



# Modélisation et simulation de systèmes discrétisés par la méthode des éléments finis dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports : application à la synthèse sonore

---

---

Raibaud Mathis

Master 2 ATIAM

Année universitaire : 2017-2018

Responsables du stage :

David Roze, Chargé de Recherche CNRS

Robert Piéchaud, Ingénieur de développement IRCAM

## Résumé

Ce stage de fin d'études a pour but la modélisation et la simulation de systèmes de dimension infinie non linéaires discrétisés par la méthode des éléments finis dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports. Dans ce sujet, le modèle de corde non linéaire de Kirchhoff-Carrier est étudié. La formulation faible du modèle non linéaire permet d'en obtenir une version discrétisée approximant la solution par interpolation polynômiale. En modifiant l'écriture du système, il est alors possible de décrire ce problème dans le formalisme des SHP. A l'aide d'une méthode à passivité garantie en temps discret, le bilan de puissance du problème non linéaire est assuré au cours de la simulation numérique. Les résultats sont présentés et analysés pour différentes valeurs d'excitations extérieures. Après une transcription du script dans un langage compilé, les temps de calculs du modèle non linéaire en temps-réel sont discutés.

*mots-clés : synthèse sonore, modélisation physique, systèmes non linéaires, méthodes des éléments finis, Systèmes Hamiltoniens à Ports*

## Abstract

This master's thesis aims at the modeling and the simulation of nonlinear infinite dimensional systems discretized by the finite element method in the formalism of Port Hamiltonian Systems. In this subject, the Kirchhoff-Carrier nonlinear string model is studied. The weak formulation of the nonlinear model makes it possible to obtain a discretized version approximating the solution by polynomial interpolation. By modifying the writing of the system, it is then possible to adapt this problem in the PHS's formalism. Using a passivity method guaranteed in discrete time, power balance of the nonlinear problem is ensured during the numerical simulation. The results are presented and analyzed for different values of external excitations. After a transcription of the algorithm in a compiled language, the computation times of the nonlinear model in real time are discussed.

*keywords : sound synthesis, physical modelling, nonlinear systems, finite element method, Port Hamiltonian Systems*

## Remerciements

Je tiens à remercier mes encadrants David Roze et Robert Piéchaud pour avoir accepté de me confier ce sujet, pour leur soutien et leurs conseils avisés tout au long de ce stage. Je tiens également à remercier Thomas Hélie pour son accueil dans l'équipe S3AM et pour sa grande implication auprès de l'ensemble des stagiaires. Merci également à l'ensemble de l'équipe S3AM pour leur écoute et leurs avis durant les présentations des travaux en cours en réunion d'équipe.

La formation ATIAM fut une expérience particulièrement riche, aussi bien du côté professionnel que du côté humain. Pour ces deux raisons, j'aimerais remercier l'ensemble des enseignants et des responsables de ce Master, avec une mention spéciale pour Cyrielle Fiolet, dont le travail a été remarquable et sa disponibilité toujours constante pour l'ensemble des élèves. Un grand merci évidemment à l'ensemble de la promotion pour leur sympathie et leur convivialité.

Pour finir, je tiens à remercier sincèrement l'ensemble du personnel de l'IRCAM. Ce haut lieu de la musique contemporaine et de la recherche scientifique est un endroit exceptionnel et une réelle source de motivation. C'est une chance que d'avoir pu travailler en ces murs tout au long de cette année.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
1.1	Contexte . . . . .	5
1.2	Etat de l'art . . . . .	6
1.2.1	Musique et son : une histoire de mathématiques . . . . .	6
1.2.2	Les différentes techniques de synthèse sonore numérique . . . . .	6
1.2.3	Modélisation géométrique . . . . .	9
1.2.4	Point de vue énergétique . . . . .	9
1.3	Notre approche . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Équation des cordes</b>	<b>11</b>
<b>3</b>	<b>Méthode des éléments finis</b>	<b>13</b>
3.1	Formulation faible . . . . .	13
3.2	Discrétisation spatiale et interpolation polynômiale . . . . .	13
3.3	Assemblage des matrices . . . . .	15
3.4	Conditions aux limites . . . . .	16
3.4.1	Multiplicateurs de Lagrange . . . . .	16
3.4.2	Modification des éléments du système . . . . .	17
3.4.3	Discussion sur les deux méthodes . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Systèmes Hamiltoniens à Ports</b>	<b>19</b>
4.1	Cas général . . . . .	19
4.2	Structure de Dirac . . . . .	19
4.3	Exemple : Oscillateur mécanique amorti . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Modélisation d'une corde linéaire par la méthode des élément finis dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports</b>	<b>22</b>
5.1	Formulation faible du modèle linéaire . . . . .	22
5.2	Approximation des énergies . . . . .	22
5.3	Ecriture dans le formalisme des SHP . . . . .	23
5.4	Méthode numérique à passivité garantie . . . . .	23
5.5	Simulation numérique . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Extension au cas de la corde non linéaire</b>	<b>26</b>
6.1	Modèle de Kirchhoff-Carrier . . . . .	26
6.2	Formulation faible du modèle non linéaire . . . . .	26
6.3	Approximation des énergies du modèle non linéaire . . . . .	27
6.4	Gradient discret de l'hamiltonien non quadratique . . . . .	28
6.5	Résolution et simulation numérique . . . . .	29
6.6	Résultats . . . . .	30
<b>7</b>	<b>Vers un démonstrateur en temps-réel</b>	<b>32</b>
7.1	Le framework JUCE . . . . .	32
7.1.1	Application audio Standalone . . . . .	32
7.2	Eigen : une bibliothèque d'algèbre linéaire . . . . .	33
7.3	Implémentations et résultats . . . . .	34
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>35</b>

<b>9 Annexes</b>	<b>36</b>
9.1 Annexe 1 : Force extérieure . . . . .	36
9.2 Annexe 2 : Comparaison des différentes bibliothèques d'algèbre linéaire en C++ . . . . .	37
<b>Bibliographie</b>	<b>38</b>

# 1 Introduction

## 1.1 Contexte

Ce stage, réalisé dans le cadre du Master 2 ATIAM (Acoustique, Traitement du Signal et Informatique appliqués à la Musique, [1]), se déroule à l'Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique (IRCAM, [2]) dans l'équipe S3AM (Systèmes et Signaux Sonores : Audio/Acoustique, instruMents, [3]) et est encadré par David Roze, chargé de recherche CNRS, et Robert Piéchaud, ingénieur en développement.

L'équipe S3AM est née de la fusion de deux équipes de l'IRCAM, anciennement appelées "Acoustique Instrumentale" et "Systèmes et Signaux Sonores (S3)". De ce mélange est née une équipe dont les travaux portent sur la modélisation, l'analyse, le contrôle et la simulation de systèmes dynamiques tels que la voix, les instruments de musique, les haut-parleurs ou encore les effets électroniques audio. Ces travaux reposent sur les modèles physiques de systèmes dynamiques pour reproduire avec réalisme le comportement des systèmes étudiés.

En 1988, l'IRCAM démarre le développement du logiciel Modalys [4] (anciennement nommé MOSAIC). Ce logiciel de synthèse sonore par modèles physiques permet de concevoir des instruments virtuels à partir de résonateurs linéaires (corde, tube, plaque...) et d'excitateurs (archet, pincement, frappe...) qui interagissent ensemble. Les objets sonores sont décrits de manière analytique ou par la méthode des éléments finis dans un contexte modal. Actuellement, les travaux en cours envisagent d'implémenter des résonateurs non linéaires dans Modalys.

Les recherches actuelles de l'équipe S3AM s'orientent depuis quelques années vers l'utilisation du formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports (SHP). Ce formalisme permet l'interconnexion de systèmes multi-physiques (mécanique, électronique, chimique, ...) tout en assurant la passivité du système global, même dans le cas non linéaire. C'est dans ce contexte que l'intégration de résonateurs non linéaires dans Modalys est envisagée. L'objectif de ce stage est de modéliser et simuler des systèmes non linéaires approximatés par la méthode des éléments finis dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports. Le cas étudié dans ce projet est le modèle de corde non linéaire de Kirchhoff-Carrier.

Ce document est organisé de la manière suivante. La partie 1.2 présente l'acoustique musicale d'un point de vue historique, décrit les différentes modélisations physiques utilisées en synthèse sonore et discute de l'apport d'une vision énergétique dans ces modélisations. La section 2 rappelle l'établissement de l'équation de la dynamique d'une corde vibrante. La partie 3 détaille la méthode numérique des éléments finis en l'appliquant au cas de la corde linéaire établie précédemment. La partie 4 introduit le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports d'un point de vue théorique et pratique. Des deux sections précédentes découle la modélisation d'une corde linéaire discrétisée par éléments finis dans le formalisme des SHP en partie 5. Cette modélisation est ensuite étendue dans la section 6 au modèle de corde non linéaire de Kirchhoff-Carrier. Pour finir, l'implémentation d'un démonstrateur dans un langage compilé est présentée et discutée.

## 1.2 Etat de l'art

### 1.2.1 Musique et son : une histoire de mathématiques

L'acoustique musicale, discipline mêlant sciences et musique, est née des travaux du mathématicien Pythagore (VI<sup>ème</sup> siècle avant J.-C.). Il découvre en effet qu'en tendant une corde fixée à ses extrémités et en la bloquant en différents points spécifiques avec son doigt, le pincement produit différentes notes agréables les unes avec les autres. En mesurant ces longueurs, il constate que ces consonances apparaissent lors de rapports entiers entre la longueur totale de la corde et la longueur tronquée dû au positionnement de son doigt. Apparaissent ainsi l'octave, la quinte et la quarte pour des rapports respectifs de  $1/2$ ,  $2/3$  et  $1/3$ . Il faudra ensuite attendre le siècle des Lumières et l'arrivée de Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) [5] pour établir, à partir des travaux d'Isaac Newton (1642-1727), de Jean Bernoulli (1667-1748) et de Léonhard Euler (1707-1783), le mouvement d'une corde idéale en se basant sur ses recherches sur les équations différentielles. La loi régissant la dynamique de la corde, détaillée dans la partie 2, est alors appelée l'équation des ondes. Les recherches théoriques du mathématicien Joseph Fourier (1768-1830) et expérimentales de Hermann von Helmholtz (1821-1894) sur l'analyse des sons complexes ont ensuite montré qu'à tout son musical de hauteur donnée est associé un timbre qui résulte de la superposition au son fondamental d'une série d'harmoniques. L'ensemble de ces découvertes montre ainsi le lien étroit entre ces deux domaines que sont la musique et la science. Les inventeurs du XX<sup>ème</sup> siècle prennent alors parti de ce lien dans leurs innovations et proposent de nouveaux instruments capables d'imiter les instruments traditionnels. On peut citer entre autres le Thérémine inventé en 1919 par le Russe Lev Sergueïevitch Termen (connu sous le nom de « Léon Theremin »), les Ondes Martenot par le Français Maurice Martenot présentées au public en 1928, l'Ondioline par le Français Georges Jenny en 1941, le Moog Modular par Robert Moog en 1964 et bien d'autres.

### 1.2.2 Les différentes techniques de synthèse sonore numérique

La seconde moitié du XX<sup>ème</sup> siècle, soit deux cent ans après la découverte de l'équation des ondes par d'Alembert, les ordinateurs se démocratisent et permettent ainsi à des scientifiques de réaliser de nombreux calculs en un temps record. Grâce à cette nouvelle technologie, les premiers essais de synthèse sonore par ordinateur voient le jour. Nous différencions ici les synthèses dites par approche "signal" de celles par approche "physique". La première catégorie analyse les signaux obtenus par une source et cherche à comprendre comment les reproduire. La deuxième tente de comprendre et de simuler le comportement physique des sources étudiées. Les exemples de synthèse par approche "signal" les plus connus sont : synthèse additive/soustractive, synthèse AM/FM, synthèse par tables d'ondes, synthèse granulaire. Les approches "physiques" les plus employées en synthèse sonore sont détaillées ci-dessous.

#### Synthèse par assemblage d'éléments physiques élémentaires

Le premier paradigme de modélisation physique est apparu à la fin des années 1970 et au début des années 1980. Il fut proposé par Cadoz [6] en collaboration avec Luciani et Florens [7] et est à l'origine des environnements CORDIS et CORDIS-ANIMA [8]. Il se base sur un ensemble de masse-ressort connectés les uns aux autres

et qui peuvent interagir grâce à des forces de contact non-linéaires. Cette représentation permet alors à l'utilisateur de créer des réseaux tel qu'il le souhaite. Cependant, il est difficile de modéliser un système en particulier (corde, poutre, plaque) puisque le réseau ne prend en compte ni la géométrie ni les caractéristiques physiques du problème.

### Synthèse modale

La synthèse par approche modale, développée initialement par Adrien [9], se base sur le fait que le mouvement d'un objet physique peut être décomposé en une somme infinie de sinusoïdes amorties multipliées par un facteur nommé déformée modale. Afin de simuler numériquement le déplacement en un point de l'objet, le nombre de modes est tronqué à  $N$ . Soit, pour un cas à une dimension,

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^N \tilde{w}(t) \psi_n(x), \quad (1.1)$$

$$w(x, t) = \sum_{n=0}^N a_n(t) e^{-d_n t} \sin(2\pi f_n t) \psi_n(x) \quad (1.2)$$

avec  $w(x, t)$  le déplacement au point  $x$  et au temps  $t$ , et où  $\psi_n(x)$ ,  $a_n(t)$ ,  $d_n$  et  $f_n$  correspondent respectivement à la déformée modale, à l'amplitude, à l'amortissement et à la fréquence du mode  $n$ .  $\psi_n$ ,  $d_n$  et  $f_n$  dépendent des caractéristiques physiques de l'objet (géométrie, matériau) et de ses conditions aux limites. Leurs expressions peuvent être obtenues de manière analytique ou par la méthode des éléments finis lors de cas à géométrie complexe en résolvant un problème aux valeurs propres généralisé. L'amplitude temporelle  $a_n(t)$  dépend quant à elle des conditions initiales du problème et/ou de l'excitation extérieure. Le logiciel Modalys, développé à l'IRCAM, s'appuie sur ce formalisme et permet en plus des interactions entre les différents objets modélisés afin de concevoir des instruments virtuels utilisables en temps réel.

### Guides d'ondes numériques

De manière générale, la modélisation physique est réaliste mais nécessite de nombreux calculs pour s'approcher de la réalité. Au cours des années 1980, la synthèse par guides d'ondes numériques, inspirée de l'article MSW [10] et développée par Julius Smith [11], s'est imposée dans le domaine de la synthèse sonore par modèle physique. Cette nouvelle synthèse, à l'inverse, a réussi à allier réalisme et faible coût de calcul, particulièrement dans le cas de modélisation 1D (corde, tube). L'idée est la suivante : le mouvement du milieu peut être décomposé en une somme de deux ondes se propageant dans des directions opposées. Si  $c$  est la vitesse de l'onde se propageant dans le milieu, la solution de l'équation peut être discrétisée en temps avec une période  $T$  et avec un intervalle  $X$  en espace tel que  $X = cT$ . Les positions et temps discrets sont notés  $x = mX$  et  $t = nT$ . Le déplacement s'exprime alors :

$$w(m, n) = w^+(m - n) + w^-(m + n), \quad (1.3)$$

où  $w^+$  et  $w^-$  correspondent respectivement à l'onde se propageant vers la droite et vers la gauche au point  $m$  et au temps  $n$ . Les guides d'ondes numériques repose

ensuite sur des lignes à retard pour prendre en compte la géométrie du système et c'est à ce niveau que le coût de calcul est considérablement diminué. En effet, à partir de la longueur parcourue par l'onde et sa vitesse, il est possible de convertir le temps de propagation de cet aller-retour en nombre d'échantillons, ce qui ne nécessite aucune opération coûteuse en temps de calcul pour l'ordinateur. Pour prendre en compte les autres influences physiques sur le son (amortissement, dispersion), la synthèse par guide d'ondes numérique s'appuie sur des techniques de traitement du signal et particulièrement de filtrage. Par exemple, les réflexions aux limites du système peuvent être modélisées par un filtre passe-bas, la dissipation par un gain  $|g| < 1$ , les pertes dépendantes des fréquences par des filtres à phase linéaire.

### Synthèse par la méthode des différences finies

La méthode des différences finies est une méthode numérique permettant d'approcher les solutions d'équations aux dérivées partielles. Elle se base sur une discrétisation de l'espace et/ou du temps en un maillage régulier ou non. Le but est d'approximer les valeurs des fonctions inconnues en certains points à partir des valeurs des points voisins. Pour ce faire, les approximations des dérivées premières et secondes sont obtenues à partir de la formule de Taylor-Young au premier et second ordre. Soit  $u(t)$  une fonction dépendant du temps  $t$  et  $\delta t$  un pas de temps, nous donnons ici les expressions des dérivées en fonction du type de différenciation choisie. Pour la dérivée première,

$$\frac{u(t + \delta t) - u(t)}{\delta t} = u'(t) + \mathcal{O}(\delta t), \quad \text{Différenciation décentrée avancée} \quad (1.4)$$

$$\frac{u(t) - u(t - \delta t)}{\delta t} = u'(t) + \mathcal{O}(\delta t), \quad \text{Différenciation décentrée retardée} \quad (1.5)$$

$$\frac{u(t + \delta t) - u(t - \delta t)}{2\delta t} = u'(t) + \mathcal{O}(\delta t), \quad \text{Différenciation centrée} \quad (1.6)$$

Pour la dérivée seconde,

$$\frac{u(t + \delta t) - 2u(t) + u(t - \delta t)}{\delta t^2} = u''(t). \quad (1.7)$$

Afin d'illustrer la simplicité de cette méthode, l'exemple de l'oscillateur harmonique est étudié. Dans le cas où l'oscillateur possède une pulsation propre  $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , où  $k$  et  $m$  correspondent respectivement à la raideur du ressort et à la masse, un raisonnement mécanique permet d'établir l'équation :

$$\ddot{w}(t) + \omega_0 w(t) = 0. \quad (1.8)$$

En approximant l'accélération  $\ddot{w}(t)$  par l'équation (1.7),

$$\frac{w(t + \delta t) - 2w(t) + w(t - \delta t)}{\delta t^2} + \omega_0 w(t) = 0. \quad (1.9)$$

En mettant tous les termes dépendant de  $t$  et  $(t - \delta t)$  à droite, un schéma explicite apparaît :

$$w(t + \delta t) = w(t)[2 - \omega_0 \delta t^2] - w(t - \delta t). \quad (1.10)$$

L'équation différentielle peut finalement être simulée numériquement, avec  $t_n = nt$  et  $\delta t = t_{n+1} - t_n = n+1 - n = 1$ . Les conditions initiales sont utilisées pour initialiser les premières valeurs de  $w[n]$  et  $w[n - 1]$ . Finalement, à temps discret,

$$w[n + 1] = w[n](2 - \omega_0 \delta t^2) - w[n - 1]. \quad (1.11)$$

Stefan Bilbao a étendu cette technique à de nombreux cas d'acoustique musicale et les détaille dans [12] avec une analyse des conditions de convergence.

### 1.2.3 Modélisation géométrique

Dans le domaine de l'industrie mécanique, afin de prédire la réponse d'une structure à des efforts extérieurs, la modélisation d'objets à géométrie parfois complexe est primordiale. Pour ce faire, la structure est approximée numériquement par la méthode des éléments finis (cf. section 3). Cette méthode permet de décomposer l'objet en un ensemble fini de sous-domaines délimités par des nœuds. Dans le cas d'un système dépendant de l'espace et du temps, l'approximation par la méthode des éléments finis conduit au système suivant :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{W}} + \mathbb{K}\mathbf{W} = \mathbb{F}. \quad (1.12)$$

avec  $\mathbb{M}$ ,  $\mathbb{K}$  les matrices de masse et de raideur de dimension  $n \times n$ ,  $\mathbb{F}$  le vecteur de force de dimension  $n$  et  $\mathbf{W}$  le vecteur de déplacements des nœuds de dimension  $n$ , où  $n$  est le nombre de nœuds. L'approximation en espace est alors effectuée mais pas celle en temps. Différentes techniques de discrétisation sont alors employées pour résoudre le problème temporel [13, § 9] telles que la méthode des différences finies, la technique de Houbolt [13, § 9.2.2], la méthode de Newmark [13, § 9.2.3] ou encore la méthode de Bathe [13, § 9.2.4]. Cependant, la stabilité de ces méthodes n'est pas garantie au cours du temps et dépend de différents paramètres propres à chaque méthode.

### 1.2.4 Point de vue énergétique

Au XVII<sup>ème</sup> siècle, Isaac Newton exposait sa théorie de la mécanique classique. La seconde loi exprime le fait que, dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées à un objet ponctuel est égale au produit de la masse de l'objet par son vecteur accélération. En 1833, William Rowan Hamilton introduit la mécanique Hamiltonienne, à partir des travaux de Joseph Lagrange. Ce formalisme est une importante reformulation de la mécanique classique de Newton basé sur une approche énergétique, menant plus tard aux formulations de la physique statistique et de la mécanique quantique. L'avantage de ce formalisme est de pouvoir évaluer la quantité d'énergie du système.

L'emploi de la mécanique hamiltonienne dans la synthèse sonore s'est avéré être un atout majeur. En effet, en prenant en compte la conservation de l'énergie dans les différentes techniques de synthèse sonore étudiées précédemment, il est possible d'assurer la stabilité des simulations et ce, même dans le cas de systèmes non linéaires [14, 15, 16]. A partir de cette formulation de la mécanique, il est possible de connecter plusieurs sous-systèmes pour en créer un global tout en assurant la conservation de l'énergie aux points d'interconnexion. Le formalisme des Systèmes

Hamiltoniens à Ports [17, 18], introduit dans les années 1990 par Arjan Van der Schaft et Bernhard Maschke comme une extension de la mécanique hamiltonienne, repose sur cette idée. Employé en premier lieu dans le domaine de l'automatique puis plus tard dans de nombreux domaines tels que la mécanique, l'électronique ou encore la chimie, ce formalisme a permis de résoudre des problèmes de dimension finie linéaire ou non linéaire pouvant inclure des phénomènes de dissipation (ex : oscillateur harmonique amorti, circuit RLC). Pour résoudre des systèmes de dimension infinie (comprenant des équations aux dérivées partielles), une réduction d'ordre du système est nécessaire. Celle-ci peut être assurée par différentes techniques, comme par exemple la méthode des éléments finis mixtes [19], la méthode pseudo-spectrale [20], les fonctions de Casimir [21], le formalisme modal [22] ou plus récemment la méthode des éléments finis [23]. Bien qu'ayant des applications plutôt orientées vers l'industrie, le formalisme des SHP a été utilisé lors de deux travaux de thèse [24, 25] au sein de l'équipe S3AM de l'IRCAM à des fins musicales et continue d'être employé dans le cadre de différents sujets de thèse et de stage (simulation d'ondes Martenot, reproduction du conduit vocal, correction de haut-parleurs...).

### 1.3 Notre approche

Nous avons vu dans la partie 1.2.2 que le logiciel Modalys est basé sur le formalisme modal. Chaque objet créé possède ses fréquences propres et ses déformées modales. Dans le cas de géométrie simple (corde homogène fixée à ses extrémités, plaque mince simplement supportée sur ses bords, ...), ces variables sont calculées de manière analytique. Lorsque l'objet conçu présente une géométrie complexe, la méthode des éléments finis est employée pour les calculer. Cependant, les résonateurs (corde, plaque, tube) implémentés dans Modalys sont à l'heure actuels linéaires. Le formalisme modal n'est pas adapté à la modélisation de résonateur non linéaires. Le passage par d'autres formalismes tels que les séries de Volterra est nécessaire mais il n'est pas possible de déterminer *a priori* la stabilité du système. D'un autre côté, c'est exactement le point fort du formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports. Notre approche consiste alors à prendre avantage de cette caractéristique pour pouvoir implémenter des résonateurs non linéaires dont la stabilité de la simulation est d'avance garantie. La technique de discrétisation spatiale retenue est la méthode des éléments finis. Plusieurs raisons à ce choix : la première est que la méthode des éléments finis nous permet de considérer des caractéristiques physiques non homogènes (comme par exemple une corde de section variable, ou de matériau changeant en fonction de la longueur) et la seconde est que cette méthode repose sur une décomposition du domaine en un nombre fini d'éléments et se rapproche ainsi plus de la notion de sous-objets interconnectés (comme dans le formalisme des SHP). Afin d'illustrer cette nouvelle méthode, le système considéré est une corde fixée à ses extrémités et excitée par une force extérieure. Nous étudierons dans un premier temps le cas linéaire et étendrons la méthode au modèle non linéaire de Kirchhoff-Carrier.

## 2 Équation des cordes

Cette partie a pour but de rappeler l'équation des cordes obtenue par un raisonnement mécanique. La corde, de masse linéique  $\mu$  et tendue par une tension  $\vec{T}$ , est représentée sur la figure 1.

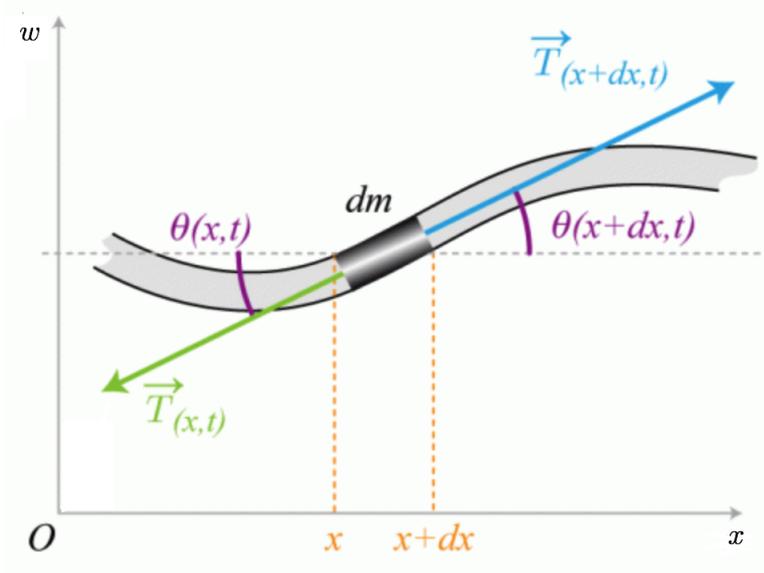


FIGURE 1 – Bilan des forces appliquées à un tronçon de corde, source [26]

A partir du Principe Fondamental de la Dynamique, le mouvement d'une corde dans un plan (figure 1) est régi par les équations :

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T \sin(\theta), \quad \rho A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = T \cos(\theta), \quad (2.1)$$

avec  $\rho$  la masse volumique,  $A$  l'aire de la section,  $\theta = \arctan[\frac{\partial w}{\partial x} / (1 + \frac{\partial \xi}{\partial x})]$ ,  $T$  la tension totale, et où  $w$  et  $\xi$  correspondent respectivement aux mouvements transverse et longitudinal de la corde. En reportant l'expression de  $\theta$  dans les équations (2.1) et en posant  $\mu = \rho A$  la masse linéique de la corde,

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{T(\partial w / \partial x)}{\sqrt{(\partial w / \partial x)^2 + (1 + (\partial \xi / \partial x))^2}} \right], \quad (2.2)$$

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{T(1 + (\partial \xi / \partial x))}{\sqrt{(\partial w / \partial x)^2 + (1 + (\partial \xi / \partial x))^2}} \right], \quad (2.3)$$

où  $T - T_0 = EA(\sqrt{(\partial w / \partial x)^2 + (1 + (\partial \xi / \partial x))^2} - 1)$ , avec  $T_0$  la tension statique et  $E$  le module d'Young de la corde. Dans ce projet, les ondes longitudinales sont négligées, soit  $\partial \xi / \partial x \approx 0$ . La dynamique de la corde s'exprime finalement [27] :

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(T_0 + EA(\sqrt{1 + (\partial w / \partial x)^2} - 1))(\partial w / \partial x)}{\sqrt{1 + (\partial w / \partial x)^2}} \right]. \quad (2.4)$$

Dans le cas où les coefficients d'amortissement fluide et structurel, respectivement  $\alpha$  et  $\kappa$ , sont introduits et où la corde est excitée par une force extérieure  $f$ , l'équation des cordes (2.4) devient :

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial w}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(T_0 + EA(\sqrt{1 + (\partial w / \partial x)^2} - 1))(\partial w / \partial x)}{\sqrt{1 + (\partial w / \partial x)^2}} \right] + f(x, t). \quad (2.5)$$

Si on considère le mouvement de la corde suffisamment faible par rapport à sa longueur alors  $(\frac{\partial w}{\partial x})^2 \approx 0$ . Dans ce cas, on retrouve l'équation des cordes linéarisée. Soit,

$$\mu \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t \partial x^2} - T_0 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (2.6)$$

Dans la suite de ce document, la discrétisation par éléments finis dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Port est d'abord appliquée au cas de la corde linéaire et est ensuite appliquée au cas non linéaire avec le modèle de corde de Kirchhoff-Carrier.

### 3 Méthode des éléments finis

La relation (2.6) décrit une équation aux dérivées partielles (EDP). Le recours à une méthode numérique permet d'en donner une solution approchée. La méthode des éléments finis [13, 28], [29, §5.3], est l'une des techniques permettant cette approximation et se décompose en deux parties : formulation faible de l'EDP puis approximation du déplacement de chaque élément du domaine par des fonctions d'interpolation.

#### 3.1 Formulation faible

Un problème physique est généralement décrit par un système d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. Cette formulation est appelée formulation forte [30]. Il est cependant possible d'exprimer ces systèmes par une formulation dite faible (ou variationnelle). L'avantage de cette formulation est qu'elle permet de se placer dans des espaces mathématiques (Sobolev, Hilbert) où des théorèmes permettent de garantir l'existence et l'unicité de solutions. Se basant sur le principe de moindre action, la formulation faible est obtenue en multipliant l'EDP par une fonction test et en intégrant sur le domaine.

Dans la suite de cette partie, par soucis de clarté et pour une meilleure compréhension des sections suivantes, la méthode des éléments finis est présentée en l'appliquant à l'équation des cordes linéarisée (2.6). Le domaine  $\Omega = [0; L]$  est unidimensionnel et en intégrant et en multipliant par une fonction test  $v$ , la formulation faible de l'équation des cordes (2.6) s'exprime :

$$\int_0^L \left( \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial w}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) v dx = \int_0^L f v dx, \quad (3.1)$$

L'intégration par parties des facteurs dépendant de la dérivée spatiale d'ordre deux permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} v dx &= \left[ \frac{\partial w}{\partial x} v \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx, \\ \int_0^L \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} v dx &= \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} v \right]_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

La fonction test  $v$  a les mêmes conditions aux limites que le problème. Dans le cas de conditions de Dirichlet, la formulation faible de (2.6) a pour expression :

$$\int_0^L \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v dx + \int_0^L \alpha \frac{\partial w}{\partial t} v dx + \int_0^L \kappa \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int_0^L T_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_0^L f v dx. \quad (3.2)$$

#### 3.2 Discrétisation spatiale et interpolation polynômiale

Le principe de la méthode des éléments finis repose sur une discrétisation spatiale du domaine en un nombre finis d'éléments. Dans le cas de la corde, le domaine  $\Omega$  est segmenté en  $n$  éléments de longueur  $h = \frac{L}{n}$  (figure 2).

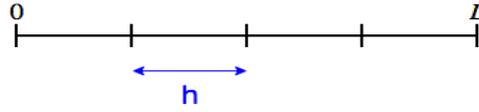


FIGURE 2 – *Domaine divisé en n éléments de même taille*

Le déplacement de chaque élément peut être approximé par interpolation polynomiale des déplacements des nœuds (figure 3) :

$$w(x, t) \approx w_1(t)\phi_1(x) + w_2(t)\phi_2(x), \quad (3.3)$$

où les fonctions de bases  $\phi(x)$  peuvent prendre différentes expressions en fonction du degré du polynôme choisi. En approximant la solution par des polynômes de degré 1, ces fonctions ont pour expressions :

$$\phi_1(x) = \frac{h-x}{h}, \quad \phi_2(x) = \frac{x}{h}. \quad (3.4)$$

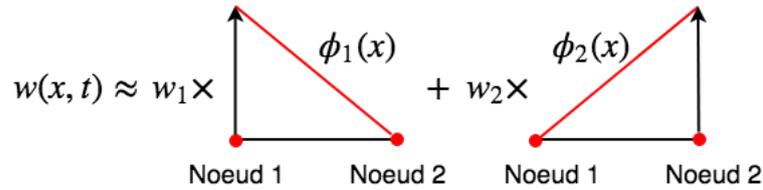


FIGURE 3 – *Approximation du déplacement de chaque élément*

En introduisant les notations vectorielles  $\mathbf{W} = [w_1 \ w_2]^T$  et  $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2]^T$ , le déplacement en tout point s'exprime :

$$w(x, t) \approx \Phi^T \mathbf{W}. \quad (3.5)$$

La fonction test  $v(x)$  étant arbitraire, elle peut être approximée par le vecteur contenant les fonctions de bases. Soit,

$$v(x, t) \approx \Phi^T \mathbf{V}. \quad (3.6)$$

La force extérieure  $f(x, t)$  est une fonction continue en temps et en espace et peut aussi être approximée telle que :

$$f = \Phi^T \mathbf{F}, \quad (3.7)$$

où  $\mathbf{F} = [\mathbf{F}_1 \ \mathbf{F}_2]^T$ , avec  $\mathbf{F}_1$  et  $\mathbf{F}_2$  les forces appliquées aux nœuds délimitant l'élément. La formulation faible (3.2) sur un élément s'exprime à présent :

$$\begin{aligned} \int_0^h \mu \Phi^T \ddot{\mathbf{W}} \Phi^T \mathbf{V} dx + \int_0^h \alpha \Phi^T \dot{\mathbf{W}} \Phi^T \mathbf{V} dx + \int_0^h \kappa \Phi'^T \dot{\mathbf{W}} \Phi'^T \mathbf{V} dx \\ + \int_0^h T_0 \Phi'^T \mathbf{W} \Phi'^T \mathbf{V} dx = \int_0^h \Phi^T \mathbf{F} \Phi^T \mathbf{V} dx, \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\int_0^h \mu \mathbf{V}^T \Phi \Phi^T \ddot{\mathbf{W}} dx + \int_0^h \alpha \mathbf{V}^T \Phi \Phi^T \dot{\mathbf{W}} dx + \int_0^h \kappa \mathbf{V}^T \Phi' \Phi'^T \dot{\mathbf{W}} dx + \int_0^h T_0 \mathbf{V}^T \Phi' \Phi'^T \mathbf{W} dx = \int_0^h \mathbf{V}^T \Phi \Phi^T \mathbf{F} dx, \quad (3.9)$$

En factorisant par  $\mathbf{V}^T$ ,

$$\underbrace{\int_0^h \mu \Phi \Phi^T dx}_{M_e} \ddot{\mathbf{W}} + \underbrace{\int_0^h \alpha \Phi \Phi^T + \kappa \Phi' \Phi'^T dx}_{C_e} \dot{\mathbf{W}} + \underbrace{\int_0^h T_0 \Phi' \Phi'^T dx}_{K_e} \mathbf{W} = \underbrace{\int_0^h \Phi \Phi^T \mathbf{F} dx}_{F_e}, \quad (3.10)$$

où  $M_e$ ,  $K_e$ ,  $C_e$  et  $F_e$  correspondent respectivement aux matrices élémentaires de masse, de raideur, d'amortissement et au vecteur de force. Ces variables ont pour expressions

$$M_e = \mu \left[ \begin{array}{c|c} \int_0^h \phi_1^2(x) dx & \int_0^h \phi_1(x) \phi_2(x) dx \\ \hline \int_0^h \phi_1(x) \phi_2(x) dx & \int_0^h \phi_2^2(x) dx \end{array} \right] = \frac{\mu h}{6} \left[ \begin{array}{c|c} 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 \end{array} \right],$$

$$K_e = T_0 \left[ \begin{array}{c|c} \int_0^h \phi_1'^2(x) dx & \int_0^h \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx \\ \hline \int_0^h \phi_1'(x) \phi_2'(x) dx & \int_0^h \phi_2'^2(x) dx \end{array} \right] = \frac{T_0}{h} \left[ \begin{array}{c|c} 1 & -1 \\ \hline -1 & 1 \end{array} \right],$$

$$C_e = \frac{\alpha}{\mu} M_e + \frac{\kappa}{T_0} K_e, \quad F_e = \frac{6}{\mu h} M_e \left[ \begin{array}{c} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \end{array} \right].$$

### 3.3 Assemblage des matrices

Pour construire les matrices, dites globales, de masse et de raideur sur l'ensemble du domaine  $\Omega$ , les matrices élémentaires doivent être assemblées. Nous présentons ici le cas où le domaine est divisé en deux éléments (donc trois noeuds). Les matrices élémentaires bleues correspondent à celles du premier élément et celles en rouge au second. Le partage du second noeud par le premier et le deuxième élément conduit à une somme des facteurs des matrices à ce point.

Les matrices globales ont alors pour expressions :

$$\mathbb{M} = \frac{\mu h}{6} \left[ \begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2+2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array} \right], \quad \mathbb{K} = \frac{T_0}{h} \left[ \begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 1+1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \end{array} \right],$$

$$\mathbb{C} = \frac{\alpha h}{6} \left[ \begin{array}{c|c|c} 2 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2+2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array} \right] + \frac{\kappa}{h} \left[ \begin{array}{c|c|c} 1 & -1 & 0 \\ \hline -1 & 1+1 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \end{array} \right], \quad \mathbb{F} = \frac{6}{\mu h} \mathbb{M} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_2 \\ \mathbf{F}_3 \end{array} \right].$$

La formulation faible du problème peut finalement être écrite sous la forme :

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{W}} + \mathbb{C} \dot{\mathbf{W}} + \mathbb{K} \mathbf{W} = \mathbb{F}. \quad (3.11)$$

### 3.4 Conditions aux limites

Le système (3.11) représente une corde discrétisée en un nombre finis d'éléments. Cependant, il ne prend pas en compte les conditions aux limites. La corde étant fixée à ses extrémités, il est essentiel d'imposer des déplacements nuls aux premier et dernier nœuds du système. Deux techniques sont alors envisagées : le recours à des multiplicateurs de Lagrange [30, § 12.6.4] ou une modification des matrices du système à résoudre.

#### 3.4.1 Multiplicateurs de Lagrange

Les multiplicateurs de Lagrange, notés  $\lambda_i$ , permettent d'imposer une valeur de déplacement à certaines nœuds et représentent alors les réactions aux appuis. Dans notre cas, les deux conditions aux limites sont des conditions de Dirichlet. En introduisant ces variables, la formulation du problème statique s'exprime :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{D}^T \\ \mathbb{D} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{F} \\ u_d \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

avec  $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2]^T$ ,  $u_d = [u_{d_1}, u_{d_2}]^T$  les valeurs des déplacements imposés et  $\mathbb{D}$  une matrice de dimension  $2 \times (n+1)$ . Puisque la corde est fixée à ses extrémités,  $u_{d_1} = u_{d_2} = 0$  et la matrice  $\mathbb{D}$  est remplie de valeurs nulles exceptée pour les nœuds où le déplacement est imposée, auquel cas  $\mathbb{D}(1, 1) = \mathbb{D}(n+1, n+1) = 1$ . Par exemple, si la corde est discrétisée en trois éléments (donc quatre nœuds) et en posant  $T_0$  et  $h$  égaux à 1 dans la matrice  $\mathbb{K}$  pour plus de clarté, le problème statique a pour expression :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{F}_1 \\ \mathbb{F}_2 \\ \mathbb{F}_3 \\ \mathbb{F}_4 \\ u_{d_1} = 0 \\ u_{d_2} = 0 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Dans le cas dynamique, la matrice  $\mathbb{M}$  n'est pas affectée par les multiplicateurs de Lagrange et le problème dépourvu d'amortissement s'écrit :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{W}} \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\ddot{\mathcal{W}}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbb{K} & \mathbb{D}^T \\ \mathbb{D} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{K}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \lambda \end{pmatrix}}_{\mathcal{W}} = \begin{pmatrix} \mathbb{F} \\ u_d \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

En supposant la solution harmonique, soit  $\ddot{\mathcal{W}} = -\omega^2 \mathcal{W}$  avec  $\omega$  les pulsations propres du système, et la force extérieure nulle, la corde discrétisée peut s'écrire comme un problème aux valeurs propres généralisé :

$$(-\omega^2 \mathcal{M} + \mathcal{K}) \mathcal{W} = 0, \quad (3.15)$$

dont les valeurs propres et vecteurs propres sont respectivement les pulsations propres au carré  $\omega^2$  et les déformées modales  $\Lambda$ . La figure 4 représente les déformées modales des deux premiers modes ainsi que les réactions aux appuis afin que le déplacement du premier et du dernier nœud soit nul.

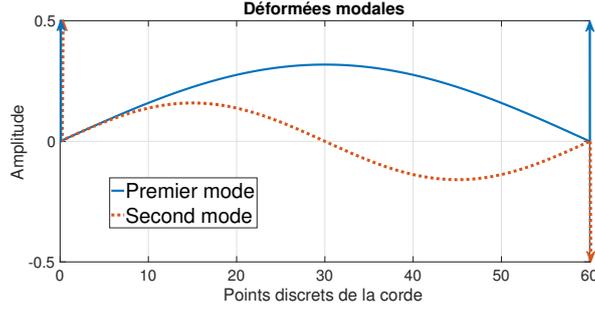


FIGURE 4 – *Déformées modales des deux premiers modes de la corde et réactions aux appuis*

### 3.4.2 Modification des éléments du système

Un autre moyen pour introduire des conditions de Dirichlet dans le système est de modifier la matrice de raideur  $\mathbb{K}$  et le vecteur de force  $\mathbb{F}$  sans augmenter le nombre de degrés de liberté, contrairement aux multiplicateurs de Lagrange. Soit, pour un système de taille  $4 \times 4$  et avec  $T_0$  et  $h$  de valeur unitaire, le système

$$\begin{bmatrix} \mathbb{K}_{11} & \mathbb{K}_{12} & \mathbb{K}_{13} & \mathbb{K}_{14} \\ \mathbb{K}_{21} & \mathbb{K}_{22} & \mathbb{K}_{23} & \mathbb{K}_{24} \\ \mathbb{K}_{31} & \mathbb{K}_{32} & \mathbb{K}_{33} & \mathbb{K}_{34} \\ \mathbb{K}_{41} & \mathbb{K}_{42} & \mathbb{K}_{43} & \mathbb{K}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_1 \\ \mathbb{F}_2 \\ \mathbb{F}_3 \\ \mathbb{F}_4 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

devient

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_{22} & \mathbb{K}_{23} & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_{32} & \mathbb{K}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{w}_1 \\ \mathbb{F}_2 - \mathbb{K}_{21}\tilde{w}_1 - \mathbb{K}_{24}\tilde{w}_4 \\ \mathbb{F}_3 - \mathbb{K}_{31}\tilde{w}_1 - \mathbb{K}_{34}\tilde{w}_4 \\ \tilde{w}_4 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

avec  $\tilde{w}_1$  et  $\tilde{w}_4$  les valeurs souhaitées des déplacements imposés. Les déplacements étant nuls aux extrémités de la corde,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_{22} & \mathbb{K}_{23} & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_{32} & \mathbb{K}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{F}_2 \\ \mathbb{F}_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Dans le cas dynamique, il est possible d'imposer des déplacements nuls en découplant les nœuds considérés. Pour ce faire, la matrice  $\mathbb{M}$  est affectée de la même manière que la matrice  $\mathbb{K}$ . Soit,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{22} & \mathbb{M}_{23} & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{32} & \mathbb{M}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{w}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_{22} & \mathbb{K}_{23} & 0 \\ 0 & \mathbb{K}_{32} & \mathbb{K}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{F}_2 \\ \mathbb{F}_3 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

La dynamique des nœuds aux conditions limites est alors

$$\ddot{w}_i + w_i = \mathbb{F}_i, \quad (3.20)$$

avec  $i$  l'indice du point considéré. Elle dépend donc des conditions initiales et des valeurs de forces attribuées. Dans notre cas, les conditions initiales sont toujours

nulles quelque soit le nœud. En revanche, pour que le déplacement reste nul au cours du temps en ces points spécifiques, il convient que  $f_i = 0$ .

### 3.4.3 Discussion sur les deux méthodes

Les deux méthodes précédentes, permettant l'introduction des conditions aux limites dans la formulation du problème, ont chacune leurs avantages et désavantages. Les multiplicateurs de Lagrange permettent d'obtenir les valeurs des réactions aux appuis mais le nombre de degrés de liberté du problème augmente et les propriétés des matrices sont modifiées (la matrice  $\mathbb{M}$  n'est plus inversible). L'autre technique a l'avantage de ne pas augmenter le nombre de degrés de liberté mais nous n'avons pas accès aux valeurs des réactions aux appuis et ne fonctionne que lorsque les conditions aux limites sont nulles aux nœuds considérés.

La seconde méthode est tout de même employée dans ce document puisqu'à partir de la partie 5, il est nécessaire d'inverser la matrice  $\mathbb{M}$  pour modéliser la corde dans le formalisme des SHP.

## 4 Systèmes Hamiltoniens à Ports

Cette section a pour but d'introduire le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports [17]. L'objectif de ce formalisme est de garantir *a priori* que la passivité du système est garantie au cours de la modélisation. Dans la première partie de cette section, un cas général de formulation d'un SHP à l'aide d'une représentation d'état est présenté. Les matrices d'interconnexion des différents composants (stockants, dissipatifs et de ports) sont identifiées et la conservation de l'énergie est assurée à partir de ces éléments. La seconde partie présente les notions géométriques sur lesquels le formalisme des SHP s'appuie. Les notions de flux et d'efforts sont ainsi abordées au travers de la structure de Dirac. La troisième partie applique les aspects théoriques à un exemple simple qu'est l'oscillateur mécanique amorti.

### 4.1 Cas général

Le formalisme des SHP est basé sur l'interconnexion d'éléments stockants, dissipatifs et de ports. Cette connexion est assurée par une matrice  $S$ , avec  $S = -S^T$ . La formulation dite algèbro-différentielle des SHP [31] s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \frac{dz}{dt} \\ d \\ -y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \nabla H \\ \mathfrak{z}(d) \\ u \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

La variable d'état  $z$  (éléments stockants) est ainsi liée au gradient de l'énergie du système  $H$  ( $\nabla$  correspond à l'opérateur gradient), l'amortissement  $d$  à une fonction  $\mathfrak{z}(d)$  et la sortie  $y$  à une entrée  $u$  (le produit  $y^T u$  quantifiant la puissance apportée au système).

Une autre formulation des SHP, gouvernée par la représentation d'état [17] peut être obtenue à partir du système (4.1). Soit,

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} &= (J(z) - R(z))\nabla H(z) + G(z)u \\ y &= G(z)^T \nabla H(z) \end{cases} \quad (4.2)$$

où la matrice  $J = -J^T$  est anti-symétrique,  $R = R^T \geq 0$  est une matrice positive et  $G$  permet de choisir sur quelle variable d'état la force est appliquée. La variation d'énergie de ce système au cours du temps s'exprime donc :

$$\frac{dE}{dt} = \nabla H(z)^T \frac{dz}{dt} = \underbrace{\nabla H(z)^T J(z) \nabla H(z)}_{P_c=0} - \underbrace{\nabla H(z)^T R(z) \nabla H(z)}_{Q \geq 0} + \underbrace{y^T u}_{P_{ext}}, \quad (4.3)$$

$P_c$  traduit les échanges de puissance entre les composants stockants et est nulle puisque  $J$  est anti-symétrique.  $Q$  représente la puissance dissipée et est positive ou nulle puisque  $R \geq 0$ . Le dernier terme  $P_{ext}$  correspond à la contribution de la puissance extérieure au système. Finalement, la variation d'énergie du système est soit nulle (cas conservatif), soit négative (cas dissipatif), mais jamais positive, puisqu'aucun système ne crée de l'énergie spontanément.

### 4.2 Structure de Dirac

Le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports s'appuie sur la notion de structure de Dirac ([17, §2.2],[32, §2.1.2], [33]), dont l'une des propriétés fondamentale est

la conservation de puissance. Cette structure permet de mettre en relation des flux  $\mathbf{f}$  et des efforts  $\mathbf{e}$  de sorte que la puissance totale  $\mathbf{e}^T \mathbf{f}$  soit nulle. En notant  $\mathcal{F}$  l'espace vectoriel contenant les éléments caractérisant les flux  $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$  et  $\mathcal{E} := \mathcal{F}^*$  l'espace dual de  $\mathcal{F}$  contenant les efforts  $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$ , il est possible de définir l'espace des variables de ports  $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$ . Il existe une forme bilinéaire  $\ll \gg$  définie par :

$$\ll (\mathbf{f}^a, \mathbf{e}^a), (\mathbf{f}^b, \mathbf{e}^b) \gg := \langle \mathbf{e}^a | \mathbf{f}^b \rangle + \langle \mathbf{e}^b | \mathbf{f}^a \rangle, \quad (4.4)$$

avec  $(\mathbf{f}^a, \mathbf{e}^a), (\mathbf{f}^b, \mathbf{e}^b) \in \mathcal{F} \times \mathcal{E}$  et  $\langle | \rangle$  le produit dual. Finalement, une structure de Dirac sur  $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$  est un sous-espace  $\mathcal{D} \subset \mathcal{F} \times \mathcal{E}$  tel que :

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^\perp, \quad (4.5)$$

où  $\mathcal{D}^\perp$  représente l'ensemble des éléments de  $\mathcal{F} \times \mathcal{E}$  orthogonaux à l'ensemble  $\mathcal{D}$ .

La variation d'énergie (4.3) du système (4.2) peut à présent être réécrite sous la forme :

$$\dot{H}(z) = \nabla H(z)^T \dot{z}(t) = \langle \nabla H(z) | \dot{z}(t) \rangle, \quad (4.6)$$

où  $\dot{z}$  est défini comme le vecteur des variables de flux  $\mathbf{f}$  et  $\nabla H(z)$  comme le vecteur des variables d'efforts  $\mathbf{e}$ . Avec ces nouvelles notations, la représentation d'état (4.2) s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{f} = (J - R)\mathbf{e} + Gu, \\ y = G^T \mathbf{e} \end{cases} \quad (4.7)$$

### 4.3 Exemple : Oscillateur mécanique amorti

Le système considéré, représenté en figure 5, est un oscillateur mécanique amorti constitué d'un ressort de raideur  $k$ , d'une masse  $m$ , d'un amortisseur  $c$ , excité par une force extérieure  $u$ .

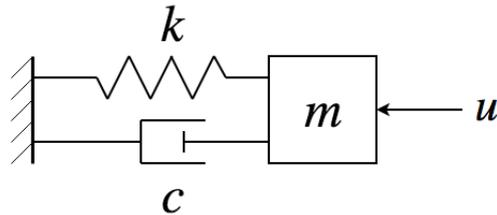


FIGURE 5 – Système masse-ressort-amortisseur linéaire soumis à une force extérieure

En reprenant les notations établies dans la représentation d'état (4.2),  $z = [q, p]^T$ , où  $q$  et  $p = m \frac{dq}{dt}$  correspondent respectivement à l'élongation du ressort et à la quantité de mouvement de la masse. L'énergie  $H(z)$  a pour expression  $H = \frac{1}{2} z^T B z$ , avec  $B = \text{diag}(k, m^{-1})$ . L'énergie potentielle du ressort s'exprime, selon la loi de Hooke, en fonction de l'élongation  $q$  du ressort. Dans le cas linéaire,

$$\begin{cases} \dot{q} &= -\mathbf{f}_k, \\ \mathbf{e}_k &= \frac{d}{dq} \left( \frac{1}{2} k q^2 \right), \end{cases} \quad (4.8)$$

avec  $-\mathbf{f}_k$  la vitesse du ressort au point d'attache avec la masse (le signe  $-$  vient du fait qu'on veut que le produit  $\mathbf{f}_k \mathbf{e}_k$  soit une puissance entrante) et  $\mathbf{e}_k$  la force de

rappel du ressort à ce même point. L'énergie cinétique s'exprime en fonction de la quantité de mouvement de la masse. Soit,

$$\begin{cases} \dot{p} &= -f_m, \\ \mathbf{e}_m &= \frac{d}{dp} \left( \frac{1}{2m} p^2 \right), \end{cases} \quad (4.9)$$

avec  $-f_m$  la force exercée sur la masse et où  $\mathbf{e}_m = \frac{p}{m}$  correspond à la vitesse de la masse. Les systèmes masse et ressort peuvent être couplés en appliquant le principe d'action-réaction de Newton :

$$\begin{cases} -f_k &= \mathbf{e}_m, \\ f_m &= \mathbf{e}_k. \end{cases} \quad (4.10)$$

Le système sans amortissement ni force extérieure s'exprime :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{bmatrix}}_f = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_J \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix}}_c \quad (4.11)$$

Selon [31], en présence d'amortissement et excité par une force extérieure, les matrices du système (4.2)  $\nabla H(z)$ ,  $J(z)$ ,  $R(z)$  et  $G(z)$  ont pour expressions :

$$\nabla H(z) = \begin{pmatrix} kq \\ m^{-1}p \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La simulation de ce système par une méthode numérique adaptée (cf. section 5.4, [31]) est représentée en figure 6 avec pour paramètres  $m = 0.1$  kg,  $k = 5$  N,  $c = 0.1$  N.m/s. Les conditions initiales sont  $z = [0, l_0]$  avec  $l_0 = 0.1$  m. Il y a absence de force extérieure hormis sur l'intervalle [2s, 5s] où  $F_{ext} = kl_0/2$  et sur l'intervalle [10s, 12s] où  $F_{ext} = kl_0$ .

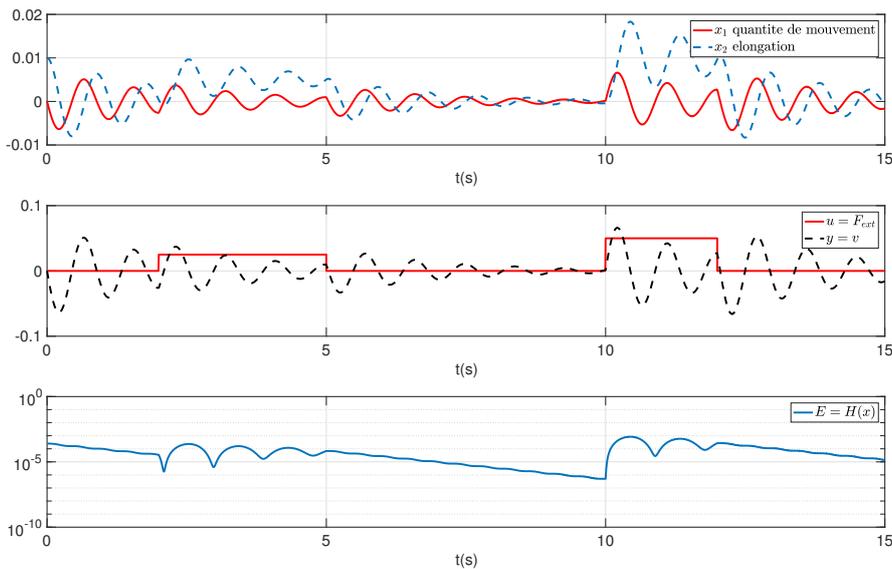


FIGURE 6 – Simulation d'un masse-ressort linéaire

## 5 Modélisation d'une corde linéaire par la méthode des éléments finis dans le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports

Après avoir détaillé dans les parties précédentes la méthode des éléments finis et le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports séparément, cette partie montre comment il est possible de discrétiser spatialement un système physique (une corde dans le cas présent) par la méthode des éléments finis et de l'exprimer dans le formalisme des SHP. La première partie de cette section montre comment l'énergie totale (l'hamiltonien) du système peut être formulée à partir de l'approximation par éléments finis. Le modèle de corde est ensuite écrit dans le formalisme des Systèmes à Ports. La dernière partie détaille la méthode numérique garantissant la passivité du système en temps discret.

### 5.1 Formulation faible du modèle linéaire

La formulation faible du problème linéaire a été réalisée dans la partie 3 (équation (3.11)) et nous en rappelons ici le résultat. En multipliant l'équation des cordes linéarisée par une fonction test  $v$  et en intégrant sur le domaine  $\Omega$ , la formulation faible a pour expression :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathbf{W}} + \mathbb{C}\dot{\mathbf{W}} + \mathbb{K}\mathbf{W} = \mathbb{F}. \quad (5.1)$$

### 5.2 Approximation des énergies

La dynamique d'une corde vibrante non amortie et sans force extérieure est régie par l'équation d'onde

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (5.2)$$

L'énergie totale de la corde est la somme des énergies cinétique et potentielle. Soit ([34, §4.2.1]),

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L \left( \mu \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + T_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right) dx. \quad (5.3)$$

En approximant le déplacement par  $w(x, t) = \Phi \mathbf{W}$ , l'énergie totale s'exprime

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L \mu (\Phi \dot{\mathbf{W}})^2 + T_0 (\mathbf{W} \Phi')^2 dx, \quad (5.4)$$

$$H = \frac{1}{2} \int_0^L \mu \dot{\mathbf{W}}^T \Phi^T \Phi \dot{\mathbf{W}} + T_0 \mathbf{W}^T \Phi'^T \Phi' \mathbf{W} dx,$$

$$H = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{W}}^T \int_0^L \mu \Phi \Phi^T dx \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W}^T \int_0^L T_0 \Phi'^T \Phi' dx \mathbf{W} \right),$$

L'énergie totale du système s'exprime finalement :

$$H = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{W}}^T \mathbb{M} \dot{\mathbf{W}} + \mathbf{W}^T \mathbb{K} \mathbf{W} \right) \quad (5.5)$$

### 5.3 Ecriture dans le formalisme des SHP

Le but est à présent de pouvoir lier la formulation faible du problème à son énergie  $H$  et de se rapprocher du formalisme hamiltonien en termes de flux et d'efforts. En notant l'état du système  $z = [\mathbf{W} \ \dot{\mathbf{W}}]$ , l'entrée  $u = \mathbb{F}$ , la sortie  $y = \dot{\mathbf{W}}$  et en définissant le vecteur des variables de flux  $\mathbf{f} = \frac{dz}{dt}$  et le vecteur des variables d'efforts  $\mathbf{e} = \nabla H = [\mathbb{K}\mathbf{W} \ \mathbb{M}\dot{\mathbf{W}}]^T$ , le système peut s'écrire dans la même configuration que (4.2). Soit,

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{W}} \\ \ddot{\mathbf{W}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}=\dot{z}} = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{M}^{-1} \\ -\mathbb{M}^{-1} & 0 \end{bmatrix}}_J - \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1} \end{bmatrix}}_R \right) \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{K}\mathbf{W} \\ \mathbb{M}\dot{\mathbf{W}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}=\nabla H} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{M}^{-1} \end{bmatrix}}_G \underbrace{\mathbb{F}}_u \\ \underbrace{\dot{\mathbf{W}}}_y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \mathbb{M}^{-1} \end{bmatrix}}_{G^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbb{K}\mathbf{W} \\ \mathbb{M}\dot{\mathbf{W}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{e}=\nabla H} \\ + \text{Conditions aux limites comprises dans } \mathbb{M} \text{ et } \mathbb{K} \text{ (cf. 3.4)} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

Le système (5.6) représente ainsi la corde vibrante discrétisée par éléments finis comme un Système Hamiltonien à Ports.

### 5.4 Méthode numérique à passivité garantie

L'intérêt principal des SHP est de garantir la passivité du système, c'est à dire qu'il n'y a pas création d'énergie spontanée. Pour simuler numériquement le système dynamique (5.6), une version discrète du gradient de l'hamiltonien doit être formulée. Une approche possible est de s'appuyer sur un schéma d'Euler ([31], [22]) restituant une version discrète de la règle de la dérivation en chaîne pour la fonction composée  $E = H \circ z$ . Soit,

$$\frac{\delta E(t, \delta t)}{\delta t} = \nabla_d H(z, \delta z(t, \delta t))^T \frac{\delta z(t, \delta t)}{\delta t}, \quad (5.7)$$

avec  $\delta t$  le pas temporel,  $\nabla_d H(z, \delta z(t, \delta t))$  le gradient discret du hamiltonien  $H$  et où  $\frac{\delta z(t, \delta t)}{\delta t}$  approxime le vecteur  $z(t)$  par différenciation décentrée avancée, tel que

$$\frac{\delta z(t, \delta t)}{\delta t} = \frac{z(t + \delta t) - z(t)}{\delta t}. \quad (5.8)$$

Dans le cas d'un hamiltonien à variables séparées de la forme  $H(z) = \sum_{n=1}^N H_n(z_n)$ , le gradient discret associé s'exprime

$$[\nabla_d H(z, \delta z)]_n = \begin{cases} \frac{H_n(z_n + \delta z_n) - H_n(z_n)}{\delta z_n} & \text{si } \delta z_n \neq 0, \\ H'_n(z_n) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.9)$$

En utilisant cette définition avec  $H = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{W} \\ \dot{\mathbf{W}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{M} \end{pmatrix} (z)$ , le gradient discret d'un hamiltonien quadratique régénère la méthode du point milieu :

$$\nabla_d H(z, \delta z) = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{M} \end{pmatrix} \frac{\frac{1}{2}(z + \delta z)^2 - \frac{1}{2}z^2}{\delta z}.$$

En posant  $B = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{M} \end{pmatrix}$ ,

$$\nabla_d H(z, \delta z) = B \frac{\frac{1}{2}z^2 + z\delta z + \frac{1}{2}\delta z^2 - \frac{1}{2}z^2}{\delta z},$$

$$\nabla_d H(z, \delta z) = B \left( z + \frac{\delta z}{2} \right) = B \begin{pmatrix} q + \delta q/2 \\ p + \delta p/2 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

En remplaçant  $\nabla_d H(z, \delta z)$  par son expression (5.10) dans la première équation du système (4.2), on obtient :

$$\frac{\delta z}{\delta t} = (J - R)B \left( z + \frac{\delta z}{2} \right) + Gu,$$

$$\delta z = \left[ (J - R)B \left( z + \frac{\delta z}{2} \right) + Gu \right] \delta t,$$

$$\delta z - \frac{\delta t}{2} (J - R)B \delta z = \left( (J - R)Bz + Gu \right) \delta t.$$

A chaque instant  $k$ , l'expression de la variation  $\delta z$  est de la forme :

$$\delta z(k) = \left( I - \frac{\delta t}{2} D \right)^{-1} \left( Dz(k) + Gu(k) \right) \delta t, \quad (5.11)$$

avec  $D = (J - R)B$ . La résolution est explicitée dans l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1 :**

---

**Données :**  $J, R, B, G, x_0, u_k$

**Résultats :**  $z(k), y(k)$

**1** pour  $k = 0$  à  $k_t$  faire

**2**    calculer  $\delta z(k)$  avec l'équation (5.11);

**3**     $z(k+1) \leftarrow z(k) + \delta z(k)$  ;

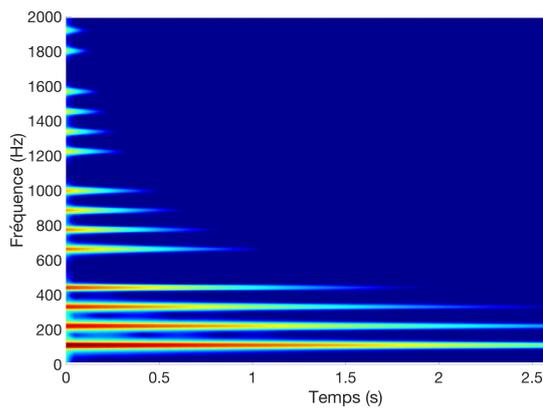
**4**     $y(k) \leftarrow G^T \nabla H_d(z(k))$  ;

---

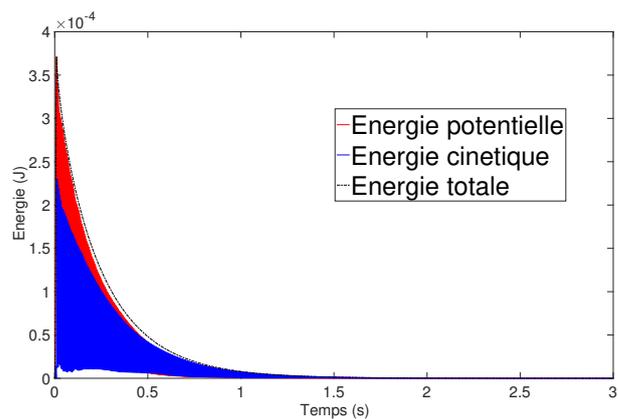
## 5.5 Simulation numérique

Une fois la résolution numérique effectuée en employant le gradient discret décrit en section 5.4, l'état  $z(k)$  et la sortie  $y(k)$  de chaque nœud sont déterminés pour chaque instant  $k$ . A titre d'exemple, la représentation temps-fréquence de la sortie du 3ème nœud d'une corde excitée par une force ponctuelle extérieure (détaillée en Annexe 9.1) est affichée en figure 7a. La corde, discrétisée en 60 éléments, d'une longueur de  $L = 0.6$  m, est accordée à  $f_0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T_0}{\mu}} = 110$  Hz et pincée au cinquième de sa longueur. Les valeurs des amortissements fluide et structurel sont choisies empiriquement [35] tels que  $\alpha = 3\mu \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  et  $\kappa = 0.01\mu \text{ kg.m.s}^{-1}$ . La figure 7b représente les énergies du système, et on remarque que l'énergie totale décroît au cours du temps dû à l'amortissement de la corde.

Les figures 8a et 8b représentent le cas où la corde est dépourvue d'amortissement, soit  $\alpha = \kappa = 0$ . L'énergie totale  $H$ , représentée en figure 8b, est constante dans ce cas, prouvant ainsi la stabilité de la simulation qui ne crée pas d'énergie spontanément.

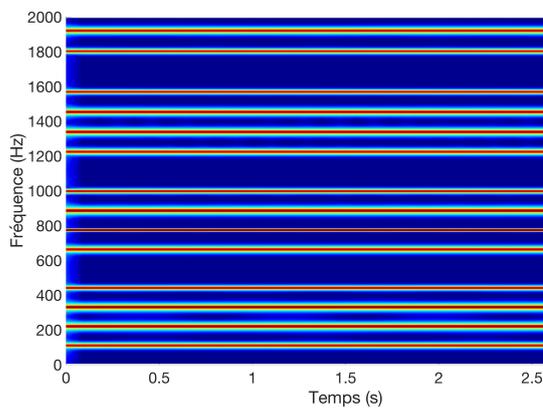


(a) Représentation temps-fréquence de la vitesse du noeud n° 3

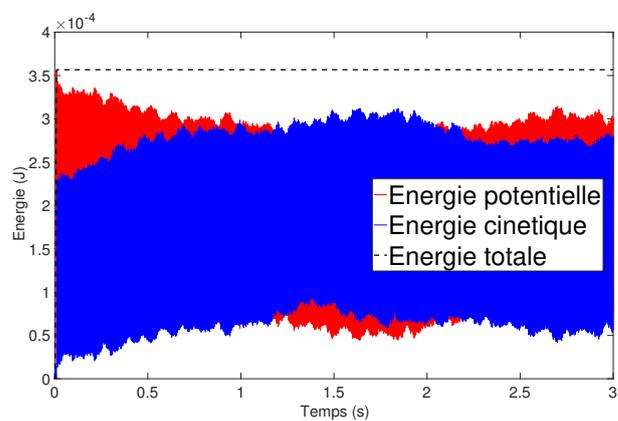


(b) Energies du système

FIGURE 7 – Cas avec un amortissement  $\mathcal{C}$  non nul



(a) Représentation temps-fréquence de la vitesse du noeud n° 3



(b) Energies du système

FIGURE 8 – Cas avec un amortissement  $\mathcal{C}$  nul

## 6 Extension au cas de la corde non linéaire

### 6.1 Modèle de Kirchhoff-Carrier

Le modèle linéaire de corde vibrante étudié dans les sections précédentes propose une bonne approximation du comportement du système tant que les amplitudes de déplacement sont faibles. Lorsque celles-ci deviennent grandes, ce modèle n'est plus suffisant, ne prenant pas en compte les variations de tension dues aux variations de longueur de la corde. A partir de l'équation des cordes (2.4) développée dans la section 2, il est possible de prendre en compte ce phénomène. Une autre écriture de l'équation (2.4) est possible en prenant en compte la non-linéarité de manière globale (et non locale comme c'est le cas dans l'équation (2.4)) et s'exprime [36] :

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \overbrace{\left( T_0 + \frac{EA}{2L} \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right)}^{\text{Tension globale}} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (6.1)$$

terme non linéaire

La tension totale est constituée de la tension statique  $T_0$  (équivalente au cas linéaire) sommée à un terme non linéaire qui traduit la variation de tension dans la corde.

### 6.2 Formulation faible du modèle non linéaire

La formulation faible du problème linéaire s'obtient de la même manière que pour le cas linéaire, à savoir en multipliant par une fonction  $v$  test et en intégrant sur le domaine :

$$\int_0^L \left[ \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left( 1 + \epsilon \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] v dx = 0, \quad (6.2)$$

avec  $\epsilon = \frac{EA}{2LT_0}$ . En notant  $\mathcal{T}(t) = 1 + \epsilon \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$ , l'intégration par parties du terme dépendant de la dérivée spatiale d'ordre deux a pour expression :

$$\mathcal{T}(t) \int_0^L T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} v dx = \mathcal{T}(t) \left[ T_0 \frac{\partial w}{\partial x} v \right]_0^L - \mathcal{T}(t) \int_0^L T_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx. \quad (6.3)$$

$v$  satisfaisant les conditions aux limites, soit  $v(0) = v(L) = 0$ , la formulation faible s'exprime finalement :

$$\int_0^L \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v dx + \mathcal{T}(t) \int_0^L T_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = 0. \quad (6.4)$$

Dans la section 3.2, il a été montré que le déplacement  $w(x, t)$  pouvait être approximé par interpolation polynomiale à l'aide de fonctions de bases tel que  $w(x, t) \approx \mathbf{\Phi}^T \mathbf{W}$  et que  $v \approx \mathbf{\Phi}^T \mathbf{V}$ . En utilisant ces approximations, les termes linéaires peuvent se mettre sous les formes :

$$\int_0^L \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v dx = \mathbf{V}^T \int_0^L \mu \mathbf{\Phi} \mathbf{\Phi}^T dx \ddot{\mathbf{W}} = \mathbf{V}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{W}}, \quad (6.5)$$

$$\int_0^L T_0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \mathbf{V}^T \int_0^L T_0 \mathbf{\Phi}' \mathbf{\Phi}'^T dx \mathbf{W} = \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{W}. \quad (6.6)$$

Le terme non linéaire  $\mathcal{T}(t)$ , sous les mêmes approximations, s'exprime [37] :

$$\mathcal{T}(t) = 1 + \epsilon \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = 1 + \epsilon \int_0^L (\Phi'^T \mathbf{W})^2 dx, \quad (6.7)$$

$$\mathcal{T}(t) = 1 + \epsilon \int_0^L \mathbf{W}^T \Phi' \Phi'^T \mathbf{W} dx,$$

$$\mathcal{T}(t) = 1 + \frac{\epsilon}{T_0} \mathbf{W}^T \int_0^L T_0 \Phi' \Phi'^T dx \mathbf{W},$$

$$\mathcal{T}(t) = 1 + \frac{\epsilon}{T_0} \mathbf{W}^T \mathbb{K} \mathbf{W}, \quad (6.8)$$

où les matrices  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$  sont les matrices globales issues de l'assemblage des matrices élémentaires  $M_e$  et  $K_e$  définies à la section 3.2. La méthode des éléments finis appliquée au modèle de Kirchhoff-Carrier permet d'écrire :

$$\mathbf{V}^T \mathbb{M} \ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{V}^T \left( 1 + \frac{\epsilon}{T_0} \mathbf{W}^T \mathbb{K} \mathbf{W} \right) \mathbb{K} \mathbf{W} = 0. \quad (6.9)$$

En factorisant par  $\mathbf{V}^T$ , en introduisant le facteur d'amortissement et la force extérieure de la même manière que dans le cas linéaire et en posant  $\beta = \frac{\epsilon}{T_0}$ , le modèle non linéaire s'exprime finalement :

$$\mathbb{M} \ddot{\mathbf{W}} + \mathbb{C} \dot{\mathbf{W}} + \left( 1 + \beta \mathbf{W}^T \mathbb{K} \mathbf{W} \right) \mathbb{K} \mathbf{W} = \mathbb{F}. \quad (6.10)$$

### 6.3 Approximation des énergies du modèle non linéaire

Les énergies cinétique et potentielle d'une corde vibrante modélisée par le modèle de Kirchhoff-Carrier ont pour expressions :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_0^L \mu \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx, \quad (6.11)$$

$$E_{pNL} = \left( 1 + \epsilon \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \right) \frac{1}{2} \int_0^L T_0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (6.12)$$

L'énergie cinétique est identique au cas linéaire. Dans le cas non linéaire, seule l'énergie potentielle est modifiée en raison du facteur de tension variable. En approximant le déplacement par  $w(x, t) \approx \Phi^T \mathbf{W}$ , l'énergie cinétique a pour expression

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{W}}^T \mathbb{M} \dot{\mathbf{W}}, \quad (6.13)$$

et l'énergie potentielle non quadratique s'exprime

$$E_{pNL} = \left( 1 + \epsilon \int_0^L (\Phi'^T \mathbf{W})^2 dx \right) \frac{1}{2} \int_0^L T_0 (\Phi'^T \mathbf{W})^2 dx, \quad (6.14)$$

$$E_{pNL} = \left( 1 + \epsilon \int_0^L \mathbf{W}^T \Phi' \Phi'^T \mathbf{W} dx \right) \frac{1}{2} \int_0^L T_0 \mathbf{W}^T \Phi' \Phi'^T \mathbf{W} dx,$$

$$E_{pNL} = \left( 1 + \frac{\epsilon}{T_0} \mathbf{W}^T \mathbb{K} \mathbf{W} \right) \frac{1}{2} \mathbf{W}^T \mathbb{K} \mathbf{W}. \quad (6.15)$$

L'énergie totale du modèle non linéaire étant la somme des énergies cinétique et potentielle :

$$H_{NL} = \frac{1}{2} \left( \dot{\mathbf{W}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{W}} + \left( 1 + \beta \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W} \right) \frac{1}{2} \mathbf{W}^T \mathbf{K} \mathbf{W} \right). \quad (6.16)$$

#### 6.4 Gradient discret de l'hamiltonien non quadratique

Contrairement au cas linéaire, l'hamiltonien du problème non linéaire défini à l'équation (6.16) n'est pas à variables séparées. L'expression de la version discrète du gradient de l'hamiltonien proposée à l'équation (5.9) n'est donc plus valable. D'un point de vue général, la version discrète de  $\nabla H(z)^T \dot{z}$  doit être égale à la variation d'énergie entre deux instants successifs ([38], [39]). Soit,

$$\nabla_d H(z, \delta z)^T \delta z = H(z + \delta z) - H(z), \quad (6.17)$$

avec  $\nabla_d H(z, \delta z)$  la version discrète du gradient de l'hamiltonien. Pour un système de dimension  $N$ , la variation d'énergie peut se décomposer comme  $N$  sommes tel que

$$\begin{aligned} H(z + \delta z) - H(z) &= H(z_1 + \delta z_1, z_2 + \delta z_2, \dots, z_N + \delta z_N) - H(z_1, z_2 + \delta z_2, \dots) \\ &\quad + H(z_1, z_2 + \delta z_2, \dots) - H(z_1, z_2, z_3 + \delta z_3, \dots) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + H(z_1, \dots, z_{N-1}, z_N + \delta z_N) - H(z_1, z_2, \dots, z_N) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Cette formulation dépend cependant de l'ordre d'indexation  $\chi$  des variables d'état de tel sorte que

$$[\nabla_d H(z, \delta z)]_\chi = \left[ \begin{array}{c} \frac{H(z_1 + \delta z_1) - H(z_1, z_2 + \delta z_2, \dots)}{\delta z_1} \\ \dots \\ \frac{H(z_1, \dots, z_{N-1}, z_N + \delta z_N) - H(z_1, \dots, z_{N-1}, z_N)}{\delta z_N} \end{array} \right]. \quad (6.19)$$

Finalement, une expression unique du gradient discret est retenue en moyennant la somme des chemins par le nombre de permutations possibles. Soit,

$$\nabla_d H(z, \delta z) = \frac{1}{N!} \sum_{\chi} [\nabla_d H(z, \delta z)]_\chi \quad (6.20)$$

Cette définition du gradient discret est ainsi valable dans le cas linéaire et non linéaire. (Il a été prouvé dans [39, A1], que ce gradient discret régénérerait la méthode du point milieu lorsque le Hamiltonien est quadratique).

## 6.5 Résolution et simulation numérique

La représentation d'état discrète du système à résoudre pour chaque instant  $k$  est de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dz(k)}{dt} &= (J - R)\nabla H_d(z(k), \delta z(k)) + Gu(k) \\ y(k) &= G(z)^T \nabla H(z(k), \delta z(k)) \end{cases} \quad (6.21)$$

Par rapport au cas linéaire, seul l'hamiltonien est modifié par une tension additionnelle variable dans le temps comme expliqué à la section précédente. Pour rappel, les autres matrices ont pour expressions :

$$J = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{M}^{-1} \\ -\mathbb{M}^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{M}^{-1}\mathbb{C}\mathbb{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbb{M}^{-1} \end{bmatrix}, \quad u = \mathbb{F}, \quad (6.22)$$

où  $J$  est bien antisymétrique et  $R$  est positive ou nulle.

La définition du gradient discret émise à l'équation (6.20) n'est pas aisée à calculer, surtout dans un but d'une synthèse sonore en temps réel, puisqu'elle dépend directement du nombre d'éléments employés pour discrétiser la corde qui peut être élevé. Afin de pallier à ce problème, il est possible de trouver une nouvelle expression de ce gradient en profitant de la structure de l'énergie potentielle. En notant  $V = \mathbf{W}^T \mathbb{K} \mathbf{W}$  l'énergie potentielle du cas linéaire, celle du cas non linéaire peut s'écrire

$$E_{pNL} = F \circ V(\mathbf{W}), \quad \text{avec } F(V) = V + \beta V^2. \quad (6.23)$$

En appliquant la règle de dérivation en chaîne au gradient de l'hamiltonien, celui-ci s'exprime [22] :

$$\nabla_d H(z, \delta z) = \begin{bmatrix} \nabla_d F(V, \delta V) \nabla_d V(\mathbf{W}, \delta \mathbf{W}) \\ \mathbb{M} \dot{\mathbf{W}} \end{bmatrix}, \quad (6.24)$$

avec  $\delta V = \nabla_d V(\mathbf{W}, \delta \mathbf{W})^T \delta \mathbf{W}$ ,  $\nabla_d F(V, \delta V) = 1 + 2\beta(V + \delta V/2)$  et  $\nabla_d V(\mathbf{W}, \delta \mathbf{W}) = \mathbb{K}(\mathbf{W} + \delta \mathbf{W}/2)$

La méthode de résolution consiste à trouver le point fixe  $\delta z$  en appliquant une méthode itérative (d'indice  $i$ ) à chaque instant  $k$  permettant de trouver la modulation de tension comprise dans le facteur  $\nabla_d F(V, \delta V)$ . L'algorithme pour chaque pas de temps est le suivant [22] :

- **A.** Calculer  $\mathfrak{F}(i=0) = \nabla_d F(V, 0)$  ;
- **B(i).** Calculer  $\delta z^{(i)}$  avec (6.21) dans lequel  $\nabla_d F(V, \delta V)$  est remplacé par  $\mathfrak{F}(i)$  ;
- **C(i).** Calculer  $\delta V^{(i)} = \nabla_d V(\mathbf{W}, \delta \mathbf{W}^{(i)})^T \delta \mathbf{W}^{(i)}$  ;
- **D(i).** Calculer  $\mathfrak{F}(i+1) = \nabla_d F(V, \delta V^{(i)})$  ;
- **E(i).** Si  $\mathfrak{F}(i+1) - \mathfrak{F}(i) < \text{seuil}$ , la première équation du système (6.21) est approximée par  $\delta z = \delta z^{(i)}$ , sinon on incrémente  $i$  et on reprend à l'étape **B(i)**.

## 6.6 Résultats

Les simulations sont réalisées avec une corde discrétisée en 40 éléments, fixée à ses extrémités, de longueur  $L = 0.65$  m, de diamètre  $d = 0.79$  mm, de masse volumique  $\rho = 7800$  kg.m<sup>-3</sup>, de module d'Young  $E = 210$  GPa. La corde est excitée ponctuellement au cinquième de sa longueur par une force excitatrice simulant l'action du musicien, c'est à dire une rampe jusqu'à une valeur  $F_{max}$  sur une durée de 10 ms. La valeur de  $F_{max}$  est modifiée en fonction de la hauteur de lâcher choisie (cf 9.1). Les représentations temps-fréquences de la vitesse d'un des nœuds affichées sur les figures 9a, 9b et 10a permettent d'observer les effets non linéaires dus aux différentes hauteurs de lâcher. La modulation de tension crée un *pitch glide effect* qui se traduit par une augmentation des fréquences propres de la corde lorsque son déplacement est grand. Les fréquences tendent vers les valeurs du cas linéaire lorsque l'énergie de la corde diminue en raison de l'amortissement. De plus, un enrichissement spectral est présent. Le cas linéaire prévoit que l'harmonique multiple du point de pincement (le cinquième harmonique ici) est absent. Dans le cas non linéaire, l'énergie de cette harmonique est d'autant plus grande que le déplacement est important. La figure 10b représente les énergies du système. La corde étant amortie, l'énergie totale décroît au cours du temps.

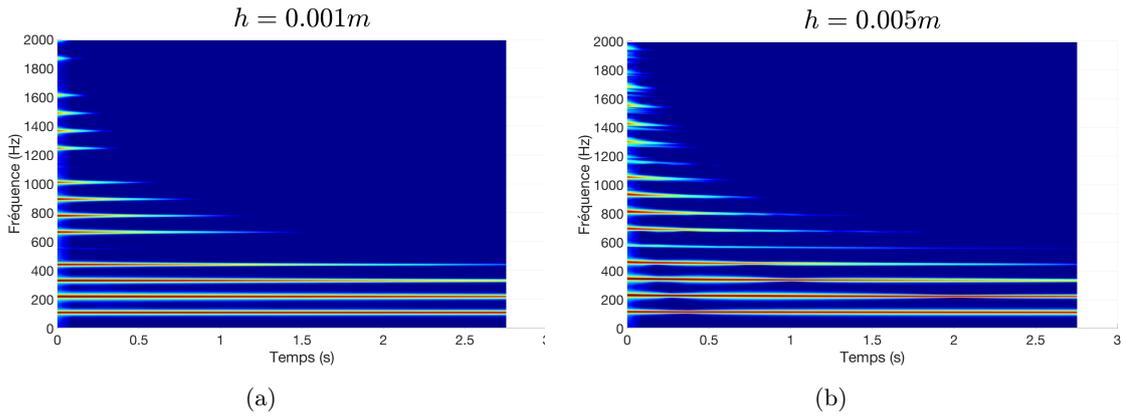


FIGURE 9 – Spectrogramme de la vitesse de la corde pour différentes hauteurs de lâcher

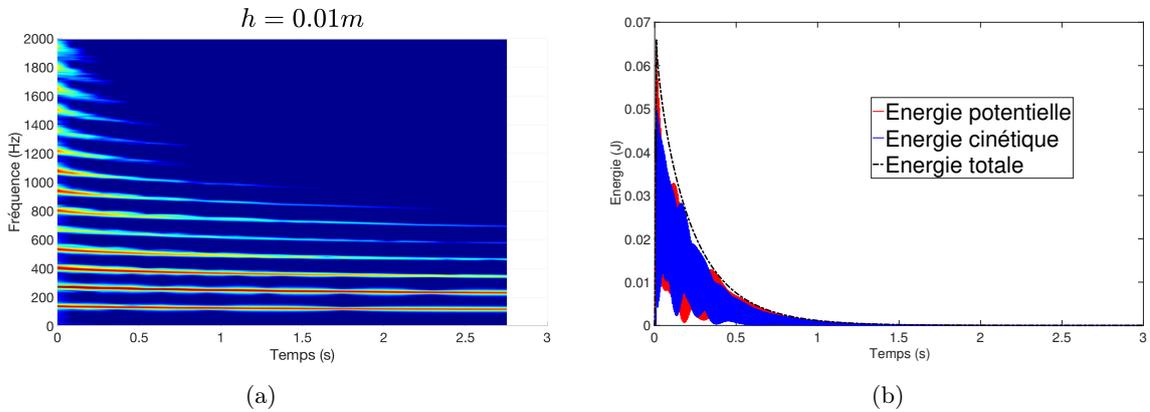


FIGURE 10 – A gauche, spectrogramme de la vitesse de la corde pour  $h = 0.01$  m. A droite, les énergies du système lorsque  $h = 0.01$  m.

La figure 11 correspond aux énergies cinétique, potentielle et totale de la corde lorsque celle-ci est dépourvue d'amortissement et lâchée à une hauteur  $h = 0.01$  m. L'énergie totale est constante, prouvant ainsi que la méthode de résolution garantit aussi la passivité du système lorsque celui-ci est non linéaire.

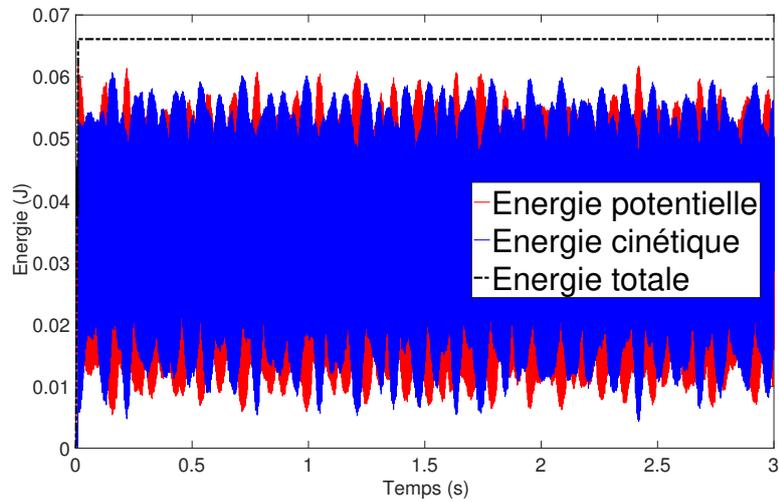


FIGURE 11 – *Energies du modèle de corde non linéaire avec un amortissement nul*

## 7 Vers un démonstrateur en temps-réel

La synthèse sonore par modèle physique permet de modéliser des objets d'une manière fine mais au prix d'un temps de calcul important. A l'heure actuelle, peu d'instruments virtuels sont modélisés dans ce paradigme. Modalys et les produits développés par les sociétés AAS (Applied Acoustics Systems, [40]), MODARTT (Models and Data for Arts and Technology, [41]) ou encore ARTURIA [42] font alors figure d'exception.

En vue d'une future intégration de résonateurs non linéaires dans Modalys, un démonstrateur en temps-réel de la corde de Kirchhoff-Carrier est envisagé. Il s'agit donc de pouvoir traduire le script MATLAB [43] dans un langage compilé. Modalys étant codé en C++, notre choix se positionne sur ce langage. De plus, afin de fournir à l'utilisateur un outil simple de démonstration, le code C++ est intégré au framework JUCE pour permettre de contrôler les paramètres du modèle via une interface graphique.

### 7.1 Le framework JUCE

L'environnement JUCE [44], créé par Julian Storer en 2004, est un *framework* multi-plateforme écrit en C++ permettant de concevoir des applications audio (VST, AU, AAX, RTAS, Standalone). De plus, la bibliothèque JUCE dispose de nombreuses classes permettant la création rapide d'interfaces graphiques.

#### 7.1.1 Application audio Standalone

Dans le cadre de ce projet, afin de fournir un démonstrateur en temps-réel, nous créons à partir de la bibliothèque JUCE une application audio Standalone. A la différence des plug-ins audio (VST, AU, AAX, RTAS) utilisés au sein de logiciels *host* tels que les DAW (Digital Audio Workstation), une application Standalone est un exécutable ne nécessitant aucun autre logiciel pour fonctionner. Les modèles JUCE d'application audio Standalone sont initialement composés de trois fichiers :

- `MainComponent.h`
- `MainComponent.cpp`
- `Main.cpp`

L'implémentation de notre projet se réalise dans les deux fichiers `MainComponent`. Le *header* `MainComponent.h` contient les attributs et les prototypes de la classe `MainComponent` et le fichier source `MainComponent.cpp` contient la définition des méthodes et leur implémentation. `MainComponent` hérite de la classe `AudioAppComponent` qui possède par défaut trois fonctions virtuelles pures :

- `AudioAppComponent::prepareToPlay()`
- `AudioAppComponent::releaseResources()`
- `AudioAppComponent::getNextAudioBlock()`

Dans le cas d'une simulation en temps-différé, le temps de simulation est initialisé dans le script et l'ensemble des calculs est effectués sur cette période. A l'inverse, dans le cas d'une application temps-réel, il est inenvisageable de réaliser l'ensemble des opérations avant de les envoyer à l'utilisateur. Lorsque le signal audio est généré à une certaine fréquence d'échantillonnage (44.1 kHz par exemple), il est stocké au fur et à mesure dans des blocs appelés *buffers* d'une taille spécifique (512 échantillons

par exemple). A chaque fois que le *buffer* est rempli, ses valeurs sont transmises à la carte son qui les envoie à l'utilisateur. La fonction `getNextAudioBlock()` permet de continuer ce processus tant que l'application est ouverte. A chaque fois que le *buffer* a transmis ses valeurs, la fonction regarde s'il y a encore des valeurs qui lui parviennent, et si oui, le *buffer* se remplit de nouveau avec les échantillons entrants. La fonction `prepareToPlay()` est appelé au début de la simulation avant que `getNextAudioBlock()` ne soit appelée et permet d'initialiser les variables déclarées dans `MainComponent.h`. Pour finir, la fonction `releaseResources()` est appelée lorsqu'il n'y plus d'échantillons à traiter (donc lorsque `getNextAudioBlock()` n'est plus appelée) et libère la mémoire allouée lors de la simulation.

L'un des avantages de JUCE est de permettre la conception d'interfaces graphiques. Dans le cas d'une application audio, les éléments de l'interface sont aussi implémentés dans la classe `MainComponent`. Ils sont déclarés dans `MainComponent.h` (par exemple pour un curseur : `Slider` `nomDuSlider`) et initialisés dans le constructeur `MainComponent()` situé dans le fichier `MainComponent.cpp`. A titre d'exemple, un curseur réalisé avec JUCE est présenté en figure 12.

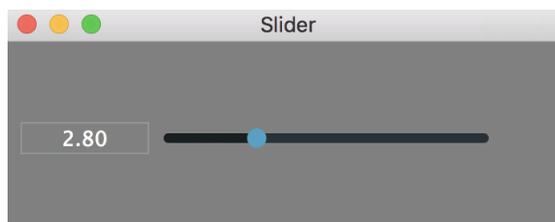


FIGURE 12 – Curseur réalisé avec JUCE

Les éléments graphiques de JUCE nous permettent alors de pouvoir modifier les valeurs des paramètres que l'on veut contrôler en temps-réel sans avoir à recompiler le projet pour un nouveau jeu de valeurs.

## 7.2 Eigen : une bibliothèque d'algèbre linéaire

Pour rappel, dans le cas linéaire ou non linéaire, le système à résoudre est de la forme :

$$\begin{cases} \frac{dz(k)}{dt} &= (J - R)\nabla H_d(z(k), \delta z(k)) + Gu(k) \\ y(k) &= G(z)^T \nabla H(z(k), \delta z(k)), \end{cases} \quad (7.1)$$

où l'ensemble des paramètres sont des vecteurs ou des matrices. La conversion du script MATLAB en C++ nécessite donc de pouvoir écrire et réaliser des opérations d'algèbre linéaire dans ce langage. Après une étude de différentes bibliothèques open-source d'algèbre linéaire, la bibliothèque Eigen [45] s'avère être la plus adaptée tant du point de vue de la performance (cf. Annexe 9.2) que du point de vue de la simplicité d'adaptation par rapport au script MATLAB. En effet, la documentation de cette bibliothèque fournit une transcription entre les fonctions propres à MATLAB et celles propres à Eigen [46]. Le tableau 1 ci-dessous renseigne certaines des transcriptions qui nous sont le plus utiles dans ce projet.

Fonctions	MATLAB	Eigen
Création d'un vecteur nul A de dimension $n$	$A = \text{zeros}(n,1)$	$A = \text{VectorXd::Zero}(n)$
Création d'une matrice nulle A de dimension $n \times m$	$A = \text{zeros}(n,m)$	$A = \text{MatrixXd::Zero}(n,m)$
Matrice C égale au produit matricielle de 2 matrices A et B	$C=A*B$	$C=A*B$
Inverse de la matrice C	$\text{inv}(C)$	$C.\text{inverse}()$

Tableau 1 – *Transcriptions MATLAB/Eigen*

### 7.3 Implémentations et résultats

Les implémentations des modèles de corde linéaire et non linéaire sont effectuées sur un Macbook Pro 15 pouces équipé d'un processeur Intel Core i7 cadencé à 2.9 GHz (Turbo Boost jusqu'à 3.8 GHz) et de 16 Go de mémoire vive LPDDR3 à 2133 MHz.

Comme expliqué dans la section 7.1.1, la classe `MainComponent` est dotée de trois méthodes virtuelles pures. L'ensemble des variables sont initialisées dans la fonction `prepareToPlay()` et les algorithmes de résolution temporelle sont implémentés dans la fonction `getNextAudioBlock()`. La fréquence d'échantillonnage est par défaut égale à 44.1 kHz et la taille du buffer est de 512 échantillons.

Le modèle linéaire ne nécessitant que peu de calculs à chaque pas de temps, son utilisation en temps-réel est possible. Pour une corde discrétisée en 40 éléments, le CPU atteint 60% d'activité. D'un autre côté, la méthode numérique employée dans le modèle non linéaire nécessite beaucoup plus de calculs à chaque pas de temps puisque qu'il est nécessaire de calculer par itération la modulation de tension. De ce fait, le temps-réel n'est possible que pour un nombre très restreint d'éléments (moins de 5) et le son de corde perçu n'est alors pas réaliste.

## 8 Conclusion et perspectives

Le logiciel de synthèse sonore Modalys permet de concevoir des instruments virtuels à partir de résonateurs linéaires. Afin d'étendre les possibilités offertes par ce logiciel et accroître le réalisme sonore des objets utilisés, l'intégration de résonateurs non linéaires est envisagée. Une investigation de cette intégration a été réalisée au cours de ce stage. Le problème majeur des systèmes non linéaires est leur instabilité numérique due aux méthodes de résolution temporelle employées. Afin de pallier à ce problème, les travaux de l'équipe S3AM s'orientent depuis quelques années vers le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports. Reposant sur une approche énergétique, ce formalisme permet de garantir le bilan de puissance à temps discret de systèmes non linéaires et ainsi assurer *a priori* la stabilité de la simulation numérique.

Ce stage a permis de rappeler l'établissement du modèle non-linéaire de corde vibrante. A partir de ce modèle, la méthode des éléments finis a été présentée dans un premier temps pour le cas linéarisé conduisant à un modèle de dimension finie. De plus, les énergies du systèmes ont elles aussi été discrétisées à partir de cette méthode. Le formalisme des Systèmes Hamiltoniens à Ports a permis de lier l'énergie totale du système à la formulation établie par la méthode des éléments finis. L'introduction du gradient discret a rendu possible la mise en place d'une méthode numérique garantissant la passivité du système linéaire. L'approximation par la méthode des éléments finis a ensuite été appliquée de la même manière au modèle de corde de Kirchhoff-Carrier. L'écriture du modèle non linéaire diffère par l'expression de son énergie potentielle non quadratique traduisant une modulation de tension dans la corde lorsque les déplacements sont grands. Grâce à la mise en place d'une seconde méthode numérique, la simulation du modèle de corde non linéaire a été rendue possible et sa stabilité assurée. En vue d'une application temps-réel, les modèles ont été transcrits dans le langage C++. Cependant, même si le modèle linéaire est utilisable en temps-réel, le modèle non-linéaire est trop coûteux en temps de calcul dès que le nombre d'éléments augmente.

A l'issue de ce stage, certaines perspectives sont envisageables. La modélisation d'objets non linéaires de dimensions supérieures (2D, 3D) tels que les membranes ou les poutres pourrait être mise en place de manière identique à ce qui a été fait pour le modèle de corde en une dimension. Dans le cas d'objets à géométries complexes, il serait intéressant d'employer les logiciels standards d'éléments finis (ANSYS, Free-FEM, ...) pour en extraire les matrices de masse et de raideur. Il serait aussi intéressant d'imposer des conditions aux limites quelconques et de pouvoir obtenir les réactions aux limites. Cette amélioration permettrait ainsi d'interconnecter plusieurs sous-structures pour en obtenir une globale. Un autre point à explorer est la mise en œuvre d'une nouvelle méthode numérique dans le cas non linéaire car celle-ci est trop coûteuse en temps de calcul. De plus, une optimisation des calculs est possible. En effet, certaines des matrices comportent de nombreuses valeurs nulles et de nombreux calculs réalisés ne sont alors pas nécessaires.

## 9 Annexes

### 9.1 Annexe 1 : Force extérieure

#### Modèle linéaire

Pour rappel, après discrétisation par la méthode des éléments finis, le système linéaire s'exprime :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{W}} + \mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbb{F}. \quad (9.1)$$

Le vecteur de force  $\mathbb{F}$  représente les efforts extérieurs appliqués à chacun des nœuds du système discrétisé. Lorsque le musicien apporte de l'énergie à la corde, il tire sur celle-ci avant de la relâcher d'une certaine hauteur. En considérant le plectre ou le doigt comme un point (ponctuel en espace), l'effort s'applique seulement sur un seul nœud. Pour simuler l'effort exercé par le doigt sur la corde, on considère que la valeur de la force à ce nœud évolue linéairement jusqu'à une valeur maximale  $F_{max}$  pendant une durée de 10 ms et est nulle après le lâcher (figure 13).

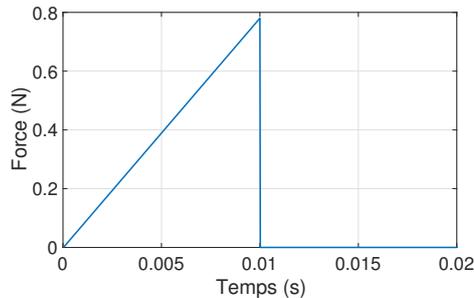


FIGURE 13 – Évolution de la force au point de pincement

Plutôt que d'attribuer une valeur maximale de force peu représentative pour l'utilisateur, il est possible de calculer cette valeur en fonction de la hauteur de lâcher souhaitée. En posant l'hypothèse que le mouvement de la corde est quasi-statique avant d'être lâchée, (9.1) devient :

$$\mathbb{F} = \mathbf{K}\mathbf{W}. \quad (9.2)$$

Afin de calculer  $\mathbb{F}$ , nous devons renseigner le profil spatial de la corde avant son lâcher. Puisque celle-ci est pincée ponctuellement en un nœud, son profil est triangulaire avec pour sommet la valeur de hauteur de lâcher souhaitée au nœud pincé (figure 14).

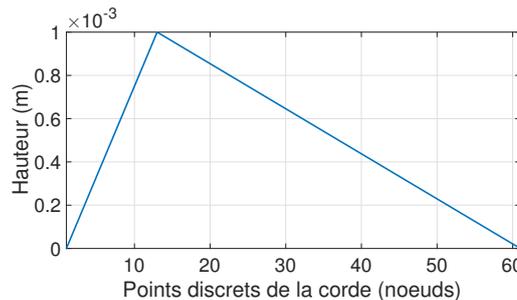


FIGURE 14 – Profil de la corde avant d'être lâchée

## Modèle non linéaire

Dans le cas non linéaire, la méthode des éléments finis conduit au système suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{W}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{W}} + \left(1 + \beta\mathbf{W}^T\mathbf{K}\mathbf{W}\right)\mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{F}. \quad (9.3)$$

Sous les mêmes hypothèses que dans le cas linéaire, le système devient :

$$\mathbf{F} = \left(1 + \beta\mathbf{W}^T\mathbf{K}\mathbf{W}\right)\mathbf{K}\mathbf{W} \quad (9.4)$$

Le calcul de la force se réalise de la même manière que dans le cas linéaire, c'est à dire en renseignant le profil spatial de la corde avant son lâcher dans le vecteur  $\mathbf{W}$ .

## 9.2 Annexe 2 : Comparaison des différentes bibliothèques d'algèbre linéaire en C++

Afin de concilier performance et simplicité de transcription du code MATLAB en C++, différentes bibliothèques dédiées à l'algèbre linéaire ont été testées. Les tests ont eu lieu sur le modèle de corde linéaire discrétisée en 20 éléments. La charge du CPU pour chacune des bibliothèques est donnée ci-dessous :

- It++ : 28%
- Eigen : 12%
- Modalys : 10%
- Coala : 50%
- BLAS/LAPACK : 14%
- module DSP de JUCE : 12%
- Armadillo : 13%

On constate alors que les libraires les plus performantes sont : Eigen, Modalys et le module DSP de JUCE. Les deux derniers ne permettant pas une transcription aisée du script MATLAB, Eigen est retenue dans ce projet.

## Références

- [1] Site du Master ATIAM. <http://www.atiam.ircam.fr>. Dernier accès : 03/07/2018.
- [2] Site de l'IRCAM. <https://www.ircam.fr>. Dernier accès : 03/07/2018.
- [3] Site de l'équipe S3AM. <http://s3am.ircam.fr>. Dernier accès : 03/07/2018.
- [4] Site du logiciel Modalys. <http://forumnet.ircam.fr/fr/produit/modalys/>. Dernier accès : 03/07/2018.
- [5] J.L.R. d'Alembert. *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*. Histoire de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin (HAB) pour l'année 1747. 1750.
- [6] C. Cadoz. *Synthèse sonore par simulation de mécanismes vibratoires. Applications aux sons musicaux*. These, Institut national polytechnique de Grenoble, Octobre 1979.
- [7] C. Cadoz, A. Luciani, and J.-L. Florens. *Responsive Input Devices and Sound Synthesis by Stimulation of Instrumental Mechanisms : The Cordis System*. *Computer Music Journal*, 8(3) :60–73, Septembre 1984. Texte republié dans l'ouvrage *The music Machine* (sous la direction de Curtis Roads), en 1989 : pages 495-508.
- [8] Site du logiciel CORDIS-ANIMA. <http://www.acroe-ica.org/fr/recherche/le-langage-de-modelisation-physique-cordis-anima>. Dernier accès : 04/07/2018.
- [9] J.-M. Adrien. *The missing link : Modal synthesis*. pages 269–298. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1991.
- [10] M. E. McIntyre, R. T. Schumacher, and J. Woodhouse. *On the oscillations of musical instruments*. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 74(5) :1325–1345, 1983.
- [11] J. O. Smith III. *Physical Audio Signal Processing : for Virtual Musical Instruments and Digital Audio Effects*. 2006.
- [12] S. Bilbao. *Numerical Sound Synthesis : Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics*. Septembre 2009.
- [13] K.J. Bathe. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [14] S. Bilbao and J. Smith. *Energy-conserving finite difference schemes for nonlinear strings*. 91 :299–311, Mars 2005.
- [15] J. Chabassier and P. Joly. *Energy Preserving Schemes for Nonlinear Hamiltonian Systems of Wave Equations. Application to the Vibrating Piano String*. Research Report RR-7168, INRIA, 2010.
- [16] B. Bank. *Energy-based synthesis of tension modulation in strings*. Octobre 2009.
- [17] A. van der Schaft and D. Jeltsema. *Port-Hamiltonian Systems Theory : An Introductory Overview*. Now Publishers, 2014.
- [18] B.M. Maschke, A.J. Van Der Schaft, and P.C. Breedveld. *An intrinsic hamiltonian formulation of network dynamics : non-standard poisson structures and gyrators*. *Journal of the Franklin Institute*, 329(5) :923 – 966, 1992.
- [19] A. van der Schaft G. Golo, V. Talasila and B. Maschke. *Hamiltonian discretization of boundary control systems*. *Automatica*, 40(5) :757 – 771, 2004.

- [20] R. Moulla, L. Lefèvre, and B. Maschke. Pseudo-spectral methods for the spatial symplectic reduction of open systems of conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 231(4) :1272 – 1292, 2012.
- [21] A. Macchelli. Boundary energy shaping of linear distributed port-hamiltonian systems. *European Journal of Control*, 19(6) :521 – 528, 2013.
- [22] T. Hélie and D. Roze. Corde non linéaire amortie : formulation hamiltonienne à ports, réduction d’ordre exacte et simulation à passivité garantie. In *13ème Congrès Français d’Acoustique*, Le Mans, France, Avril 2016.
- [23] F. L. Cardoso-Ribeiro, D. Matignon, and L. Lefèvre. A structure-preserving partitioned finite element method for the 2d wave equation. *IFAC-PapersOnLine*, 51(3) :119 – 124, 2018. 6th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control LHMNC 2018.
- [24] N. Lopes. *Approche passive pour la modélisation, la simulation et l’étude d’un banc de test robotisé pour les instruments de type cuivre*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016.
- [25] A. Falaize. *Modélisation, simulation, génération de code et correction de systèmes multi-physiques audios : approche par réseau de composants et formulation Hamiltonienne à Ports*. Theses, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, July 2016.
- [26] Manuel Goubert, Université Lille 1 - Onde progressive sinusoidale dans une corde; relation de dispersion et vitesse de phase. [http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP\\_E\\_M02\\_G03\\_01/co/NLP\\_E\\_M02\\_G03\\_01.html](http://res-nlp.univ-lemans.fr/NLP_E_M02_G03_01/co/NLP_E_M02_G03_01.html). Dernier accès : 12/07/2018.
- [27] G. Carrier. On the nonlinear vibration problem of the elastic string. *Quarterly of Applied Mathematics*, pages 157–165, 1945.
- [28] S. S. Rao. *The Finite Element Method in Engineering*. Janvier 1982.
- [29] M. Géradin and D. Rixen. *Mechanical Vibrations : Theory and Application to Structural Dynamics*. Wiley, 1997.
- [30] V. Manet. La Méthode des Éléments Finis : Vulgarisation des aspects mathématiques, Illustration des capacités de la méthode. Lecture, August 2013.
- [31] T. Hélie, A. Falaize, and N. Lopes. Systèmes Hamiltoniens à Ports avec approche par composants pour la simulation à passivité garantie de problèmes conservatifs et dissipatifs. In *Colloque National en Calcul des Structures*, volume 12, Giens, France, May 2015.
- [32] V. Duindam, A. Macchelli, S. Stramigioli, and H. Bruyninckx. *Modeling and Control of Complex Physical Systems : The Port-Hamiltonian Approach*. Janvier 2009.
- [33] G. Golo. Interconnection structures in port-based modelling : Tools for analysis and simulation. Janvier 2002.
- [34] F. Cardoso Ribeiro. Port-hamiltonian modeling and control of a fluid-structure system, 2016. Thèse de Doctorat, Université de Toulouse, Institut Supérieur de l’Aéronautique et de l’Espace.
- [35] T. Hélie and D. Roze. Sound synthesis of a nonlinear string using Volterra series. *Journal of Sound and Vibration*, 314(0) :275–306, 2008.
- [36] G. Kirchhoff. *Vorlesungen über mathematische physik : Mechanik*. 1877.

- [37] Y. Wu and T. Shen. Finite element approximation of the nonlinear kirchhoff string with boundary control. Juillet 2014.
- [38] N. Lopes, T. Hélie, and A. Falaize. Explicit second-order accurate method for the passive guaranteed simulation of port-hamiltonian systems. *IFAC-PapersOnLine*, 48(13) :223 – 228, 2015. 5th IFAC Workshop on Lagrangian and Hamiltonian Methods for Nonlinear Control LHMNC 2015.
- [39] S. Aoues. *Energy preserving discretization of port-Hamiltonian systems*. Theses, INSA de Lyon, Décembre 2014.
- [40] Site de l'équipe AAS. <https://www.applied-acoustics.com>. Dernier accès : 23/07/2018.
- [41] Site de l'équipe MODARTT. <https://www.pianoteq.com>. Dernier accès : 23/07/2018.
- [42] Site de la société ARTURIA. <https://arturia.com/>. Dernier accès : 26/07/2018.
- [43] Site du produit MATLAB. <https://fr.mathworks.com/products/matlab.html>. Dernier accès : 24/07/2018.
- [44] Site du framework JUCE. <https://juce.com>. Dernier accès : 26/07/2018.
- [45] Site de la librairie Eigen. <http://eigen.tuxfamily.org>. Dernier accès : 24/07/2018.
- [46] Transcriptions MATLAB/Eigen. <https://eigen.tuxfamily.org/dox/AsciiQuickReference.txt>. Dernier accès : 24/07/2018.