, et le vert à la concordance totale, au choix. Les accords auront alors véritablement une *couleur harmonique* !

Pour l'heure, cette interface n'en est qu'au stade de prototype. Je remercie d'ailleurs chaleureusement Henri Boisgibault qui a la patience de m'aider à l'améliorer, et j'espère réussir à en proposer un version plus achevée lors de ma soutenance de stage début septembre. Ci-dessous le premier prototype, qui a plusieurs défauts :

- Certaines concordances sont négatives car je n'avais alors pas encore réfléchi à la normalisation des grandeurs, présentée en dans le chapitre 5. Ici l'échelle est un simple $\log(\text{Concordance})$. C'est d'ailleurs ce résultat graphique qui m'a amené à revoir l'échelle et la normalisation. La version la plus récente a été mise à jour, et désormais toutes les concordances sont positives.
- Les notes appoggiaturées sont comptabilisées comme des notes de la verticalité, ce qui fausse la valeur de la concordance ainsi que l'intensité de bleu. Ce problème a déjà été résolu dans le dernier prototype.
- Le dernier bâtonnet de chaque système est trop large.

Ce premier résultat est cependant assez facilement lisible, ce qui m'encourage à persévérer dans cette voie.

Chapitre 8

Conclusion

Les notions de concordances harmoniques développées ici, par la relative simplicité de leur définition qui se situe à un niveau ondulatoire sans mettre en jeu de présupposés esthétiques, se révèlent être des outils d'une grande portée, dont probablement une petite partie seulement a été entrevue. D'aucuns pourraient encore douter du bien-fondé et de l'efficacité de ces notions, arguant qu'il est illusoire et somme toute orgueilleux de prétendre enrichir la vision de l'harmonie en se départissant des considérations esthétiques, puisqu'en matière de musique l'oreille et le *sentiment musical* restent les seuls juges valables. Ce scepticisme se fourvoie sur deux points, premièrement en faussant nos intentions, ensuite en plaçant le *sentiment musical* dans une cage d'argent, en le déclarant maître en son domaine et inatteignable. D'abord, notre intention n'est pas de formuler des règles, ni d'établir des jugements de valeur. Dans la partie 6.1.4 a été suggéré l'usage de ces outils par les compositeurs, mais cet usage procède de choix, non seulement de directions au sein de l'œuvre, mais surtout de paradigmes de compositions. Loin de moi l'idée qu'une musique doive se situer sur des pics de concordance pour être bonne. La concordance, la cohérence et les concordances multiples sont autant de dimensions supplémentaires de caractérisation de l'harmonie, et il faut les voir tels, comme un enrichissement de l'approche, un enrichissement de la vision, qui peut permettre par exemple de mieux comprendre, dans une perspective historique, comment l'évolution des styles correspond à une exploration du système harmonique. Enfin, pourquoi cet enrichissement de la vision serait-il déconnecté du *sentiment musical*? C'est là sous-estimer la complexité de ce *sentiment* en l'enfermant dans une bulle étanche. L'apport de la concordance n'est pas seulement intellectuel, j'en suis convaincu.

Annexe 1 : Étude statique : caractérisation des accords de la gamme tempérée

Les normalisations du chapitre 5 et l'implémentation du chapitre 7 nous ont donné, via l'interaction avec la partition, les outils pour approfondir notre compréhension et développer notre intuition de la concordance et des notions liées. Nous allons recenser les comportements des accords classique vis-a-vis de la concordance, de la concordance d'ordre 3, de la concordance totale et de la cohérence afin de mieux cerner ce que caractérise chacune de ces notions. Mais avant cela, introduisons une dynamique interne dans l'étude statique : celle de la superposition des notes. Dans tout ce chapitre, nous fixerons les paramètres de timbre, leur influence ayant été étudiée dans les chapitres 4 et 6. Nous prendrons : $\sigma = 0.01$, $K = 40$ et décroissance en $1/k$.

Étude par arpégiation

On examine ici, pour l'Accord Majeur, l'Accord mineur, et l'Accord diminué à quatre notes, l'évolution de la concordance et de la concordance totale par superposition des notes de l'accord, qui aboutit à la concordance de l'accord considéré. De cette manière, on suit un chemin dans l'espace des concordances, c'est un peu comme si on extrayait les couches enfouies pour mieux comprendre la construction de l'accord.

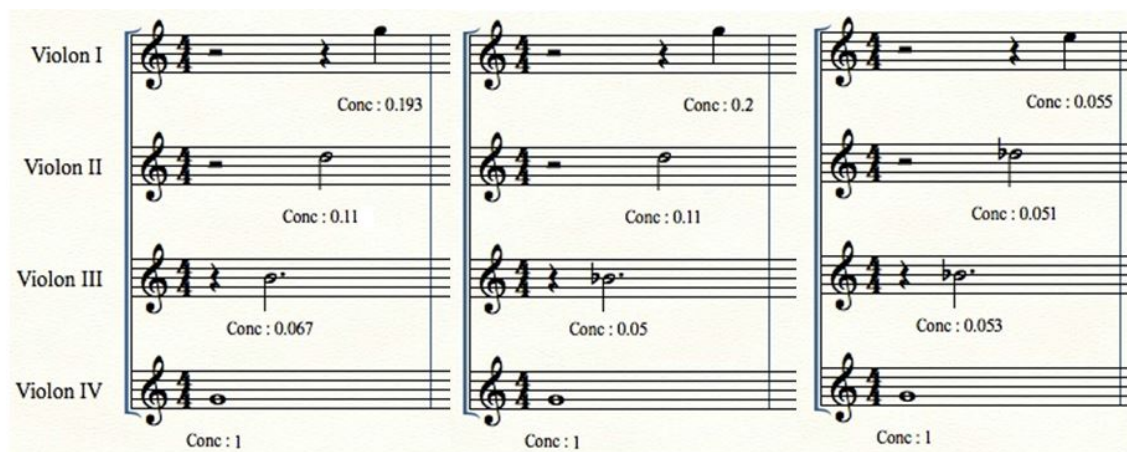


FIGURE 8.1 – Évolution de la concordance par superposition de notes, pour respectivement l'Accord Majeur, l'Accord mineur, et l'Accord diminué, sur 4 notes

Pour l'accord majeur et l'accord mineur de 3 notes, ces chemins ont les mêmes concordances de départ et d'arrivée (en vertu de l'égalité des contenus intervalliques), mais pas les mêmes concordances sur 2 notes : les chemins diffèrent. Comme on pouvait l'imaginer, l'accord diminué est l'accord des trois qui a la plus faible concordance, à tous les niveaux.



FIGURE 8.2 – Évolution de la concordance totale par superposition de notes, pour respectivement l'Accord Majeur, l'Accord mineur, et l'Accord diminué, sur 4 notes

Si la concordance est loin de réaliser l'utopie de l'entropie de superposition évoquée dans la partie 5.7, la concordance s'en rapproche déjà plus, puisque sur deux des trois accords la concordance diminue effectivement lors de la superposition. L'accord mineur est celui qui a comme prévu la plus grande concordance totale. On remarque aussi l'accord diminué à trois sons a une concordance totale plus élevée que l'accord majeur à 3 sons. Cela vient du fait que l'accord diminué apparaît dans la série des harmoniques inverses dès l'harmonique de rang 7, soit même avant l'accord mineur dans son deuxième renversement, qui n'apparaît qu'avec l'harmonique de rang 8 (cf. figure 6.1.3)

Accords de 3 et 4 sons

On peut recenser les accords sur la partition et les classer par concordance, par cohérence, par concordance multiple.

- Accords de 3 sons -



FIGURE 8.3 – Catalogue des accords de 3 sons : concordance et cohérence

La concordance et la cohérence suivent sur les accords de 3 sons des mouvements assez similaires. Le dernier accord, composé de deux demi-tons, a une faible cohérence en même temps qu'une faible concordance.

- Accords de 4 sons -

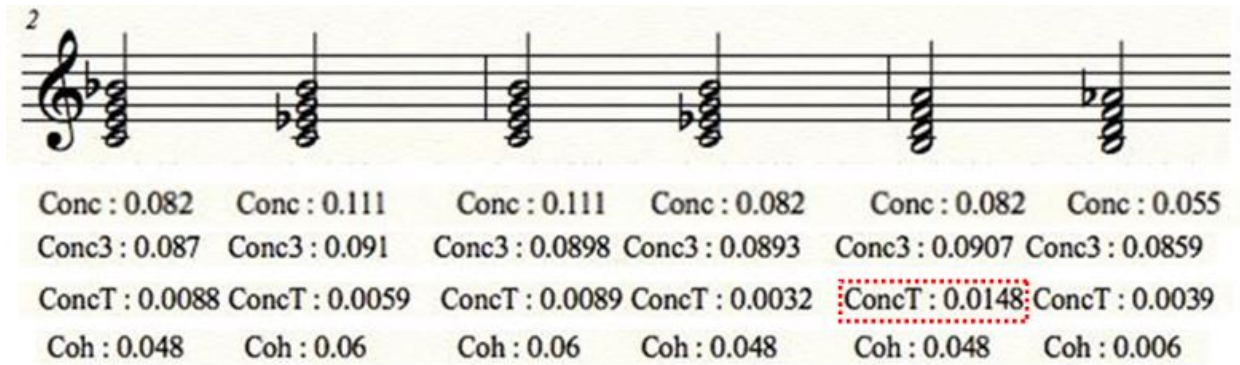


FIGURE 8.4 – Catalogue des septièmes d’espèce : concordances d’ordre 2, 3 et 4, et cohérence

L’accord qui maximise la concordance totale est le cinquième accord. Cela s’explique de la même manière que pour l’accord mineur dans la premier renversement dans le cas des accords à trois sons (cf. partie 6.1.3). En effet, cet accord est le premier accord de 4 notes distinctes (modulo l’octave) qui est s’inscrit dans la série des harmoniques inverses, il apparaît sur l’harmonique inverse de rang 7.

Catalogue des positions

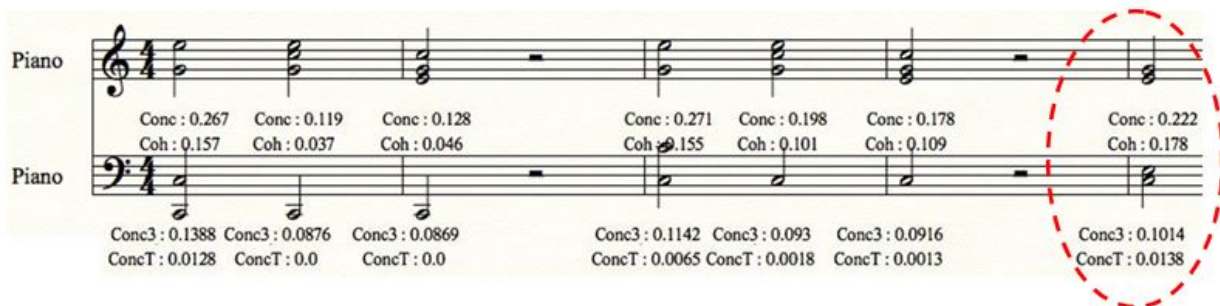


FIGURE 8.5 – Catalogue des positions de l’Accord Majeur : concordances d’ordre 2, 3, 4, et cohérence

La position qui maximise la concordance est la quatrième position. En effet, toutes les notes écrites sont des harmoniques de la fondamentale. La dernière position avec doublure de la tierce s’en sort plutôt bien aussi en terme de concordance et de concordance d’ordre 3 puisqu’elle arrive en troisième position pour ces grandeurs. De plus, elle maximise sur ces exemples la cohérence et la concordance totale!

Annexe 2 : Code Python

Contentons-nous ici de faire quelques commentaires pour accompagner le code Python que voici, qui prend en entrée une partition et calcule les grandeurs harmoniques liées à chaque verticalité de la partition, en utilisant Music21, qui est importé ligne 10. on crée ici deux classes, la classe *ListeAccords*, et la classe *Accord*, qui hérite de *ListeAccords*. Les objets de ces classes porteront toutes deux en attribut les paramètres de timbre et de tempérament. La méthode *Spectre* de la classe *accord* crée le spectre qui va permettre de calculer les concordances. L'attribut *Stream* de la class *ListeAccord* va correspondre à la partition, qui sera modifiée pa l'exemple lorsqu'on ajoutera les valeurs des grandeurs harmoniques sous forme de paroles. L'attribut *grandeursHarmoniques* va contenir la liste des *Accords* de la classes *Accord*, qui sont en fait les verticalités de la partition agrémentées des valeurs des concordances et de la cohérence. A la création d'un objet de type *ListeAccords*, les grandeurs harmoniques de chaque verticalité sont calculées, et stockées, en même temps que les verticalités, dans l'attribut *grandeursHarmoniques*.

```
1      '''
2
3      Created on Jun 14, 2017
4
5      @author: libreservice
6      '''
7
8      #from mimetypes import init
9      import numpy as np
10     from music21 import note, stream, corpus, tree, chord, pitch
11
12     score = corpus.parse('bwv66.6')
13
14
15
16     class ListeAccords:
17         '''
18         Prend en attribut un objet Stream, les parametres d'instrument et d'accord:
19
20         instrument = [liste des partiels, liste des amplitudes, liste des largeurs
21                      spectrales].
22         temperament = [Nom de la note de reference e partir de laquelle va etre fait l'
23                       accord, liste des deviations en cents des 11 notes
24                       restantes par rapport au temperament tempere]
25
26         L'attribut 'grandeursHarmoniques' va stoker sous forme de liste les
27         informations de concordance et de coherence de chaque accord,
28         ainsi que son nombre de notes
29         L'attribut normalisation va servir a normaliser les concordances des unissons
30         de n notes
31         '''
32
33     def __init__(self, stream):
34
35         self.stream = stream
36         self.tree = tree.fromStream.asTimespans(stream, flatten=True, classList=(
37             note.Note, chord.Chord))
38         self.instrument = [[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20],
39                            [1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6,1/7,1/8,1/9,1/10,1/11,1/12,1/13,1/14,1/15,1/16,
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72
73
74
75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144
145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157
158
159
160
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196
197
198
199
200
201
202
203
204
205
206
207
208
209
210
211
212
213
214
215
216
217
218
219
220
221
222
223
224
225
226
227
228
229
230
231
232
233
234
235
236
237
238
239
240
241
242
243
244
245
246
247
248
249
250
251
252
253
254
255
256
257
258
259
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269
270
271
272
273
274
275
276
277
278
279
280
281
282
283
284
285
286
287
288
289
290
291
292
293
294
295
296
297
298
299
300
301
302
303
304
305
306
307
308
309
310
311
312
313
314
315
316
317
318
319
320
321
322
323
324
325
326
327
328
329
330
331
332
333
334
335
336
337
338
339
340
341
342
343
344
345
346
347
348
349
350
351
352
353
354
355
356
357
358
359
360
361
362
363
364
365
366
367
368
369
370
371
372
373
374
375
376
377
378
379
380
381
382
383
384
385
386
387
388
389
390
391
392
393
394
395
396
397
398
399
400
401
402
403
404
405
406
407
408
409
410
411
412
413
414
415
416
417
418
419
420
421
422
423
424
425
426
427
428
429
430
431
432
433
434
435
436
437
438
439
440
441
442
443
444
445
446
447
448
449
450
451
452
453
454
455
456
457
458
459
460
461
462
463
464
465
466
467
468
469
470
471
472
473
474
475
476
477
478
479
480
481
482
483
484
485
486
487
488
489
490
491
492
493
494
495
496
497
498
499
500
501
502
503
504
505
506
507
508
509
510
511
512
513
514
515
516
517
518
519
520
521
522
523
524
525
526
527
528
529
530
531
532
533
534
535
536
537
538
539
540
541
542
543
544
545
546
547
548
549
550
551
552
553
554
555
556
557
558
559
560
561
562
563
564
565
566
567
568
569
570
571
572
573
574
575
576
577
578
579
580
581
582
583
584
585
586
587
588
589
590
591
592
593
594
595
596
597
598
599
600
601
602
603
604
605
606
607
608
609
610
611
612
613
614
615
616
617
618
619
620
621
622
623
624
625
626
627
628
629
630
631
632
633
634
635
636
637
638
639
640
641
642
643
644
645
646
647
648
649
650
651
652
653
654
655
656
657
658
659
660
661
662
663
664
665
666
667
668
669
670
671
672
673
674
675
676
677
678
679
680
681
682
683
684
685
686
687
688
689
690
691
692
693
694
695
696
697
698
699
700
701
702
703
704
705
706
707
708
709
710
711
712
713
714
715
716
717
718
719
720
721
722
723
724
725
726
727
728
729
730
731
732
733
734
735
736
737
738
739
740
741
742
743
744
745
746
747
748
749
750
751
752
753
754
755
756
757
758
759
760
761
762
763
764
765
766
767
768
769
770
771
772
773
774
775
776
777
778
779
780
781
782
783
784
785
786
787
788
789
790
791
792
793
794
795
796
797
798
799
800
801
802
803
804
805
806
807
808
809
810
811
812
813
814
815
816
817
818
819
820
821
822
823
824
825
826
827
828
829
830
831
832
833
834
835
836
837
838
839
840
841
842
843
844
845
846
847
848
849
850
851
852
853
854
855
856
857
858
859
860
861
862
863
864
865
866
867
868
869
870
871
872
873
874
875
876
877
878
879
880
881
882
883
884
885
886
887
888
889
890
891
892
893
894
895
896
897
898
899
900
901
902
903
904
905
906
907
908
909
910
911
912
913
914
915
916
917
918
919
920
921
922
923
924
925
926
927
928
929
930
931
932
933
934
935
936
937
938
939
940
941
942
943
944
945
946
947
948
949
950
951
952
953
954
955
956
957
958
959
960
961
962
963
964
965
966
967
968
969
970
971
972
973
974
975
976
977
978
979
980
981
982
983
984
985
986
987
988
989
990
991
992
993
994
995
996
997
998
999
1000
```

```

38                                     0.01,0.01,0.01,0.01,0.01,0.01,0.01]]
39     self.temperament = [0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
40                         #[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]# Temperere#
41                         #[0,-10,+4,-6,+8,-2,-12,+2,-8,+6,-4,+10]#Pythagore
42                         #[0,+17,-7,+10,-14,+3,+20,-3,+14,-10,+7,-17]#
43                         Mesotonique 1/4
44                         #[0,-29,+4,+16,-14,-2,-31,+2,-27,-16,-4,-12]# Juste
45                         Majeur
46                         #[0,12,+4,+16,-13,-2,+32,+2,+14,-17,+18,-11]# Juste
47                         mineur
48
49     self.noteDeReferencePourLeTunning = "C4"
50     self.grandeursHarmoniques = []
51     self.normalisation = [2,3,4,5,6,7,8]
52
53     self.ConcordanceCoherenceConcordanceOrdre3Liste()
54
55     def spectre(self, f0):
56
57         '''Cette methode va etre appelee dans la classe Accord, mais elle est
58         definie ici car le seul attribut d'objet
59         qui en est parametre est l'instrument'''
60
61         n = np.arange(0,16,0.001)
62         S = np.zeros(np.shape(n))
63         for i, elt in enumerate(self.instrument[0]):
64             S = S + self.instrument[1][i] * np.exp(-(n - np.log2(elt * f0))**2 / (2
65                 * (self.instrument[2][i])**2))
66
67         return S
68
69     def Normalisation(self):
70
71         """ Calcule la concordance d'ordre n de l'unisson a n notes, pour n allant
72         de 2 a 8"""
73
74         self.normalisation[0] = np.sum(self.spectre(100)*self.spectre(100))
75         self.normalisation[1] = (np.sum(self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.
76             spectre(100))**(2/3))
77         self.normalisation[2] = (np.sum(self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.
78             spectre(100)*self.spectre(100))**(2/4))
79         self.normalisation[3] = (np.sum(self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.
80             spectre(100)*self.spectre(100)*self.spectre(100))**(2/5))
81         self.normalisation[4] = (np.sum(self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.
82             spectre(100)*self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.spectre(100))
83             *(2/6))
84         self.normalisation[5] = (np.sum(self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.
85             spectre(100)*self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.
86             spectre(100))**(2/7))
87         self.normalisation[6] = (np.sum(self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.
88             spectre(100)*self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.spectre(100)*self.
89             spectre(100)*self.spectre(100))**(2/8))
90
91     def frequenceAvecTemperament(self, pitch1):
92
93         """Fonction qui prend en entree un pitch pour renvoyer une frequence, en
94         tenant compte du temperament"""
95
96         pitchRef = pitch.Pitch(self.noteDeReferencePourLeTunning)
97         pitch1.microtone = self.temperament[(pitch1.pitchClass - pitchRef.
98             pitchClass)%12]
99
100        return (pitch1.frequency)
101
102    def ConcordanceCoherenceConcordanceOrdre3Liste (self):
103
104        ''' Transforme chaque verticalite en objet Accord, calcule la concordance,

```

```

92     la coherence et les concordances multiples, et stocke les resultats
93     sous forme de liste d'Accords"
94     '''
95     self.Normalisation()
96
97     for verticality in self.tree.iterateVerticalities():
98         v = Accord(verticality, self.instrument, self.normalisation, self.
99             temperament, self.noteDeReferencePourLeTunning)
100         if verticality.bassTimespan!=None :
101             v.identifiant = verticality.bassTimespan.element.id
102
103         v.ListeHauteursAvecMultiplicite()
104         v.ListeConcordanceDesIntervallesDansAccord()
105         v.NombreDeNotes()
106         if v.nombreDeNotes>=2:
107             v.Concordance()
108             if v.nombreDeNotes>=3:
109                 v.Coherence()
110                 v.ConcordanceOrdre3()
111                 if v.nombreDeNotes>=4:
112                     v.ConcordanceTotale()
113             else:
114                 v.concordanceTotale = v.concordanceOrdre3
115         else:
116             v.concordanceTotale = v.concordance
117
118         self.grandeursHarmoniques.append(v)
119
120
121     def getAnnotatedStream(self, resultList = ['concordance']):
122
123         for gH in self.grandeursHarmoniques:
124
125             if gH.verticality.bassTimespan != None :
126                 element = gH.verticality.bassTimespan.element
127                 if element.isNote or element.isChord:
128
129                     dataString = ""
130
131                     if 'concordance' in resultList:
132                         if dataString != '': dataString + " "
133                         dataString = dataString + str(round(gH.concordance,2))
134                     if 'concordanceOrdre3' in resultList:
135                         if dataString != '': dataString + " "
136                         dataString = dataString + str(round(gH.concordanceOrdre3,2)
137                             )
138                     if 'coherence' in resultList:
139                         if dataString != '': dataString + " "
140                         dataString = dataString + str(round(gH.coherence,2))
141
142                     element.lyric = dataString
143
144
145
146         return tree.toStream.partwise(self.tree, self.stream)
147
148     def moyenneConcordance (self):
149         l = []
150         for accord in self.grandeursHarmoniques:
151             l.append(accord.concordance)
152         return np.mean(l)
153
154     def moyenneCoherence (self):
155         l = []
156         for accord in self.grandeursHarmoniques:
157             l.append(accord.coherence)
158         return np.mean(l)
159
160     def moyenneConcordanceTotale (self):
161         l = []

```

```

162     for accord in self.grandeursHarmoniques:
163         l.append(accord.concordanceTotale)
164     return np.mean(l)
165
166 def moyenneConcordanceOrdre3 (self):
167     l = []
168     for accord in self.grandeursHarmoniques:
169         l.append(accord.concordanceOrdre3)
170     return np.mean(l)
171
172
173 def offsetList (self):
174
175     '''Donne la liste de tous les offsets des verticalites'''
176
177     l = []
178     for verticality in self.tree.iterateVerticalities():
179         v = Accord(verticality)
180         l.append(v.offset)
181     return l
182
183 def idList (self):
184
185     '''Donne la liste des identifiants des verticalites'''
186
187     l = []
188     for verticality in self.tree.iterateVerticalities():
189         v = Accord(verticality)
190         l.append(v.id)
191     return l
192
193 #def IDToTimeList (self, ID_list):
194
195
196
197
198
199 class Accord(ListeAccords):
200     '''
201     Classe qui traite les verticalites enheritant de l'instrument et de la methode
202     spectre de la classe ListeAccords,
203     et ayant comme attributs supplementaires les grandeurs lies a la concordance
204     Faiblesse pour l'instant : l'arbre de la classe mere est vide, un attribut '
205     verticality' vient le remplacer
206     '''
207
208     def __init__(self, verticality, instrument, normalisation, temperament,
209                 noteDeReferencePourLeTunning):# verticality
210
211         self.instrument = instrument
212         self.temperament = temperament
213         self.noteDeReferencePourLeTunning = noteDeReferencePourLeTunning
214         self.normalisation = normalisation
215         self.listeHauteursAvecMultiplicite = []
216         self.listeConcordanceDesIntervallesDansAccord = []
217         self.verticality = verticality
218         self.concordance = 0
219         self.coherence = 0
220         self.concordanceTotale = 0
221         self.concordanceOrdre3 = 0
222         self.identifiant = 0
223         self.nombreDeNotes = 0
224
225     def __repr__(self):
226         '''Affichage'''
227         return "Concordance: {0} \nCoherence: {1}\nConcordance d'ordre 3: {2} \
228         \nConcordance totale: {3}".format(self.concordance, self.coherence, self.
229         concordanceOrdre3, self.concordanceTotale)

```

```

230 def ListeHauteursAvecMultiplicite(self):
231
232     """ Fonction qui donne la liste des pitches, comptes autant de fois qu'ils
        sont repetes a differentes voix """
233
234     #self.listeHauteursAvecMultiplicite = list
235     for elt in self.verticality.startTimespans:
236         if elt.element.isChord:
237             for pitch in elt.element.pitches:
238                 if elt.element.duration.quarterLength != 0:
239                     self.listeHauteursAvecMultiplicite.append(pitch)
240
241             elif elt.element.duration.quarterLength != 0:
242                 self.listeHauteursAvecMultiplicite.append(elt.element.pitch)
243
244     for elt in self.verticality.overlapTimespans:
245         if elt.element.isChord:
246             for pitch in elt.element.pitches:
247                 self.listeHauteursAvecMultiplicite.append(pitch)
248
249         else:
250             self.listeHauteursAvecMultiplicite.append(elt.element.pitch)
251
252
253 def ListeConcordanceDesIntervallesDansAccord(self):
254
255     ''' Cree la liste des concordances des intervalles qui constituent l'accord,
        et le fixe comme parametre, ceci afin d'eviter
256     les redondances dans les calculs de la concordance et de la coherence '''
257
258     for i, pitch1 in enumerate(self.listeHauteursAvecMultiplicite):
259         for j, pitch2 in enumerate(self.listeHauteursAvecMultiplicite):
260             if (i < j):
261                 self.listeConcordanceDesIntervallesDansAccord.append(np.sum(
                    self.spectre(self.frequenceAvecTemperament(pitch1))*self.
                    spectre(self.frequenceAvecTemperament(pitch2)))
262
263 def NombreDeNotes(self):
264     if self.listeHauteursAvecMultiplicite != None:
265         self.nombreDeNotes = len(self.listeHauteursAvecMultiplicite)
266
267
268 def Concordance(self):
269
270     """ Normalisation logarithmique, de maniere a rendre egales les
        concordances des unissons de n notes """
271
272     self.concordance = np.sum(self.listeConcordanceDesIntervallesDansAccord)
273     self.concordance = np.log2(1 + self.concordance / (self.normalisation[0]*
        self.nombreDeNotes*(self.nombreDeNotes - 1)/2))
274     #self.concordance = np.log2(1 + self.concordance)/(np.log(1 + self.
        normalisation[0]*self.nombreDeNotes*(self.nombreDeNotes - 1)/2) / np.
        log(1 + self.normalisation[0]))
275     self.concordance
276
277
278
279 def Coherence(self):
280
281     self.coherence = np.std(self.listeConcordanceDesIntervallesDansAccord)
282     if self.nombreDeNotes == 3 :
283         self.coherence = self.coherence/self.normalisation[1]
284     elif self.nombreDeNotes == 4 :
285         self.coherence = self.coherence/self.normalisation[2]
286     elif self.nombreDeNotes == 5 :
287         self.coherence = self.coherence/self.normalisation[3]
288     elif self.nombreDeNotes == 6 :
289         self.coherence = self.coherence/self.normalisation[4]
290     elif self.nombreDeNotes == 7 :
291         self.coherence = self.coherence/self.normalisation[5]
292     elif self.nombreDeNotes == 8 :
293         self.coherence = self.coherence/self.normalisation[6]
294

```

```

295
296
297 def ConcordanceOrdre3(self):
298
299     for i, pitch1 in enumerate(self.listeHauteursAvecMultiplicite):
300         for j, pitch2 in enumerate(self.listeHauteursAvecMultiplicite):
301             for k, pitch3 in enumerate(self.listeHauteursAvecMultiplicite):
302                 if (i<j<k):
303                     self.concordanceOrdre3 = self.concordanceOrdre3 + np.sum(
304                         self.spectre(self.frequenceAvecTemperament(pitch1))*
305                         self.spectre(self.frequenceAvecTemperament(pitch2))*
306                         self.spectre(self.frequenceAvecTemperament(pitch3)))
307
308     self.concordanceOrdre3 = self.concordanceOrdre3**(2/3)
309     self.concordanceOrdre3 = np.log2(1 + self.concordanceOrdre3 / (self.
310         normalisation[1]*(self.nombreDeNotes*(self.nombreDeNotes - 1)*(self.
311         nombreDeNotes - 2)/6)**(2/3)))
312     #self.concordanceOrdre3 = np.log2(1 + self.concordanceOrdre3)/(np.log(1 +
313     self.normalisation[1] * (self.nombreDeNotes*(self.nombreDeNotes - 1)*(
314     self.nombreDeNotes - 2)/6)**(2/3)) / np.log(1 + self.normalisation[1]))
315
316
317 def ConcordanceTotale(self):
318
319     S = np.ones(16000)
320     for pitch in self.listeHauteursAvecMultiplicite:
321         S = S*self.spectre(self.frequenceAvecTemperament(pitch))
322         self.concordanceTotale = np.sum(S)
323
324     self.concordanceTotale = self.concordanceTotale**(2/self.nombreDeNotes)
325
326     if self.nombreDeNotes == 4 :
327         self.concordanceTotale = np.log2(1 + self.concordanceTotale/self.
328         normalisation[2])
329     elif self.nombreDeNotes == 5 :
330         self.concordanceTotale = np.log2(1 + self.concordanceTotale/self.
331         normalisation[3])
332     elif self.nombreDeNotes == 6 :
333         self.concordanceTotale = np.log2(1 + self.concordanceTotale/self.
334         normalisation[4])
335     elif self.nombreDeNotes == 7 :
336         self.concordanceTotale = np.log2(1 + self.concordanceTotale/self.
337         normalisation[5])
338     elif self.nombreDeNotes == 8 :
339         self.concordanceTotale = np.log2(1 + self.concordanceTotale/self.
340         normalisation[6])

```

Bibliographie

- [1] C Alessandro and C Demars. Représentations temps-fréquence du signal de parole. *TS. Traitement du signal*, 9(2) :153–173, 1992.
- [2] Mattia Giuseppe Bergomi. *Dynamical and topological tools for (modern) music analysis*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2015.
- [3] Georges Bonnet. Considérations sur la représentation et l’analyse harmonique des signaux déterministes ou aléatoires. *Annals of Telecommunications*, 23(3) :62–86, 1968.
- [4] Jean-Marc Chouvel. *Esquisses Pour Une Pensée Musicale les Métamorphoses D’Orphée*. l’Harmattan, 1998.
- [5] Jean-Marc Chouvel. Analyser l’harmonie—aux frontières de la tonalité. *Musurgia*, 18(1) :65–81, 2011.
- [6] Jean-Marc Chouvel, Jean Bresson, and Carlos Agon. L’analyse musicale différentielle : principes, représentation et application à l’analyse de l’interprétation. *EMS Network*, 2007.
- [7] Richard Cohn. Introduction to neo-riemannian theory : a survey and a historical perspective. *Journal of Music Theory*, pages 167–180, 1998.
- [8] Michael Scott Cuthbert and Christopher Ariza. music21 : A toolkit for computer-aided musicology and symbolic music data. 2010.
- [9] WB De Haas. *Music information retrieval based on tonal harmony*. PhD thesis, Utrecht University, 2012.
- [10] Patrick Flandrin. *Temps-fréquence*. Hermes, 1993.
- [11] Hermann Helmholtz. *On the sensations of tone as a physiological basis for the theory of music*. Braunschweig, 1863.
- [12] Franck Jedrzejewski. *Dictionnaire des musiques microtonales : (Nouvelle édition revue et augmentée)*. Editions L’Harmattan, 2014.
- [13] James F Kaiser. On a simple algorithm to calculate the ‘energy’ of a signal. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990. ICASSP-90., 1990 International Conference on*, pages 381–384. IEEE, 1990.
- [14] Eivind Kvedalen. Signal processing using the teager energy operator and other nonlinear operators. *Master, University of Oslo Department of Informatics*, 21, 2003.
- [15] David C Lai. Representation and analysis of signals. part vi. signal-space concepts and dirac’s notation. Technical report, Johns Hopkins univ Baltimore MD, 1960.
- [16] S Mallet. A wavelet tour of signal processing, 1998.
- [17] Guerino Mazzola. *The topos of music : geometric logic of concepts, theory, and performance*. Birkhäuser, 2012.
- [18] Alexandre Torres Porres. Dissonance model toolbox in pure data. In *Proc. of the 4th Pure Data Convention*, 2011.
- [19] Jean-Philippe Rameau. *Traité de l’harmonie réduite à ses principes naturels...* JBC Ballard, 1722.
- [20] Philippe Rigaux, Lylia Abrouk, Hervé Audéon, Nadine Cullot, Cécile Davy-Rigaux, Zoé Faget, Elisabeth Gavignet, David Gross-Amblard, Alice Tacaille, and Virginie Thion-Goasdoué. The design and implementation of neuma, a collaborative digital scores library. *International Journal on Digital Libraries*, 12(2) :73–88, 2012.
- [21] Martin Rohrmeier. Towards a generative syntax of tonal harmony. *Journal of Mathematics and Music*, 5(1) :35–53, 2011.

- [22] Arnold Schoenberg. *Theory of harmony*. Univ of California Press, 1978.
- [23] William A Sethares. *Tuning, timbre, spectrum, scale*. Springer Science & Business Media, 2005.
- [24] Dmitri Tymoczko. The geometry of musical chords. *Science*, 313(5783) :72–74, 2006.
- [25] Felix Wörner, Ullrich Scheideler, and Philip Rupprecht. *Tonality 1900-1950 : concept and practice*. Steiner, 2012.
- [26] Ivan Wyschnegradsky. *La loi de la pansonorité*. Editions Contrechamps, 2017.