

## RAPPORT DE STAGE

---

# Appareil Vocal : modélisation physique, simulation à passivité garantie, analyse de régimes

---

Victor Wetzel

sous l'encadrement de

**Thomas Hélié** (S3AM-STMS, Paris)

et **Fabrice Silva** (Matériaux & Structures, LMA, Marseille)

Lieu d'accueil : IRCAM, équipe S3AM-STMS

ATIAM

SORBONNE UNIVERSITÉ - IRCAM - TÉLÉCOM PARISTECH





## PRÉCIS

---

Ce rapport traite de la modélisation physique et de l'analyse des comportements de l'appareil vocal dans le cadre des systèmes hamiltoniens à ports (SHP). Ce formalisme garantit la préservation du bilan de puissance, propriété intéressante à garantir lorsque l'on modélise des systèmes non linéaires auto-oscillants. Un autre aspect intéressant de ce formalisme est sa modularité, particulièrement indiquée dans le cas de l'appareil vocal qui met en jeu un grand nombre de sous-systèmes.

Deux sujets de recherche sont abordés ici. Le premier est l'analyse d'un modèle récent de la littérature qui couple un larynx à une impédance acoustique, à l'aide de deux outils complémentaires : PyPHS qui permet d'assembler, documenter et simuler des systèmes hamiltoniens à ports ; MANLAB, un outil d'analyse des systèmes dynamiques non linéaires basée sur la méthode asymptotique numérique. Le deuxième est de modifier le modèle pour se rapprocher de la synthèse sonore en modifiant dans la classe des SHP, en y intégrant un modèle de conduit vocal en tubes droits concaténés

Mots-clés : appareil vocal ; modélisation physique ; phonation ; Systèmes Hamiltoniens à Ports ; guide d'ondes ; continuation ; Méthode Asymptotique Numérique ; ondes de puissance ; PyPHS ; MANLAB ;

## ABSTRACT

---

This report deals with the physical modelling and analysis of the behaviour of the vocal apparatus in the context of Port Hamiltonian Systems. This formalism guarantees that the power balance is conserved, a very interesting feature when it comes to non linear auto-oscillating system. The modularity provided by Port Hamiltonian Systems is an other useful asset, given the quite large number of sub-systems involved in the phonation process.

In this internship, we adress two topics. The first one is the analysis of a quite recent vocal apparatus with two complementary tools : PyPHS which allows the user to assemble, document and simulate porst hamiltonian systems ; MANLAB, a continuation tool based on the Asymptotic Numerical Method. The second topic is our wish to shift our aim towards sound synthesis

Keywords : vocal apparatus ; physical modeling ; phonation ; Port Hamiltonian Systems ; Waveguide ; Numerical Asymptotic Method ; power waves ; PyPHS ; MANLAB

## TABLE DES MATIÈRES

---

1	INTRODUCTION	1
1.1	Anatomie de l'appareil vocal . . . . .	1
1.2	Physique de la phonation . . . . .	3
1.3	État de l'art des modèles de la voix . . . . .	4
1.4	Contexte, motivations et objectifs du stage . . . . .	5
2	MODÉLISATION SHP D'UN APPAREIL VOCAL SIMPLIFIÉ	6
2.1	Rappels sur le formalisme SHP . . . . .	6
2.2	Présentation du modèle de Hélie et Silva: SHP d'un larynx et d'un résonateur acoustique couplés . . . . .	10
2.3	Nouvelles expériences numériques . . . . .	14
2.4	Analyse des seuils de phonation . . . . .	18
3	MODÉLISATION SHP D'UN APPAREIL VOCAL AVEC CONDUIT VOCAL SOUS FORME DE GUIDE D'ONDES	23
3.1	Motivations . . . . .	23
3.2	Extension du formalisme SHP aux milieux continus . . . . .	27
3.3	SHP d'un conduit vocal en tubes droits concaténés . . . . .	29
3.3.1	Formulation classique en variables de Kirchhoff . . . . .	30
3.3.2	Reformulation en ondes de puissance . . . . .	33
3.3.3	Simulation à bilan de puissance équilibré . . . . .	35
3.4	Interconnexion des SHP du larynx et du conduit vocal et expériences numériques . . . . .	36
4	CONCLUSION ET PERSPECTIVES	40
	BIBLIOGRAPHIE	42
A	DOCUMENTS ANNEXES	45
A.1	Impédance du conduit vocal . . . . .	46
A.1.1	Formulation du problème et hypothèses . . . . .	46
A.1.2	Définitions . . . . .	46
A.1.3	Résolution . . . . .	46
A.1.4	Conclusion . . . . .	48

o	A.2	Librairie PyPHS . . . . .	49
	A.3	Quadratisation du système . . . . .	51
	A.4	Formulation mixte . . . . .	53

## TABLE DES FIGURES

FIGURE 1	Coupe frontale d'un appareil vocal (figure originale extraite de [CG05], page 56) ; en rouge l'étage respiratoire, en bleu l'étage phonatoire, et en jaune l'étage articulatoire . . . . .	1
FIGURE 2	Coupe frontale d'un larynx (figure originale extraite de [CG+13], page 168) ; les flèches indiquent le sens de l'écoulement pendant la phase d'expiration . . . . .	2
FIGURE 3	Coupe transverse d'un larynx au repos (figure originale extraite de [CG+13], page 139) . . . . .	3
FIGURE 5	Représentation modulaire du modèle de Hélie et Silva [HS17]	10
FIGURE 4	Modèle simplifié de l'appareil vocal de Hélie et Silva [HS17] .	11
FIGURE 6	Modèle d'écoulement glottique : fluide parfait entre deux plaques mobiles (reproduction avec l'accord des auteurs [HS17] . . . . .	11
FIGURE 7	Pli vocal : modèle à une masse [HS17] . . . . .	12
FIGURE 8	Production d'auto-oscillations entretenues dans le cas de la configuration A (voir table 2), pour une pression subglottique de 50Pa ; ici, le débit sous-glottique en fonction du temps . . . . .	15
FIGURE 9	Oscillations amorties : la pression subglottique est insuffisante 25Pa (configuration A) ; ici, le débit sous-glottique en fonction du temps . . . . .	15
FIGURE 10	Déplacement des masses de chaque pli ; faible dissymétrie : $k_r = 100\text{N.m}^{-1}$ , et $k_l = 110\text{N.m}^{-1}$ (configuration A) . . . . .	16
FIGURE 11	Déplacement des masses de chaque pli ; faible dissymétrie $k_r = 100\text{ N.m}^{-1}$ , et $k_l = 110\text{ N.m}^{-1}$ , $P_{sub} = 100\text{ Pa}$ (configuration A) . . . . .	16
FIGURE 12	Déplacement des masses de chaque pli ; faible dissymétrie $k_r = 100\text{ N.m}^{-1}$ , et $k_l = 110\text{ N.m}^{-1}$ , $P_{sub} = 100\text{ Pa}$ (configuration A) ; mise en évidence du mouvements des plis vocaux.	17
FIGURE 13	Déplacement des masses de chaque pli ; faible dissymétrie $k_r = 100\text{ N.m}^{-1}$ , et $k_l = 150\text{ N.m}^{-1}$ , $P_{sub} = 50\text{ Pa}$ (configuration A) . . . . .	17
FIGURE 14	Seuils de phonation en fonction de $P_{sub}$ et $a_0$ , configuration A avec $h_r = 2.10^{-3}\text{m}$ . . . . .	21
FIGURE 15	Seuils de phonation : $P_{sub}$ en fonction de l'amplitude modale $a_0$ (configuration A) ; comparaison entre MAN et analyse des valeurs propres de la jacobienne ; les barres verticales noires montre l'écart type à chaque point d'analyse . . . . .	22

FIGURE 16	Approximation du conduit vocal par la concaténation de tubes droits ; les demis flèches désignent les entrées/sorties qui portent les pressions acoustiques et les débits acoustiques dont le produit forme un flux de puissance entrant. Sur cette figure, le rayonnement n'est pas indiqué. . . . .	24
FIGURE 17	Schéma de la propagation d'ondes dispersives dans un guide d'onde linéaire conservatif ; l'opérateur de retard $z^{-1}$ modélise la propagation dans un tube (retard d'un échantillon) . . . . .	25
FIGURE 18	Ondes incidentes, réfléchies et transmises à une interface entre les cylindres $n$ et $n + 1$ . . . . .	26
FIGURE 19	Concaténation de deux tubes. Pour le débit, la convention est le débit <u>entrant</u> . . . . .	32
FIGURE 20	Schéma du système complet . . . . .	35
FIGURE 21	Impédance d'un tube droit : comparaison entre le modèle et les simulations à passivité garantie . . . . .	36
FIGURE 22	Énergie interne du système dans le cas conservatif (tube avec une impédance infinie au bout) ; le tube est excité par une impulsion à $t=0.03s$ . . . . .	37
FIGURE 23	Mise en évidence du retour instantané qui apparaît au moment de l'assemblage de l'appareil vocal complet . . . . .	37
FIGURE 24	Hauteur $h$ en fonction du temps dans le cas où le conduit vocal est un guide d'onde . . . . .	39
FIGURE 25	Simulation d'un système Masse-ressort-amortisseur soumis à une force externe ; élongation et Force imposée à la masse en fonction du temps . . . . .	50
FIGURE 26	Point de départ ; les flèches simples désignent des variables de port dispersives ; les demies-flèches désignent un flux de puissance . . . . .	53
FIGURE 27	Formulation mixte ; les flèches simples désignent des variables de port dispersives ; les demies-flèches désignent un flux de puissance . . . . .	53

## ACRONYMS

---

SHP Système Hamiltonien à Ports  
MPC Méthode Prédicteur Correcteur  
MAN Méthode Asymptotique Numérique  
EDP Équations aux Dérivées Partielles



## GLOSSAIRE DES SYMBOLES

---

$\rho_0$	Masse volumique ( $\text{kg.m}^{-3}$ )
$\chi_0$	Compressibilité isentropique ( $\text{Pa}^{-1}$ )
$T_0$	Tension (N)
$c_0$	Célérité des ondes dans l'air ( $\text{m.s}^{-1}$ )
$F_e$	Fréquence d'échantillonnage (Hz)
$\mu_0$	Masse linéique ( $\text{kg.m}^{-1}$ )
$Z$	Impédance acoustique (Rayl.)
$Q$	Débit ( $\text{m}^3.\text{s}^{-1}$ )
$m$	Masse (kg)
$k, \kappa$	Raideur ( $\text{N.m}^{-1}$ )
$\xi, \zeta$	Élongation (m)
$\lambda$	Paramètre d'intérêt (continuation)
$\frac{\delta}{\delta\theta}$	Dérivée fonctionnelle par rapport à $\theta$
$\mathbf{X}$	Vecteur d'état
$w$	Variable de dissipation
$z(w)$	Loi de dissipation
$\nabla_{\mathbf{X}}H$	Gradient du Hamiltonien par rapport au vecteur d'état $\mathbf{X}$
$p_{+/-}$	Ondes de pression progressives et régressives
$v_{+/-}$	Ondes de puissance progressives et régressives
$\Omega$	Domaine considéré
$\Pi$	Quantité de mouvement de l'écoulement glottique
$\ell$	Variable spatiale

## INTRODUCTION

---

### 1.1 ANATOMIE DE L'APPAREIL VOCAL

Le terme *appareil vocal* désigne l'ensemble des organes impliqués dans la production du son. On peut les regrouper en trois groupes qui correspondent à trois fonctions, visibles sur la figure 1 :

- ▶ L'étage respiratoire
- ▶ L'étage phonatoire
- ▶ L'étage articuloire

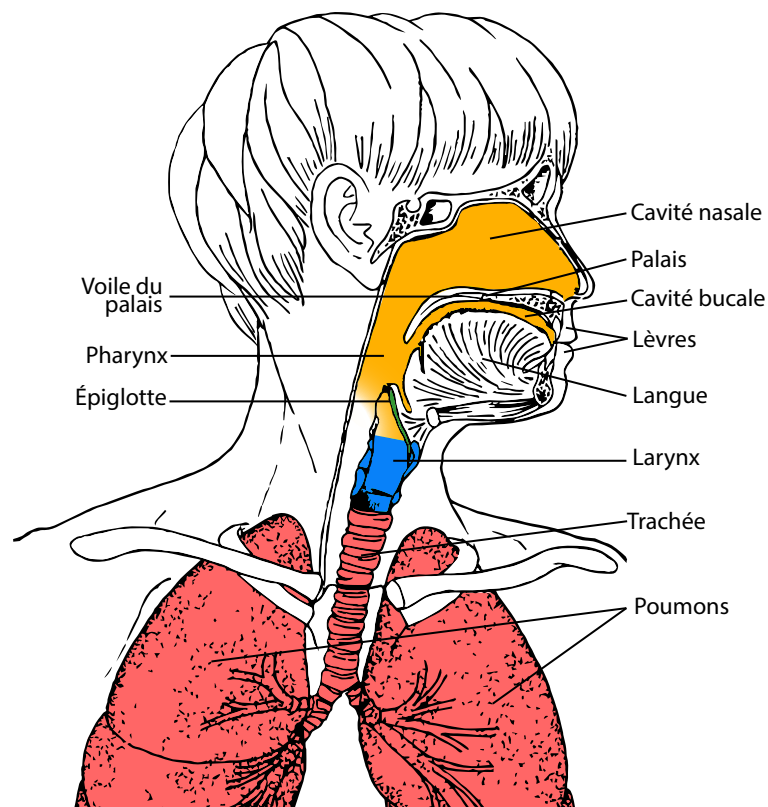


FIGURE 1 – Coupe frontale d'un appareil vocal (figure originale extraite de [CG05], page 56); en rouge l'étage respiratoire, en bleu l'étage phonatoire, et en jaune l'étage articuloire

- **L'ÉTAGE RESPIRATOIRE** Les deux organes principaux de l'étage respiratoire sont les poumons et le diaphragme, un muscle situé entre les poumons et les viscères. Ce sont les principaux acteurs du cycle respiratoire qui se décompose en deux phases : **l'inspiration**, où le diaphragme se contracte, les poumons se dilatent de manière à laisser entrer l'air ; **l'expiration**, où le diaphragme se détend, comprime les poumons ce qui expulse l'air vers la trachée.

- **L'ÉTAGE PHONATOIRE** Il est principalement composé du larynx, un organe composé de cartilages (cricoïde, thyroïde et aryténoïdes pour l'essentiel) articulés entre eux par de nombreux muscles. Ils permettent le positionnement et la mise en tension de replis membraneux, les plis vocaux, qui renferment le ligament vocal et le muscle vocal (thyroaryténoïdien).

Les plis vocaux forment une constriction, la glotte, qui s'oppose à l'écoulement d'air. En amont (dans la phase expiratoire), la cavité subglottique forme un conduit convergent (le cône élastique), tandis que le ventricule de Morgani et les plis vestibulaires forment une géométrie aval plus complexe avec une forte expansion en sortie des plis.

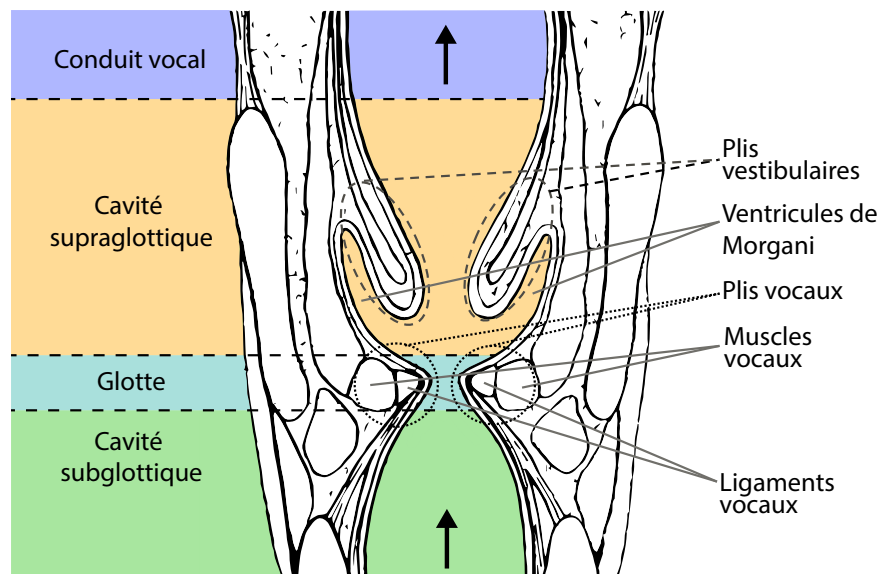


FIGURE 2 – Coupe frontale d'un larynx (figure originale extraite de [CG+13], page 168) ; les flèches indiquent le sens de l'écoulement pendant la phase d'expiration

Les ligaments vocaux sont fixés à l'avant du larynx au cartilage thyroïde et à l'arrière aux aryténoïdes, des cartilages mobiles. Les ligaments vocaux ne sont donc pas parallèles : en position ouverte, la glotte prend la forme d'un triangle (voir figure 3).

Au repos, les plis vocaux sont écartés, et l'air circule librement. L'adduction désigne l'action de rapprochement des plis vocaux, qui permet notamment leur mise en vibration.

- **LE CONDUIT VOCAL** Il est composé de toutes les voies aériennes supérieures. Elles s'étendent du larynx jusqu'aux lèvres et aux narines. Sa géométrie est définie et modifiée par les articulateurs (langue, mandibule, lèvres, voile du palais).

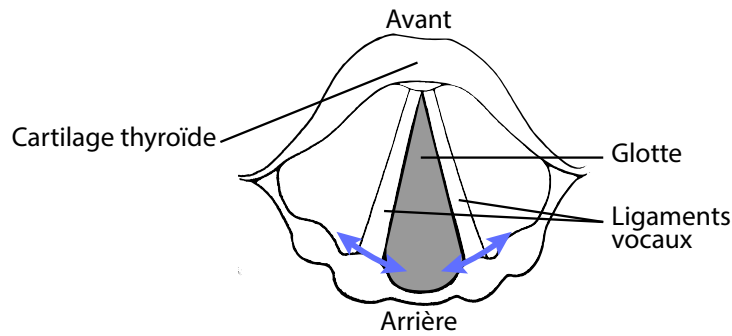


FIGURE 3 – Coupe transverse d'un larynx au repos (figure originale extraite de [CG+13], page 139)

Il s'agit d'un système très complexe qui requiert un contrôle moteur expert pour produire des mots reconnaissable à nos oreilles avisées d'utilisateurs quotidiens. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la vidéo de l'IRM d'un locuteur lambda<sup>1</sup> ou d'un chanteur<sup>2</sup>.

## 1.2 PHYSIQUE DE LA PHONATION

Le phénomène qui nous intéresse le plus ici est la **phonation** : l'émergence d'auto-oscillations au niveau du larynx. On s'intéresse seulement à la phase expiratoire.

On peut simplifier le processus auto-oscillant de l'appareil vocal sous la forme d'un cycle en trois étapes. Dans la configuration initiale, les plis vocaux sont en contact, sous l'effet de l'adduction :

1. La pression augmente dans la cavité subglottique, jusqu'à ce que les plis se séparent à l'entrée de la glotte.
2. L'air s'engouffre et écarte les plis vocaux
3. L'écoulement glottique s'établit, la pression subglottique diminue, et les forces de rappel élastiques ramènent les deux plis vocaux l'un vers l'autre
4. La glotte se ferme, et on reprend à l'étape 1.

Ce processus produit une onde de débit glottique qui vient exciter le conduit vocal.

Lors de la phonation, les plis vocaux se comportent comme une valve vibrante, de la même manière que les lèvres du musicien chez les instruments de type cuivre. Cependant, dans le cas de la voix, ce n'est pas le résonateur qui impose la fréquence d'oscillation, mais les plis vocaux, et plus précisément le muscle vocal, adossé à chaque ligament vocal (visibles sur la figure 2). En se contractant, il modifie la raideur mécanique du pli vocal, et augmente la fréquence d'oscillation. Lorsqu'il se détend, la fréquence d'oscillation diminue.

1. <https://www.youtube.com/watch?v=6dAEE7FYQfc>

2. <https://www.youtube.com/watch?v=GCluRCd2YuM>

### 1.3 ÉTAT DE L'ART DES MODÈLES DE LA VOIX

- **MODÈLE SOURCE FILTRE** L'appareil vocal est étudié d'un point de vue acoustique et signal. Le modèle source-filtre est une approche très classique : le processus auto-oscillant dans l'étage phonatoire est approché par une source périodique plus ou moins complexe ; l'étage articulatoire est vu comme un filtre. La méthode de Codage par Prédiction Linéaire (ou LPC) sépare un signal vocal en deux éléments : un signal source composé d'impulsions et de bruit, appelé le résiduel ; une enveloppe spectrale décrite par les coefficients d'un filtre auto-régressif.

C'est généralement au niveau de la modélisation du signal source que les efforts se concentrent. Le RT-CALM [D'A+06] (Real-Time Causal Anti-causal Linear Model) utilise : une description spectrale qui permet de restituer des propriétés acoustiques connues ; une description temporelle classique des instabilités naturelles de la voix sous la forme d'un *jitter* (instabilité de la fréquence fondamentale) et d'un *shimmer* (instabilité de l'amplitude).

Le modèle source-filtre a l'avantage d'être relativement léger, et donc particulièrement indiqué dans le cas de la synthèse temps-réel ou de la compression de donnée (dans le cas de la méthode LPC). L'inconvénient majeur est leur incapacité à modéliser physiquement le système, puisqu'il sont basés sur l'étude de signaux acoustiques en faisant l'hypothèse simplificatrice du modèle source-filtre.

- **MODÈLES SIMPLIFIÉS** Une partie de la communauté scientifiques étudie les phénomènes d'auto-oscillation sur des modèles simplifiés.

Une approche très utilisée consiste à modéliser un pli vocal ou une de ses portions par un système masse-ressort-amortisseur, et à coupler ces masses entre elles. Flanagan et Landgraf en propose un premier modèle à une masse [FL68] (un système oscillant par pli). Ce modèle a été étendu pour des systèmes oscillants plus complexes (modèle à deux masses [IF72], modèle multi-masses [Tit73],[KTH85]). Ils permettent de reproduire des comportements typiques de l'étage phonatoire, et permettent d'en étudier des configurations asymétriques (pathologies vocales). Ils sont toutefois limités en terme de géométrie et de modes de vibrations.

L'écoulement glottique de ces modèles est, le plus souvent, un écoulement incompressible et quasi-stationnaire. Pelorson *et al.* [Pel+94] calcule le point de séparation du jet, élément crucial, en appliquant une théorie de couche limite, en considérant un écoulement plus complexe qui interagit avec un modèle à deux masses.

Hélie et Silva [HS17] proposent un modèle simplifié d'appareil vocal à bilan de puissance équilibré, qui est décrit dans le chapitre 3.

- **MODÈLES DE GRANDES DIMENSIONS** Ces modèles s'attache à résoudre les équations aux dérivées partielles à l'aide d'un schéma numérique. Le plus souvent, c'est la méthode des différences finies qui est utilisée. Les descriptions 2D sont privilégiées, les modèles 3D étant très gourmands en ressources ce qui amène à utiliser des maillages peu précis, comme chez Rosa *et al.* [de +03].

Pour étudier un élément ou un couplage particulier, il est parfois nécessaire d'introduire des hypothèses simplificatrices permettant de simplifier le problème : considérer un écoulement symétrique par rapport à une ligne médiane passant au milieu de la glotte ; considérer un écoulement laminaire ; négliger la viscosité ; négliger la propagation d'ondes acoustiques dans le conduit vocal. Certaines de ces hypothèses sont par exemple utilisées dans [TJZ06].

La collision des plis vocaux durant la phonation est un problème qui n'est aujourd'hui pas résolu. Pendant cette phase de contact, on peut générer une force qui empêchent les nœuds concernés de s'interpénétrer. Tao *et al.* [TJZ06] utilise une autre approche basée sur les multiplicateurs de Lagrange.

#### 1.4 CONTEXTE, MOTIVATIONS ET OBJECTIFS DU STAGE

On s'intéresse à la modélisation physique de l'appareil vocal. Ce système est intrinsèquement non linéaire et auto-oscillant, ce qui demande une attention particulière pour la simulation (stabilité). Il est donc particulièrement intéressant d'adopter une démarche qui assure certaines propriétés, comme un bilan de puissance équilibré et la passivité.

On s'intéresse tout particulièrement aux seuils de phonation, problème abordé dans un stage précédent ??.

De manière concomitante, on souhaite se rapprocher de la synthèse sonore, classiquement abordée d'un point de vue acoustique ou signal. Notre démarche est de faire un lien entre ces approches et la modélisation en systèmes hamiltoniens à ports, et ce afin de réutiliser des connaissances de la littérature et garantir la passivité.

Ce rapport est organisé selon ces deux objectifs. Le deuxième chapitre expose les éléments principaux du formalisme Hamiltonien à ports, ce qui permettra par la suite de décrire le modèle d'appareil vocal sus-mentionné. Ensuite, on présente de nouvelles expériences numériques effectuées pendant le stage et une analyse des seuils de phonation avec une nouvelle méthode qui présente certains avantages<sup>3</sup> ??.

Le troisième chapitre s'attache à proposer un modèle de conduit vocal inspiré des modèles usuels de résonateurs vocaux. On cherche une formulation compatible avec les systèmes Hamiltoniens à ports. Enfin, nous présenterons des résultats de simulation.

• **ÉQUIPE D'ACCUEIL** Le stage se déroule dans l'équipe S3AM (Systèmes et Signaux Sonores : Audio/Acoustique et instrUMents, créée en 2017) au sein du laboratoire STMS à l'IRCAM. Cet établissement est au carrefour entre recherche et création musicale. Ce stage a aussi bénéficié d'un accueil au LMA (Marseille).

---

3. Par exemple : description par trajectoire continue, continuation à pas auto-adaptatif, etc.

Dans le cadre de la modélisation de l'appareil vocal, on souhaite garantir certaines propriétés comme un bilan de puissance équilibré. Un nombre important d'organes sont impliqués dans la phonation. On cherche donc une approche permettant de les modéliser puis de les assembler de manière transparente.

C'est dans cette optique que Hélie et Silva [HS17] ont proposé un modèle d'appareil vocal dans un formalisme modulaire qui garantit la préservation du bilan de puissance : les Systèmes Hamiltoniens à Ports (abrégé en SHP dans la suite du rapport).

Dans le cadre de ce stage, on souhaite étudier les capacités de ce modèle. Cette démarche s'appuie sur deux outils : des simulations temporelles issues d'une nouvelle implémentation du modèle ; l'analyse des seuils de phonation par une méthode de continuation numérique. Ces résultats seront confrontés avec ceux obtenu par Forma [For17] lors d'un précédent stage.

Ce chapitre est organisé de la manière suivante : dans un premier temps, nous rappellerons les aspects principaux du formalisme Hamiltonien à Ports ce qui nous permettra, dans un second temps, de présenter de manière succincte le modèle d'appareil vocal de Hélie et Silva [HS17] ; dans un troisième temps, nous présenterons des résultats d'expériences numériques qui montrent les capacités du modèle ; dans un quatrième temps, nous exposerons brièvement les outils destinés à étudier les seuils de phonation et les résultats de ce travail.

## 2.1 RAPPELS SUR LE FORMALISME SHP

Il s'agit d'un formalisme permettant de modéliser un système physique donné comme un assemblage de composants qui décrit le comportement du système. La structure de ce formalisme garantit que le système résultant est à bilan de puissance équilibré : il ne crée pas d'énergie spontanément.

Cette modularité et la garantie d'un bilan de puissance équilibré font de ce formalisme un outil très intéressant, notamment dans le cas de la modélisation de l'appareil vocal qui met en jeu de nombreux organes.

• **COMPOSANTS MULTI-PHYSIQUES ET BILAN DE PUISSANCE** La variation d'énergie au cours du temps pour un système physique passif interagissant avec son environnement est donnée par son bilan de puissance :

$$\boxed{\frac{dE}{dt} + P_{diss} - P_{ext} = 0} \quad (2.1)$$

Avec :

- ▶  $E$  : L'énergie stockée par le système
- ▶  $P_{diss}$  : Puissance dissipée par le système
- ▶  $P_{ext}$  : Puissance cédée par le système à son environnement

Une modèle qui respecte ce bilan de puissance est à *bilan de puissance équilibré*. Le formalisme hamiltonien à port s'attache à proposer une représentation modulaire qui garantit le bilan de puissance.

Il décrit ces trois phénomènes par une collection de composants élémentaires qui **stockent**, **dissipent** de l'énergie ou en **cède** à l'environnement. En aucun cas le système ne crée de l'énergie.

Chacun de ces composants est paramétré par une variable d'état : l'élongation d'un ressort, la quantité de mouvement d'une masse (solide ou fluide), la charge d'un condensateur, le flux d'une inductance, ou la pression à l'intérieur d'un volume. Le comportement du système et l'énergie associée sont décrits pas une loi, fonction de cette variable d'état.

Cette approche permet de modéliser un grand nombre de systèmes mettant en jeu des mécaniques et comportements différents : c'est une approche multiphysique.

Nous choisissons une représentation en variables de Kirchhoff. Les grandeurs qui dérivent des variables d'état sont des grandeurs homogènes à un **flux** (débit, vitesse, courant) ou à un **effort** (pression, force, tension). Nous verrons que le cadre particulier des SHP impose alors ce choix pour d'autres variables du système.

• **COMPOSANTS STOCKANT** Ils sont paramétrés par leur variable d'état  $x_n$ , rassemblés dans le vecteur d'état  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_N]^T$ . La fonction  $H_n(x_n)$  donne la quantité d'énergie stockée par le  $n$ -ième composant : c'est le Hamiltonien. Dans le cas où le Hamiltonien est séparable, l'énergie totale stockée par le système  $H$  est la somme de l'énergie  $H_n$  de chaque composant :

$$H(\mathbf{x}(t)) = H \circ \mathbf{x}(t) = \sum_{n=1}^N H_n(x_n) \quad (2.2)$$

La puissance emmagasinée par les composants stockant s'écrit alors :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dH}{dx} \frac{dx}{dt} = \nabla_{\mathbf{x}} H(\mathbf{x})^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum_{n=1}^N \frac{dH_n(x_n)}{dx_n} \frac{dx_n}{dt} \quad (2.3)$$

Par le choix de représentation que nous faisons, la dérivée de la variable d'état  $\dot{x}_n$  et le gradient du hamiltonien  $\nabla_{\mathbf{x}} H_n$  du  $n$ -ième composant sont respectivement homogènes à un flux et à un effort, ou inversement.



- **COMPOSANTS DISSIPATIFS** Ils sont caractérisés par une variable de dissipation  $\mathbf{w} = [w_1, \dots, w_N]^T$ . Le comportement du composant est décrit par la loi de dissipation  $z_n(w_n)$ . De la même manière, on a le vecteur des lois de dissipation  $\mathbf{z}(\mathbf{w}) = [z_0(w_0), \dots, z_N(w_N)]^T$  tel que le produit  $\mathbf{z}(\mathbf{w})^T \mathbf{w}$  est homogène la puissance dissipée par le composant. Elle est positive ou nulle : le composant ne crée pas d'énergie.

$$P_{diss} = \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \mathbf{w} \geq 0$$

C'est une modélisation volontairement simplificatrice des processus d'échange de puissance supposés irréversibles entre le système et son environnement (frottements visqueux ou dissipation thermique par exemple).

- **COMPOSANTS SOURCES** On définit les vecteurs des variables de ports entrantes  $\mathbf{u}$  et sortantes  $\mathbf{y}$  dont le produit définit la puissance cédée (convention générateur) par le système via ses ports d'interconnexions :

$$P_{ext} = \mathbf{y}^T \mathbf{u} \quad (2.4)$$

On peut alors expliciter le bilan de puissance en fonction des variables introduites sous forme vectorielle :

$$\frac{dE}{dt} + P_{diss} + P_{ext} = \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x})^T \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \mathbf{z}(\mathbf{w})^T \mathbf{w} - \mathbf{y}^T \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

- **FORMULATIONS ALGÈBRE-DIFFÉRENTIELLE** Les différents composants sont interconnectés à l'aide d'une connexion conservative : la puissance qui y transite est conservée (elle ne stocke pas, ne crée pas et ne dissipe pas d'énergie). Elle se présente sous la forme d'une matrice  $\mathbf{S}$  qui encode l'agencement interne des composants. Cette matrice est antisymétrique et c'est cette propriété qui encode le bilan de puissance.

Le système complet est représenté dans sa forme algèbre-différentielle :

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w} \\ -\mathbf{y} \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \nabla \mathcal{H}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Cette représentation propose une vision synthétique et systématique des systèmes physiques que l'on modélise, peu importe les phénomènes et comportements étudiés.

- **APPROCHE MODULAIRE** Cette approche par composants confère au formalisme Hamiltonien à Ports un aspect modulaire. Ainsi, l'assemblage de deux SHP reste un SHP. On peut assembler un système très complexe à partir de sous-systèmes plus simples tout en conservant les propriétés sus-mentionnées. Plusieurs grandeurs physiques différentes peuvent y interagir, constituant ainsi des systèmes multiphysiques.

Dans sa thèse, Falaize [Fal16] propose ainsi une modélisation d'un haut-parleur et d'un clavier Fender Rhodes, deux systèmes électro-mécaniques. Dans le modèle de lèvres de musicien d'instruments de type cuivre de Lopes [Lop16], un écoulement incompressible interagit avec un modèle de lèvres à une masse et une impédance acoustique (l'instrument).

• **MÉTHODE NUMÉRIQUE PRÉSERVANT LE BILAN DE PUISSANCE** Pour une EDO de la forme  $\dot{x} = f(x, \lambda, t)$ , l'approche classique consiste à s'intéresser principalement à la dérivée temporelle. L'approche retenue dans le formalisme SHP consiste à discrétiser le bilan de puissance ce qui fait apparaître une forme discrète du gradient du Hamiltonien appariée à la forme discrète de la dérivée temporelle.

$$\frac{dE}{dt} \approx \frac{\delta E}{\delta t} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{x}} \frac{\delta \mathbf{x}}{\delta t}$$

La dérivée temporelle du vecteur d'état  $\dot{\mathbf{x}}$  et le gradient du hamiltonien  $\nabla_{\mathbf{x}}H$  sont respectivement approximatés par une différence finie avancée décentrée et un gradient discret, par exemple :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\delta x}{\delta t} = \frac{x(t + \delta t) - x(t)}{\delta t}$$

$$\nabla_{\mathbf{x}}H \approx \nabla_{\mathbf{x}}^d H = \frac{H(x + \delta x) - H(x)}{\delta x}$$

Avec  $\delta t$  le pas d'échantillonnage temporel. On obtient une version discrétisée du SHP, où  $k$  désigne l'échantillon courant :

$$\begin{pmatrix} \delta \mathbf{x}_k / \delta t \\ \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k \end{pmatrix} = \mathbf{S} \begin{pmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}^d \mathbf{H}(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}_k) \\ \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Une méthode d'optimisation itérative permet d'approcher la valeur  $\delta x_k$ , et d'obtenir  $\delta x_{k+1}$  et  $y_k$ .

C'est Lopes [Lop16] qui propose une méthode numérique dédiée aux SHP qui assure un bilan de puissance équilibré. Forma [For17] a proposé une série d'expériences numériques mettant en défaut les intégrateurs classiques basés sur les méthodes de Runge-Kutta (ode23s, ode15s, ode23tb implémentés dans Matlab) pour le modèle d'appareil vocal présenté plus loin dans le chapitre.

• **EXEMPLE : SYSTÈME MASSE-RESSORT-AMORTISSEUR** On considère un système masse-ressort-amortisseur. Le ressort linéaire de raideur  $k$  est décrit par son élongation  $x$  et l'énergie emmagasinée  $H(x) = \frac{1}{2}kx^2$ . La masse  $m$  est décrite par sa vitesse  $v$  et son énergie cinétique  $H(v) = \frac{1}{2}mv^2$ . L'amortisseur linéaire est décrit par sa variable  $w = v$  et sa loi  $z(w) = aw$ . On impose une force  $F$  à la masse. Le ressort et l'amortisseur sont solidaires de la masse.

Le choix des variables d'état permettant de décrire le système en terme de flux et d'effort est le suivant :  $q = m\dot{x}$  la quantité de mouvement de la masse ;  $x$  l'élongation du ressort. Le vecteur d'état est  $\mathbf{x} = [q \ x]^T$ . La loi de l'amortisseur linéaire est donnée par :  $z(w = \dot{x}) = a\dot{x} = aw$

Le Hamiltonien du système s'écrit comme la somme des énergies cinétiques et potentielles  $H(\mathbf{X}) = E(t) = \frac{1}{2m}q^2 + \frac{1}{2}kx^2$  Son gradient par rapport à  $\mathbf{X}$  donne alors :

$$\nabla_{\mathbf{x}}H(\mathbf{X}) = \begin{pmatrix} q/m = v \\ xk \end{pmatrix}$$

On retrouve bien ici des quantités homogènes à des flux et efforts :  $\dot{q}$  et  $q/m$ , effort et flux ;  $\dot{x}$  et  $xk$ , flux et effort ;  $F$  et  $v$ , effort et flux.

La formulation algèbro-différentielle donne alors :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{x} \\ \dot{w} \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q/m \\ xk \\ a\dot{x} \\ F \end{pmatrix}$$

La première ligne traduit le bilan des forces appliqué à la masse. Les deux lignes suivantes traduisent le fait que les vitesses d'élongation du ressort et de l'amortisseur sont liées à celle de la masse. L'annexe ?? présente une implémentation du modèle et un résultat de simulation.

2.2 PRÉSENTATION DU MODÈLE DE HÉLIE ET SILVA : SHP D'UN LARYNX ET D'UN RÉSONATEUR ACOUSTIQUE COUPLÉS

Hélie et Silva [HS17] ont proposé en 2017 un modèle simplifié d'appareil vocal en approche Hamiltonienne à ports, schématisé à la figure 4. Il bénéficie du bilan de puissance équilibré conféré par le formalisme.

Il en exploite aussi la modularité. Le système complet résulte de l'assemblage de plusieurs sous-systèmes : les plis vocaux ; l'écoulement glottique ; le conduit vocal ; les cavités subglottique et supraglottique. La figure 5 montre cet agencement.

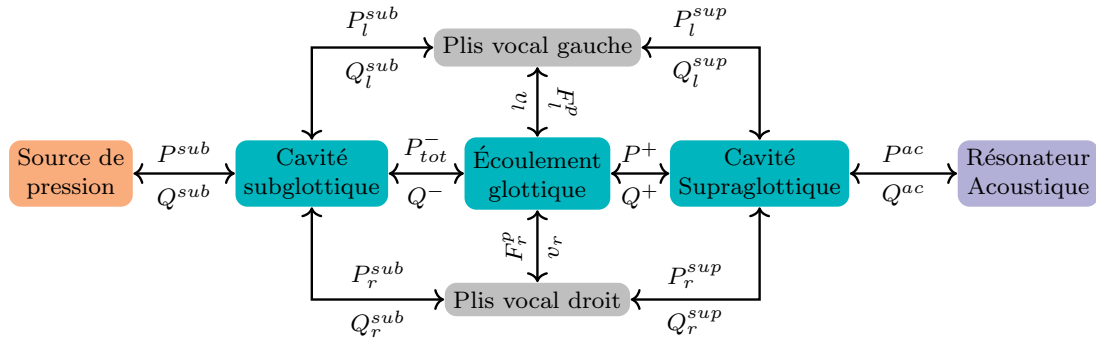


FIGURE 5 – Représentation modulaire du modèle de Hélie et Silva [HS17]

• **ÉCOULEMENT GLOTTIQUE** L'écoulement glottique est assimilé à un écoulement supposé incompressible d'un fluide supposé parfait entre deux plaques mobiles (voir figure 6), inspiré du modèle de lèvres de Lopes [Lop16]. L'équation à résoudre est l'équation d'Euler :

$$\dot{v} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \left( p + \frac{1}{2} \rho |v|^2 \right) = 0 \tag{2.8}$$

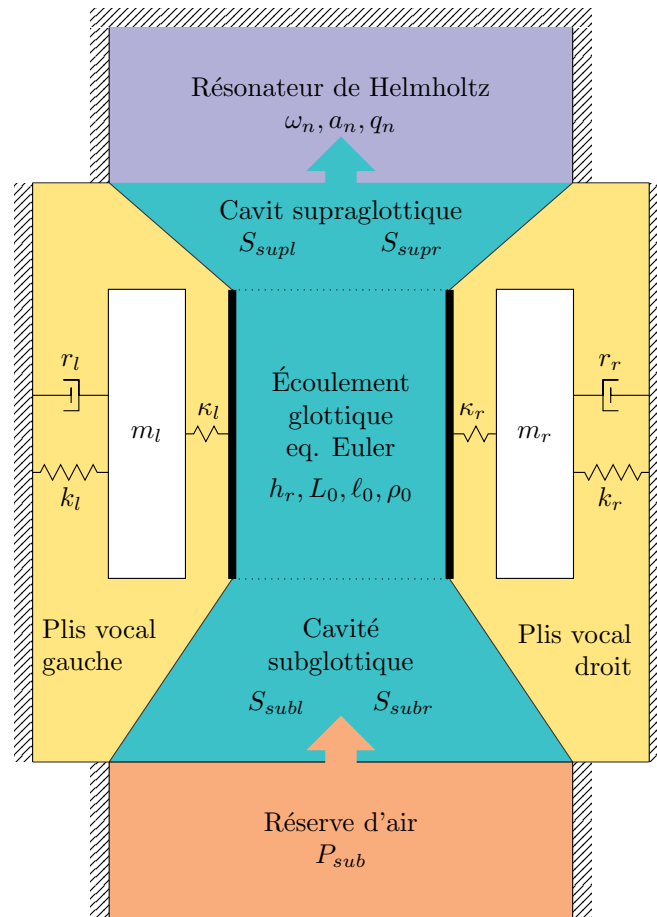


FIGURE 4 – Modèle simplifié de l'appareil vocal de Hélie et Silva [HS17]

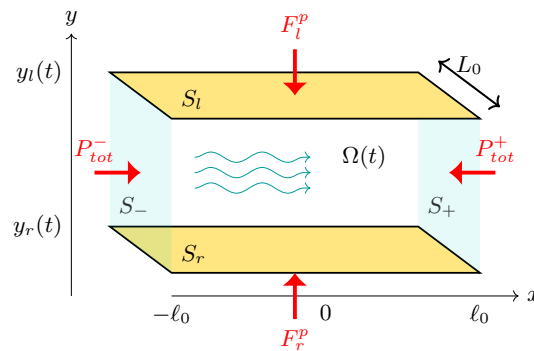


FIGURE 6 – Modèle d'écoulement glottique : fluide parfait entre deux plaques mobiles (reproduction avec l'accord des auteurs [HS17])

On choisit une forme cinématique qui satisfait les conditions aux limites en vitesse imposées par les parois, rigides et non-poreuses :

$$v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0 - x \frac{\dot{h}}{h} \\ \dot{y}_m + \frac{\dot{h}}{h} (y - y_m) \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \Omega = [-\ell, \ell] \times [y_r, y_l].$$

où  $h$  est la hauteur entre les deux plis vocaux,  $\dot{h}$  la vitesse des parois,  $v_0$  la vitesse axiale moyenne sur le domaine  $\Omega$ , et  $\dot{y}_m$  la position du plan médian aux deux plis vocaux.

- **PLIS VOCAUX** C'est un modèle à une masse et deux ressorts qui incorpore un débit de pompage de part et d'autre du pli vocal. Il interagit avec l'écoulement glottique, la cavité subglottique et le fluide de la cavité supraglottique (voir schéma 7 et 5).

Ce modèle a une autre particularité : la couche superficielle élastique (le ressort de raideur  $\kappa$ ). Il modélise le comportement de l'espace de Reinke, situé entre le ligament vocal et la muqueuse qui le recouvre.

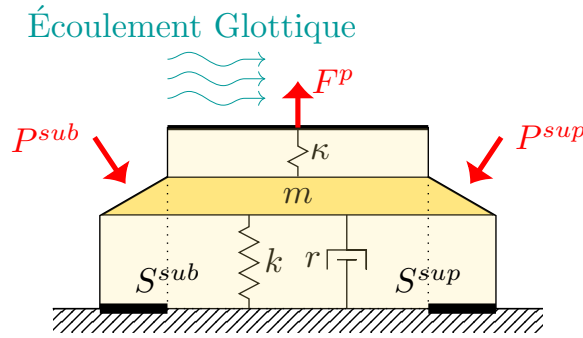


FIGURE 7 – Pli vocal : modèle à une masse [HS17]

- **CONDUIT VOCAL** Le conduit vocal est décrit par son impédance, ratio de la pression acoustique à la sortie de la zone mélange  $P_{ac}$  et du débit entrant  $Q_{ac}$ . Cette impédance est modélisée par un banc de filtres : il s'agit d'une description modale. Chaque composante de pression partage le même débit :

$$Z_{in}(\omega) = \frac{P_{ac}(\omega)}{Q_{ac}(\omega)} = \sum_n^N \frac{P_n(\omega)}{Q_{ac}(\omega)} = \sum_n^N \frac{j\omega a_n}{\omega_n^2 + jq_n\omega_n\omega - \omega^2}$$

Avec  $\omega_n$  la pulsation ( en  $rad.s^{-1}$ ),  $\omega_n$  la pulsation du mode  $n$ ,  $q_n$  le coefficient d'amortissement associé et  $a_n$  le coefficient modal associé. Chaque mode correspond alors à une résonance du conduit vocal, aussi appelé "formant".

Dans le modèle complet, le résonateur acoustique ne comporte qu'un seul mode de fréquence  $f_0 = 640Hz$ .

- **CAVITÉS SUPRAGLOTTIQUE ET SUBGLOTTIQUE** Ces deux cavités ne possèdent que des ports d'interconnexion. Dans la cavité subglottique, le débit venant des poumons se divise équitablement : le débit allant dans le canal glottique  $Q^-$  ; ceux allant vers les plis vocaux droit et gauche, respectivement  $Q_l^{sub}$  et  $Q_r^{sub}$ . On a donc :

$$\begin{cases} Q^{sub} = Q^- + Q_l^{sub} + Q_r^{sub} \\ P_{sub} = P_r^{sub} = P_l^{sub} = P_{tot}^- \end{cases} \quad (2.9)$$

La cavité supraglottique est aussi appelée "zone de mélange". Le débit entrant dans le résonateur acoustique  $Q_{ac}$  est la somme du débit sortant de l'écoulement glottique  $Q_+$  et des débits pompés par les plis vocaux  $Q_l^{sup}$  et  $Q_r^{sup}$ . On a  $P_{ac} = P_l^{sub} = P_r^{sub} = P_+$ .

• **SYSTÈME COMPLET** Il est constitué de 12 variables internes :

- ▶  $\pi_l, x_l, \eta_l$  la quantité de mouvement, l'élongation du ressort et l'élongation du ressort de la couche superficielle du pli gauche
- ▶  $\pi_r, x_r, \eta_r$  idem pour le pli droit
- ▶  $x_1, x_2$  les variables internes du résonateur acoustique
- ▶  $\Pi_x, \Pi_y, \Pi_{exp}, h$  les quantités de mouvements axiale, transverse et d'expansion de l'écoulement glottique, et la distance entre les deux plis.

Le vecteur d'état s'écrit alors  $\mathbf{X} = [\pi_l, x_l, \eta_l, \pi_r, x_r, \eta_r, x_1, x_2, \Pi_x, \Pi_y, \Pi_{exp}, h]^T$

Le système ne comporte qu'un seul port de connexion situé juste avant la cavité subglottique, au niveau de la trachée. On impose une pression subglottique  $P_{sub}$  qui retourne un débit sous-glottique  $Q_{sub}$  (voir schéma 5 qui présente l'agencement des composants).

La liste des paramètres physiques de chaque composant est présentée à la table 1.

Composant	Paramètres
Pli vocal droit/gauche (indice $r/l$ )	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>m</math> masse du pli</li> <li>▶ <math>k</math> raideur du ressort principal</li> <li>▶ <math>r</math> coefficient de dissipation</li> <li>▶ <math>\kappa</math> raideur du ressort de la couche superficielle,</li> <li>▶ <math>S_{sub}/S_{sup}</math> surfaces subglottique et supraglottique</li> </ul>
Écoulement glottique	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>\rho</math> la masse volumique du fluide</li> <li>▶ <math>L_0</math> la largeur du canal glottique</li> <li>▶ <math>\ell_0</math> la longueur du canal glottique</li> <li>▶ <math>h_r</math> la hauteur inter-plis au repos</li> <li>▶ <math>h_0</math> un paramètre arbitraire qui permet d'écrire le système en terme de quantité de mouvement</li> </ul>
Conduit vocal	<ul style="list-style-type: none"> <li>▶ <math>\omega</math> la pulsation du mode</li> <li>▶ <math>q_0</math> le coefficient d'amortissement</li> <li>▶ <math>a_0</math> le coefficient modal</li> </ul>

TABLE 1 – Liste des paramètres physique pour chaque composant (modèle de Hélie et Silva [HS17])

Il s'agit d'un modèle simple. Cependant, il est capable de reproduire des comportements typiques de l'appareil vocal. C'est l'objet de la section suivante.

## 2.3 NOUVELLES EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

Elles sont réalisées à l'aide d'une bibliothèque Python destinée à assembler, simuler et documenter des SHP : PyPHS, décrite plus en détail en annexe. La méthode numérique de Lopes *et al.* [LHF15] implémentée dans PyPHS garantit des simulations à bilan de puissance équilibré.

Sauf indication contraire, les valeurs des paramètres physiques du modèle sont celles listées à la table 2. On remarque que la valeur de l'amplitude modale  $a_0$  est très élevée (de l'ordre du  $G\Omega$ ). C'est une condition du modèle pour obtenir des auto-oscillations.

Pli vocal gauche	$m = 0.2mg, r = .005, k = 100 \text{ N/m}, \kappa = 300,$ $S_{sub} = 11 \cdot 10^{-5} \text{m}^2, S_{sup} = 11 \cdot 10^{-7} \text{m}^2$
Pli vocal droit	$m = 0.2mg, r = .005, k = 100 \text{ N/m}, \kappa = 300,$ $S_{sub} = 11 \cdot 10^{-5} \text{m}^2, S_{sup} = 11 \cdot 10^{-7} \text{m}^2$
Glotte	$\rho = 1.3 \text{ kg.m}^{-3}, L_0 = 11 \cdot 10^{-3} \text{m},$ $\ell_0 = 2 \cdot 10^{-3} \text{m}, h_r = 1 \cdot 10^{-4} \text{m}, h_0 = 1e - 4 \text{m}$
Conduit vocal	$\omega_0 = 2 * \pi * 640 \text{rad/s}, q_0 = 0.04, a_0 = 50G\Omega$

TABLE 2 – Configuration A

Dans la suite de ces simulations, on utilise le même type de signal d'excitation. À  $t=0\text{s}$ , la pression subglottique est nulle. Elle croit linéairement jusqu'à  $t=0.1\text{s}$  où elle s'établit et reste constante jusqu'à la fin de la simulation.

Pour une pression subglottique suffisante, le modèle reproduit le phénomène de phonation. La figure 8 trace le débit sous-glottique  $Q_{sub}$  en fonction du temps. C'est ce signal qui vient exciter le conduit vocal dans le cas du modèle source-filtre.

Dans le cas où la pression subglottique est insuffisante, le système n'auto-oscille pas (voir figure 9). On obtient des oscillations amorties : le système reste à l'équilibre. Le même résultat se produit lorsque la pression subglottique trop importante.

• **CAS DE PLIS VOCAUX DISSYMÉTRIQUES** On considère maintenant le cas où les plis vocaux présentent une dissymétrie : l'un est plus rigide que l'autre ( $k_l > k_r$ ). Dans un premier temps on étudie le cas où la dissymétrie est faible ( $k_r = 100\text{N.m}^{-1}$ , et  $k_l = 110\text{N.m}^{-1}$ ). Dans un deuxième temps, on observera l'effet d'une forte dissymétrie ( $k_l = 150\text{N.m}^{-1}$ , et  $k_r = 100\text{N.m}^{-1}$ ).

Pour mieux visualiser la différence et les effets de cette configuration pathologique, on trace l'élongation du ressort principal de chaque pli (ressort  $k$ ). Lorsque cette valeur est croissante, les deux plis se rapprochent ; lorsqu'elle est décroissante, les deux plis s'éloignent l'un de l'autre.

Pour une faible dissymétrie, le modèle auto-oscille toujours. Le pli vocal le plus rigide a une amplitude d'oscillation plus faible (voir figure 10). Le temps d'établissement des auto-oscillations est plus long : 0.4s contre 0.3s dans le cas symétrique.

## Établissement d'auto-oscillations entretenues: phonation

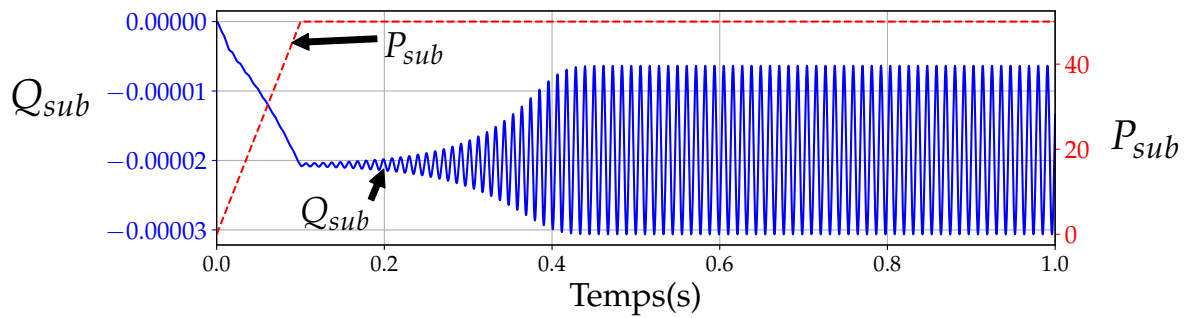


FIGURE 8 – Production d'auto-oscillations entretenues dans le cas de la configuration A (voir table 2), pour une pression subglottique de 50Pa ; ici, le débit sous-glottique en fonction du temps

## Oscillations amorties

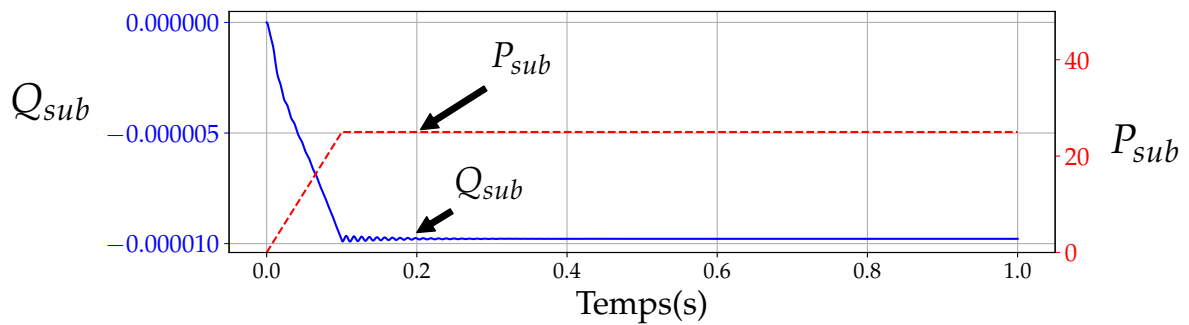


FIGURE 9 – Oscillations amorties : la pression subglottique est insuffisante 25Pa (configuration A) ; ici, le débit sous-glottique en fonction du temps

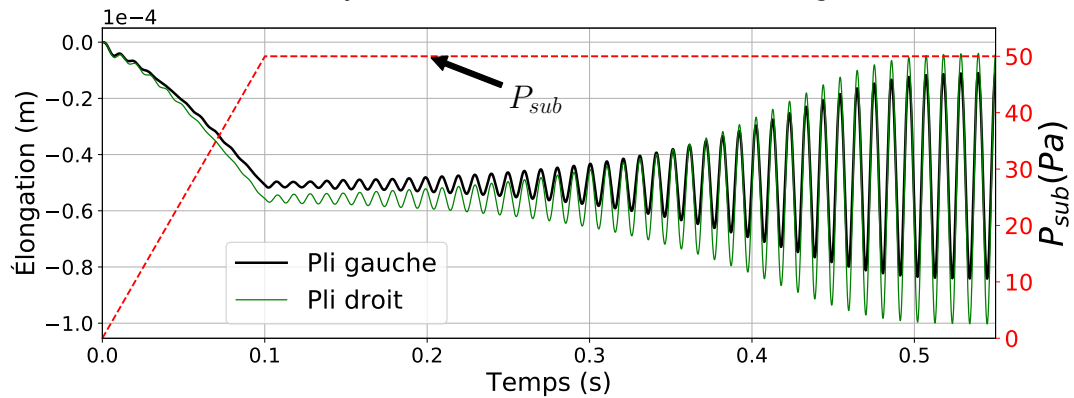
Phonation, dissymétrie faible ( $k_l = 110 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ), configuration A

FIGURE 10 – Déplacement des masses de chaque pli ; faible dissymétrie :  $k_r = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , et  $k_l = 110 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  (configuration A)

Auparavant, lorsque la pression était trop importante, le système n'oscillait plus. La dissymétrie introduit un nouveau comportement (voir figure 11).



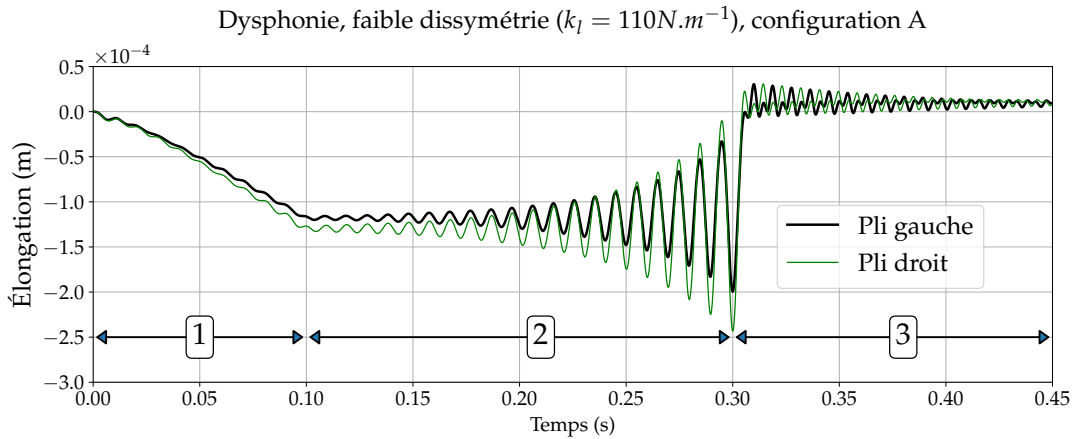


FIGURE 11 – Déplacement des masses de chaque pli ; faible dissymétrie  $k_r = 100 \text{ N.m}^{-1}$ , et  $k_l = 110 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $P_{sub} = 100 \text{ Pa}$  (configuration A)

On distingue trois phases différentes :

1. L'établissement de la pression, où les plis s'éloignent.
2. L'émergence des auto-oscillations : le pli droit a une amplitude plus faible ; les deux plis sont en phase.
3. Les plis se rapprochent soudainement ( $t \approx 0.3 \text{ s}$ ) et les oscillations s'amortissent.

En effectuant un agrandissement sur la troisième zone, on peut voir que les deux plis ne sont pas en phase (voir figure 12), ce qu'il empêche l'auto-oscillation de se stabiliser. Forma montre l'existence de ce comportement à l'aide une méthode différente.

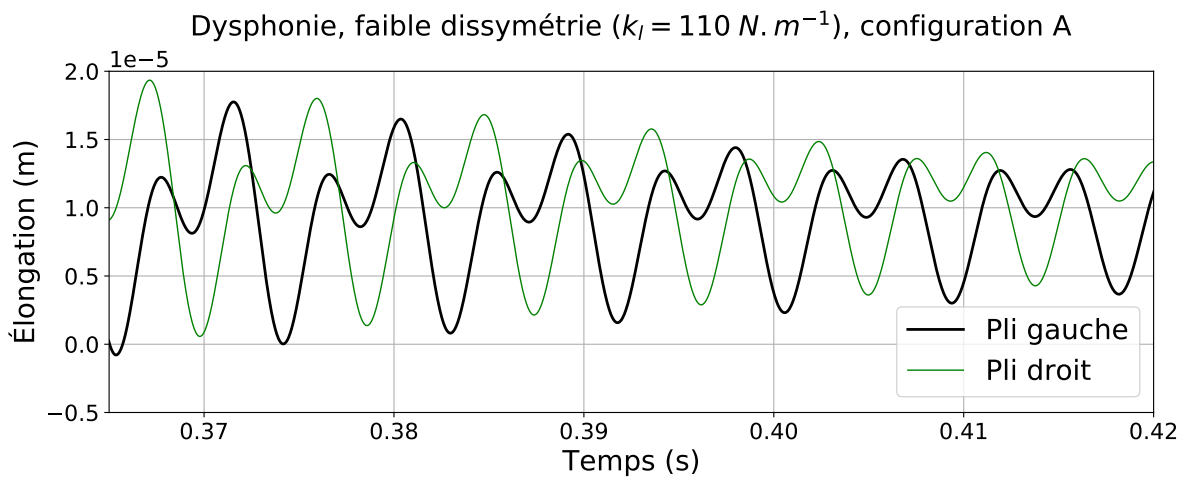


FIGURE 12 – Déplacement des masses de chaque pli ; faible dissymétrie  $k_r = 100 \text{ N.m}^{-1}$ , et  $k_l = 110 \text{ N.m}^{-1}$ ,  $P_{sub} = 100 \text{ Pa}$  (configuration A) ; mise en évidence du mouvements des plis vocaux.

Pour une forte dissymétrie, le temps de stabilisation des auto-oscillations est beaucoup plus important : 1.4 secondes, contre 0.3s dans le cas sain (voir figure 13). Plus

la dissymétrie est importante, plus le temps d'établissement des auto-oscillations est important.

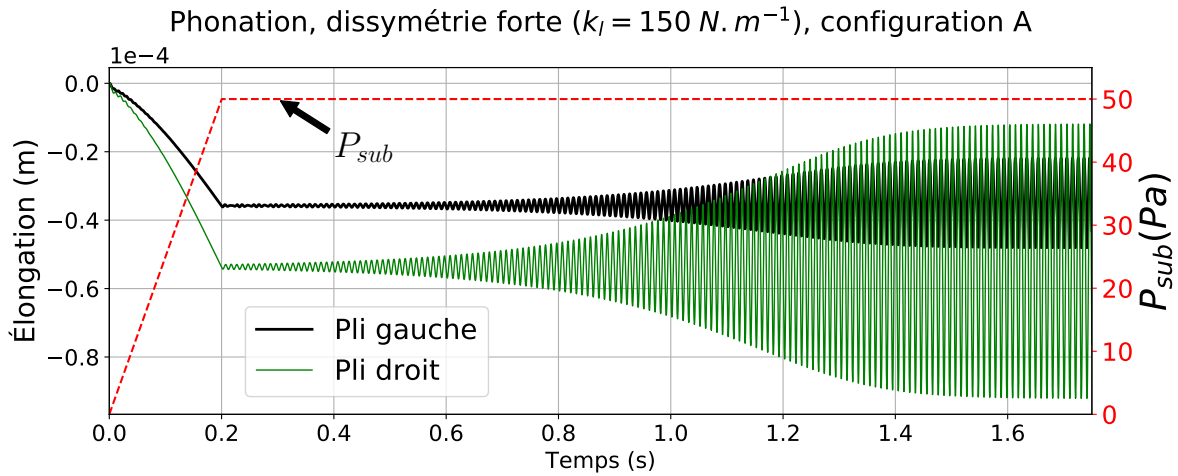


FIGURE 13 – Déplacement des masses de chaque pli; faible dissymétrie  $k_r = 100 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , et  $k_l = 150 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $P_{sub} = 50 \text{ Pa}$  (configuration A)

Ces expériences numériques montrent les capacités du modèle à reproduire des régimes typiques de la voix dans les cas sain et pathologique.

Ce premier travail a permis d'aborder la question des seuils de phonation, c'est à dire la pression subglottique nécessaire pour générer des auto-oscillations. Ils dépendent directement de la valeur du coefficient modal  $a_0$  qui influe sur la charge impédantielle que le conduit vocal exerce sur le larynx.

Cette dépendance pose une question : comment peut-on estimer plus précisément ces seuils ? En effet, l'estimation de ces seuils à l'aide de simulations temporelles, comme celles présentées ci-dessus, s'avère long et fastidieux. On se tourne donc vers un outil d'analyse différent : la continuation numérique.

#### 2.4 ANALYSE DES SEUILS DE PHONATION

Cette partie propose l'estimation des seuils de phonation du modèle d'appareil vocal simplifié de Hélie et Silva [HS17] à l'aide des outils d'analyse des systèmes dynamiques non linéaire et en particulier la méthode asymptotique numérique, implémenté dans la toolbox MANLAB [GCV18], développée au LMA à Marseille. Le choix de cet outil est motivé par la flexibilité qu'il offre et le contact privilégié dont on bénéficie avec l'équipe de chercheurs qui le développe.

Le premier objectif de ce travail était de confronter les résultats obtenu par Forma durant son stage [For17] avec une autre méthode. Le deuxième est de créer des passerelles entre MANLAB et PyPHS.

Dans un premier temps, nous expliciterons quelques notions sur les systèmes dynamiques et l'analyse de bifurcations. Il ne s'agit en aucun cas d'un rappel exhaustif, mais il permettra d'introduire les notions et termes dont nous aurons besoin dans

cette étude (la thèse de Karkar [Kar12] donne une description plus détaillée). Dans un second temps, nous présenterons succinctement la Toolbox MANLAB. Enfin, nous présenterons notre travail de continuation qui s'articule en deux temps : l'adaptation du SHP à MANLAB, puis l'étude des seuils de phonation.

• **DÉFINITIONS** Un système dynamique est défini par une loi qui décrit son comportement :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = f(\mathbf{X}, \lambda, t) \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$  est le vecteur d'état du système et  $\lambda \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de paramètres et  $f$  est une application de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On s'intéresse ici aux systèmes déterministes, continus et de type causal. On supposera par la suite que  $f$  est régulière ( $\mathcal{C}^1$  au moins) et peut être non linéaire.

On appelle *trajectoire du système* une application qui vérifie la relation (2.10) : c'est une solution du système. On en distingue deux types :

- ▶ Les solutions statiques
- ▶ Les solutions périodiques

Une solution statique est une solution stationnaire  $(X_0, \lambda_0)$  tel que  $f(X_0, \lambda_0) = 0$ .  $(X_0, \lambda_0)$  est appelé *point fixe* ou *point d'équilibre* de  $f$ . Une branche de solutions statiques est un ensemble continu de solutions statiques.

• **STABILITÉ ET BIFURCATION DES SOLUTIONS STATIQUES** Pour étudier la stabilité d'une solution statique, on effectue une analyse linéaire locale de stabilité, ce qui fait intervenir la matrice Jacobienne définie ci-dessous :

$$J(X_0, \lambda_0) = \frac{\partial f}{\partial X}(X_0, \lambda_0)$$

Les valeurs propres de cette matrice fournissent des informations sur la stabilité d'un point fixe. Il peut être :

- ▶ stable : les trajectoires dans le voisinage de ce point convergent vers ce point
- ▶ instable : les trajectoires dans le voisinage de ce point s'éloignent de ce point

Une bifurcation est définie comme un point à partir duquel le comportement du système change qualitativement. Dans le cas des solutions statiques, il s'agit d'un changement de stabilité qui intervient au point  $(X^*, \lambda^*)$ .

Dans le cadre de l'estimation des seuils de phonation, nous nous intéressons aux bifurcations de Hopf, car elles peuvent donner naissance à une branche de solutions périodiques, c'est-à-dire l'apparition d'auto-oscillations.

On parle de bifurcation de Hopf quand un couple de valeurs propres complexes conjuguées de  $J(\lambda)$  a sa partie réelle qui s'annule en  $\lambda^*$ .

• **CONTINUATION NUMÉRIQUE** On cherche à calculer une branche de solution partant d'une solution connue du système (système au repos par exemple). Le système d'équations à annuler est sous la forme :

$$R(\mathbf{U}, \lambda) = 0 \quad (2.11)$$

où  $\mathbf{U}$  désigne les inconnues du système.

La Méthode Prédicteur-Correcteur (abrégée en MPC) est une méthode pas à pas qui fournit une approximation discrète de la branche de solutions. Typiquement, elle s'appuie sur prédicteur tangent à la branche de solution courante pour calculer la prochaine solution en fonction d'un pas de discrétisation. Si l'erreur est trop grande, une correction est appliquée.

L'estimation de ce pas est délicate : un pas trop grand peut faire diverger l'algorithme ou bien donner une solution d'une branche de solutions voisine ; un pas trop petit ralentit l'exploration des solutions du système.

- **MÉTHODE ASYMPTOTIQUE NUMÉRIQUE** C'est une extension de la MPC qui s'appuie sur un prédicteur d'ordre plus élevé, ce qui lui confère un bon nombre d'avantages : un pas auto-adaptatif ; un coût en calcul équivalent aux MPC, malgré le nombre plus important de systèmes linéaires à résoudre ; la description des branches est continue par morceaux, et non un échantillonnage ; la prédiction est suffisamment bonne pour ne pas recourir systématiquement à l'étape de correction.

La contrainte principale est que le système d'équations doit être analytique, et mise sous forme quadratique, à l'aide de variables auxiliaires si besoin est.

- **TOOLBOX MANLAB 4.0** MANLAB<sup>1</sup> est une boîte à outil MATLAB développée au LMA, à Marseille. C'est un outil de continuation utilisant la MAN. L'article de Guillot *et al.* [GCV18] donne d'avantage de détails sur la méthode et l'implémentation.

Ce logiciel s'appuie sur quatre scripts définis par l'utilisateur : les équations du système sous forme quadratique ; deux fichiers qui configurent le tracés des différentes grandeurs ; et le script principal où l'on crée un objet représentant le système dynamique, initialise le système et démarre l'interface.

Une fois démarré, MANLAB affiche une fenêtre principale qui permet d'ajuster le pas d'avancement, le nombre de pas, sauvegarder une section, activer l'analyse de stabilité, etc... Une fenêtre auxiliaire trace l'évolution d'une des grandeurs du système dynamique en fonction de l'évolution du paramètre  $\lambda$ .

- **ADAPTATION DU SHP À MANLAB** Dans un premier temps, on met le SHP de l'appareil vocal sous la forme  $\dot{\mathbf{X}} = f(\lambda, \mathbf{X})$ , c'est-à-dire sous sa forme différentielle, avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= [\pi_l, x_l, \eta_l, \pi_r, x_r, \eta_r, x_1, x_2, \Pi_x, \Pi_y, \Pi_{exp}, h]^T \\ \lambda &= P_{sub} \end{aligned}$$

Pour mettre le système sous forme quadratique, il faut poser une hypothèse sur le terme de dissipation  $(w_{turb} + |w_{turb}|)^2$ , qu'il n'est pas possible de mettre sous forme quadratique. On fait donc l'hypothèse que  $w_{turb}$  est toujours positif ou nul, ce qui revient à dire que nous étudions le système seulement dans la phase d'expiration (l'écoulement se fait des poumons vers le larynx).

On utilise la bibliothèque de calcul formel *sympy*, sur laquelle est basé *PyPHS*, pour opérer les substitutions d'expressions. Cela nous permet d'une part de minimiser le

1. disponible gratuitement en ligne : <http://manlab.lma.cnrs-mrs.fr>

risque d'erreur, et d'autre part d'automatiser le processus qui est un de nos objectifs. Les 12 équations du système complet et les variables auxiliaires que l'on définit sont détaillées en annexe.

Nous avons écrit un programme qui prend en entrée la forme quadratisée du modèle SHP en syntaxe PyPHS, les variables auxiliaires et leur valeurs d'initialisation. Il génère les scripts d'analyse pour la recherche de solutions statiques, ainsi que pour la continuation de branche de solutions périodiques (8 fichiers en tout).

- **ÉTUDE DE SEUIL DE PHONATION** On fixe la valeur du coefficient modal  $a_0$ . Le point de départ est le point fixe ( $P_{sub}^* = 0; \mathbf{X}^* = 0_{12 \times 1}$ ). On suit la branche de solutions statiques en faisant augmenter  $P_{sub}$ . À chaque pas, MANLAB effectue une analyse de stabilité pour déterminer si la section courante contient une ou plusieurs bifurcations. Dans ce cas, MANLAB calcule le point exact de la bifurcation, et détermine sa nature. Dans notre cas, on cherche les bifurcations de Hopf.

On relève la valeur  $P_{sub}$  correspondant à cette bifurcation. On modifie la valeur de  $a_0$  et on recommence l'opération jusqu'à obtenir une courbe des seuils de bifurcation de Hopf en fonction de la pression subglottique  $P_{sub}$  et du coefficient modal  $a_0$  (voir figure 14).

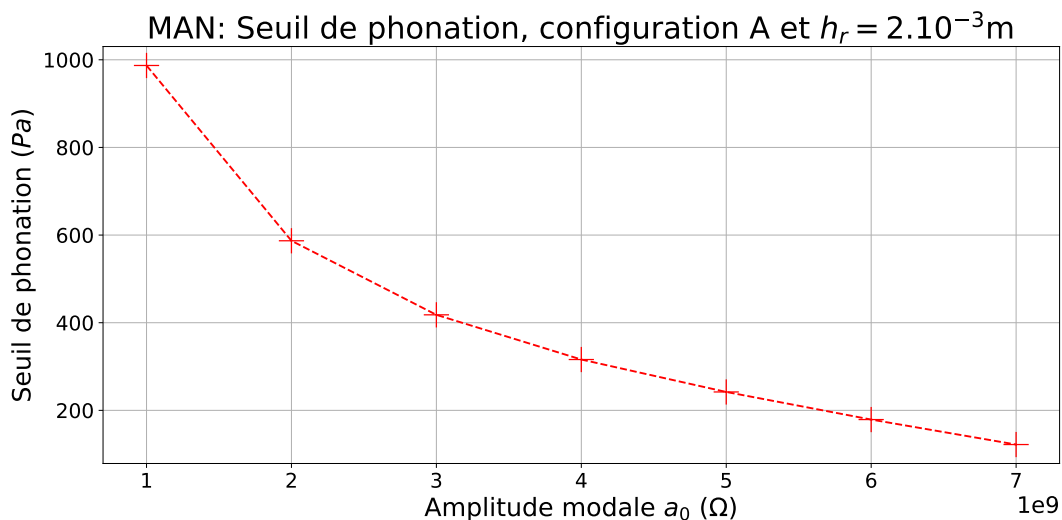


FIGURE 14 – Seuils de phonation en fonction de  $P_{sub}$  et  $a_0$ , configuration A avec  $h_r = 2.10^{-3}$  m

On voit que la pression  $P_{sub}$  nécessaire pour obtenir une bifurcation de Hopf évolue de manière inverse avec la valeur du coefficient modal  $a_0$ . Ces seuils de bifurcations correspondent à des valeurs typiques de pression de phonation (de l'ordre de la centaine de pascal).

On compare nos résultats avec ceux de Forma [For17] pour une même configuration du modèle. Pour estimer les seuils de phonation, Forma analyse les valeurs propres de la matrice jacobienne pour chaque valeur de  $P_{sub}$  et  $a_0$ .

Les résultats entre les deux méthodes sont montrées à la figure 15. On observe un écart significatif entre les deux méthodes (entre 800 et 300 Pa).

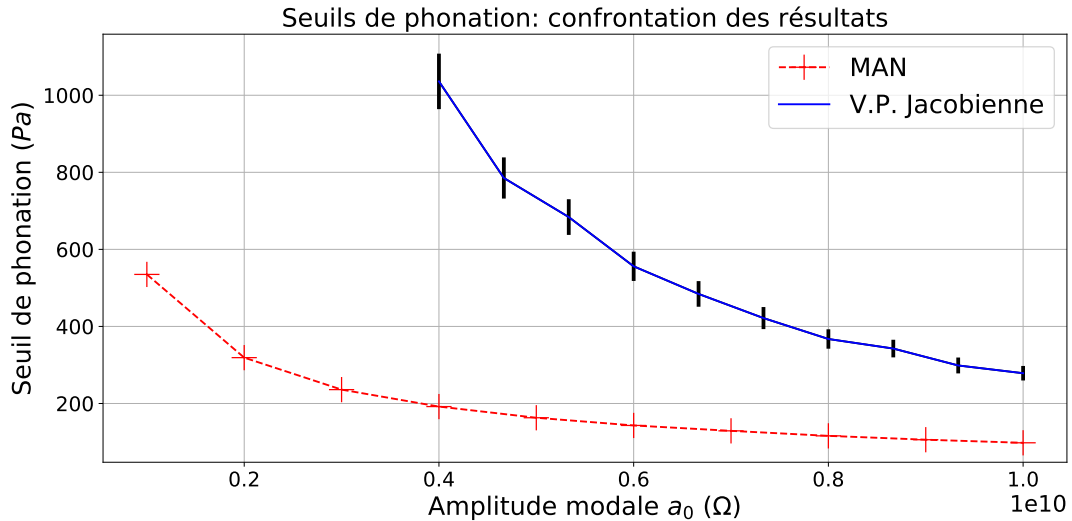


FIGURE 15 – Seuils de phonation :  $P_{sub}$  en fonction de l’amplitude modale  $a_0$  (configuration A) ; comparaison entre MAN et analyse des valeurs propres de la jacobienne ; les barres verticales noires montre l’écart type à chaque point d’analyse

On explique ces écarts de deux manières. D’une part, les méthodes divergent sur un point important. Dans le cas de la MAN, on suit une branche de solutions statiques à partir du point fixe mentionné plus tôt ( $\mathbf{X} = \vec{0}$ ,  $P_{sub} = 0$  Pa). Lors de l’analyse des valeurs propres de la jacobienne, le système est initialisé au repos à chaque point d’analyse.

D’autre part les deux modèles ne sont pas implémentés de la même manière, et peuvent donc être différents. En d’autres termes, on étudie peut-être pas le même système.

- **CONCLUSION** Dans ce chapitre nous avons introduit le formalisme des SHP. Nous avons ensuite décrit succinctement le modèle de larynx couplé à une impédance acoustique de Hélié et Silva ?? et présenté des simulations qui montrent certaine capacité du modèle. Enfin, nous avons utilisé un outil de continuation pour d’estimer les seuils de phonation.

Il reste des pistes à investiguer, notamment celle des écarts que l’on constate entre les résultats de Forma ?? et les nôtres. Afin d’avoir une validation croisée (hors du cadre de ce stage), ce travail nécessitera de reprendre les scripts de simulation et d’analyse utilisé par Forma pour vérifier que l’implémentation et l’initialisation des systèmes sont identiques aux nôtres.

## MODÉLISATION SHP D'UN APPAREIL VOCAL AVEC CONDUIT VOCAL SOUS FORME DE GUIDE D'ONDES

---

### 3.1 MOTIVATIONS

Le modèle de Hélie et Silva [HS17] décrit les phénomènes non linéaires au sein du larynx connecté à un conduit vocal, représenté par une décomposition modale d'une impédance. Nous souhaitons, dans le cadre de ce stage, un modèle physique de conduit vocal qui : (i) permette l'écoute d'un signal représentatif de la pression rayonnée à distance (comme le signal produit par les modèles source-filtre) ; (ii) fournisse une charge acoustique pour le larynx ; (iii) soit décrit dans le formalisme Hamiltonien à ports ; (iv) intègre la géométrie du conduit vocal, ce qui n'est pas le cas pour l'instant.

Dans le modèle original d'appareil vocal, l'acoustique du conduit est modélisée uniquement par son impédance  $Z^{\text{charge}}$  avec une décomposition modale. Cette approche n'inclut pas la fonction de transfert associée  $H^{\text{conduit}}$  qui fournit le son rayonné dont nous avons besoin pour nous rapprocher de la synthèse sonore. Nous avons investigué (cf. annexe A.1) si la connaissance d'une fonction de transfert  $H^{\text{conduit}}$  à résonances multiples permettait de déterminer l'impédance  $Z^{\text{charge}}$ . Nous avons confirmé l'impossibilité de cette opération, que nous avons pu caractériser par le manque d'une information (un degré de liberté).

Un modèle simple de la littérature qui fournit à la fois  $H^{\text{conduit}}$  et  $Z^{\text{charge}}$  est un ensemble de tube droits conservatifs concaténés (chargé par un rayonnement simple).

En effet : (i) cette structure est équivalente au filtre auto-régressif utilisé dans le modèle source-filtre ; (ii) possède une impédance que l'on sait calculer ; (iii) il s'agit d'un modèle énergétiquement bien posé<sup>1</sup>, qui peut être mis sous forme de SHP. On peut établir une correspondance entre une voyelle donnée et la géométrie du conduit, un travail que j'ai mené précédemment avec D'Alessandro dans le cadre d'un stage de master 1, au laboratoire IJLRA-LAM. Cette approche s'appuie sur une méthode de prédiction linéaire qui estime la configuration géométrique du conduit vocal en faisant l'hypothèse d'un modèle source-filtre.

• **MODÈLE EN TUBES DROITS CONCATÉNÉS** Le conduit vocal constitue un guide d'onde de section variable qui peut classiquement être approché par la concaténation de  $N$  cylindres de même longueur  $L_0$  et d'aires  $A_n$  (voir figure 16). La longueur  $L_0$  est choisie de manière à ce qu'elle puisse correspondre à la distance parcourue par

1. L'étude qui suit a été menée dans le cadre d'un conduit à géométrie statique.

une onde plane sur un pas d'échantillonnage pour les simulations (c'est-à-dire,  $L_0 = c_0/F_e$  où  $c_0$  est la célérité des ondes acoustiques et  $F_e$  la fréquence d'échantillonnage).

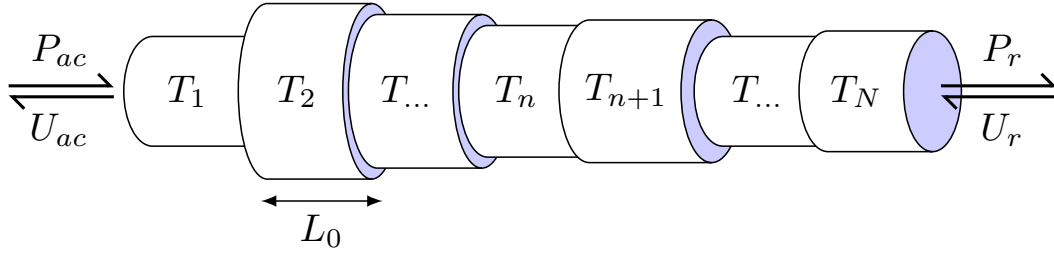


FIGURE 16 – Approximation du conduit vocal par la concaténation de tubes droits ; les demis flèches désignent les entrées/sorties qui portent les pressions acoustiques et les débits acoustiques dont le produit forme un flux de puissance entrant. Sur cette figure, le rayonnement n'est pas indiqué.

Le rayonnement est assimilé à un tube de longueur infinie de rayon grand (conduit avec pertes) ou infini (conduit sans pertes), soit une charge acoustique purement résistive (positive ou nulle).

• **MODÈLE LINÉAIRE CONSERVATIF** On s'intéresse à la propagation d'ondes planes dans un milieu homogène, de masse volumique  $\rho_0$  et de coefficient de compressibilité isentropique  $\chi_0$ . On note  $\ell$  la variable spatiale axiale.

Avec les hypothèses classiques de l'acoustique linéaire (petites perturbations, transformation isentropique), la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de la masse s'écrivent :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad}(p) \quad (3.1)$$

$$\chi_0 \frac{\partial p}{\partial t} = -\text{div}(\vec{v}) \quad (3.2)$$

L'hypothèse de la propagation d'ondes planes suppose que le champ de pression et le champ de vitesse (axiale) sont uniformes sur une section du cylindre. Ceci implique notamment que le champ de vitesse est purement axial, et que les opérateurs divergence et gradient dans les équations constitutives (3.1) et (3.2) deviennent de simple dérivée spatiales  $\partial \cdot / \partial \ell$ .

• **SYSTÈME À RETARD** On reformule le système d'équation précédent en simplifiant à partir des hypothèses de propagation d'ondes planes, et en introduisant le débit acoustique  $u = Av$  à la place de la vitesse :

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathcal{S} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \ell} \quad (3.3)$$

Avec  $\mathbf{X}$ , le vecteur d'état, et  $\mathcal{S}$  :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u(\ell, t) \\ p(\ell, t) \end{pmatrix} \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & -A/\rho_0 \\ -1/A\chi_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$



On cherche un changement de variable qui aboutisse à deux ondes découplées, ce qui revient à diagonaliser la matrice  $\mathcal{S}$  tel que :

$$\mathcal{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathcal{S}\mathbf{P} \quad \text{avec } \mathcal{D} = \text{diag}(c_0, -c_0) \quad \text{et } c_0 = \sqrt{\frac{1}{\rho_0\chi_0}} \quad (3.5)$$

Avec  $P$  la matrice de passage qui s'exprime en fonction de l'impédance caractéristique  $Z_c = \rho_0c_0/A$  :

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_c & 1 \\ -Z_c & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} Z_c^{-1} & -Z_c^{-1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Le nouveau vecteur d'état est  $\mathbf{Y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$ . Il vient deux équations de transport découplées :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} p_+ \\ p_- \end{pmatrix} = \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial \ell} \begin{pmatrix} p_+ \\ p_- \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} p_+ \\ p_- \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Z_c u + p \\ -Z_c u + p \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Les solutions de ces équations sont des ondes progressives  $p_+$  et régressives  $p_-$ , tel que :

$$\begin{cases} p_+(\ell, t) = p_+(\ell - c_0t) \\ p_-(\ell, t) = p_-(\ell + c_0t) \end{cases} \quad (3.8)$$

• **DISCRÉTISATION** On discrétise temporellement le système :  $t = kT_e, k \in \mathbb{Z}$  avec  $T_e = F_e^{-1}$  la période d'échantillonnage. On rappelle que  $L_0 = c_0T_e$ . On peut montrer que :

$$p_+(0, t = kT_e) = p_+(-c_0kT_e) = p_+(L_0, (k+1)T_e)$$

La propagation dans le guide d'onde peut-être modélisée par un retard  $\tau = T_e$ , soit un retard d'un échantillon (opérateur  $z^{-1}$  sur la figure 17).

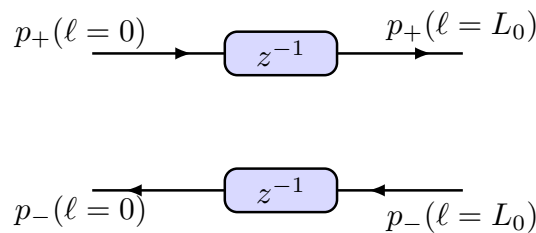


FIGURE 17 – Schéma de la propagation d'ondes dispersives dans un guide d'onde linéaire conservatif; l'opérateur de retard  $z^{-1}$  modélise la propagation dans un tube (retard d'un échantillon)

Nous avons modélisé la propagation dans un tube. On s'intéresse maintenant aux comportements des grandeurs dispersives ( $p_+$  et  $p_-$ ) à l'interface entre deux tubes.

• **ÉQUATIONS DE CONTINUITÉ À UNE INTERFACE** On s'intéresse aux équations de continuité entre deux tubes  $n$  et  $n + 1$ . Cette situation est schématisée à la figure 18. Le cylindre  $n$ , l'interface est "à droite", soit en  $\ell = L_0$ . Il est caractérisé par :

- ▶ Son impédance caractéristique  $Z_{c_n} = \rho_0 c_0 / A_n$
- ▶ Sa pression à l'interface  $p_n = p_n(L_0, t)$
- ▶ Son débit à l'interface  $u_n = u_n(L_0, t)$
- ▶ L'onde progressive sortante  $p_n^+$
- ▶ L'onde progressive entrante  $p_n^-$

Pour le cylindre  $n + 1$ , l'interface est située "à gauche" en  $\ell = 0$ . Il est caractérisé par :

- ▶ L'impédance caractéristique  $Z_{c_{n+1}} = \rho_0 c_0 / A_{n+1}$
- ▶ La pression à l'interface  $p_{n+1} = p_{n+1}(0, t)$
- ▶ Le débit à l'interface  $u_{n+1} = u_{n+1}(0, t)$
- ▶ L'onde progressive sortante  $p_{n+1}^-$
- ▶ L'onde progressive entrante  $p_{n+1}^+$

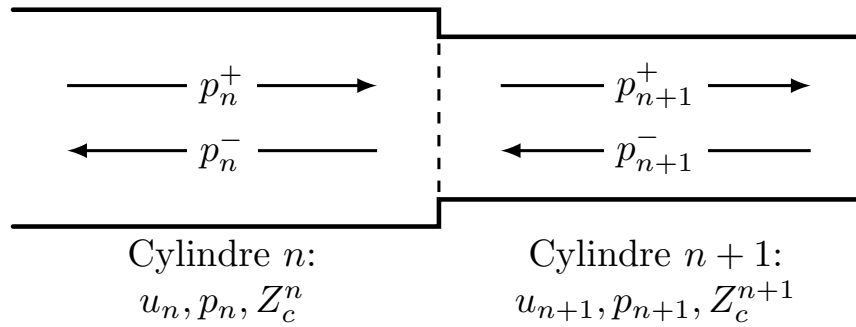
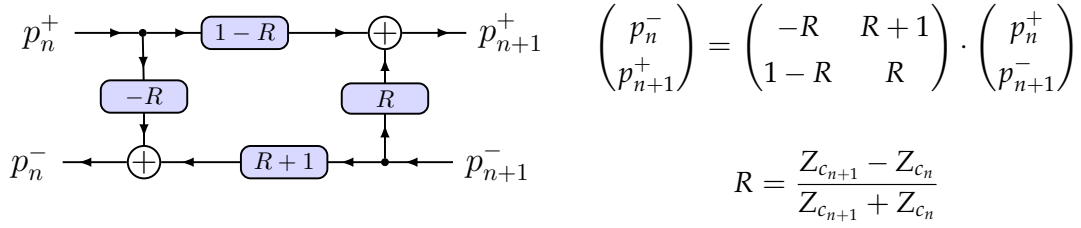


FIGURE 18 – Ondes incidentes, réfléchies et transmises à une interface entre les cylindres  $n$  et  $n + 1$

À l'interface, le débit se conserve. On approxime la continuité des efforts à l'interface. On obtient alors les conditions de continuité à l'interface :

$$\begin{cases} p_n(L_0, t) = p_{n+1}(0, t) \\ u_n(L_0, t) = u_{n+1}(0, t) \end{cases} \quad (3.9)$$

En utilisant le changement de variable (3.6), on établit la relation entre les ondes progressives et régressives de part et d'autre de l'interface. On parle alors jonction dispersive (*scattering junction* dans la littérature [Smi]) dite de Kelly-Lockbaum :



• **MATRICE DE TRANSMISSION** En exprimant la solution du champ de vitesse et de pression comme des ondes harmoniques progressives et régressives et en calculant le rapport  $p/u$  on peut exprimer le vecteur pression/débit en fonction des caractéristiques du tube et du vecteur d'état de l'autre côté du tube. Dans le domaine de Laplace, on obtient :

$$\begin{pmatrix} p(\ell = L_0) \\ u(\ell = L_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(s \frac{L_0}{c_0}) & -Z_c \sinh(s \frac{L_0}{c_0}) \\ \frac{1}{Z_c} \sinh(s \frac{L_0}{c_0}) & \cosh(s \frac{L_0}{c_0}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\ell = 0) \\ u(\ell = 0) \end{pmatrix}$$

Il est possible de généraliser ce formalisme pour une succession de  $N$  tubes en multipliant successivement les matrices de transfert.

Ce modèle fait intervenir des équations aux dérivées partiels (EDP) qui ne sont pas compatibles avec le formalisme SHP en dimension finie. Il est donc nécessaire d'utiliser son extension en dimension infinie.

### 3.2 EXTENSION DU FORMALISME SHP AUX MILIEUX CONTINUS

Le cas des systèmes régis par des EDP impliquent des champs qui dépendent du temps et de l'espace : c'est un problème de dimension infinie. On parle alors de systèmes distribués. On considérera ici le cas des systèmes physiques conservatifs.

Pour plus d'informations, nous conseillons la thèse de Villegas [Vil07] et la thèse de Ribeiro [Rib16].

• **FORMULATION** Dans le cas des systèmes distribués, le Hamiltonien  $H(\mathbf{X})$  correspond, à l'intégrale d'une fonctionnelle de densité d'énergie  $\mathcal{H}(\mathbf{X})$  sur le domaine  $\Omega$ , fonction de variables d'état  $\mathbf{X}$  qui sont désormais des champs, fonction d'un vecteur spatial  $\vec{r}$  et du temps :  $\mathbf{X}(\vec{r}, t)$ .

$$H(\mathbf{X}) = \int_{\Omega} \mathcal{H}(\mathbf{X}) d\omega$$

La variation d'énergie en fonction du vecteur d'état  $\mathbf{X}$  est maintenant calculée à l'aide de la dérivée fonctionnelle  $\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{X}$ , aussi notée  $\delta_{\mathbf{X}}\mathcal{H}$ . C'est la généralisation du gradient du hamiltonien en dimension finie.

Dans le cas linéaire, on exprime  $H$  à l'aide d'un produit interne  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dont est muni le système tel que :

$$H(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{X}, \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{X}^{\top} \frac{\delta \mathcal{H}(\mathbf{X})}{\delta \mathbf{X}} d\omega$$

La dérivée temporelle du vecteur d'état et la dérivée variationnelle de  $\mathcal{H}$  sont reliés par l'opérateur différentielle  $\mathcal{J}$  :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{J} \frac{\delta \mathcal{H}(\mathbf{X})}{\delta \mathbf{X}} \quad (3.10)$$

De la même manière que la matrice d'interconnexion  $S$  est antisymétrique,  $\mathcal{J}$  est *antiautoadjoint*, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété d'antisymétrie au sens du produit interne dont est muni le système tel que  $\langle \mathcal{J}x, x \rangle = \langle x, -\mathcal{J}x \rangle \quad \forall x$ .

En exploitant (3.10) et les propriétés de  $\mathcal{J}$ , on établit le bilan de puissance dans le cas où la frontière est fixe :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{X}, \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H} \rangle = \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t}, \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H} \right\rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H}, \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathcal{J} \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H}, \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H} \rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H}, \mathcal{J} \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H} \rangle = 0 \end{aligned}$$

• REMARQUE : Dans le cas linéaire, il peut être utile de définir un opérateur  $\mathcal{L}$ . Il permet de régénérer la dérivée variationnelle du Hamiltonien à partir du vecteur d'état :  $\mathcal{L}\mathbf{X} = \frac{\delta H}{\delta \mathbf{X}}$ .

Les conditions aux frontières s'expriment avec deux opérateurs de frontières  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  appariés avec une entrée  $\mathbf{U}(t)$  et une sortie  $\mathbf{Y}(t)$  du système tel que :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(t) &= \mathcal{A}\mathbf{X}(t) \\ \mathbf{Y}(t) &= \mathcal{B}\mathbf{X}(t) \end{aligned}$$

L'ensemble des notions introduites ici peuvent être résumées en terme de correspondance celles des SHP de dimension finie (voir table 3).

Dimension finie	Dimension infinie
Gradient $\nabla H$	Dérivée variationnelle $\delta H / \delta \mathbf{X}$
Matrice d'interconnexion $\mathbf{S}$	Opérateur différentiel $\mathcal{J}$
$\mathbf{S}^{\top} = -\mathbf{S}$	$\langle \mathcal{J}x, x \rangle = \langle x, -\mathcal{J}x \rangle \quad \forall x$
Bilan de puissance $\nabla H^{\top} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0$	Bilan de puissance $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{X}, \mathbf{X} \rangle_{\mathcal{L}} = 0$

TABLE 3 – Correspondance entre les éléments et propriétés des SHP en dimension finie et infinie

Le système complet s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathcal{J} \delta_{\mathbf{X}} H(\mathbf{X}) & \text{Dynamique du système} \\ \mathbf{X}(t = 0, \vec{r}) = \mathbf{X}_0(\vec{r}) & \text{Conditions initiales} \\ u(t) = \mathcal{A}\mathbf{X}(t, \vec{r}) \quad ; \quad y(t) = \mathcal{B}\mathbf{X}(t, \vec{r}) & \text{Conditions aux limites} \end{cases}$$

Pour illustrer le formalisme SHP en dimension infinie, on prend un exemple tirée de la thèse de Villegas [Vil07] : la corde linéaire conservative.

On considère le cas 1D d'une corde homogène de longueur  $L_0$ , placée le long de l'abscisse  $\ell$ . On note  $y(\ell, t)$  son déplacement transversal. Le système est supposé conservatif, sans forces extérieures, et encastrée a ses deux extrémités en  $\ell = 0$  et en  $\ell = L_0$ . On fait l'hypothèse que les déplacements sont petits par rapport à l'épaisseur de la corde. L'équation d'onde dans la corde s'obtient en effectuant un bilan des forces sur un élément infinitésimal de la corde :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial \ell^2}$$

Avec  $\mu_0$  la masse linéique de la corde et  $T_0$  sa tension.

Un choix naturel de variable d'état pour retrouver des quantités physiques duales flux/efforts est :  $q = \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t}$ , la densité linéique de quantité de mouvement ;  $p = \frac{\partial y}{\partial \ell}$ , le moment de flexion.

On écrit les équations et hypothèses du système en fonction de ces deux grandeurs :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial t} \\ \frac{\partial p}{\partial t} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \partial_\ell \\ \partial_\ell & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{J}} \underbrace{\begin{pmatrix} q/\mu_0 \\ T_0 p \end{pmatrix}}_{\delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H}} \quad \begin{array}{l} \text{Eq. conservation de la quantité de mouvement} \\ \text{Forme dérivée de la définition de } p \end{array}$$

L'énergie  $H(\mathbf{X})$  est l'intégrale de la densité linéique d'énergie cinétique (i) et potentielle (ii) :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{X}) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_0} \underbrace{\frac{q^2}{\mu_0}}_{(i)} + \underbrace{p^2 T_0}_{(ii)} d\ell \\ &= \frac{1}{2} \langle \mathbf{X}, \delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H} \end{aligned}$$

dans le cas linéaire.

### 3.3 SHP D'UN CONDUIT VOCAL EN TUBES DROITS CONCATÉNÉS

Le problème exposé est compatible avec une formulation Hamiltonienne à ports distribué. Dans sa thèse, Trenchant [Tre+15] établit un modèle 2D de résonateur cylindrique. La terminaison à droite comporte un port d'interconnexion, et celle de

gauche est considérée anéchoïque. Une partie du tube est muni d'un système permettant de contrôler les conditions aux limites au niveau de la paroi. Le modèle est donc différent de ce que nous modélisons. Cependant, nous avons réutilisé le choix judicieux de variables d'état qui permettent de décrire le système en terme de flux et d'efforts.

### 3.3.1 Formulation classique en variables de Kirchhoff

Dans un premier temps, on veut établir le bilan de puissance du système. On multiplie l'équation (3.1) par  $v$  et l'équation (3.2) par  $\rho_0 p$ . En les additionnant, on obtient la formulation locale de la conservation de l'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho_0 v^2 + \frac{1}{2} \chi_0 p^2 \right) = - \operatorname{div} (pv)$$

En intégrant sur l'ensemble du domaine  $\Omega$  du tube et en utilisant les hypothèses 1D, on obtient l'énergie du problème considéré :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\left( \int_0^{L_0} \frac{1}{2} \rho_0 A v^2 + \frac{1}{2} A \chi_0 p^2 \, dl \right)}_E = \underbrace{-pu|_{\ell=0} + pu|_{\ell=L_0}}_{P_{EXT}}$$

Dans l'expression de  $E$ , on identifie l'énergie cinétique  $E_c$  et potentielle  $E_p$  :

$$E_c = \int_0^{L_0} \frac{1}{2} v(t)^2 \rho_0 A \, dl \quad E_p = \int_0^{L_0} \frac{1}{2} p(t)^2 \chi_0 A \, dl$$

À partir de l'expression de ces énergies, on donne la définition des deux variables d'état qui permettent de décrire le système en terme de flux et d'efforts :

- ▶  $\mu(\ell, t) = \rho_0 u(\ell, t)$  la quantité de mouvement linéique (flux)
- ▶  $\eta(\ell, t) = \chi_0 p(\ell, t)$ , la fluctuation relative de masse volumique (effort)

On peut alors écrire le Hamiltonien du système, fonction du vecteur d'état  $\mathbf{X} = [\mu(\ell, t), \eta(\ell, t)]^T$  :

$$E(t) = H(\mathbf{X}) = \int_0^{L_0} \frac{1}{2A\rho_0} \mu^2 + \frac{1}{2\chi_0} A\eta^2 \, dl$$

On définit alors le produit intérieur  $\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle$  :

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle = \int_0^{L_0} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \, dl$$

Dans le cas linéaire, on peut trouver l'opérateur  $\mathcal{L}$ . En exprimant l'énergie comme  $H(\mathbf{X}) = \langle \mathbf{X}, \mathcal{L}\mathbf{X} \rangle$ , on obtient :

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1/A\rho_0 & 0 \\ 0 & A/\chi_0 \end{pmatrix}$$

La dérivée fonctionnelle par rapport à la variable d'état :

$$\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \mu(\rho_0 A)^{-1} \\ A\eta\chi_0^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u/A \\ pA \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{Vitesse moyenne sur la section} \\ \text{Résultante des forces de pression sur la section} \end{array}$$

Les deux termes du vecteur  $\delta_{\mathbf{X}} \mathcal{H}$  sont bien homogènes à un flux et un effort.

- **SYSTÈME COMPLET** Le bilan de puissance du système :

$$\frac{d}{dt} \left( \int_0^{L_0} \frac{1}{2A\rho_0} \mu^2 + \frac{1}{2\chi_0} A\eta^2 d\ell \right) = pu|_{\ell=0} + pu|_{\ell=L_0} \quad (3.11)$$

Le système complet :

$$\forall \ell \in \Omega = [0; L_0] \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t, \ell) = \mathcal{J} \delta_{\mathbf{X}} H(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t=0, \ell) = \mathbf{X}_0(\ell) \\ \mathbf{U}(t) = \mathcal{A} \mathbf{X}(t, \ell) \quad ; \quad \mathbf{Y}(t) = \mathcal{B} \mathbf{X}(t, \ell) \end{cases}$$

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mu \\ \eta \end{pmatrix}$	$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1/A\rho_0 & 0 \\ 0 & A/\chi_0 \end{pmatrix}$	$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\ell \\ -\partial_\ell & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_0(t) \\ p_{L_0}(t) \end{pmatrix}$	$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} u_{L_0}(t) \\ p_0(t) \end{pmatrix}$	
$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \delta_0/\rho_0 & 0 \\ 0 & \delta_{L_0}/\chi_0 \end{pmatrix}$	$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \delta_{L_0}/\rho_0 & 0 \\ 0 & \delta_0/\chi_0 \end{pmatrix}$	
$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} x^T \mathcal{L} y \, Ad\ell$	$\mathcal{H}(\mathbf{X}) = \int_0^{L_0} \frac{1}{2A\rho_0} \mu^2 + \frac{1}{2\chi_0} A\eta^2 d\ell$	

$\delta_d$  : distribution de Dirac spatiale en  $\ell = d$ ,  $d \in \Omega$

$\mu$  : densité de quantité de mouvement linéique (flux)

$\eta$  : fluctuation relative de masse volumique

$\rho_0$  : masse volumique

$\chi_0$  : coefficient de compressibilité adiabatique

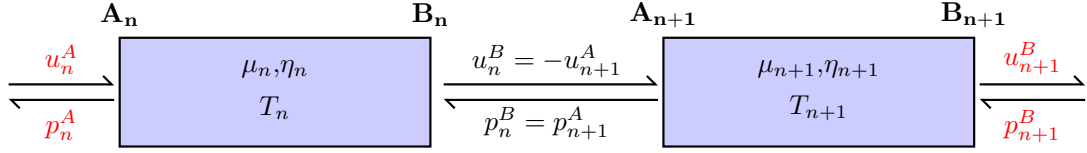
$A$  : rayon du tube

TABLE 4 – Modèle conservatif d'un tube droit : formulation en SHP de dimension infinie

- **SHP DE DEUX GUIDES D'ONDES CONCATÉNÉS** Le  $n$ -ième tronçon  $T_n$  est caractérisé par ses :

- ▶ Variables d'états  $\mu_n$  et  $\eta_n$  ;
- ▶ Variables de ports d'entrée définies comme le débit entrant  $u_n^A$  et la pression  $p_n^B$
- ▶ Variables de ports de sortie  $p_n^A$  et  $u_n^B$
- ▶ Son interface "à gauche"  $A_n$
- ▶ Son interface "à droite"  $B_n$

Il est nécessaire de bien définir les conventions de débit : le débit  $u_n^k$  au port  $k$  est défini comme le débit entrant.

FIGURE 19 – Concaténation de deux tubes. Pour le débit, la convention est le débit entrant

Le SHP est similaire au précédent. L'ensemble des conventions et grandeurs sont indiquées sur la figure 19. Le système complet de deux tubes concaténés :

$$\forall \ell \in \Omega = [0; L_0[\cup]L_0, 2L_0[ \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t, \ell) = \mathcal{J} \delta_{\mathbf{X}} H(\mathbf{X}) \\ \mathbf{X}(t = 0, \ell) = \mathbf{X}_0(\ell) \\ \mathbf{U}(t) = \mathcal{A} \mathbf{X}(t, \ell) \quad \mathbf{Y}(t) = \mathcal{B} \mathbf{X}(t, \ell) \end{cases}$$

$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mu_n \\ \eta_n \\ \mu_{n+1} \\ \eta_{n+1} \end{pmatrix}$	$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} (A_n \rho_0)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_n / \chi_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/A_{n+1} \rho_0)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{n+1} / \chi_0 \end{pmatrix}$	$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & -\partial_\ell & 0 & \delta_{B_n} \\ -\partial_\ell & 0 & \delta_{B_n} & 0 \\ 0 & -\delta_{A_{n+1}} & 0 & -\partial_\ell \\ \delta_{A_{n+1}} & 0 & -\partial_\ell & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u_n^A(t) \\ p_{n+1}^B(t) \end{pmatrix}$	$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} u_{n+1}^B(t) \\ p_n^A(t) \end{pmatrix}$	
$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \delta_{A_n} / \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_{B_{n+1}} / \chi_0 \end{pmatrix}$	$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{A_n} / \rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_{B_{n+1}} / \chi_0 & 0 \end{pmatrix}$	
$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{L_0} x^\top \mathcal{L} y \, \text{Ad} \ell$	$H(\mathbf{X}) = \int_0^{L_0} \frac{1}{2A_n \rho_0} \mu_n^2 + \frac{1}{2\chi_0} A_n \eta_n^2 \, \text{d}\ell + \int_{L_0}^{2L_0} \frac{1}{2A_{n+1} \rho_0} \mu_{n+1}^2 + \frac{1}{2\chi_0} A_{n+1} \eta_{n+1}^2 \, \text{d}\ell$	

$\delta_d$  : distribution de Dirac spatiale en  $\ell = d$ ,  $d \in \Omega$

$\mu$  : densité de quantité de mouvement linéique (flux)

$\eta$  : fluctuation relative de masse volumique

$\rho_0$  : masse volumique

$\chi_0$  : coefficient de compressibilité adiabatique

$A$  : rayon du tube

TABLE 5 – SHP de deux guides d'ondes concaténés

Pour simuler le système complet, nous avons deux choix : résoudre le système d'EDP (par différences finies ou éléments finis par exemple); procéder à une reformulation qui élimine les opérateurs de différentiation spatiale. C'est cette dernière option que nous avons choisi.



### 3.3.2 Reformulation en ondes de puissance

De la même manière qu'au début du chapitre (voir 3.1), on cherche un changement de variable qui découple les ondes progressives et régressives au sein d'un tube, ce qui fait apparaître deux équations de transport.

Cette fois-ci, nous choisissons d'utiliser des ondes de puissance, notées  $v_+$  et  $v_-$ , homogènes à la racine carrée d'une puissance :

$$\begin{aligned} v_+(x, t) &= \frac{p(x, t)}{\sqrt{Z_c}} + u(x, t)\sqrt{Z_c} \\ v_-(x, t) &= \frac{p(x, t)}{\sqrt{Z_c}} - u(x, t)\sqrt{Z_c} \end{aligned}$$

Ce changement de variables correspond à choisir une matrice  $\mathbf{P}$  légèrement différente :

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho_0 & -\rho_0 \\ \sigma & \sigma \\ \chi_0\sigma & \chi_0\sigma \end{pmatrix} \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\rho_0} & \frac{1}{\chi_0\sigma} \\ \frac{\sigma}{\rho_0} & \frac{1}{\chi_0\sigma} \\ -\frac{\sigma}{\rho_0} & \frac{1}{\chi_0\sigma} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

où  $\sigma = \sqrt{Z_c}$ . On définit notre nouveau vecteur d'état  $\mathbf{N}$ , des ondes de puissance découplées  $\mathbf{N} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$ , détaillé ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} v_+(\ell, t) \\ v_-(\ell, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{\rho_0} & \frac{1}{\chi_0\sigma} \\ -\frac{\sigma}{\rho_0} & \frac{1}{\chi_0\sigma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu(\ell, t) \\ \eta(\ell, t) \end{pmatrix} \quad \forall \ell \in [0, L_0] \quad (3.13)$$

On part de l'équation qui décrit la dynamique du SHP d'un tube et on fait apparaître  $\mathbf{N}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}} &= \mathcal{J}\mathcal{L}\mathbf{X} \\ \mathbf{P}\dot{\mathbf{N}} &= \mathcal{J}\mathcal{L}\mathbf{P}\mathbf{N} \\ \dot{\mathbf{N}} &= \underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathcal{J}\mathcal{L}\mathbf{P}}_{\mathcal{D}}\mathbf{N} \quad \text{avec } \mathcal{D} = \begin{pmatrix} c_0 & 0 \\ 0 & -c_0 \end{pmatrix} \partial_l \end{aligned}$$

On obtient deux équations de transport découplées. L'énergie contenue dans un tube s'écrit alors :

$$H(\mathbf{N}) = \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0\chi_0} \int_0^{L_0} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \, d\ell = \frac{1}{2c_0} \int_0^{L_0} v_+^2 + v_-^2 \, d\ell \quad (3.14)$$

• **SYSTÈME COMPLET** Le bilan de puissance :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}\sqrt{\rho_0\chi_0} \int_0^{L_0} v_+^2 + v_-^2 \, d\ell \right) = \frac{1}{2}(v_{u+}^2 + v_{u-}^2) - \frac{1}{2}(v_{y+}^2 + v_{y-}^2) \quad (3.15)$$

Avec les ondes de puissances entrantes  $v_{u+}$  et  $v_{u-}$  et les ondes de puissances sortantes  $v_{y+}$  et  $v_{y-}$ .

Le système complet :

$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} v_+ \\ v_- \end{pmatrix}$	$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} -c_0 & 0 \\ 0 & c_0 \end{pmatrix}$	$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} \partial_\ell & 0 \\ 0 & \partial_\ell \end{pmatrix}$
$\mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} v_+(t, 0) \\ v_-(t, L_0) \end{pmatrix}$	$\mathbf{Y}(t) = \begin{pmatrix} v_+(t, L_0) \\ v_-(t, 0) \end{pmatrix}$	
$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \delta_0 & 0 \\ 0 & \delta_{L_0} \end{pmatrix}$	$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \delta_{L_0} & 0 \\ 0 & \delta_0 \end{pmatrix}$	
$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_0 \chi_0} \int_0^{L_0} x^\top y \, d\ell$	$H(\mathbf{N}) = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_0 \chi_0} \int_0^{L_0} v_+^2 + v_-^2 \, d\ell$	

$\delta_d$  : distribution de Dirac spatiale en  $\ell = d$ ,  $d \in \Omega$

$v_+, v_-$  : Ondes de puissance

$\rho_0$  : masse volumique

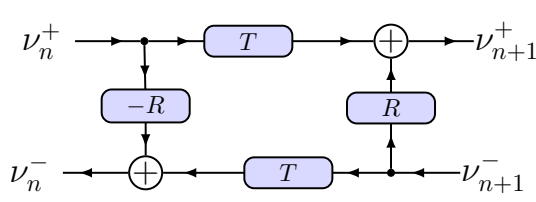
$\chi_0$  : coefficient de compressibilité adiabatique

TABLE 6 – Modèle conservatif d'un tube droit : reformulation en ondes de puissance

• **DISCRÉTISATION DU SYSTÈME** On applique la même discrétisation que précédemment. On souhaite calculer l'énergie contenue dans un tube à un instant donné. Dans l'intervalle de temps  $[kT_e, (k+1)T_e]$ ,  $\mathbf{N}$  est constant sur la longueur du tube. On peut donc simplifier l'intégrale sur le domaine  $[0; L_0]$  :

$$H(\mathbf{N}(kT_e)) = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_0 \chi_0} \int_0^{L_0} v_+^2 + v_-^2 \, d\ell = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_0 \chi_0} L_0 (v_+^2 + v_-^2) \quad (3.16)$$

• **JONCTION DISPERSIVE** À l'interface entre deux cylindres  $n$  et  $n+1$ , la pression et le débit se conservent. En utilisant le changement de variable ci-dessus, on obtient les coefficients de réflexion et transmission à l'interface :



$$\begin{pmatrix} v_n^- \\ v_{n+1}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R & T \\ T & R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_n^+ \\ v_{n+1}^+ \end{pmatrix}$$

$$R = \frac{Z_{c_{n+1}} - Z_{c_n}}{Z_{c_{n+1}} + Z_{c_n}}$$

$$T = \frac{2\sqrt{Z_{c_n} Z_{c_{n+1}}}}{Z_{c_{n+1}} + Z_{c_n}}$$

• **SYSTÈME COMPLET** Le système complet se traduit par une série d'opérateurs de délai  $Z^{-1}$ , représentant la propagation dans un tube, entre lesquels on insère une jonction dispersive. De part et d'autre du tube, des jonctions permettent de restaurer

la représentation en variable de Kirchhoff  $p$  et  $u$ . Le système entier est résumé sur la figure 20

- ▶  $v_{+u}^n$  et  $v_{-u}^n$  représente les variables d'entrées progressives et régressives du  $n$ -ième tube
- ▶  $v_{+y}^n$  et  $v_{-y}^n$  représente les variables de sortie progressives et régressives du  $n$ -ième tube

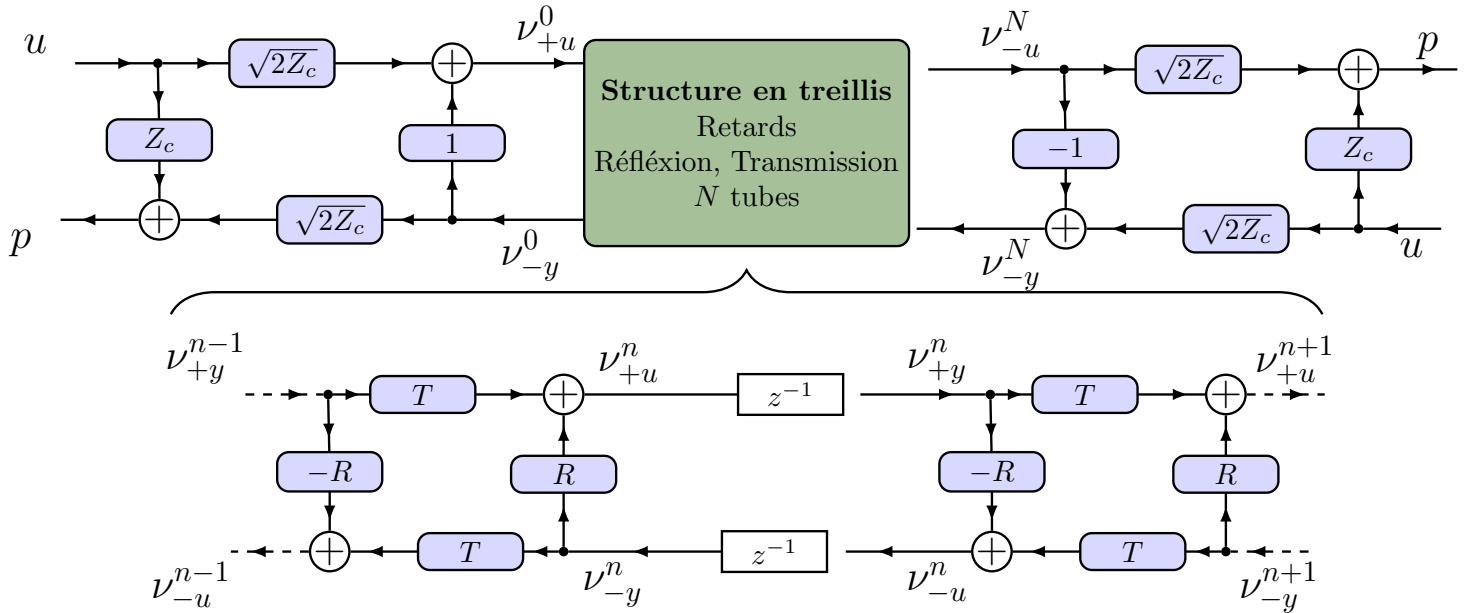


FIGURE 20 – Schéma du système complet

L'énergie  $E[k+1]$  du système est la somme des énergies de chacun des  $N[k]$  tubes :

$$E((k+1)T_e) = E[k+1] = \sum_{n=1}^N H_n(\mathbf{N}[k]) = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_0 \chi_0} L_0 \sum_{n=1}^N \mathbf{N}_n^T[k] \mathbf{N}_n[k]$$

### 3.3.3 Simulation à bilan de puissance équilibré

La bibliothèque PyPHS, qui nous sert à implémenter le modèle complet, ne permet pas encore de concevoir des systèmes comportant des retards, comme c'est le cas pour notre modèle de conduit vocal. Nous avons donc deux choix : incorporer ces fonctions dans la bibliothèque ; relier directement notre modèle de conduit vocal dans la simulation C++ généré par PyPHS. Nous avons choisi la deuxième option qui nous semblait plus pratique, car la structure de la simulation du larynx est bien connue, et donc facile à modifier. Nous avons implémenté le modèle en onde de puissance du conduit vocal directement en C++.

On simule un tube droit de longueur 14.2cm (dont l'impédance d'entrée théorique est connu) à l'aide de 20 tronçons de même longueur et de même section pour vérifier le bon comportement de l'implémentation. La dernière section est supposée infinie. La figure 21 compare l'impédance théorique et l'impédance simulée par notre implémentation en onde de puissance :

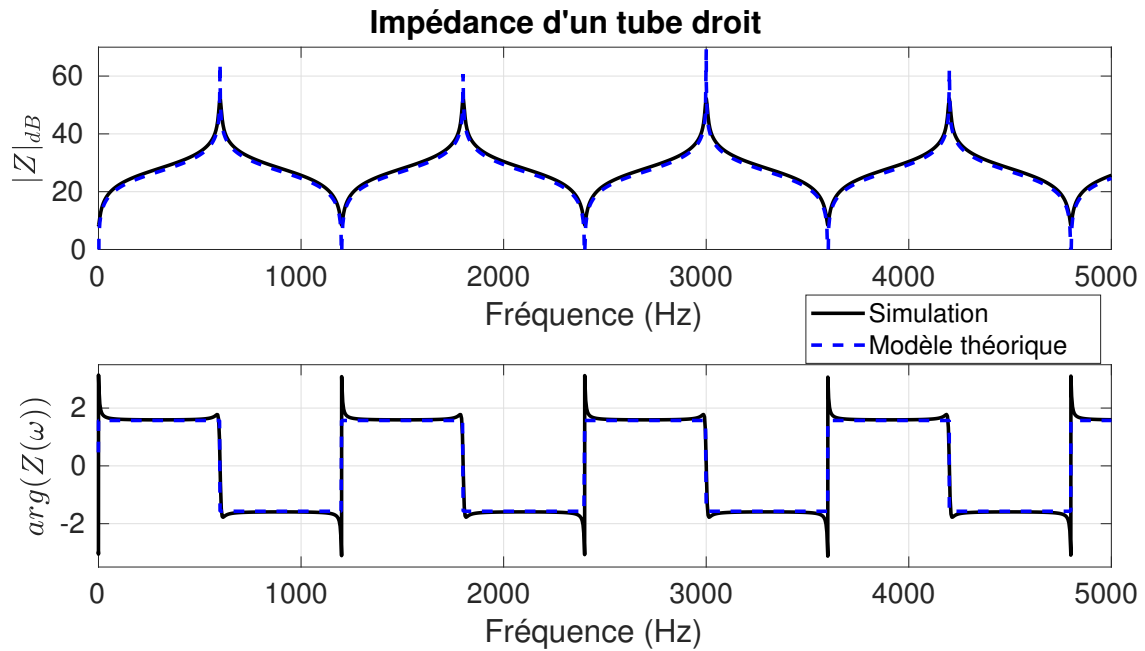


FIGURE 21 – Impédance d'un tube droit : comparaison entre le modèle et les simulations à passivité garantie

Le tube a bien le comportement attendu avec les résonances et anti-résonances caractéristiques de l'impédance d'un tube droit. On note toutefois des différences entre les diagrammes de Bode issus des simulations (calculé à partir des signaux temporels pour une fenêtre rectangulaire) et du modèle théorique : (i) décalage de +2dB du module; (ii) des transitions de phase continues autour des résonances et anti-résonances. Ces différences ont pour origine la durée finie de la simulation (observation d'une réponse impulsionnelle infinie non décroissante).

Concernant la phase, la transition continue provient de la durée finie des signaux de simulation (convolution dans le domaine fréquentielle par un sinus cardinal) qui apporte une épaisseur aux transitions.

On veut maintenant vérifier que le bilan de puissance de la simulation est équilibré. On considère deux configurations : la première est un tube droit dont l'impédance terminale est supposée infinie (tube fermé au bout) ; la deuxième est une géométrie aléatoire du résonateur avec la même condition terminale.

On en fait la réponse impulsionnelle, et on mesure l'énergie à chaque pas de temps pour vérifier que l'énergie contenue dans le résonateur reste constante. Les résultats de ces simulations sont présentés sur la figure 22.

Dans les deux cas, l'énergie suit bien un échelon exacte et le bilan de puissance est équilibré.

La connexion des SHP du larynx et du conduit vocal crée une boucle instantanée qui correspond à la charge acoustique du premier tube. Nous traitons ci-dessous la résolution de cette connexion pour la simulation.

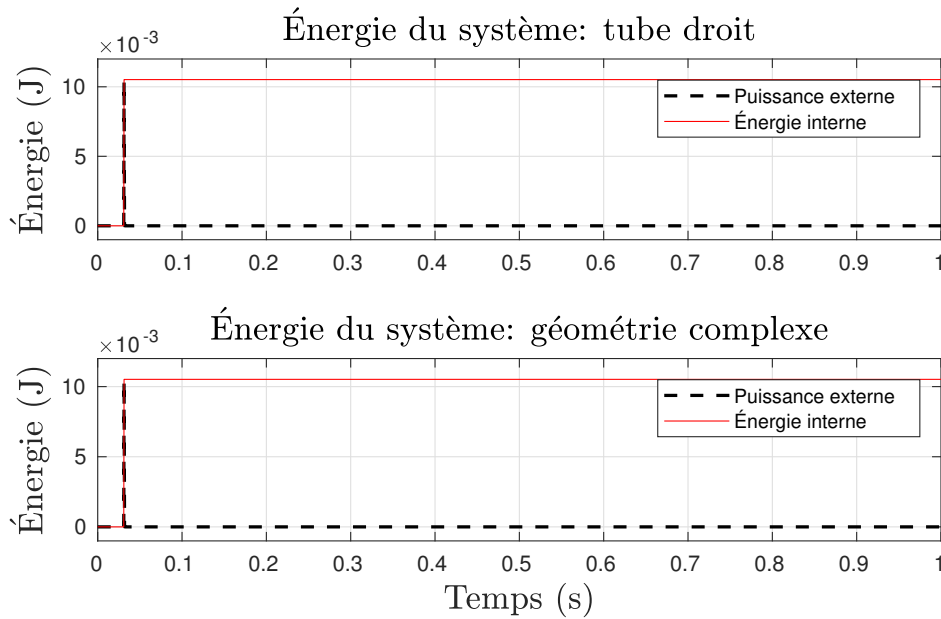


FIGURE 22 – Énergie interne du système dans le cas conservatif (tube avec une impédance infinie au bout); le tube est excité par une impulsion à  $t=0.03s$

### 3.4 INTERCONNEXION DES SHP DU LARYNX ET DU CONDUIT VOCAL ET EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

• **MOTIVATIONS** L'appareil vocal complet résulte de l'assemblage : du larynx (SHP représenté en variables de Krichhoff), d'un quadripôle de conversion (reliant des variables de type Kirchhoff et de type ondes de puissance) et le conduit vocal (SHP en ondes de puissance).

Le quadripôle de conversion choisi est celui qui conduit aux ondes de puissance dans le premier tronçon de tube droit. Dans ce cas (cf figure 23) l'assemblage "larynx-conversion-conduit" correspond à un larynx chargé par l'impédance caractéristique constante  $Z_c$  du premier tronçon de tube (SHP sans dynamique qui construit une boucle instantanée à résoudre) plus une impédance  $\Delta Z = Z_{\text{conduit}} - Z_c$  (SHP dynamique comportant un retard entre l'entrée et la sortie, qui permet un calcul explicite dans la simulation).

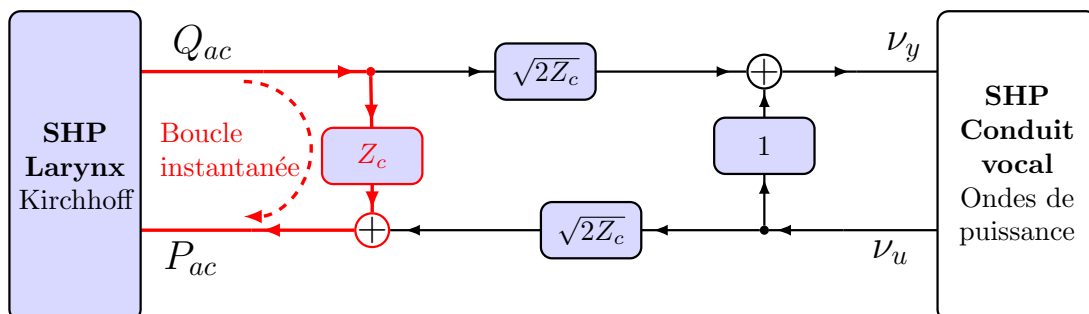


FIGURE 23 – Mise en évidence du retour instantané qui apparaît au moment de l'assemblage de l'appareil vocal complet

Le retour instantané isolé et formé par  $Z_c$  peut être pris en compte dans les simulations générées par PyPHS en décrivant le larynx chargé par  $Z_c$  plus un port externe sur lequel collecter le SHP sans boucle directe  $\Delta Z$ . Pour cela, nous introduisons une formulation mixte du SHP de l'appareil vocal où coexistent :

- ▶ Des variables internes de type Kirchhoff
- ▶ Un port en variables de Kirchhoff (variables subglottique  $P_{sub}, Q_{sub}$ )
- ▶ Le quadripôle de conversion Kirchhoff-ondes de puissance
- ▶ Un port en ondes de puissance

• **SOLUTION RETENUE** Stramigioli *et al.* [Str+05] traitent un cas similaire où un SHP en ondes de puissance discrétisé temporellement interagit avec SHP "classique" à temps continu. Ils établissent les conditions pour lesquelles le système résultant conserve la propriété de bilan de puissance équilibré. La solution proposée n'est pas assez générale pour pouvoir s'appliquer notre cas.

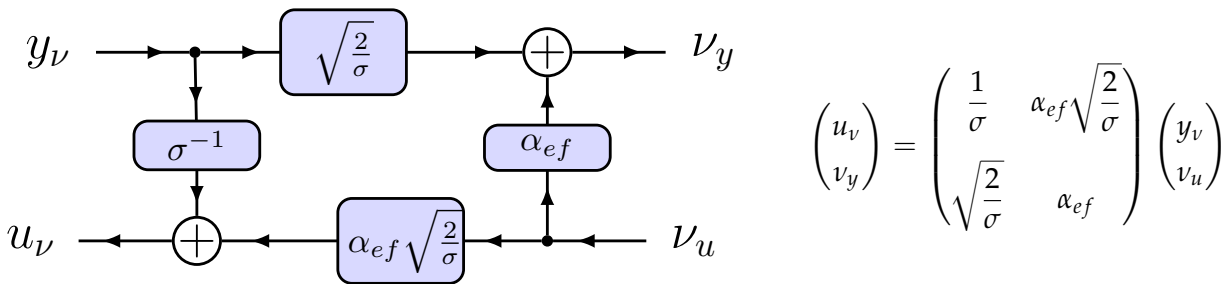
La démarche que nous avons choisie est de décomposer le premier tube en une partie instantanée, qui sera incorporée au SHP du larynx, et la partie propagative, qui reste connectée au reste du conduit vocal. Le SHP du conduit vocal se retrouve donc amputé de son premier quadripôle de conversion (le premier quadripôle en haut à gauche sur la figure 20).

Ce problème est traité de manière plus générale en annexe A.4. On considère un SHP générique en variables de Kirchhoff et un SHP en ondes de puissance. Ces deux systèmes sont séparés par un quadripôle de conversion (détaillé un peu plus loin) qui leur permet d'interagir. Il contient un retour instantané. On souhaite aboutir à une formulation dite "mixte" : un SHP dont les variables internes sont de type Kirchhoff (effort/flux), mais comporte un port de type ondes de puissance.

Cette formulation implique une redéfinition de la matrice d'interconnexion  $S$ . Le détail de la méthode de résolution et l'expression de la nouvelle matrice d'interconnexion sont aussi disponibles à l'annexe A.4.

• **QUADRIPOLE DE CONVERSION** Nous décrivons ici un quadripôle de conversion générique qui connecte : un SHP de type Kirchhoff, au travers de son port  $u_v, y_v$  ; un SHP de type ondes de puissance, au travers de son port  $v_u, v_y$ .

On considère un système d'entrées  $(y_K, v_u)$  et de sorties  $(u_K, v_y)$  :



où  $\alpha_{ef}$  et  $\sigma$  sont définis en fonction du type flux/effort du port d'interconnexion  $u_v, y_v$  tel que :

- ▶ si  $u_v$  est un flux et  $y_v$  est un effort, alors  $\alpha_{ef} = -1$  et  $\sigma$  est une impédance.
  - ▶ si  $u_v$  est un effort et  $y_v$  est un flux, alors  $\alpha_{ef} = 1$  et  $\sigma$  est une admittance.
- EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES Le système complet résulte de l'assemblage : de la simulation C++ générée par PyPHS ; de notre implémentation du conduit vocal en onde de puissance.

Ce modèle ne génère pas d'auto-oscillations, pour une géométrie du conduit vocal réelle (pour une voyelle A par exemple). Pour toute valeur de pression d'entrée, on obtient des oscillations amorties (voir figure 24)

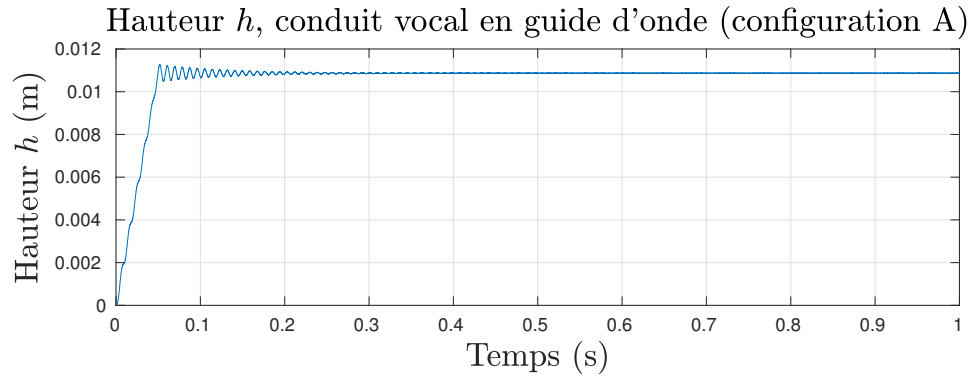


FIGURE 24 – Hauteur  $h$  en fonction du temps dans le cas où le conduit vocal est un guide d'onde

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3 qui présente le modèle de Hélie et Silva [HS17], le modèle a besoin d'une impédance du conduit vocal très haute pour pouvoir auto-osciller. Or le guide d'onde a une impédance d'entrée beaucoup plus faible.

Une piste a été explorée : adapter le rayon du premier tube de sorte à augmenter son impédance caractéristique et se rapprocher des conditions "impédanciennes" du modèle de Hélie et Silva [HS17]. Pour conserver la même voyelle, cette réduction est appliquée à toutes les autres sections du conduit vocal. Cette adaptation géométrique n'a pas permis d'aboutir à des auto-oscillations.

Bien que ceci n'ait pas pu être mené par manque de temps, une analyse des seuils de phonation pour cette configuration est à effectuer (selon deux paramètres :  $P_{sub}$  et le facteur de réduction de rayon).

Nous avons pu vérifier l'implémentation de la simulation avec une géométrie simple : un tube fermé à son extrémité. Dans ce cas, le modèle est capable d'auto-osciller. Une étude plus complète est donc à mener. Ce travail sera poursuivi prochainement.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

---

• **CONTRIBUTIONS** Dans ce stage, nous avons reproduit et examiné le modèle en SHP de larynx chargé par une impédance acoustique proposé par Hélie et Silva [HS17]. Pour cela, nous avons étudié le formalisme des SHP, pris en main la librairie PyPHS, et proposé de nouvelles expériences numériques. Ce premier travail nous a permis de constater l'équilibre du bilan de puissance, les capacités du modèle à générer plusieurs type de régimes (stabilisation autour d'un point d'équilibre, auto-oscillations quasi-périodiques, oscillations plus complexes typiques de la dysphonie pour des plis vocaux aux caractéristiques suffisamment dissymétriques). Vues ces capacités, ceci nous a conforté à examiner les seuils de phonation en fonction de la pression subglottique et de l'amplitude caractéristique de la charge impédantielle (de manière précise à l'aide de l'outil de continuation MANLAB). Nous avons automatisé la génération des scripts d'analyse (pour MANLAB) à partir du modèle implanté dans PyPHS, dans le but de créer une passerelle entre ces deux outils et de faciliter l'analyse du système.

Puis, dans l'objectif de se rapprocher d'une simulation pour la synthèse sonore, nous avons reformulé un modèle passif simple de conduit vocal (en tubes droits concaténés) en SHP de dimension infinie, qui fournit à la fois la charge impédantielle (vue par le larynx) et la fonction de transfert fournissant le son émis lèvres. La connexion de ce modèle au larynx a soulevé une difficulté pour la simulation sous PyPHS car la partie "conduit vocal" n'est réductible à un système différentiel. Pour lever cette difficulté, nous avons procédé en plusieurs étapes : (1) reformulation du conduit en SHP à retard en introduisant des ondes de puissances aller/retour ; (2) proposition d'une formulation mixte de SHP en variables de type Kirchhoff et de type ondes de puissance, par introduction d'un quadripôle de conversion ; (3) isolation (A) du bouclage instantané entre le larynx et le conduit vocal et confinement (B) de la contribution retardée du conduit dans un système à retard complémentaire ; (4) génération du code C++ de la partie algèbro-différentielle (A) par PyPHS et élaboration d'un code C++ de la partie (B) ; (5) connexion des codes de simulations (A) et (B) qui permettent un calcul exact et explicite de la connexion (sans bouclage instantané).

Comme attendu, le code de simulation du conduit vocal garantit l'équilibre du bilan de puissance, la passivité et restitue des impédances conformes aux résultats de la littérature. Si le code de simulation de l'appareil vocal complet conduit bien à un bilan de puissance équilibré, il n'a permis pour le moment que d'aboutir à des solutions non auto-oscillantes. Ses capacités et le réglage des paramètres (ou des modifications à apporter) restent à examiner et approfondir selon des propositions développées dans les perspectives.



• **PERSPECTIVES** A court terme, un premier point consistera à examiner les seuils de phonations : (1) comparaison entre les résultats du stage de Forma ?? et de la méthode par continuation numérique sur le modèle simplifié de Hélie et Silva ??, et validation ; (2) adaptation et exploitation de la méthode sur notre modèle de conduit vocal pour déterminer les seuils de phonation. Pour ce dernier point, on cherchera à : (1) fixer une voyelle avec un profil de conduit (et rayonnement) conduisant à des formants réalistes (en fréquence et amortissement) ; (2) examiner le seuil de phonation sur cette voyelle en fonction de la pression subglottique et du rayon du premier tronçon de conduit (le profil conservant les même ratios d'aires de section pour ne pas modifier les formants) pour régler l'amplitude efficace de l'impédance d'entrée.

A plus long terme, des travaux scientifiques consisteront à : (1) examiner et produire les régimes oscillants pour générer de premiers sons de synthèse, (2) élaborer un SHP de conduit vocal incluant de l'amortissement et bien posé pour des profils variant dans le temps ; (3) élaborer des SHP modélisant plus finement larynx (ajout d'une géométrie des plis vocaux plus réaliste et de dissipation sous forme d'une couche limite visqueuse).

Du point de vue technique, on s'intéressera également à créer un synthétiseur temps réel intégrant une interface de contrôle. Une première version s'appuiera sur une mise en correspondance des formants et des profils en tubes droits concaténés à l'aide de méthodes LPC permettant d'estimer une géométrie du conduit pour un phonème donné.

D'autres travaux complémentaires, plus larges, sont prévus dans le cadre d'une thèse qui débutera prochainement.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [CG05] Blandine CALAIS-GERMAIN. *Respiration: anatomie, geste respiratoire*. Ed. Desiris, 2005. ISBN : 2907653989.
- [CG+13] Blandine CALAIS-GERMAIN et al. *Anatomie pour la voix*. Ed. Desiris, 2013. ISBN : 2915418454.
- [D'A+06] Nicolas D'ALESSANDRO et al. « Real-time CALM Synthesizer: New Approaches in Hands-Controlled Voice Synthesis ». In : *Proceedings of the 2006 International Conference on New Interfaces for Musical Expression (NIME-06)*. 2006, p. 266–271. ISBN : 2844263143. URL : [http://recherche.ircam.fr/equipes/temps-reel/nime06/proc/nime2006{\\\_}266.pdf](http://recherche.ircam.fr/equipes/temps-reel/nime06/proc/nime2006{\_}266.pdf)[http://www.nime.org/proceedings/2006/nime2006{\\\_}266.pdf](http://www.nime.org/proceedings/2006/nime2006{\_}266.pdf).
- [Fal16] Antoine FALAIZE. « Modélisation, simulation, génération de code et correction de systèmes multi-physiques audios: Approche par réseau de composants et formulation Hamiltonienne à Ports ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01440597/document>.
- [FL68] J. FLANAGAN et L. LANDGRAF. « Self-oscillating source for vocal-tract synthesizers ». In : *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics* 16.1 (1968), p. 57–64. ISSN : 0018-9278. DOI : 10.1109/TAU.1968.1161949. URL : <http://ieeexplore.ieee.org/document/1161949/>.
- [For17] Loïc FORMA. *Étude d'un système non linéaire : la voix*. Rapp. tech. Marseille : LMA, 2017.
- [GCV18] Louis GUILLOT, Bruno COCHELIN et Christophe VERGEZ. « A generic and efficient Taylor series based continuation method using a quadratic recast of smooth nonlinear systems ». In : *HAL* (2018). URL : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01827832>.
- [HS17] Thomas HÉLIE et Fabrice SILVA. « Self-oscillations of a vocal apparatus: A port-hamiltonian formulation ». In : *Geometric Science of Information*. T. 10589 LNCS. 2017, p. 375–383. ISBN : 9783319684444. DOI : 10.1007/978-3-319-68445-1\_44. URL : [http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-68445-1{\\\_}44](http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-68445-1{\_}44).
- [IF72] K. ISHIZAKA et J. L. FLANAGAN. « Synthesis of Voiced Sounds From a TwoMass Model of the Vocal Cords ». In : *Bell System Technical Journal* (1972). ISSN : 15387305. DOI : 10.1002/j.1538-7305.1972.tb02651.x.

- [Kar12] Sami KARKAR. « Methodes numeriques pour les systemes dynamiques non lineaires. Application aux instruments de musique auto-oscillants ». Thèse de doct. Aix-Marseille, 2012. URL : <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00742651/>.
- [KTH85] T KOIZUMI, S TANIGUCHI et S HIROMITSU. « Glottal source-vocal tract interaction. » In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 78.5 (1985), p. 1541–7. ISSN : 0001-4966. URL : <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/4067067>.
- [LHF15] N. LOPES, T. HÉLIE et A. FALAIZE. « Explicit second-order accurate method for the passive guaranteed simulation of port-Hamiltonian systems ». In : *IFAC-PapersOnLine* 48.13 (2015), p. 223–228. ISSN : 2405-8963. DOI : [10.1016/J.IFACOL.2015.10.243](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.10.243). URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2405896315021345>.
- [Lop16] Nicolas LOPES. « Approche passive pour la modélisation, la simulation et l'étude d'un banc de test robotisé pour les instruments de type cuivre ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. URL : <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01400695><http://www.theses.fr/2016PA066150><http://www.theses.fr/2016PA066150.pdf>.
- [Pel+94] X. PELORSON et al. « Theoretical and experimental study of quasisteady-flow separation within the glottis during phonation. Application to a modified twomass model ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 96.6 (1994), p. 3416–3431. ISSN : 0001-4966. DOI : [10.1121/1.411449](https://doi.org/10.1121/1.411449). URL : <http://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.411449>.
- [Rib16] Flavio Cardoso RIBEIRO. « Port-Hamiltonian Modeling and Control of a Fluid-Structure System ». Thèse de doct. Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2016. URL : <https://www.researchgate.net/publication/314045102>{\\_}Port-Hamiltonian{\\_}modeling{\\_}and{\\_}control{\\_}of{\\_}a{\\_}fluid-structure{\\_}system.
- [Smi] Julius O. (Julius Orion) SMITH. *Physical audio signal processing : for virtual musical instruments and audio effects*, p. 803. ISBN : 9780974560724. URL : [https://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/Kelly{\\\_}Lochbaum{\\\_}Scattering{\\\_}Junctions.html](https://ccrma.stanford.edu/~jos/pasp/Kelly{\_}Lochbaum{\_}Scattering{\_}Junctions.html).
- [Str+05] S. STRAMIGIOLI et al. « Sampled data systems passivity and discrete port-Hamiltonian systems ». In : *IEEE Transactions on Robotics* 21.4 (2005), p. 574–587. ISSN : 1552-3098. DOI : [10.1109/TR0.2004.842330](https://doi.org/10.1109/TR0.2004.842330). URL : <http://ieeexplore.ieee.org/document/1492474/>.
- [TJZ06] Chao TAO, Jack J. JIANG et Yu ZHANG. « Simulation of vocal fold impact pressures with a self-oscillating finite-element model ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 119.6 (2006), p. 3987–3994. ISSN : 0001-4966. DOI : [10.1121/1.2197798](https://doi.org/10.1121/1.2197798). URL : <http://asa.scitation.org/doi/10.1121/1.2197798>.
- [Tit73] I R TITZE. « The Human Vocal Cords: A Mathematical Model ». In : *Phonetica* 28.3-4 (1973), p. 129–170. ISSN : 0031-8388. URL : <https://www.karger.com/DOI/10.1159/000259453>.

- [Tre+15] Vincent TRENCHANT et al. « A port-Hamiltonian formulation of a 2D boundary controlled acoustic system ». In : *IFAC-PapersOnLine* 48.13 (2015), p. 235–240. ISSN : 24058963. DOI : [10.1016/j.ifacol.2015.10.245](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.10.245). URL : <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2405896315021369>.
- [Vil07] J.A. VILLEGAS. « A Port-Hamiltonian Approach to Distributed Parameter Systems ». Thèse de doct. University of Twente, 2007. URL : <https://research.utwente.nl/en/publications/a-port-hamiltonian-approach-to-distributed-parameter-systems>.
- [de +03] Marcelo DE OLIVEIRA ROSA et al. « A contribution to simulating a three-dimensional larynx model using the finite element method ». In : *The Journal of the Acoustical Society of America* 114.5 (2003), p. 2893. ISSN : 00014966. DOI : [10.1121/1.1619981](https://doi.org/10.1121/1.1619981). URL : <http://scitation.aip.org/content/asa/journal/jasa/114/5/10.1121/1.1619981>.

DOCUMENTS ANNEXES

---

## A.1 IMPÉDANCE DU CONDUIT VOCAL

### A.1.1 Formulation du problème et hypothèses

On considère un résonateur vocal, allant de la glotte aux lèvres, et un modèle de rayonnement assimilé à un piston plan infiniment baflé, qui comporte une impédance et une fonction de rayonnement.

- **QUESTION** Étant donné une matrice  $T$  et un modèle de rayonnement contenant une impédance de rayonnement  $Z_R$  et une fonction de transfert  $H_R$  incluant les effets de rayonnement et de propagation, est-il possible de revenir à l'impédance acoustique du conduit vu depuis la glotte ?

### A.1.2 Définitions

- (1) On définit  $H_d(s)$  comme la fonction de transfert à temps continu du conduit vocal exprimé comme le ratio entre la pression entendue  $p_e$  et le débit glottique  $u_g$  :

$$H_d(s) = \frac{p_e}{u_g} \quad (1.1)$$

- (2) Le modèle de rayonnement est supposé connu. Il se décompose en une impédance de rayonnement  $Z_R = p_L/u_L$  et une fonction de transfert de rayonnement  $H_R(s)$ , qui peut dépendre de la position d'écoute. Elle est supposée fixe ici. Elle relie la pression entendue et le débit aux lèvres :

$$H_R(s) = \frac{p_e}{u_l} \quad (1.2)$$

- (3) Le conduit vocal est associé à une série de tubes concaténés, de longueurs et rayons différents. Chacun de ces tronçons est repéré par son indice  $n \in [1, N]$ .

Une matrice de transfert  $\underline{\underline{T}}$  donne une relation entre pression et vitesse aux deux extrémités d'un tube :

$$\begin{pmatrix} p_L \\ u_L \end{pmatrix} = \underline{\underline{T}} \begin{pmatrix} p_g \\ u_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_g \\ u_g \end{pmatrix}$$

Le principe de réciprocité se traduit par la propriété suivante :  $\det(T) = T_{11}T_{22} - T_{21}T_{12} = 1$ .

- (4) On définit  $Z_g$  comme l'impédance du conduit vocal au niveau de la glotte tel que  $Z_g = p_g/u_g$ .

### A.1.3 Résolution

Divisons la question principale en deux sous questions afin de simplifier le problème. Tout d'abord :

• QUESTION Q1 : Quelle est la relation entre  $H_d$  et les grandeurs connues  $\underline{T}$ ,  $Z_R$  et  $H_R$ ?  
On fait d'abord apparaître la contribution du rayonnement à l'aide de la définition

(2) :

$$H_d(s) = \frac{p_e u_l}{u_l u_g} = H_R(s)H_u(s) \quad (1.3)$$

Il faut donc maintenant expliciter le terme  $H_u(s) = u_l/u_g$ . Pour faire apparaître cette fonction, on exprime les grandeurs  $p_L$  et  $p_g$  en fonction du débit correspondant.

La définition de l'impédance de rayonnement nous donne immédiatement  $p_L = Z_R u_L$ . On manipule la définition (3) pour exprimer  $p_g$  :

$$\begin{pmatrix} p_L \\ u_L \end{pmatrix} = u_L \begin{pmatrix} Z_R \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{T} \begin{pmatrix} p_g \\ u_g \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} p_g \\ u_g \end{pmatrix} = \underline{T}^{-1} \begin{pmatrix} Z_R \\ 1 \end{pmatrix} u_L$$

En projetant selon la deuxième coordonnée, on trouve :

$$u_g = u_L (T_{11} - T_{21}Z_R) \quad (1.4)$$

On peut alors exprimer  $H_u$  puis  $H_d$  en fonction des données de notre problème :

$$H_u(s) = \frac{u_L}{u_g} = \frac{1}{T_{11} - T_{21}Z_R} \quad (1.5)$$

$$H_d(s) = H_R(s)H_u(s) = \frac{H_R(s)}{T_{11} - T_{21}Z_R} \quad (1.6)$$

• QUESTION Q2 Est-il possible d'établir une relation entre  $Z_g$  et  $H_d(s)$ ?

On exprime  $u_g$  de la même manière que l'on a exprimé  $p_g$  plus haut, mais en projetant sur la deuxième coordonnée. On obtient alors :

$$p_g = u_L(T_{22}Z_R - T_{12}) \quad (1.7)$$

On peut alors exprimer  $Z_g$  de la manière suivante :

$$Z_g = \frac{T_{22}Z_R - T_{12}}{T_{11} - Z_R T_{21}} \quad (1.8)$$

On exprime l'impédance de rayonnement en fonction de la fonction de transfert de débit  $H_u(s)$  tel que :

$$Z_R = \frac{T_{11} - H_u^{-1}(s)}{T_{21}} \quad (1.9)$$

On injecte cette forme dans  $Z_g$  et on multiplie en haut et en bas par  $T_{22}$ , et on utilise la propriété de la matrice  $T$  de déterminant égal à l'unité, et on obtient alors une expression de  $Z_g$  :

$$Z_g = \frac{H_u(s) - T_{22}}{T_{21}} \quad (1.10)$$

#### A.1.4 Conclusion

Ce développement montre qu'en posant un nombre restreint d'hypothèses et d'éléments connus, on obtient :

- $H_u$  est fonction de  $T_{11}$ ,  $T_{21}$  et  $Z_R$
- $Z_g$  est fonction de  $T_{22}$ ,  $T_{21}$  et  $H_u$

Ce problème contient trop d'inconnus pour pouvoir établir une équivalence entre une modélisation physique et un modèle de signal. Il faut donner plus d'informations sur le conduit vocal, représenté ici par les quatre coefficients de la matrice  $T$  et la fonction de transfert  $H_u$ .



## A.2 LIBRAIRIE PYPHS

Falaize [Fal16] a implémenté le formalisme et ces résultats sous la forme d'une librairie Python : PyPHS (*Python Port Hamiltonian System*). Elle permet de : (i) définir un SHP à partir d'un assemblage de composants ; (ii) documenter automatiquement le SHP obtenu ; (iii) générer automatiquement des codes de simulation (C++ et Faust) qui permettent d'utiliser un modèle SHP dans d'autres environnements de programmation, notamment pour des applications temps-réel lorsque le système le permet.

Cette librairie open source est disponible sur GitHub : <https://github.com/pyphs/pyphs>.

Pour (i), il existe deux procédures : manuelle, ou par graphe de composants.

Pour la première, on déclare d'abord chacun de composants :type (source, dissipatif ou stockant), sa variable d'état et son hamiltonien. On déclare ensuite la matrice d'interconnexion  $\mathbf{S}$ . Pour la deuxième, on définit un graph de connexion à partir de composants déjà implémentés dans la bibliothèque (mécaniques, électriques, thermiques, etc...). PyPHS s'occupe de générer le SHP correspondant à partir de cette spécification.

• **EXEMPLE : MASSE RESSORT AMORTISSEUR** On redonne la formulation algèbro-différentielle de l'exemple d'un système mécanique oscillant de type "masse-ressort-amortisseur", tiré de l'exemple du chapitre 2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{x} \\ w \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & & \\ 1 & & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q/m \\ xk \\ a\dot{x} \\ F \end{pmatrix}$$

• **IMPLEMENTATION DANS PYPHS** Voici le code équivalent pour la génération de l'objet PyPHS :

```

from pyphs import Core

label = 'mka'      # Nom du système
core = Core(label)

5 # Déclaration de: variable d'état, symbol de masse, et hamiltonien
q = core.symbols('q')
m = core.symbols('m')
hm = q**2/(2.*m)
10 core.add_storages(q, hm) # Ajout du composant au SHP

# Idem pour le ressort
x, k = core.symbols(['x', 'k'])
hk = k*x**2/2.
15 core.add_storages(x, hk)

# Ajout d'un amortisseur linéaire
w, a = core.symbols(['w', 'a'])
z = a*w
20 core.add_dissipations(w, z)

```

```

# Ajout d'un composant source
F, v = core.symbols(['F', 'v'])
core.add_ports(F, v)
25
# Déclaration de la matrice d'interconnexion
core.set_Jxx([[0, -1],
              [+1, 0]])
core.set_Jxw([[ -1], [0]])
30 core.set_Jxy([[ -1], [0]])

```

Listing 1 – Exemple: implémentation d'un système masse ressort amortisseur SHP à l'aide de PyPHS

On présente un résultat de simulation simple, où le système est initialisé avec une élongation initiale de 0.1m. Une force de 1N est imposée à  $t = 0.3s$  (voir courbe en pointillé rouge).

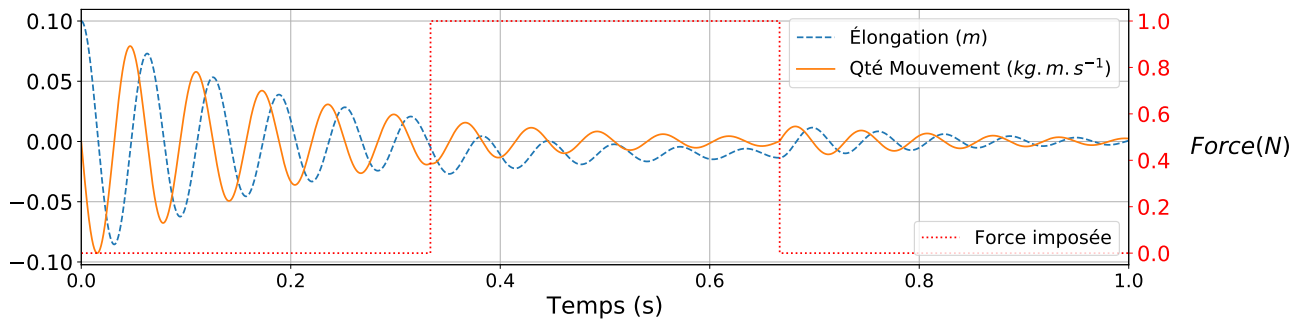


FIGURE 25 – Simulation d'un système Masse-ressort-amortisseur soumis à une force externe ; élongation et Force imposée à la masse en fonction du temps

## A.3 QUADRATISATION DU SYSTÈME

Les 12 équations du système sont :

$$\dot{\pi}_l = -1.0P_{sub}S_{subl} - 1.0S_{supl}x_1a_0 - 1.0k_lx_l + 1.0\kappa_l\eta_l$$

$$\dot{x}_l = \frac{1.0\pi_l}{m_l}$$

$$\dot{\eta}_l = -\frac{1.0\pi_l}{m_l} - \frac{1.5\Pi_{exp}}{L_0\ell_0\rho(h+h_r)\left(\frac{4\ell_0^2}{(h+h_r)^2} + 1\right)} - \frac{0.5\Pi_y(h+h_r)}{L_0\ell_0h_0^2\rho}$$

$$\dot{\pi}_r = -1.0P_{sub}S_{subr} - 1.0S_{supr}x_1a_0 - 1.0k_rx_r + 1.0\kappa_r\eta_r$$

$$\dot{x}_r = \frac{1.0\pi_r}{m_r}$$

$$\dot{\eta}_r = -\frac{1.0\pi_r}{m_r} - \frac{1.5\Pi_{exp}}{L_0\ell_0\rho(h+h_r)\left(\frac{4\ell_0^2}{(h+h_r)^2} + 1\right)} + \frac{0.5\Pi_y(h+h_r)}{L_0\ell_0h_0^2\rho}$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{3.0\Pi_{exp}}{\rho(h+h_r)\left(\frac{4\ell_0^2}{(h+h_r)^2} + 1\right)} + \frac{0.5\Pi_x(h+h_r)^2}{\ell_0h_0^2\rho} + \frac{1.0\pi_l}{m_l}S_{supl} + \frac{1.0\pi_r}{m_r}S_{supr} - \frac{1.0x_1}{a_0}\omega_0^2$$

$$\dot{x}_2 = 1.0x_1a_0$$

$$\dot{\Pi}_x = 1.0L_0P_{sub}h_0 - 1.0L_0x_1a_0h_0 - \frac{0.125h_0\rho(w_{turb} + |w_{turb}|)^2}{L_0(h+h_r)^2}$$

$$\dot{\Pi}_y = \frac{1.0h_0\kappa_l\eta_l}{h+h_r} - \frac{1.0h_0\kappa_r\eta_r}{h+h_r}$$

$$\dot{\Pi}_{exp} = 2.0L_0P_{sub}\ell_0 + 2.0L_0x_1a_0\ell_0 + 1.0\kappa_l\eta_l + 1.0\kappa_r\eta_r - \frac{12.0\Pi_{exp}^2\ell_0}{L_0\rho(h+h_r)^4\left(\frac{4\ell_0^2}{(h+h_r)^2} + 1\right)^2}$$

$$+ \frac{1.5\Pi_{exp}^2}{L_0\ell_0\rho(h+h_r)^2\left(\frac{4\ell_0^2}{(h+h_r)^2} + 1\right)} + \frac{0.25\ell_0\rho w_{turb}^2}{L_0(h+h_r)^2}$$

$$- \frac{0.5}{L_0\ell_0h_0^3\rho}\left(\Pi_x^2 + \Pi_y^2\right)(2h + 2h_r)$$

$$\dot{h} = \frac{3.0\Pi_{exp}}{L_0\ell_0\rho(h+h_r)\left(\frac{4\ell_0^2}{(h+h_r)^2} + 1\right)}$$

On quadratise les 12 équations du système en définissant un vecteur de 10 variables auxiliaires  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_0 = \Pi_{exp}^2 \\ v_1 = \Pi_x^2 \\ v_2 = \Pi_y^2 \\ v_3 = -x_l - x_r - \eta_l - \eta_r \\ v_4 = \frac{4\ell_0^2}{v_3^2} \\ v_5 = \frac{1}{v_4} \\ v_6 = \Pi_{exp}v_5 \\ v_7 = \Pi_x v_3 \\ v_8 = v_0 v_5 \\ v_9 = \frac{1}{v_3} \end{pmatrix}$$

Pour chacune de ces variables auxiliaires, on définit une valeur qui correspond au système au repos. Elles sont désignées ici par le symbole  $*$  :

$$v_0^* = v_1^* = v_2^* = 0$$

$$v_3^* = h_r$$

$$v_4^* = 4\ell_0^2 + h_r^2$$

$$v_9^* = \frac{1}{h_r}$$

## A.4 FORMULATION MIXTE

Le point de départ est l'assemblage de deux SHP, respectivement en description Kirchhoff et ondes de puissance, et d'un quadripôle de conversion, qui s'intercale entre les deux SHP. Cette configuration de départ est schématisée sur la figure 26 :

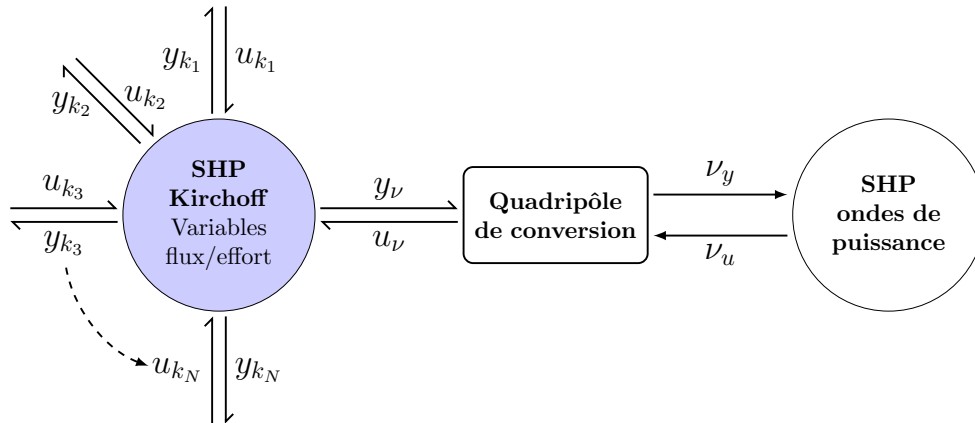


FIGURE 26 – Point de départ ; les flèches simples désignent des variables de port dispersives ; les demies-flèches désignent un flux de puissance

On souhaite aboutir à une description où un SHP dit "mixte" est directement relié à un SHP en onde de puissance (voir figure 27)

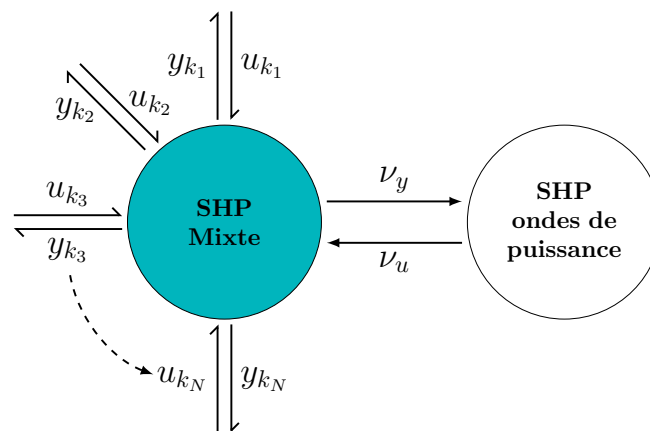


FIGURE 27 – Formulation mixte ; les flèches simples désignent des variables de port dispersives ; les demies-flèches désignent un flux de puissance

- NOMENCLATURE

- ▶ Du point de vue du SHP de type Kirchhoff, la lettre  $u$  désigne une variable d'entrée, et  $y$  une variable de sortie.
- ▶ L'indice  $K$  désigne les variables de port de type Kirchhoff (flux/effort).
- ▶ Le symbole  $\nu$  désigne des grandeurs associées aux ondes de puissance.

Pour simplifier les définitions, on considèrera que  $u_v$  et  $y_v$  sont des scalaires, e.g. on ne souhaite convertir qu'une seule entrée.

- **SHP DE TYPE KIRCHHOFF** On considère un SHP générique sous sa forme algébro-différentielle, où les variables de port  $u_K$  et  $y_K$  sont des variables de type Kirchoff (flux/effort) que l'on souhaite conserver, et  $u_v$  et  $y_v$  les ports que l'on veut convertir en ondes de puissance. On considère que l'on connaît le type de ces ports est connu (flux ou effort).

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{y}_K \\ y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_{xx} & \mathbf{M}_{xw} & \mathbf{M}_{xy_K} & \mathbf{M}_{xv} \\ \mathbf{M}_{wx} & \mathbf{M}_{ww} & \mathbf{M}_{wy_K} & \mathbf{M}_{wv} \\ \mathbf{M}_{y_Kx} & \mathbf{M}_{y_Kw} & \mathbf{M}_{y_Ky_K} & \mathbf{M}_{y_Kv} \\ \mathbf{M}_{vx} & \mathbf{M}_{vw} & \mathbf{M}_{vy_K} & \mathbf{M}_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \mathbf{H}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u}_K \\ u_v \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

- **SHP MIXTE** La formulation algébro-différentielle du SHP mixte (1.12) comporte : une matrice d'interconnexion  $\mathbf{S}_v$  dont les sous matrices sont des redéfinitions des blocs  $\tilde{\mathbf{M}}_{ij}$  du SHP précédent ; des ports en ondes de puissance  $v_u$  et  $v_y$  qui correspondent respectivement à une entrée et à une sortie.

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{y}_K \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{xx} & \tilde{\mathbf{M}}_{xw} & \tilde{\mathbf{M}}_{xy_K} & \tilde{\mathbf{M}}_{xv} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{wx} & \tilde{\mathbf{M}}_{ww} & \tilde{\mathbf{M}}_{wy_K} & \tilde{\mathbf{M}}_{wv} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{y_Kx} & \tilde{\mathbf{M}}_{y_Kw} & \tilde{\mathbf{M}}_{y_Ky_K} & \tilde{\mathbf{M}}_{y_Kv} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{vx} & \tilde{\mathbf{M}}_{vw} & \tilde{\mathbf{M}}_{vy_K} & \tilde{\mathbf{M}}_{vv} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla \mathbf{H}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{z}(\mathbf{w}) \\ \mathbf{u}_K \\ v_u \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

- **APPLICATION** À l'aide de (1.11), on exprime  $\dot{\mathbf{x}}(\nabla \mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{w}), \mathbf{u}_K, u_v)$  (première ligne). On y substitue  $u_K$  par sa forme obtenue par le changement de variable du quadripôle de conversion. On obtient alors  $\dot{\mathbf{x}}$  fonction des variables internes du SHP, de l'onde de puissance entrante  $v_u$ , et d'une matrice  $\mathbf{C}_v = (\mathbb{1} - \frac{1}{\sigma} \mathbf{M}_{vv})^{-1}$  :

$$y_c = \mathbf{C}_v \mathbf{M}_{vx} \nabla \mathbf{H}(\mathbf{x}) + \mathbf{C}_v \mathbf{M}_{vw} \mathbf{z}(\mathbf{w}) + \mathbf{C}_v \mathbf{M}_{vy_K} \mathbf{u}_K - \sigma^{1/2} \mathbf{C}_v \mathbf{M}_{vv} v_u \quad (1.13)$$

On identifie les nouveaux coefficients d'interconnexion  $\tilde{\mathbf{M}}_{xx}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_{xw}$ ,  $\tilde{\mathbf{M}}_{xy_K}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}_{xv}$ .

On reproduit le même raisonnement pour  $\dot{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{y}_K$ . On peut alors donner une expression générale pour les nouveaux termes de cette matrice :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{ij} = \mathbf{M}_{ij} + \frac{1}{\sigma} \mathbf{M}_{iv} \mathbf{C}_v \mathbf{M}_{vj} \quad \text{avec } i, j = \{x, w, y_K\}$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_{iv} = \mathbf{M}_{iv} \alpha_{ef} \sqrt{\sigma} (\mathbb{1} + \mathbf{C}_v \mathbf{M}_{vv}) \quad \text{avec } i = \{x, w, y_K\}$$

On substitue ensuite  $y_v(\nabla \mathbf{H}(\mathbf{x}), \mathbf{z}(\mathbf{w}), v_v)$  dans le changement de variable afin d'éliminer la dépendance en  $y_v$ . Les derniers coefficients de la matrice d'interconnexion s'écrivent :

$$\tilde{\mathbf{M}}_{vi} = \sqrt{\frac{2}{\sigma}} \mathbf{C}_v \mathbf{M}_{vi} \quad \tilde{\mathbf{M}}_{vv} = \alpha_{ef} \quad \text{avec } i = \{x, w, y_K\}$$

## COLOPHON

This document was typeset using the typographical look-and-feel `classicthesis` developed by André Miede. The style was inspired by Robert Bringhurst's seminal book on typography "*The Elements of Typographic Style*". `classicthesis` is available for both  $\text{\LaTeX}$  and  $\text{\LyX}$  :

<https://bitbucket.org/amiede/classicthesis/>

*Final Version* as of 20 août 2018 (`classicthesis`).

