

Rapport de stage  
Master ATIAM

# ÉTUDE DE LA VIBRATION DES CORDES MORTES DU CLAVICORDE

Jean-Théo JIOLAT

Institut Jean Le Rond D'Alembert, UMR CNRS 7190

13 Février - 13 Juillet 2017

**Encadrement :** Jean-Loïc LE CARROU, maître de conférences HDR, UPMC  
Christophe D'ALESSANDRO, Directeur de recherche, CNRS

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Aspect organologique . . . . .	4
1.2	État de l'art . . . . .	6
1.3	Mise en évidence du phénomène de sympathie . . . . .	7
1.4	Objectifs de l'étude . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Modèle vibratoire du clavicorde</b>	<b>11</b>
2.1	Formalisme Udwadia-Kalaba . . . . .	11
2.2	Application à un système vibratoire . . . . .	12
2.3	Conditions de continuité . . . . .	14
2.4	Équation du mouvement du système vibratoire . . . . .	14
2.5	Modèle de corde . . . . .	15
2.6	Étude de la convergence de la solution numérique . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Étude du comportement vibratoire du clavicorde</b>	<b>16</b>
3.1	Extraction de la base modale du chevalet . . . . .	16
3.1.1	Mesures d'admittance . . . . .	16
3.1.2	Analyse modale . . . . .	17
3.2	Mesures vibratoires . . . . .	18
3.2.1	Excitation par doigt robotisé . . . . .	18
3.2.2	Mesures vibratoires d'une corde . . . . .	19
3.2.3	Mesures vibratoires des cordes . . . . .	21
3.3	Validation du modèle . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>Formalisme Udwadia-Kalaba</b>	<b>28</b>
A.1	Démonstration des équations dynamiques . . . . .	28
A.2	Projection des matrices dans la base modale . . . . .	30
<b>B</b>	<b>La condition de stabilité</b>	<b>31</b>
<b>C</b>	<b>la stabilisation de Baumgarte</b>	<b>31</b>
<b>D</b>	<b>Modèle de dissipation de la vibration de corde</b>	<b>31</b>
<b>E</b>	<b>La méthode ESPRIT</b>	<b>32</b>
<b>F</b>	<b>Signal de vitesse de la tangente</b>	<b>34</b>
<b>G</b>	<b>Détermination des matrices d'inertie et de raideur du chevalet</b>	<b>34</b>
<b>H</b>	<b>Base modale expérimentale du chevalet</b>	<b>35</b>
<b>I</b>	<b>Courbes de convergence de la solution numérique de la vibration de la corde étudiée</b>	<b>37</b>
<b>J</b>	<b>Valeurs numériques des paramètres de corde de <math>Fa3</math> du clavicorde pour la confrontation modèle-simulation</b>	<b>37</b>
<b>K</b>	<b>Graphes de transfert d'énergies vibratoires de la corde excitée aux cordes mortes</b>	<b>38</b>

*Bald sing ich keusche Liebe drein,  
Die mir im Busen glüht  
Und so wie deine Saiten rein  
Vor Gottes Augen blüht.*<sup>1</sup>

Philippine Gatterer, "Ans Clavier", 1776<sup>2</sup>

---

1. Bientôt je chanterai l'amour chaste, qui rayonne en ma poitrine, et qui de la même façon que tes cordes, fleurit devant les yeux de Dieu.

2. NEUPERT, Hanns, *Das Klavichord*, Barenreiter-Verlag, 1956.

## Remerciements

Je souhaite remercier Jean-Loïc Le Carrou pour sa présence, son aide, sa rigueur ainsi que pour son enthousiasme. Je remercie de même Christophe d'Alessandro pour m'avoir proposé ce travail sur le clavicorde, et dont la connaissance encyclopédique sur les instruments à clavier m'a fait apprendre beaucoup de choses sur le sujet. Ces encadrants ont rendu ce travail de stage agréable et formateur. Je leur en sais gré.

Merci également à l'équipe LAM, et en particulier à Laurent Quartier, qui s'est révélé être d'une aide précieuse pour tous les problèmes techniques au cours de ce stage.

Je souhaite remercier quelques camarades de ma promotion ATIAM : Tom Colinot, Eugenia Eremeeva, Manuel Gaulhiac, qui ont été mes partenaires durant le projet PAM et qui m'ont fait passé une très bon fin de premier semestre. Je remercie également Marc Wijnand, dont j'ai apprécié la compagnie. Je me dois d'être reconnaissant envers eux pour leur camaraderie.

## Présentation de l'organisme d'accueil

L'Institut Jean Le Rond D'Alembert (IJLRA) est un laboratoire de recherche dont les thématiques d'études touchent l'ensemble des domaines de la mécanique, de l'acoustique et de l'énergétique. Il constitue une unité mixte de recherche de l'université de Pierre et Marie Curie et CNRS, et possède le soutien du ministère de la culture. Cinq équipes sont regroupées autour de ce laboratoire, parmi lesquelles l'équipe Lutherie-Acoustique-Musique (LAM).

L'équipe LAM été fondée par Emile Leipp en 1963 au sein du département Mécanique de l'université de Pierre et Marie Curie. Outre les aspects d'acoustique et de vibrations, ce laboratoire s'intéresse en particulier à des disciplines diversifiées par lesquelles on aborde l'étude du son et de la musique. Effectivement, imposant une approche transdisciplinaire et holistique, ces études nous poussent à nous confronter à des aspects scientifiques, techniques, artistiques et culturels (voir figure 1). Trois volets caractérisent les différents domaines de recherche du LAM :

- Instruments et voix : l'étude des instruments de musique et des sources sonores.
- Perception et cognition : L'étude du sens que l'être humain donne à ce qu'il entend.
- Techniques audio et acoustiques des salles : l'étude du son.

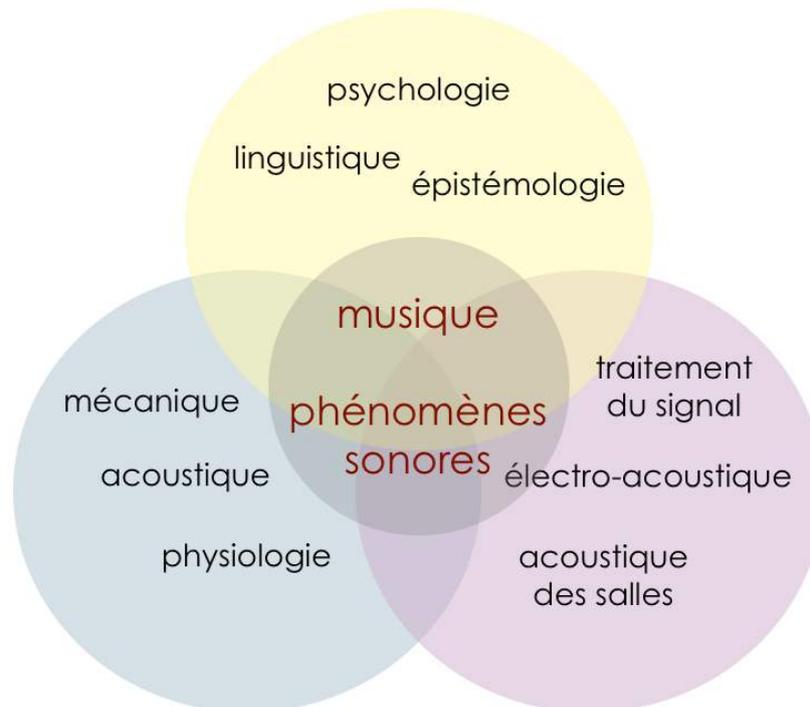


FIGURE 1 – Ensemble des disciplines qui forme les axes d'études du Laboratoire LAM.

# 1 Introduction

## 1.1 Aspect organologique

L'origine du clavicorde remonte au XIV<sup>ème</sup> siècle, ayant pour ancêtre le monocorde à clavier. En effet, le monocorde était un instrument à une corde dont la fréquence fondamentale était déterminée par la position du chevalet sur celle-ci. En ayant rajouté plusieurs cordes de différentes tailles, avec des tangentes, actionnées par des touches, allant frapper la corde à la position appropriée, cela a donné le clavicorde [4]. La plus vieille représentation connue du clavicorde date de 1425 provenant d'un retable situé à la ville de Minden, en Allemagne [4].



FIGURE 2 – Femme jouant du clavicorde, par Hemessen

Le principe de fonctionnement du clavicorde est le suivant. La pression du doigt sur une des touches du clavier fait soulever la tangente correspondante, allant percuter une des cordes de l'instrument. Cette tangente est placée à l'extrémité de la corde. L'excitation étant effectuée, la tangente soulève la corde qu'il a frappée, tant et si bien qu'elle vibre d'une longueur délimitée par le chevalet et la tangente, celle-ci faisant office de sillet (voir figure 3). Enfin, par le couplage entre le chevalet et la table d'harmonie, l'énergie vibratoire de la corde est transmise à la table, et cette table rayonne alors le son. Lorsque le doigt lâche la touche, la tangente perd contact avec la corde, et le drap disposé à l'extrémité de celle-ci permet d'étouffer sa vibration.

Selon Arnault de Zwolle [4], le chevalet avait la forme d'un segment parcourant la table d'harmonie, mais qui avait l'inconvénient d'avoir ses extrémités trop proches de cette table. Ce faisant, les notes graves de l'instrument n'avaient que très peu de rayonnement. Au cours de l'évolution du clavicorde, le chevalet a subi quelques modifications et en particulier au XVII<sup>ème</sup> siècle. C'est à ce moment-là que le chevalet a pris la forme en S, ce qui a permis d'améliorer le niveau sonore des cordes graves [4]. Les premiers types de clavicordes étaient liés : une paire de corde de l'instrument correspond à plusieurs notes. Pour ce faire, deux à quatre tangentes frappent la même corde mais à plusieurs endroits différents, délimitant différentes longueurs vibrantes. A partir des années 1690 apparaissent les clavicordes construits de telle sorte à ce que chaque corde soit libre et corresponde à une seule note.

Au demeurant, la fonction musicale que jouait le clavicorde au XVI<sup>ème</sup> siècle était particulière. Il n'y a pas eu de répertoire spécifique pour cet instrument, contrairement au clavecin pour lequel des œuvres musicales avaient été spécifiquement écrites pour ce dernier. Le clavicorde était plutôt et essentiellement utilisé pour l'enseignement et la pratique du clavier. Le toucher du clavicorde est assez délicat, puisque lorsqu'on excite une de ses cordes, la tangente reste en contact avec celle-ci. Une pression trop forte sur la touche du clavier engendre une augmentation de la tension de la corde, induisant une augmentation perceptible de sa fréquence fondamentale. En revanche, si la vitesse d'enfoncement de la touche n'est pas suffisante, le niveau sonore devient trop faible. Par conséquent, toute la question est de trouver un mode de jeu qui permet de jouer le plus fort possible tout en jouant juste. Cette exigence qu'impose le clavicorde permettait d'enseigner un mode de



FIGURE 3 – Tangente allant percuter la corde

jeu transposable sur d'autres instruments à clavier, d'où la vertu pédagogique de cet instrument. De plus, celui-ci était apprécié pour d'autres avantages, notamment parce qu'il se vendait à bas prix. Beaucoup appréciaient le clavicorde pour son caractère doux et calme, et parce qu'il avait l'avantage aussi de s'accorder assez facilement ainsi que de rester accordé sur le long terme.

On situe l'âge d'or du clavicorde au XVIII<sup>ème</sup> siècle. En 1713, Mattheson souligne le style chantant émanant de la pratique du clavicorde, le mettant au rang des plus appréciés des instruments de musique [4]. Les inventions pour clavier de Jean-Sébastien Bach de 1723 mettent en évidence une importance du style chanté dans cette musique, une esthétique pour laquelle le clavicorde a été exploité. D'autre part, on retrouve dans certaines partitions de Carl-Philippe-Emmanuel Bach des indications propres au fonctionnement du clavicorde. Effectivement, l'indication *Beben* fait référence au vibrato du clavicorde créé par la variation de tension de la corde en contact avec la tangente. Autrement dit, le doigt du musicien sur la touche peut entraîner un vibrato dans la production sonore, celui-ci étant exploité ensuite à des fins musicales [4]. En fin de compte, c'est à cette époque qu'un répertoire spécifique ou propice au clavicorde, dû à ses particularités, a été élaboré. Le clavicorde disparaît vers 1820 et ne ré-apparaîtra qu'à partir des années 1880.

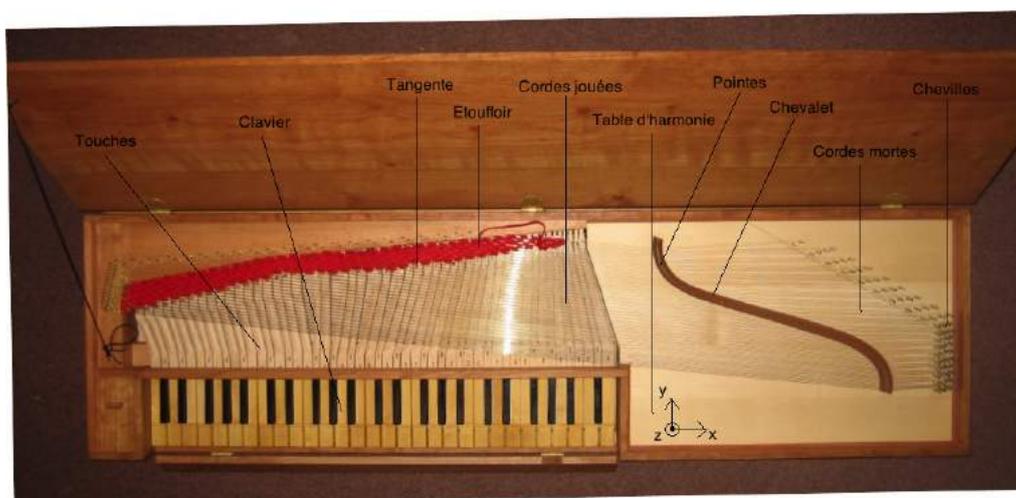


FIGURE 4 – Vue du dessus du clavicorde Hubert I avec légendes

## 1.2 État de l’art

En premier lieu, il faut toucher un mot sur les études significatives qui ont été menées sur l’acoustique de cet instrument. La première investigation conséquente à ce sujet est celle de Thwaites et Fletcher, ayant consisté à étudier plusieurs facettes de l’acoustique du clavicorde sans se focaliser sur un seul aspect en particulier [22]. En effet, le mouvement des cordes et des touches a été abordé, autant que la mobilité de la table d’harmonique et la dynamique du son du clavicorde sur l’ensemble de son ambitus. Par la suite, Välimäki s’est aussi intéressé à l’acoustique du clavicorde. Le but de son étude était d’être à même de pouvoir synthétiser son timbre à partir d’un modèle par guide d’onde [24]. Enfin, on s’est de nouveau arrêté sur son fonctionnement acoustique par le travail de d’Alessandro, notamment pour concevoir un modèle masse-ressort assez simple pour rendre compte du mouvement de la tangente lors de l’excitation [7]. De surcroît, d’autres éléments saillants sur ce fonctionnement ont été mis en évidence, au premier rang desquels la relation entre la vitesse d’excitation de la tangente et le niveau sonore du son produit, où il a été montré que le logarithme du premier est proportionnel au second [7]. Soit dit en passant, on a aussi mesuré la faible variation du timbre du clavicorde en fonction de la nuance de jeu, ceci étant une caractéristique qui distingue cet instrument du piano [7]. Enfin, des mesures sur la variation de la fréquence fondamentale de la corde en fonction de la hauteur de soulèvement par la tangente ont été effectuées, celles-ci étant corroborées par un modèle simple d’élasticité [7].

Cependant, peu d’études font mention du phénomène de sympathie s’agissant du clavicorde, un phénomène pourtant éminemment présent dans son fonctionnement acoustique. On peut citer le travail de d’Alessandro et de Katz [8], où une étude de l’effet de sympathie sur le son rayonné a été mise en avant. On appelle cordes sympathiques celles qui ne sont pas jouées, mais qui se mettent à vibrer sous l’influence d’une autre corde qui a été mise en vibration par une excitation (quelle soit frappée, frottée ou pincée) (voir figure 4). En effet, c’est parce que toutes ces cordes sont couplées à la même structure qu’une corde mise en vibration transmet par l’intermédiaire du chevalet son énergie vibratoire aux autres cordes. Notons par ailleurs que les cordes du clavicorde sont couplées avec le chevalet par l’intermédiaire de pointes accrochées au chevalet (voir la figure 5). Si ces cordes sont accordées à la fréquence fondamentale ou à une des harmoniques de la corde excitée, elles se mettront alors à vibrer par sympathie, pour peu que celles-ci ne soient pas étouffées [12]. Or, les cordes non jouées du clavicorde se situant de l’autre côté du chevalet, aussi appelées cordes mortes, peuvent vibrer par sympathie et ne sont pas étouffées a priori comme les cordes jouées à l’état de repos. C’est d’ailleurs cet effet de sympathie qui est la conséquence du halo sonore présent dans le son produit du clavicorde. C’est un phénomène qu’on retrouve dans un très grand nombre d’instruments à cordes, au premier desquels la harpe de concert où l’effet de sympathie a été analysé par Le Carrou [12]. En outre, on peut citer l’étude de Weisser et de Demoucron sur l’effet de sympathie des instruments hindustanis qui avait pour objectif d’étudier le timbre du son de ces instruments en exploitant des descripteurs audio [26]. Aussi, à l’instar du clavicorde, cet effet se retrouve chez le piano, notamment par l’introduction des cordes dites «Aliquot» situées dans le registre aiguë de l’instrument, introduit par Blüthner en 1873. Certains pianos, comme le piano Steinway, ont des cordes mortes situées au devant et à l’arrière du piano dans tous les registres, appelées cordes «duplex» et ont fait l’objet d’une étude acoustique et perceptives menée par Öberg et Askenfelt [16].



FIGURE 5 – Point de couplage entre la pointe du chevalet du clavicorde et la corde

Il existe un certain nombre d'approches pour modéliser le couplage entre différentes sous-structures d'un système vibratoire, ce afin de modéliser l'effet sympathique des cordes mortes. Dans le travail de Le Carrou consacré à la harpe de concert, des études ont été effectuées pour mesurer ces effets de sympathie et de les expliquer à partir d'un modèle vibratoire basé sur une méthode de matrices de transfert [5]. Ce modèle consiste à relier des cordes souples à une même poutre par des conditions de continuité, d'écrire l'ensemble des lois de comportement de chaque sous structure sous forme matricielle afin d'obtenir le comportement vibratoire de l'ensemble du système. Comme le chevalet de la harpe avait un comportement vibratoire assimilable à celle d'une poutre, le modèle pouvait rendre compte de certains résultats expérimentaux. S'agissant du piano, Weinreich a conçu un modèle permettant de rendre compte du phénomène de double décroissance du son de piano dû au couplage entre deux cordes [25]. Woodhouse a proposé quelques méthodes de synthèse hybride tirant partie de données théoriques et de données expérimentales afin de modéliser un système prenant en ligne de compte le couplage corde/structure [27]. L'une d'entre elles consiste à considérer une corde couplée en un point de la table d'harmonie. En calculant l'admittance totale en ce point et par un principe de réciprocité, on peut déterminer la vibration de cette corde par une méthode dite fréquentielle. Une autre méthode se base sur une approche modale, où l'on couple dans un même formalisme matriciel la base modale de la corde et celle de la structure [27]. Le même type d'approche sera repris par Marques, Antunes et Debut pour modéliser l'effet sympathique des cordes mortes de la guitare portugaise à 12 cordes [14]; cette même modélisation a été complexifiée en considérant des vibrations de cordes non-linéaires [6]. Enfin, un autre modèle de couplage corde/structure a été mis en avant en utilisant une formulation Udwadia-Kalaba appliquée à une corde de guitare couplée à un chevalet [1]. Il s'agit de considérer les équations de la dynamique en ajoutant des équations de contraintes en terme de déplacement, d'introduire une formulation modale et de calculer ainsi les amplitudes modales du système. C'est en particulier l'élégance du formalisme qui constitue son avantage et il a été montré que cette approche se trouve être plus efficace que celle exploitée par le formalisme matricielle des études [14] et [6] (voir [1]). L'utilisation de ce formalisme est plutôt nouveau dans le domaine de l'acoustique musicale et il pourrait servir pour modéliser d'un point de vue vibratoire l'effet de sympathie.

### 1.3 Mise en évidence du phénomène de sympathie

Pour observer quels sont les effets qui se manifestent dans le son rayonné du clavicorde que l'on étudie, on effectue des mesures de pression en chambre anéchoïque avec un micro BK situé à 30 cm au dessus de la table d'harmonie du clavicorde (voir figure 6). Deux types d'excitation sont utilisés dans ces mesures :

- Une impulsion créée par un marteau d'impact qui frappe à l'extrémité du chevalet.
- Une excitation effectuée par un musicien sur la note  $Fa3$ .

D'autre part, pour observer l'effet de sympathie, trois configurations expérimentales sont considérées :

- Cas où aucune corde n'est étouffée.
- Cas où les cordes sympathiques sont étouffées.
- Cas où les cordes excitées et les cordes sympathiques sont étouffées sauf celle qui correspond à la note  $Fa3$

Soit dit en passant, on rappelle que le timbre du son du clavicorde change extrêmement peu en fonction de la vitesse de la tangente [7]. Cette dernière ne fait que changer le niveau de pression du son produit. En vertu de cette faible variation du timbre, il est donc valide de comparer les sons effectués selon différentes vitesses de tangente utilisées pour l'excitation. On peut remarquer sur les graphes de la figure 7 le spectrogramme de la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie du clavicorde suite à l'excitation donnée par le marteau d'impact dans les trois configurations susmentionnées. Pour comparer les trois spectrogrammes, nous avons utilisé la valeur maximale du signal de force du marteau de chaque mesure pour normaliser les signaux de réponse impulsionnelle. On peut remarquer que le temps de décroissance est beaucoup plus grand dans le cas où toutes les cordes sont libres que dans le cas où les cordes mortes sont étouffées. Les fréquences aiguës du signal où les cordes mortes sont libres sont renforcées par l'effet de réverbération dû à la vibration de toutes les cordes mortes que la table d'harmonie fait rayonner. On remarque donc à quel point les cordes mortes contribuent à la réponse impulsionnelle de la table du clavicorde.

De plus, les fréquences graves de la réponse impulsionnelle durent moins longtemps lorsque les cordes jouées sont étouffées. En effet, lorsque celles-ci sont étouffées, Les fréquences graves de la



FIGURE 6 – Mesures acoustiques en chambre sourde avec musicien.

réponse de la table deviennent fortement atténuées, car les cordes graves de la partie jouée des cordes ne vibrent plus. Ceci met en évidence que, malgré les étouffoirs placés à l'extrémité des cordes graves, elles participent fortement à la réponse de la table d'harmonie par effet de réverbération.

Entre autres, nous pouvons tirer de ces mesures trois points :

- Tout d'abord, il n'y pas d'identification claire de fréquences sur le signal de la réponse impulsionnelle. En effet, sur la figure 7, nous n'apercevons qu'un amas de fréquences, et non pas de raies qui mettent en évidence des fréquences prédominantes dans la réponse.
- Ensuite, l'atténuation dépend de la fréquence. Plus la fréquence est élevée, plus l'amortissement de cette fréquence augmente.
- Enfin, autant les cordes mortes que les cordes jouées du clavicorde participent à la réponse impulsionnelle de la table d'harmonie.

Aussi, s'agissant des mesures acoustiques effectuées avec l'excitation de la corde de *Fa3* du clavicorde, on peut mettre en avant suite à la comparaison des signaux sur les graphes de la figure 8 quelques remarques. Par le biais d'un accéléromètre collé à proximité de la tangente, on peut calculer la vitesse de celle-ci. On utilise la valeur maximale du signal de vitesse comme facteur de normalisation nous permettant de comparer les différents spectrogrammes. Tout d'abord, on peut remarquer la présence d'une composante basse fréquence vers 150 Hz au dessous de la fréquence fondamentale de la corde située à 330 Hz. Ceci correspond à la vibration de certaines cordes graves du clavicorde après l'impact de la tangente sur la corde jouée. D'autre part, dans le cas où les cordes mortes sont étouffées, on remarque la présence bien marquée du partiel situé vers 1000 Hz. Par contre, lorsque les cordes mortes deviennent libre, on remarque que ce partiel subit des battements. Ces derniers ne peuvent être dus qu'à la présence de deux partiels très proches en fréquences autour de 1000 Hz dont l'un provient de la corde de *Fa3* excitée et l'autre de la vibration sympathique d'une ou plusieurs cordes mortes. Cet effet de sympathie semble donc se manifester au sein du signal acoustique à travers le rayonnement de la table d'harmonie. Pour mieux comprendre la manifestation de ce phénomène, nous devons rentrer plus en détail dans le comportement vibro-acoustique de notre instrument d'étude.

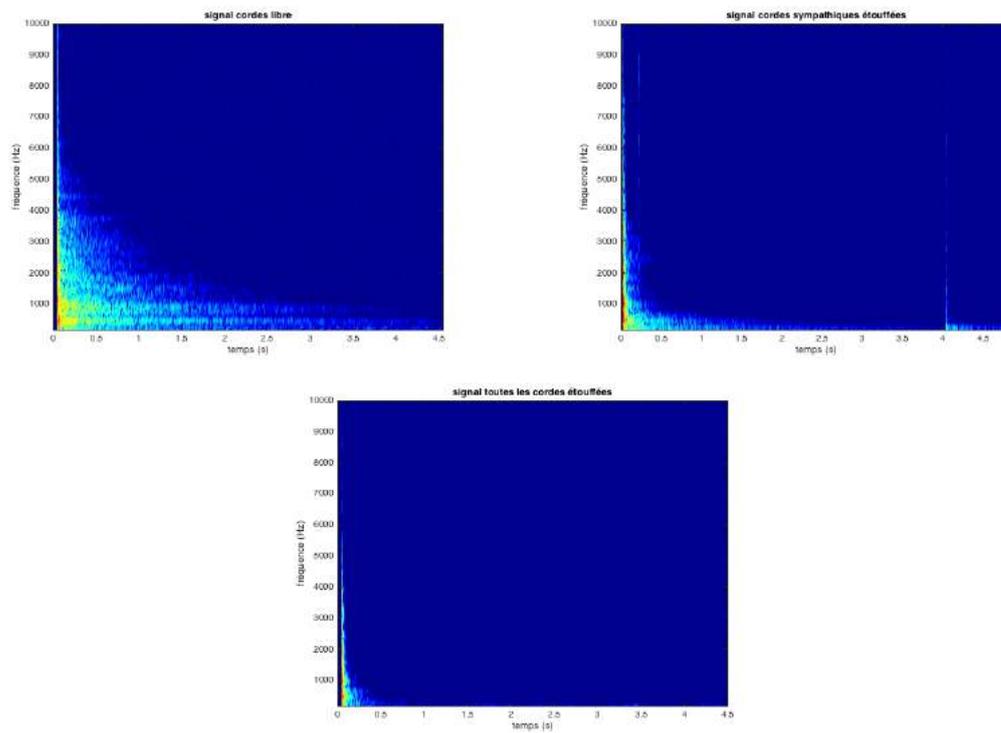


FIGURE 7 – Spectrogramme normalisé de la réponse impulsionnelle de la table d’harmonie du clavicorde avec cordes libre (à gauche), cordes mortes étouffées (à droite), cordes jouées et mortes étouffées (en bas).

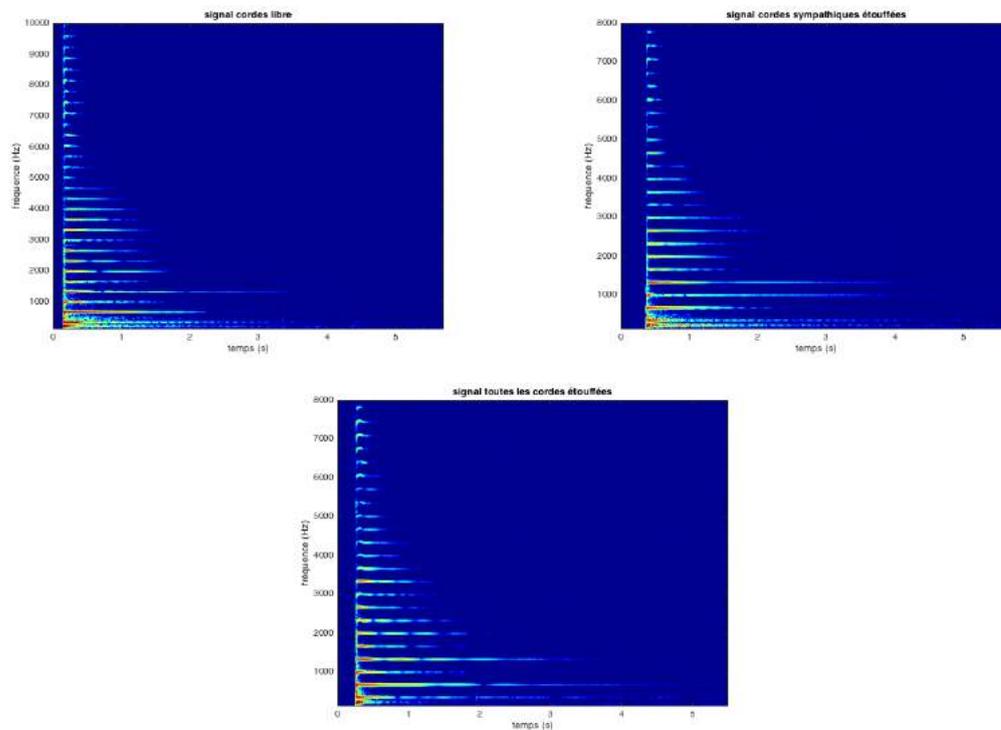


FIGURE 8 – Spectrogramme normalisé du signal acoustique rayonné par la table d’harmonie du clavicorde suite à mise en excitation de la corde correspondant à la note *Fa3* avec cordes libres (à gauche), cordes mortes étouffées (à droite), et toutes les cordes étouffées (en bas), avec respectivement une vitesse de tangente de  $0.69 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ,  $0.53 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , et  $0.66 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Il faut que l'on fasse la distinction entre deux types d'effet que l'on peut trouver dans le son rayonné impliquant la vibration des cordes mortes de l'instrument : il s'agit de l'effet de réverbération et de l'effet de sympathie.

- L'effet de réverbération est la cause du halo sonore que l'on entend à partir du son rayonné par la table d'harmonie, qui résulte de la mise en vibration des cordes mortes très proches par transfert d'énergies vibratoires provenant de l'impact de la tangente dû au couplage entre toutes les cordes et le chevalet [8]. Ce halo n'a pas de fréquences précises mises en exergue, tant il est vrai que l'ensemble des fréquences des cordes mortes sont en jeu dans cet effet. Ce qui domine dans cet effet de réverbération est l'aspect impulsif de l'excitation, et non les modes propres des cordes mortes.
- L'effet de sympathie est caractérisé par l'accord entre certains partiels de la corde excitée et certains partiels de la corde morte [12]. Autrement dit, lorsqu'un partial de chaque corde a la même fréquence, le partial en question de la corde morte augmente en énergie spectrale. Comme l'effet de réverbération, la cause de la sympathie accordée provient de ce même transfert d'énergie vibratoire. Seulement, lorsque certaines fréquences des cordes mortes et de la corde excitée coïncident, celles-ci deviennent plus présentes dans le spectre de la vibration du déplacement de la corde. Cet effet de sympathie produit un renforcement harmonique. Lorsque celui-ci devient prépondérant, le partial en question s'entend dans le signal acoustique et prend la forme d'un sifflement. Dans ce cas, les facteurs d'instrument font en sorte de supprimer ce renforcement harmonique trop élevé, afin de ne pas nuire à l'égalisation du son du clavicorde.

Du reste, nous pouvons rapporter ces mesures acoustiques aux résultats trouvés par d'Alessandro et Katz dans [8]. Il a été estimé, par le calcul de l'énergie du signal temporel, que la durée de réverbération de la réponse impulsif de la table d'harmonie avec les cordes étant libres était de l'ordre de 3 secondes, ce qui semble cohérent avec la figure 7 où les basses fréquences s'éteignent au bout de 3 secondes environ. Les bandes de fréquences sont rangées par bandes d'octave autour de 250 Hz, 500 Hz, 1000 Hz, 2000 Hz, et 4000 Hz.

Au vu de nos mesures acoustiques, on remarque bien que l'effet qui prédomine dans le son rayonné du clavicorde est celui de réverbération, et non de sympathie puisque toutes les cordes mortes participent à la production de ce signal acoustique mais aucune ne possède de partiels ayant une énergie spectrale plus prépondérante que les autres cordes. Il n'y a pas seulement les cordes mortes qui contribuent à cet effet, mais aussi la partie jouée des cordes graves, comme on a pu le constater sur nos mesures.

## 1.4 Objectifs de l'étude

Dans ce travail de stage, on souhaiterait connaître l'influence de l'effet de sympathie sur le comportement vibratoire de l'instrument en termes de transfert d'énergie vibratoire. En d'autres termes, lorsque l'on excite une des cordes du clavicorde par une tangente, quel sera le transfert d'énergie vibratoire vers l'ensemble des cordes mortes couplées mécaniquement au même chevalet ? D'autre part, nous voudrions valider un modèle de simulation permettant de prédire la vibration des cordes mortes selon une excitation d'une corde jouée à partir de la facture instrumentale de l'instrument considéré. C'est en donnant réponse à ces interrogations que ce travail de stage apporte une contribution à l'étude de la compréhension de la physique du clavicorde.

En premier lieu, nous avons établi un modèle de simulation de couplage mécanique entre les cordes et le chevalet pour étudier numériquement la vibration de la corde excitée et celle des cordes mortes. Celui-ci est basé sur le formalisme Udwardia-Kalaba, eu égard à sa nouveauté et aux avantages numériques qu'il apporte. Nous voudrions élaborer ce formalisme de telle sorte qu'il puisse mettre en évidence ces transferts d'énergies vibratoires entre la corde excitée et les cordes mortes, ce qui n'a jamais été fait. Ensuite, une étude vibratoire expérimentale sur le clavicorde d'étude sera menée, en étudiant les déformées modales du chevalet et en mesurant les transferts d'énergies entre la corde mise en excitation et l'ensemble des cordes mortes. Enfin, afin d'estimer la validation du modèle, on comparera les résultats du modèle de simulation avec des mesures vibratoires, autant pour la corde excitée que pour la corde morte.

## 2 Modèle vibratoire du clavicorde

Nous allons présenter ici le formalisme de couplage choisi pour simuler le comportement vibratoire du clavicorde. Ce système est constitué des sous-systèmes vibratoires suivants : une corde mise en excitation, 74 cordes mortes et un chevalet. Le modèle mis en place permettra d'effectuer une simulation de ce système à l'aide de l'équation 25 comme l'illustre la figure 9.

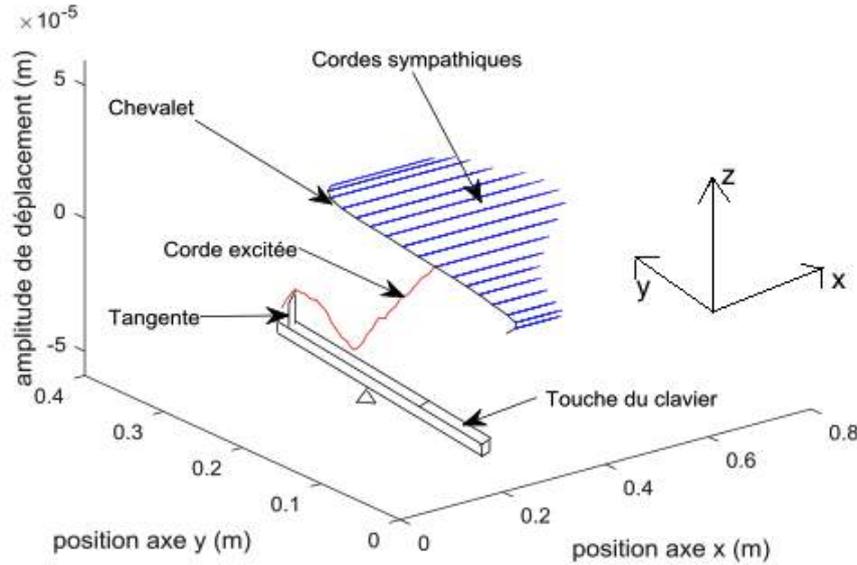


FIGURE 9 – Schéma du système vibratoire considéré dans notre modèle de simulation

### 2.1 Formalisme Udwadia-Kalaba

Le formalisme Udwadia-Kalaba (U-K) consiste à développer une forme analytique pour la modélisation des systèmes dynamiques discrets prenant en compte des conditions de couplage. On commence par appliquer la seconde loi de Newton à l'ensemble du système couplé :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}_e(t) + \mathbf{F}_c(t). \quad (1)$$

L'équation 1 met en évidence la réponse du système  $\mathbf{z}$  suite à l'application du champ de force  $\mathbf{F}_e(t)$  et de forces supplémentaires  $\mathbf{F}_c(t)$  provenant des contraintes du système. En plus, nous pouvons exprimer les équations de contraintes par un ensemble d'équations linéaires mettant en jeu les accélérations du système couplé :

$$\mathbf{A}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t)\ddot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, t). \quad (2)$$

où  $\mathbf{A}$  représente la matrice de contrainte et  $\mathbf{b}$  est un vecteur connu. Ainsi, en vertu de la formulation U-K, il nous est possible d'obtenir une expression pour la réponse dynamique du système  $\mathbf{z}$  et une autre pour le vecteur de force de contrainte  $\mathbf{F}_c$  (pour la démonstration, voir l'approche en annexe A) :

$$\ddot{\mathbf{z}} = \ddot{\mathbf{z}}_u + \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{B}^+(\mathbf{b} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{z}}_u). \quad (3)$$

$$\mathbf{F}_c(t) = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{B}^+(\mathbf{b} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{z}}_u). \quad (4)$$

où  $\mathbf{B}^+$  représente la pseudo-inverse Moore-Penrose de la matrice  $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{M}^{1/2}$ . Aussi, le vecteur  $\ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{u}}$  correspond à la réponse dynamique du système sans contrainte. Celui-ci est donc solution de l'équation suivante :

$$\ddot{\mathbf{z}}_{\mathbf{u}} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e(t) \quad (5)$$

L'élégance de ce formalisme réside dans le fait que l'équation 3 contient non seulement les équations dynamiques du système couplé, mais aussi les conditions de contraintes de ce dernier. De plus, l'équation 4 nous permet de connaître les forces de contrainte appliquées au système. Remarquons que ce formalisme peut s'appliquer à un grand nombre de systèmes couplés : que ces systèmes soient linéaires ou non-linéaires, conservatifs ou dissipatifs. Nous allons alors utiliser ce formalisme pour modéliser un système de plusieurs sous-systèmes couplés entre eux.

## 2.2 Application à un système vibratoire

Nous effectuons un développement modal, avec  $N$  modes, de la réponse dynamique du système  $\mathbf{z}(\mathbf{r}, t)$  étant une quantité physique variant en fonction de l'espace et du temps, ce qui nous amène l'expression suivante :

$$z(r, t) = \sum_{n=0}^N q_n(t)\phi_n(x). \quad (6)$$

où  $q_n(t)$  sont les amplitudes modales et  $\phi_n(x)$  sont les déformées modales régies par les conditions aux limites. La projection des équations dynamiques (équation 3) dans la base modale du système nous donne :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} + \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{B}^+(\mathbf{b} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}}). \quad (7)$$

où  $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}}$  sont les accélérations modales du système non-contraint,  $\mathbf{M}$  représente la matrice d'inertie dans la base modale,  $\mathbf{A}$  est la matrice de contrainte modale et  $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}$  (pour la projection des équations dans la base modale, voir l'annexe A.2).

Nous allons maintenant appliquer ce formalisme à un ensemble de sous-systèmes vibratoires couplés par des conditions cinématiques (l'ensemble de l'approche est repris de [1]). De prime abord, parmi les  $S$  sous-systèmes du système couplé, nous considérons une sous-structure  $s$  sur laquelle on applique un champ de force extérieure et dont la dynamique peut être décrite par un ensemble d'équations modales :

$$\mathbf{M}^s\ddot{\mathbf{q}}^s + \mathbf{C}^s\dot{\mathbf{q}}^s + \mathbf{K}^s\mathbf{q}^s + \mathbf{F}_{nl}^s(\mathbf{q}^s, \dot{\mathbf{q}}^s) = \mathbf{F}_{ext}^s, \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (8)$$

où  $\mathbf{q}^s$  représente les amplitudes modales du sous-système,  $\mathbf{M}^s$ ,  $\mathbf{C}^s$  et  $\mathbf{K}^s$  sont respectivement la matrice d'inertie, la matrice d'amortissement, et la matrice de raideur du sous-système, étant toutes exprimées dans la base modale, et  $\mathbf{F}_{nl}^s$  et  $\mathbf{F}_{ext}^s$  sont des vecteurs de forces modales provenant des forces non-linéaires et extérieures appliquées au sous-système  $s$ . Pour calculer les accélérations modales  $\ddot{\mathbf{q}}$  du système couplé, comme le montre l'équation 7, il faut exprimer les accélérations modales  $\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}}$  du système non-contraint à partir de l'expression 5 :

$$\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}}^s = (\mathbf{M}^s)^{-1}\mathbf{F}^s \quad (9)$$

où le vecteur  $\mathbf{F}^s$  renvoie au vecteur de toutes les forces modales de contraintes indépendantes, qui inclue les forces extérieures  $\mathbf{F}_{ext}^s$ , et les forces modales dissipatives et élastiques linéaires et non-linéaires :

$$\mathbf{F}^s = \mathbf{F}_{ext}^s - \mathbf{C}^s\dot{\mathbf{q}}^s - \mathbf{K}^s\mathbf{q}^s - \mathbf{F}_{nl}^s(\mathbf{q}^s, \dot{\mathbf{q}}^s), \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (10)$$

où l'on suppose que les vecteurs de déplacement et de vitesse modaux sont connus à chaque pas de temps. En écrivant les équations modales des  $S$  sous-systèmes sous forme vectorielle et

matricielle, les accélérations modales du système non-contraint  $\ddot{\mathbf{Q}}_u = [\mathbf{q}_u^1, \mathbf{q}_u^2, \dots, \mathbf{q}_u^{S_1}]^T$  s'écrivent de la manière suivante :

$$\ddot{\mathbf{Q}}_u = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{C}\dot{\mathbf{Q}} - \mathbf{K}\mathbf{Q} - \mathbf{F}_{nl}(\mathbf{q}^S, \dot{\mathbf{q}}^S)] \quad (11)$$

où les vecteurs  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}^1, \mathbf{q}^2, \dots, \mathbf{q}^S]^T$  et  $\dot{\mathbf{Q}}$  représentent les déplacements et vitesses modaux des  $S$  sous-systèmes couplés. Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices d'inertie, de dissipation et de raideur de l'ensemble du système couplé, qui sont diagonales et qui sont construites à partir des matrices modales de chaque sous-structure :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & M^S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} C^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & C^S \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & K^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & K^S \end{pmatrix} \quad (12)$$

où les paramètres des matrices modales de chaque sous-structure sont définis de la façon suivante :

$$m_n^s = \int_{D_s} \rho(\mathbf{r}^s) [\Phi_n^s(\mathbf{r}^s)]^2 d\mathbf{r}^s, \quad c_n^s = 2m_n^s \omega_n^s \zeta_n^s, \quad k_n^s = m_n^s (\omega_n^s)^2. \quad (13)$$

où  $\omega_n^s$  représente la pulsation propre et  $\zeta_n^s$  la valeur de l'amortissement. De plus, ce système est soumis à des conditions de couplage qui couple différents sous-systèmes entre eux et localisés en une position  $\mathbf{r}_c^s$ . En reprenant l'équation 2, les équations de couplages s'écrivent comme suit :

$$\mathbf{A}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t)\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{b}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}, t) \quad (14)$$

Dès lors, nous appliquons cette formulation Udwadia-Kalaba au cas d'un clavicorde. Pour ce faire, nous considérons un système de  $N_c$  cordes couplées à une structure vibrante représentative du chevalet de l'instrument. En reprenant l'équation 8, nous décrivons la dynamique d'une corde  $S_1$  du système soumise à une force d'excitation  $\mathbf{f}_{ext}(t)$  par  $N_{S_1}$  équations différentielles du second ordre, écrites sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}^{S_1} \ddot{\mathbf{q}}^{S_1} + \mathbf{C}^{S_1} \dot{\mathbf{q}}^{S_1} + \mathbf{K}^{S_1} \mathbf{q}^{S_1} = \mathbf{f}_{ext}(t) \quad (15)$$

où  $\mathbf{q}^{S_1}$  renvoie aux amplitudes modales de la corde mise en excitation. Aussi, les  $N_c - 1$  autres cordes du système, c'est à dire les cordes mortes, non-soumises à une force d'excitation, ont une dynamique décrite par les équations ci-contre :

$$\mathbf{M}^{S_n} \ddot{\mathbf{q}}^{S_n} + \mathbf{C}^{S_n} \dot{\mathbf{q}}^{S_n} + \mathbf{K}^{S_n} \mathbf{q}^{S_n} = \mathbf{0} \quad n = 2, \dots, N_c \quad (16)$$

De la même façon, nous pouvons écrire la réponse modale du chevalet du clavicorde par  $N_B$  équations différentielles du second ordre, écrites sous forme matricielle :

$$\mathbf{M}^B \ddot{\mathbf{q}}^B + \mathbf{C}^B \dot{\mathbf{q}}^B + \mathbf{K}^B \mathbf{q}^B = \mathbf{0} \quad (17)$$

où  $\mathbf{q}^B$  sont les amplitudes modales du chevalet. Il est à noter que toutes les matrices modales des équations 15, 16 et 17 sont toutes diagonales, c'est à dire exprimées dans leurs bases modales. En regroupant les équations dynamiques du chevalet, de la corde excitée et des cordes mortes, et en réutilisant les équations 9 et 10, on obtient les réponses modales du système non-contraint exprimées sous forme de  $N_{S_1} + N_{S_2} + \dots + N_{S_{N_c}} + N_B$  équations modales, écrites de la façon suivante :

$$\ddot{\mathbf{q}}_u = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}(-\tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} + \mathbf{F}_{\text{ext}}) \quad (18)$$

Avec  $\ddot{\mathbf{q}}_u = [\ddot{\mathbf{q}}_u^{S_1}, \ddot{\mathbf{q}}_u^{S_2}, \dots, \ddot{\mathbf{q}}_u^{S_{N_c}}, \ddot{\mathbf{q}}_u^B]^T$  et  $\mathbf{F}_{\text{ext}} = [f_{\text{ext}}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}, \mathbf{0}]^T$  et les matrices  $\tilde{\mathbf{M}}$ ,  $\tilde{\mathbf{C}}$  et  $\tilde{\mathbf{K}}$  définies de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}^{S_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^{S_2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}^{S_{N_c}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{M}^{S_B} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{S_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^{S_2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{C}^{S_{N_c}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{C}^{S_B} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}^{S_1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^{S_2} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{K}^{S_{N_c}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{K}^{S_B} \end{pmatrix} \quad (20)$$

### 2.3 Conditions de continuité

On suppose une continuité du déplacement entre la corde et le chevalet. Ce faisant, nous pouvons exprimer les conditions de couplages nécessaires pour modéliser les contraintes du système couplé, sachant que par cette hypothèse de continuité le déplacement de la corde  $Y^S(x_b, t)$  doit être le même que celui du chevalet  $Y^B(\mathbf{r}_s, t)$ . Il en résulte l'équation suivante :

$$Y^S(x_b, t) - Y^B(\mathbf{r}_s, t) = 0 \iff [\Phi^S(x_B)]^T \mathbf{q}^S(t) - [\Phi^B(\mathbf{r}_s)]^T \mathbf{q}^B(t) = \mathbf{0}. \quad (21)$$

Avec les vecteurs des déformées modales :

$$\Phi^S(x_B) = [\phi_1^S(x_B)\phi_2^S(x_B)\dots\phi_{N_S}^S(x_B)]^T, \quad \Phi^B(\mathbf{r}_s) = [\phi_1^B(\mathbf{r}_s)\phi_2^B(\mathbf{r}_s)\dots\phi_{N_B}^B(\mathbf{r}_s)]^T \quad (22)$$

Par conséquent, en utilisant l'équation de contrainte 21 pour chaque corde du système et en assemblant toutes ces équations, l'équation de contrainte globale devient :

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{Q}} = \mathbf{b} \iff \begin{bmatrix} [\Phi^{S_1}(x_B)]^T & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & -[\Phi^B(\mathbf{r}_{S_1})]^T \\ \mathbf{0} & [\Phi^{S_2}(x_B)]^T & \dots & \mathbf{0} & -[\Phi^B(\mathbf{r}_{S_2})]^T \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & [\Phi^{N_c}(x_B)]^T & -[\Phi^B(\mathbf{r}_{S_{N_c}})]^T \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1^S(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_{N_S}^S(t) \\ \ddot{q}_1^B(t) \\ \vdots \\ \ddot{q}_{N_B}^B(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

### 2.4 Équation du mouvement du système vibratoire

Enfin, en reprenant l'équation 7, nous obtenons la réponse dynamique du système couplé par l'équation suivante :

$$\begin{pmatrix} \ddot{q}^S \\ \ddot{q}^B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_u^S \\ \ddot{q}_u^B \end{pmatrix} - \tilde{\mathbf{M}}^{-1/2} \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \begin{pmatrix} \ddot{q}_u^S \\ \ddot{q}_u^B \end{pmatrix} = \mathbf{W} \begin{pmatrix} \ddot{q}_u^S \\ \ddot{q}_u^B \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{W} = \mathbf{1} - \tilde{\mathbf{M}}^{-1/2} \mathbf{B}^+ \mathbf{A} \quad (24)$$

En tout et pour tout, on peut substituer l'équation 18 dans l'équation 24 et utiliser un schéma aux différences finies pour obtenir *in fine* la solution numérique de la réponse modale du système couplé :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{M}}^{-1}(-\tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} - \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} + \mathbf{F}_{\text{ext}}) \quad (25)$$

## 2.5 Modèle de corde

On considère une corde souple, dont les fréquences propres suivent une série harmonique. S'agissant des conditions aux limites, la corde est libre au point de couplage avec le chevalet et elle est fixe en son autre extrémité. Ses déformées modales sont donc obtenues à partir de l'équation suivante :

$$\phi_n^S(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \quad (26)$$

Si la corde se retrouve de l'autre côté du chevalet, c'est-à-dire si les conditions aux limites sont inversées, il suffit de remplacer la fonction sinus de l'équation 26 par la fonction cosinus. Ces conditions aux limites sont considérées comme des hypothèses. Pour estimer la pertinence de la condition en déplacement fixe, il faudrait mesurer le déplacement vers l'axe  $z$  de la corde au niveau de la tangente et le comparer par rapport au déplacement de la tangente<sup>3</sup>.

D'autre part, pour calculer les amortissements de la corde, nous avons utilisé une méthode à haute résolution, la méthode ESPRIT (voir annexe E). En d'autres termes, nous avons effectué une mesure vibratoire d'une corde de *Fa3*, puis nous l'avons soumise à la méthode ESPRIT afin d'extraire les amortissements caractérisant la dissipation du signal vibratoire. Ce faisant, nous utilisons le modèle de dissipation de Valette et Cuesta (voir annexe D) pour introduire les amortissements des cordes vibratoires du clavicorde dans la simulation numérique. Nous avons tenté de faire correspondre les valeurs de coefficients de qualité données par le modèle aux valeurs données par la méthode ESPRIT (voir annexe E). Dans la suite de l'étude, nous utilisons les valeurs d'amortissement du modèle mis en évidence sur la figure 24.

## 2.6 Étude de la convergence de la solution numérique

Pour déterminer le nombre de modes d'une corde vibrante dont on a besoin pour obtenir de notre simulation la meilleure solution possible, on effectue une étude de convergence de la solution. On calcule différentes solutions en augmentant successivement au calcul suivant le nombre de modes de la corde étudiée. En d'autres termes, nous obtenons des signaux de vibration de la corde considérée issus de la simulation ayant chacun un nombre de modes différent. Nous comparons chaque solutions successives entre elles à l'aide d'un critère et nous observons comment évolue ce critère. L'idée ici est de constater comment l'erreur de la solution du signal vibratoire varie en fonction du nombre de modes de la corde (pour voir l'évolution du signal temporel en fonction du nombre de modes de la corde, voir les courbes de l'annexe I). Lorsque ce critère n'évolue plus entre deux comparaisons successives, la solution a convergé et par conséquent le nombre de modes optimal de la corde peut être déterminé. Nous décidons d'utiliser l'erreur selon la norme L2 comme critère de comparaison entre les différents signaux. Par ailleurs, pour cette étude de convergence, on ne considère qu'une seule corde couplée au chevalet du clavicorde.

On remarque sur la figure 10 que plus on augmente le nombre de modes, plus l'erreur selon la norme L2 diminue. Cette erreur se stabilise autour de 140 modes. Par conséquent, nous pouvons en tirer deux conclusions : d'abord, il n'y a pas de divergences de la solution obtenue en fonction du nombre de modes. D'autre part, pour obtenir un signal vibratoire ayant une erreur minimale, il faut calculer la solution avec une corde ayant au moins 140 modes.

3. Pour des raisons techniques, ces mesures ne sont pas présentées ici. Elles seront à présenter dans de futurs travaux.

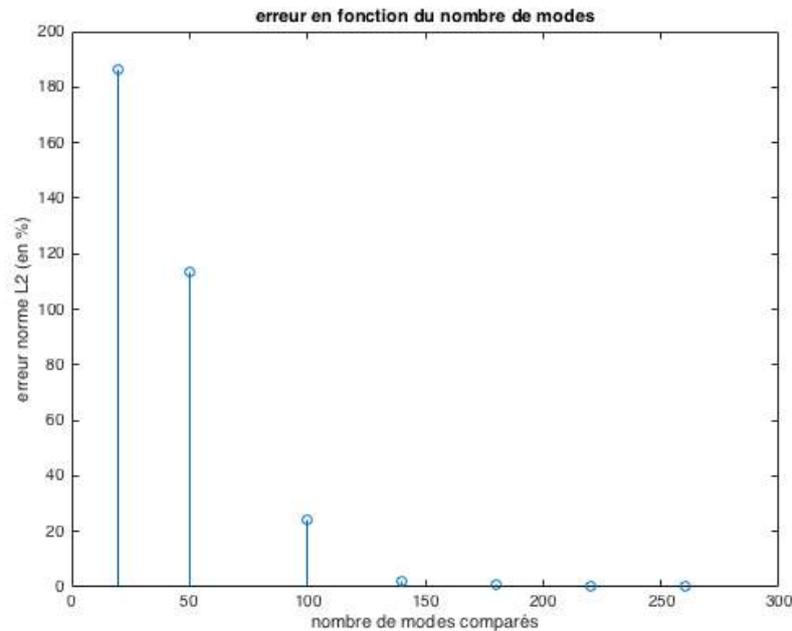


FIGURE 10 – Calcul de l’erreur selon la norme L2 entre deux signaux de simulation successifs en fonction du nombre de modes, les deux courbes ayant 20 modes de différence entre elles.

Cela étant, plus on augmente le nombre de modes, plus il y a d’équations à résoudre. De surcroît, comme le montre la condition de stabilité (voir annexe B), plus le nombre de modes augmente, plus des fréquences propres élevées rentrent en jeu. Par conséquent, selon l’équation 58, le pas de discrétisation temporelle doit diminuer. Ces deux conséquences entraînent un temps de calcul plus élevé. Nous n’avons pas été capables dans le cadre de ce stage de calculer une solution où toutes les cordes couplées au chevalet possédaient 140 modes. Pour la simulation de la corde jouée, nous nous sommes limités à 30 modes. Quant aux cordes mortes, eu égard à leur fréquence fondamentale élevée, nous nous sommes limités à 5 modes.

## 3 Étude du comportement vibratoire du clavicorde

### 3.1 Extraction de la base modale du chevalet

#### 3.1.1 Mesures d’admittance

Une information que l’on ne possède pas en théorie est la connaissance des déformées modales du chevalet et de la table d’harmonie du clavicorde. Il faudra extraire les déformées vibratoires du chevalet et ensuite introduire ces dernières dans le modèle Udwadia-Kalaba. Parmi les méthodes possibles, nous pourrions modéliser le chevalet par éléments finis pour analyser son comportement vibratoire. Une autre méthode consiste à obtenir sa base modale de manière expérimentale, c’est-à-dire faire une analyse modale des réponses en fréquences en différents points discrets du chevalet. Cette dernière méthode a déjà été utilisée dans des études précédentes comme [1] et montre des résultats concluants. Pour l’analyse vibratoire de notre chevalet de clavicorde, nous avons opté pour cette méthode.

Pour extraire la base modale du chevalet, il faut mesurer l’admittance de cette structure en plusieurs points de discrétisation. L’admittance se calcule de la façon suivante :

$$Y(x, y, f) = \frac{V(x, y, f)}{F(x, y, f)} \quad (27)$$

où  $x$  et  $y$  décrivent la position sur la structure,  $f$  la fréquence,  $V$  correspond à la vitesse et  $F$  est la force. En d’autres termes, l’admittance est une mesure de la capacité à la structure à pouvoir vibrer en fonction de l’excitation appliquée en une position  $x$  de la structure et à une

fréquence  $f$ . Elle peut donc caractériser le comportement vibratoire du chevalet en un point de discrétisation de la structure et dans un domaine de fréquence choisi. Pour effectuer cette mesure, nous utilisons un marteau d'impact pour exciter le chevalet selon une excitation que l'on peut mesurer et un accéléromètre nous permettant de mesurer la vitesse obtenue à partir de cette excitation. Le marteau d'impact est fixé au bord du chevalet (proche du point 1 de la figure 11) et frappe pour chaque acquisition au même point à chaque acquisition de mesure. L'accéléromètre est quant à lui déplacé à chaque point de mesure pour chaque acquisition. Nous ne mesurons que le mouvement du chevalet selon l'axe  $z$ , correspondant à celle qui est prise en compte dans le modèle de simulation. Nous décidons de discrétiser le chevalet en 18 points séparés de 5 cm (voir figure 11).

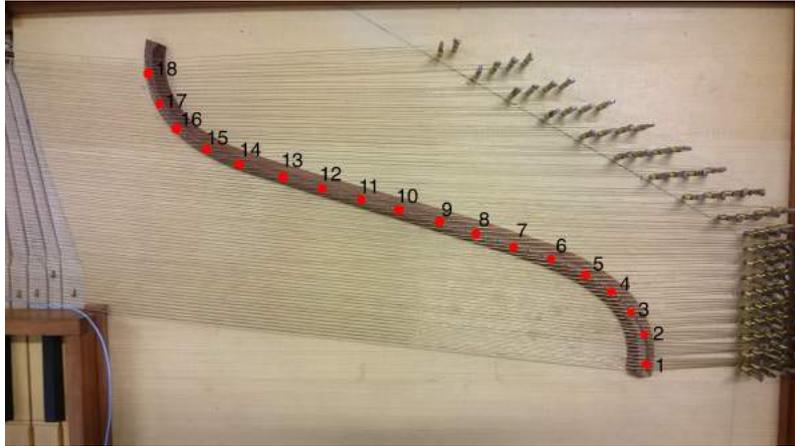


FIGURE 11 – chevalet du clavicorde avec les points de discrétisation afin d'effectuer l'analyse modale

### 3.1.2 Analyse modale

Une fois que les mesures d'admittance sont faites, nous utilisons le logiciel MODAN pour effectuer une analyse modale des données (pour connaître le fonctionnement des algorithmes implantés dans ce logiciel, voir [9] et [17]). À l'aune de cette analyse, nous pouvons observer le mouvement vibratoire de l'ensemble des points constituant le système discret et ainsi avoir une idée du type de déformation que subit cette structure. On a observé que ces déformées suivaient une tendance différente et plus complexe de celle des déformées d'une poutre. Nous allons alors extraire la base modale du chevalet pour l'insérer ensuite dans le modèle de simulation (voir les courbes de l'annexe H). Cette analyse modale va estimer les déformées à partir d'un calcul de pôles et de résidus obtenus à partir des mesures d'admittance (voir [18]). Suite à cette procédure, nous avons identifié 18 modes, c'est à dire 18 déformées modales. Par conséquent, nous obtenons expérimentalement les déformées  $\Phi^B(\mathbf{r}_s)$  que nous normalisons et qui peuvent être substituées dans l'équation 22, que nous introduisons ensuite dans le modèle de simulation Udwadia-Kalaba.

Il reste à déterminer les matrices d'inertie, de raideur et de dissipation de ce système à partir de ces déformées estimées. Pour cela, on utilise une méthode d'identification qui permet d'obtenir une approximation de ces matrices dans la base modale [11] (voir annexe G). Ce faisant, nous obtenons l'ensemble des informations pour simuler le comportement vibratoire du chevalet.

### 3.2 Mesures vibratoires

Ici, nous nous attardons sur l'étude du transfert d'énergie vibratoire entre la corde excitée et les cordes mortes du clavicorde d'étude. Pour ce faire, nous allons décrire le dispositif de mesure permettant de répéter la même excitation. Les résultats de transfert d'énergie avec le vibromètre laser seront présentés. Enfin, une observation du mouvement de la corde excitée et de la corde morte dans les deux polarisations du mouvement sera mise en avant.

#### 3.2.1 Excitation par doigt robotisé

Pour effectuer des mesures de vibration, nous voudrions répéter sur toutes nos mesures le même enfoncement de la touche mettant en vibration la corde considérée afin que chacune des mesures se rapporte au même phénomène vibratoire. Pour cela, il nous faut un dispositif nous permettant de nous assurer de l'hypothèse de répétabilité de l'excitation. Le doigt robotisé dont la trajectoire et la vitesse de celle-ci peuvent être programmées permet de respecter cette hypothèse [19].



FIGURE 12 – Disposition du laser Keyence pour la mesure du déplacement de la tangente de la corde que l'on met en excitation

Nous souhaitons confirmer l'hypothèse de répétabilité de la trajectoire du doigt robotisé en mesurant l'enfoncement de la touche du clavicorde et du soulèvement de la tangente. Nous faisons ces mesures sur la note *Fa3* du clavicorde et garderons cette note pour toute la suite de l'étude vibratoire. Pour cela, nous avons utilisé un laser qui fonctionne par triangulation laser qui vient mesurer le déplacement de la cible (profilomètre Keyence).

On répète dix fois ces mesures de déplacement. On constate sur la figure 13 que, en les superposant, les dix trajectoires mesurées dans les deux types de mesure sont effectivement identiques. Par conséquent, nous pouvons valider notre hypothèse de répétabilité s'agissant de la trajectoire du doigt robotisé.

D'autre part, nous voudrions vérifier que la trajectoire du doigt robotisé est équivalente à celle d'un musicien. Nous estimons cette équivalence à partir de la vitesse d'impact de la tangente mettant en vibration la corde. La figure 25 de l'annexe F montre un signal de vitesse obtenu à partir de la mesure du déplacement de la tangente mettant en excitation la corde considérée. On remarque que ce signal est similaire à ceux obtenus dans l'étude de d'Alessandro [7] et sont de même ordre de grandeur, c'est à dire de l'ordre du mètre par seconde. On peut donc considérer que la trajectoire du doigt robotisé est équivalente à celle d'un musicien.

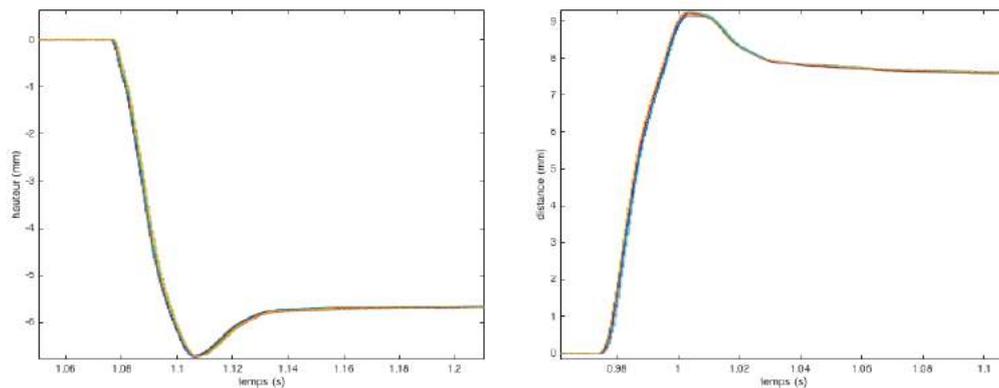


FIGURE 13 – Dix mesures de l’enfoncement de la touche au niveau du doigt robotisé (à gauche) et du soulèvement de la tangente (à droite) avec la même trajectoire

### 3.2.2 Mesures vibratoires d’une corde

Avec le vibromètre laser, nous ne pouvons mesurer que la vibration de la corde selon un seul axe. On ne peut pas obtenir d’information sur la polarisation transverse horizontale avec cet appareil de mesure, car il est impossible d’orienter le laser vers cette polarisation de la corde placée sur l’instrument. La seule façon de pouvoir comparer les deux polarisations du mouvement est d’installer deux fourches optiques sur cette corde, chacune mesurant le déplacement de la corde dans une des polarisations. Ces fourches doivent être calibrées en effectuant une mesure où le faisceau optique est obstrué par un obstacle opaque et une mesure où rien ne vient à l’encontre de ce faisceau (sur le fonctionnement de ces fourches optiques, voir [13]). Elles n’ont pas été utilisées pour les mesures vibratoires de la section 3.2.3 car les distances entre chaque corde de l’instrument sont trop proches. Elles ne peuvent être installées que si les cordes voisines de celle qui est considérée sont tout d’abord désaccordées puis décalées. Ainsi, nous prenons le cas particulier de la corde de  $Fa3$  pour mesurer la vibration de la partie vibrante de la corde avec une paire de fourches optiques, et celle de la partie morte avec une autre paire (voir la figure 14). Nous pouvons alors, à partir de l’excitation issue de la trajectoire du doigt robotisé, comparer l’amplitude vibratoire des deux polarisations du mouvement de chaque partie de la corde.

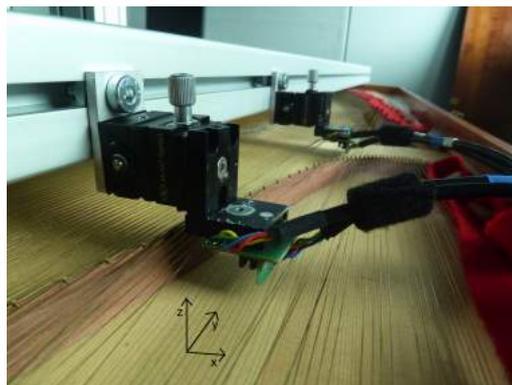


FIGURE 14 – Fourches optiques placées au niveau de la partie morte et de la partie jouée de la deuxième corde de  $Fa3$

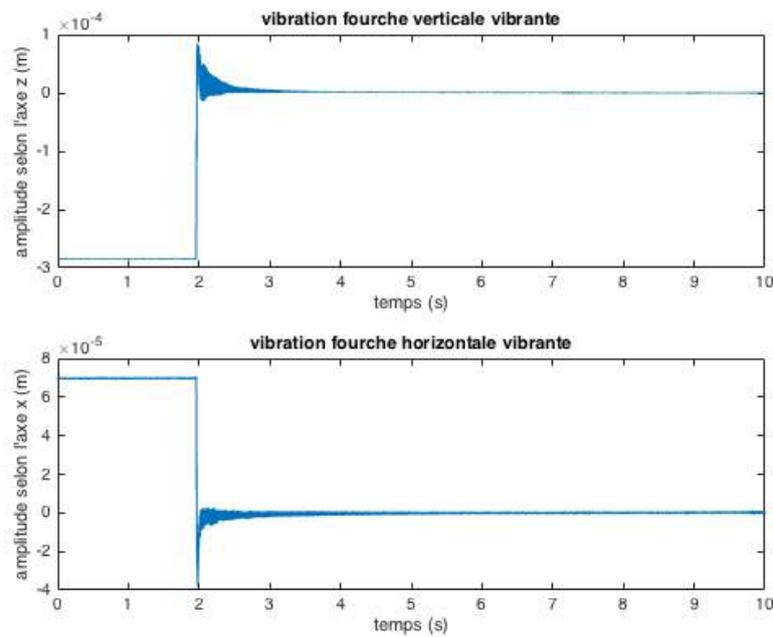


FIGURE 15 – Mouvement vibratoire de la corde vibrante de Fa3 au point de mesure situé à 34 cm par rapport à la tangente

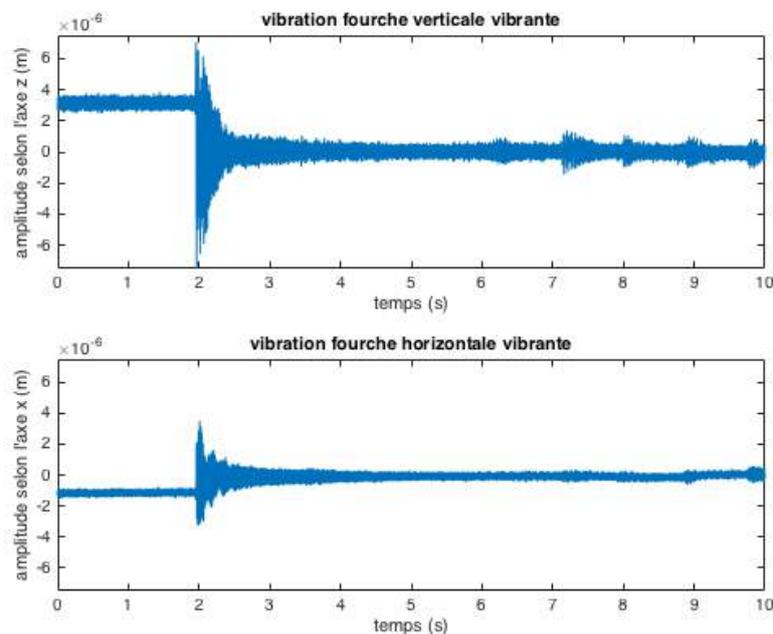


FIGURE 16 – Mouvement vibratoire de la corde morte de Fa3 au point de mesure situé à 11,5 cm par rapport au chevalet

On remarque sur la figure 15 que le début du signal ressemble à un échelon, avant de constater la vibration de la corde suite à l'excitation. Effectivement, lorsque le doigt robotisé enfonce la touche, la tangente correspondante va soulever la corde en même temps qu'elle la met en excitation. La corde est plus levée selon l'axe  $z$  que selon l'axe  $x$ , cela en sachant que la direction du mouvement de la tangente est l'axe  $z$ .

On observe aussi sur la figure 15 que l'amplitude vibratoire de la corde jouée de  $Fa3$  excitée dans la polarisation verticale du mouvement, qui d'ailleurs est celle de l'excitation donnée par la

tangente, est environ 10 fois supérieure à l'amplitude vibratoire dans la polarisation transverse horizontale. Donc l'hypothèse qui consiste à ne considérer que la polarisation verticale du mouvement s'agissant de la corde jouée est plutôt raisonnable. On constate sur la figure 16 la vibration de la corde morte selon l'axe  $z$  et l'axe  $x$  correspondant à la corde jouée de  $Fa3$  mise en excitation. On remarque un faible soulèvement de la corde lors de l'instant de l'excitation. Par contre, on se rend compte que l'amplitude vibratoire des deux polarisations du mouvement sont de même ordre de grandeur. Par conséquent, on ne peut pas appliquer la même hypothèse s'agissant de la vibration de la corde morte.

### 3.2.3 Mesures vibratoires des cordes

Pour valider notre modèle de simulation, il faut effectuer des mesures de vibration de la corde excitée et des cordes mortes. Notons ici que, contrairement à l'effet de réverbération que l'on a observé dans les mesures acoustiques, on veut ici mettre en évidence l'effet de sympathie, dans le sens où certains partiels des cordes mortes ont la même fréquence que certains partiels de la corde excitée et donc possèdent une énergie spectrale vibratoire beaucoup plus élevée. Par conséquent, on voudrait mettre en exergue ce phénomène par des mesures vibratoires. Pour ce faire, nous utilisons un vibromètre laser qui mesure en un point de la corde sa vitesse suivant l'axe du faisceau (voir figure 17).

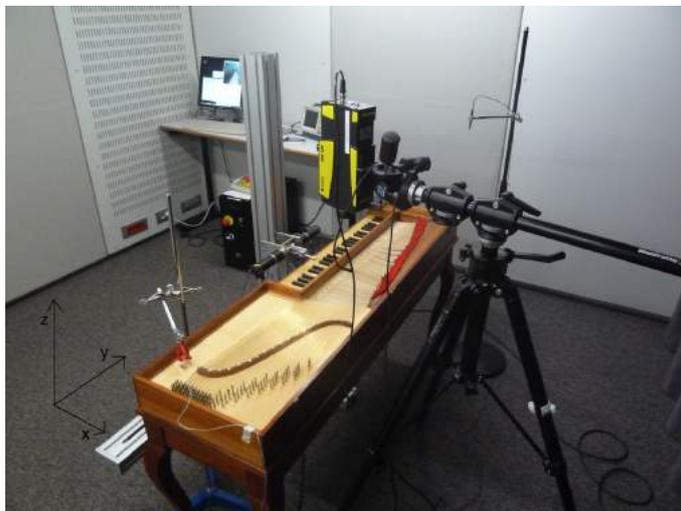


FIGURE 17 – dispositif de mesure de vibrations de cordes mortes au vibromètre laser.

Aussi, nous aimerions mesurer la vibration de chaque corde morte avec la même excitation. Par conséquent, nous mesurons la vitesse de déplacement de chaque corde morte une à une à un point situé à 2 cm du chevalet en répétant la même trajectoire effectuée par le robot jouant la note  $Fa3$ . On peut observer sur la figures 18 les signaux obtenus par le vibromètre sur la partie jouée de la première corde de  $Fa3$  -  $Fa\sharp3$  et sur la partie morte de la première corde de  $Do5$  -  $Do\sharp5$ . On remarque que la vibration de la corde mise en vibration est dix fois plus prépondérante que le signal de la corde morte, ce qui est cohérent. De surcroît, on note sur la figure 18 que le début du signal vibratoire de la corde morte commence par s'accroître de plus en plus avant d'arriver dans une phase de décroissance. En effet, le début de ce signal correspond à l'énergie immédiate reçue dès la mise en vibration des deux cordes des notes  $Fa3$  -  $Fa\sharp3$ . Ensuite, au fur et à mesure, certaines composantes fréquentielles commencent à voir leur énergie augmentée due à leur rapport harmonique avec les partiels des cordes mises en excitation, et donc ces partiels se manifestent ensuite sur le signal temporel. Ceci est caractéristique de l'apparition de l'effet de sympathie.

Pour pouvoir estimer quels sont les partiels des cordes mortes qui se manifestent le plus par effet de sympathie, nous effectuons un calcul d'énergie spectrale pour chaque partial selon la formule suivante :

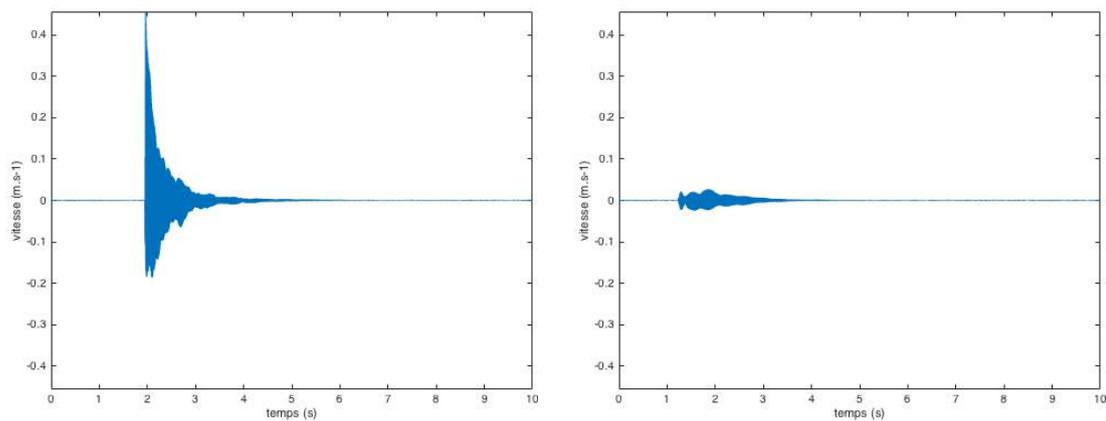


FIGURE 18 – Signal de vitesse de la partie jouée de la première corde de  $Fa\flat-Fa\sharp\flat$  et de la partie morte de la première corde de  $Do\flat-Do\sharp\flat$  au point de mesure situé à 2 cm du chevalet suite à l'excitation donnée par le doigt robotisé sur la note  $Fa\flat$

$$E = \int_{f_{nmin}}^{f_{nmax}} |X(f)|^2 df \quad (28)$$

où  $E$  représente l'énergie spectrale,  $f_{nmin}$   $f_{nmax}$  sont respectivement la borne inférieure et la borne supérieure du filtre passe bande appliqué au partiel considéré, de sorte que la bande passante du filtre soit de 50 Hz. Ainsi, nous pouvons comparer l'énergie spectrale de chaque partiel.

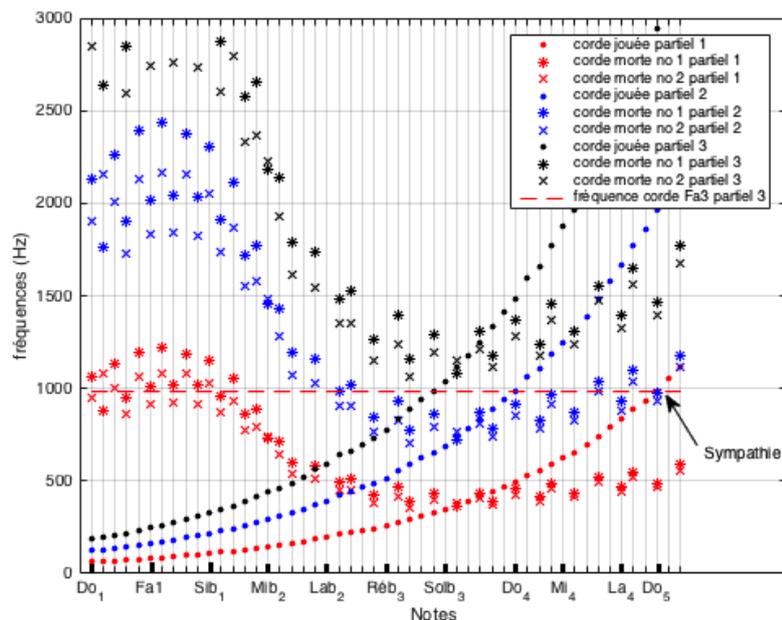


FIGURE 19 – Mesure des fréquences fondamentales des cordes sympathiques et calcul de leurs harmoniques, et mesure des fréquences fondamentales des cordes jouées

Sur la figure 19, sachant que dans nos mesures vibratoires nous mettons en excitation la note  $Fa\flat$ , on peut déjà prédire quels sont les partiels des cordes sympathiques qui vont recevoir le plus d'énergie vibratoire. En guise d'illustration, on peut mettre à l'index la première corde de  $Do\flat-Do\sharp\flat$  où le deuxième partiel de cette corde est très proche du troisième partiel de la note  $Fa\flat$ . Or, sur

la figure 20 où l'ensemble des énergies du deuxième partiel de toutes les cordes sympathiques issues de l'excitation des cordes correspondant à la note  $Fa_3$  est présenté, on peut noter qu'effectivement le deuxième partiel du deuxième doublet de la paire de corde de  $Do_5 - Do\sharp_5$  possède une énergie spectrale plus élevée que les autres partiels. On retrouve par conséquent dans ces mesures l'effet de sympathie se manifestant dans le comportement vibratoire du clavicorde (pour voir l'énergie transférée aux autres partiels, voir l'annexe K).

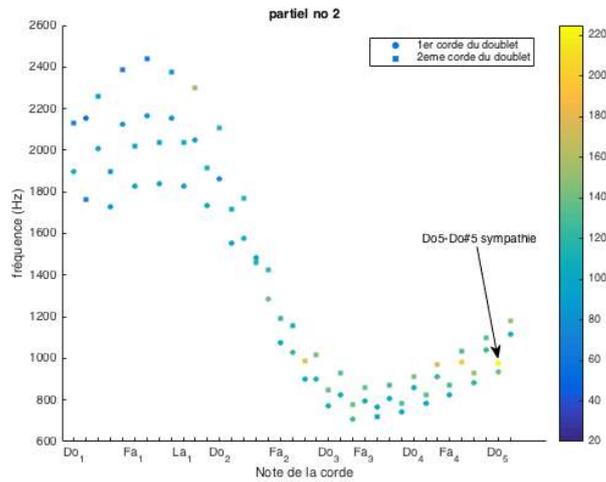


FIGURE 20 – Énergie des deuxièmes partiels des cordes sympathiques

### 3.3 Validation du modèle

On veut ici confronter les résultats de la simulation numérique et les résultats expérimentaux s'agissant du mouvement vibratoire de la partie excitée de la corde de  $Fa\flat$  et de la partie morte de celle-ci. En premier lieu, nous avons comparé sur la figure 22 le mouvement vibratoire simulé de la corde excitée (pour les paramètres de la corde considérée, voir l'annexe J) et le mouvement mesuré expérimentalement, ayant excité la corde avec un fil de cuivre de 0.05 mm de diamètre à 1 cm de la tangente en contact avec la corde afin d'obtenir une condition initiale se rapprochant de l'idéal (voir figure 21). En effet, nous tirons la corde avec le fil de cuivre selon l'axe  $z$  jusqu'à ce que le fil casse suite à la tension de la corde exercée sur celui-ci. En procédant ainsi, la corde se met à vibrer suite à une condition initiale en déplacement sans que le fil ne vienne perturber sa vibration. Le point d'excitation est localisé à 2 cm de la tangente. Pour la vibration simulée, nous avons introduit une force ayant la forme d'une rampe qui devient nulle au moment où la hauteur de la corde pincée dans la simulation atteint celle obtenue expérimentalement avec le fil de cuivre.

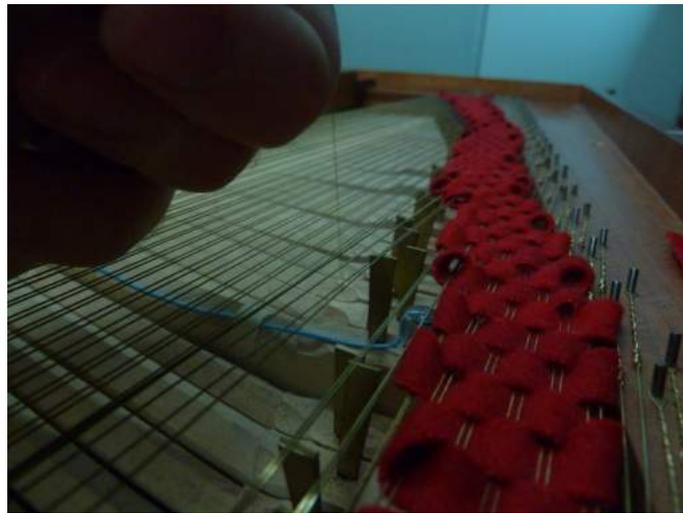


FIGURE 21 – Excitation de la corde à 2 cm de la tangente avec un fil de cuivre de 0.05 mm de diamètre.

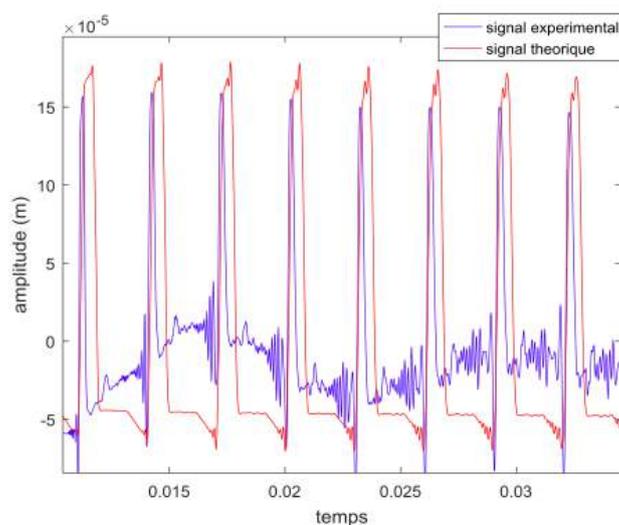


FIGURE 22 – Comparaison entre un signal temporel vibratoire expérimental de la corde de  $Fa\flat$  de la partie jouée obtenu avec un fil de cuivre de 0.05 mm de diamètre à 2 cm de l'extrémité avec un signal issu de la simulation numérique

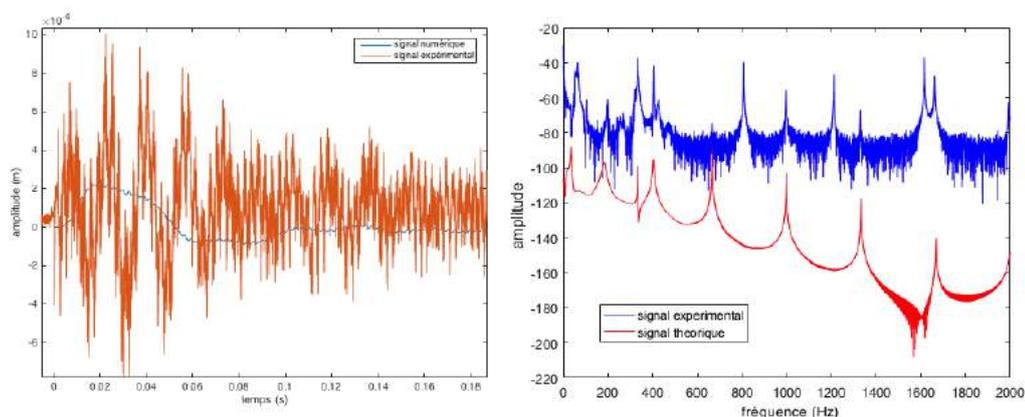


FIGURE 23 – Comparaison entre un signal vibratoire expérimental de la corde de *Fa3* de la partie morte obtenu avec un fil de cuivre de 0.05 mm de diamètre avec un signal issu de la simulation numérique, d'un point de vue temporel (à gauche) et d'un point de vue spectral (à droite)

On remarque une bonne concordance entre les deux signaux, ce qui montre l'aspect pertinent du modèle utilisé. On note aussi sur le signal expérimental la manifestation de la dispersion due à la raideur de la corde, ce qui est absent du signal théorique puisqu'on a considéré une corde souple.

Selon la même excitation, nous comparons les signaux vibratoires de la partie morte de la corde de *Fa3* provenant de l'expérience et de la simulation. Ces signaux ne semblent pas pour l'instant comparables (voir figure 23), car les énergies spectrales du signal issu de la simulation sont beaucoup plus faibles que celles du signal expérimental. Toujours est-il, d'après cette même figure, qu'il y a eu transfert d'énergie de la corde excitée à la corde morte dans notre modèle de simulation. En effet, on peut apercevoir de l'énergie spectrale aux niveaux des partiels de la corde excitée sur le signal de la corde morte issu de la simulation, dont la fondamentale se situe à 330 Hz. Aussi, on remarque sur la figure 23 la présence de la fondamentale de la corde vibrante située à 401 Hz. En revanche, on n'observe aucune des harmoniques de cette fondamentale sur le signal de simulation, contrairement au signal expérimental. La cause majeure de cet état de fait est la simplicité de la condition de couplage entre la corde et le chevalet, qui ne prend pas en compte la pointe qui maintient la corde au contact avec le chevalet et qui est responsable en grande partie de la transmission de l'énergie vibratoire. Cet aspect de la facture instrumentale du clavicorde n'est pas pris en compte pour l'instant dans le modèle.

## 4 Conclusion

Nous avons pu nous rendre compte dans les mesures acoustiques de la différence entre effet de réverbération et effet de sympathie, où le premier concerne le rayonnement de l'ensemble des fréquences des cordes mortes par la table d'harmonie lorsqu'elle reçoit de l'énergie vibratoire, et le deuxième renvoie à la prépondérance de l'énergie spectrale des partiels d'une corde sympathique lorsque ces partiels sont en rapport harmonique avec les partiels de la corde excitée. La manifestation de l'effet de sympathie est plus liée au comportement vibratoire du clavicorde qu'au rayonnement acoustique, où l'effet de réverbération est mis en avant. Pour étudier d'un point de vue vibratoire l'effet de sympathie, un modèle adapté de couplage mécanique entre les cordes et le chevalet a été élaboré en y incluant des données expérimentales, notamment la mobilité du chevalet. Ce modèle met en évidence l'effet de sympathie, et une comparaison entre les résultats théoriques du modèle et les résultats expérimentaux a été établie. Le calcul d'énergie spectrale des harmoniques de chaque cordes mortes permet d'identifier clairement les cordes qui subissent l'effet de sympathie à partir de l'excitation d'une des cordes de l'instrument. Le modèle met en évidence ce phénomène de sympathie de la même façon que les mesures expérimentales, ce qui montre que le modèle de couplage mécanique peut rendre compte du comportement vibro-acoustique du clavicorde et peut prédire l'effet de sympathie de l'instrument à partir de données sur la facture de celui-ci.

Néanmoins, il reste des approfondissements à ajouter à ce modèle. Tout d'abord, les fourches optiques ont mis en évidence que, s'agissant de la corde morte, l'amplitude vibratoire entre la

polarisation transverse verticale et transverse horizontale sont de même grandeur. Par conséquent, il faudrait introduire dans notre modèle de simulation la polarisation transverse horizontale. De plus, le modèle de simulation, eu égard à ses fondements théoriques, peut prendre en compte d'autres types de forces comme les frottements et les efforts non-linéaires. On pourrait alors modéliser la force de contact entre la corde et la pointe du chevalet, ce qui rendrait les résultats de notre simulation beaucoup plus pertinents. Une étude plus précise pour calculer les amortissements des cordes doit être faite, en faisant des mesures vibratoires sur une corde isolée sur un banc de corde. Il faut aussi considérer une complexification du couplage corde-chevalet et de la transmission d'énergie vibratoire entre ces deux structures. De plus, une simulation prenant en compte plus de modes, selon notre étude de convergence de la partie 2.6 devra être considérée. On sait que l'angle de déviation entre la partie jouée et la partie morte de la corde créé par la pointe du chevalet est un élément qui est déterminant pour le son rayonné. Cet angle a donc une influence sur le comportement vibratoire de l'instrument et devrait être pris en compte.

## Références

- [1] Jose Antunes and Vincent Debut. Dynamical computation of constrained flexible systems using a modal udwadia-kalaba formulation : Application to musical instruments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(2) :764–778, 2017.
- [2] Ara Arabyan and Fei Wu. An improved formulation for constrained mechanical systems. *Multibody System Dynamics*, 2(1) :49–69, 1998.
- [3] Stefan Bilbao. *Numerical sound synthesis : finite difference schemes and simulation in musical acoustics*. John Wiley & Sons, 2009.
- [4] Bernard Brauchli. *The clavichord*. Cambridge University Press, 1998.
- [5] Jean-Loïc Le Carrou, Francois Gautier, Nicolas Dauchez, and Joël Gilbert. Modelling of sympathetic string vibrations. *Acta Acustica united with Acustica*, 91(2) :277–288, 2005.
- [6] V Debut, J Antunes, M Marques, and M Carvalho. Physics-based modeling techniques of a twelve-string portuguese guitar : A non-linear time-domain computational approach for the multiple-strings/bridge/soundboard coupled dynamics. *Applied Acoustics*, 108 :3–18, 2016.
- [7] Christophe d'Alessandro. On the dynamics of the clavichord : From tangent motion to sound a. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 128(4) :2173–2181, 2010.
- [8] Christophe d'Alessandro and Brian FG Katz. Tonal quality of the clavichord : The effect of sympathetic strings. In *Proceedings of the International Symposium on Musical Acoustics ISMA '04, Nara, Japan*, pages 21–24, 2004.
- [9] Patrick Guillaume, Peter Verboven, Steve Vanlanduit, Herman Van Der Auweraer, and Bart Peeters. A poly-reference implementation of the least-squares complex frequency-domain estimator. In *Proceedings of IMAC*, volume 21, pages 183–192, 2003.
- [10] Michal Hajžman and Pavel Polach. Application of stabilization techniques in the dynamic analysis of multibody systems. 2007.
- [11] Jean-Loïc Le Carrou. *Vibro-acoustique de la harpe de concert*. PhD thesis, Université du Maine, 2006.
- [12] Jean-Loïc Le Carrou, François Gautier, and Roland Badeau. Sympathetic string modes in the concert harp. *Acta Acustica united with Acustica*, 95(4) :744–752, 2009.
- [13] Jean-Loïc Le Carrou, Delphine Chadefaux, Léonard Seydoux, and Benoit Fabre. A low-cost high-precision measurement method of string motion. *Journal of Sound and Vibration*, 333(17) :3881–3888, 2014.
- [14] Miguel Marques, José Antunes, and Vincent Debut. Coupled modes and time-domain simulations of a twelve-string guitar with a movable bridge. In *Proceedings of SMAC Stockholm Music Acoustics Conference 2013 and Sound and Music Computing Conference*, pages 1–8, 2013.
- [15] Maria Augusta Neto and Jorge Ambrósio. Stabilization methods for the integration of dae in the presence of redundant constraints. *Multibody System Dynamics*, 10(1) :81–105, 2003.
- [16] Fredrik Öberg and Anders Askenfelt. Acoustical and perceptual influence of duplex stringing in grand pianos. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 131(1) :856–871, 2012.

- [17] Bart Peeters, Herman Van der Auweraer, Patrick Guillaume, and Jan Leuridan. The polymax frequency-domain method : a new standard for modal parameter estimation? *Shock and Vibration*, 11(3-4) :395–409, 2004.
- [18] Jean Piranda. Analyse modale expérimentale. *Techniques de l'ingénieur. Bruit et vibrations*, (R6180), 2001.
- [19] Alexandre Roy. *Développement d'une plate-forme robotisée pour l'étude des instruments de musique à cordes pincées*. PhD thesis, Paris 6, 2015.
- [20] Richard Roy and Thomas Kailath. Esprit-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques. *IEEE Transactions on acoustics, speech, and signal processing*, 37(7) :984–995, 1989.
- [21] Ahmed A Shabana. *Computational dynamics*. John Wiley & Sons, 2009.
- [22] Suzanne Thwaites and Neville H Fletcher. Some notes on the clavichord. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 69(5) :1476–1483, 1981.
- [23] Claude Valette and Christian Cuesta. *Mécanique de la corde vibrante*. Hermes, 1993.
- [24] Vesa Välimäki and Cumhur Erkut. Commuted waveguide synthesis of the clavichord. *Computer Music Journal*, 27(1) :71–82, 2003.
- [25] Gabriel Weinreich. Coupled piano strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 62(6) :1474–1484, 1977.
- [26] Stephanie Weisser and Matthias Demoucron. Shaping the resonance. sympathetic strings in hindustani classical instruments. In *Proceedings of Meetings on Acoustics 163ASA*, volume 15, page 035006. ASA, 2012.
- [27] Jim Woodhouse. On the synthesis of guitar plucks. *Acta Acustica united with Acustica*, 90(5) :928–944, 2004.

# Annexes

## A Formalisme Udwadia-Kalaba

### A.1 Démonstration des équations dynamiques

La formulation U-K découle du principe de moindre action de Gauss, dont l'une des approches pour obtenir les équations de celle-ci est mise en évidence dans l'article de Jose Antunes et de Vincent Debut [1]. On considère un système de  $N$  particules avec matrice d'inertie  $\mathbf{M}$ . Ce système est soumis à un champ de force extérieur  $\mathbf{F}_e(t)$  composé de forces de contraintes indépendantes et d'un ensemble de  $P = P_h + P_{nh}$  contraintes holonomiques et non holonomiques qui dépend du déplacement du système  $\mathbf{x}(t)$  et de sa vitesse  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ . Ces contraintes peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\phi_p(\mathbf{x}, t) = 0, \quad p = 1, 2, \dots, P_h \quad (29)$$

$$\psi_p(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = 0, \quad p = P_h + 1, 2, \dots, P \quad (30)$$

où  $\phi_p$  et  $\psi_p$  caractérisent les contraintes du système. Aussi, en dérivant une ou deux fois les équations 29 et 30, ces dernières peuvent s'écrire comme une équation matricielle de contraintes du système en terme d'accélération :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)\ddot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{b}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t). \quad (31)$$

où  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{b}$  dépendent du mouvement. Les  $P$  contraintes ne sont pas nécessairement indépendantes, le rang de la matrice  $\mathbf{A}$  est donc inférieur ou égal à  $P$ .

Le déplacement  $\mathbf{x}_u$  du système non-contraint est donné par l'équation de la dynamique suivante :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{F}_e \rightarrow \ddot{\mathbf{x}}_u = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e \quad (32)$$

Par ailleurs, la solution  $\mathbf{x}$  du système contraint, contrairement au système non-contraint, dépend de surcroît des forces contraintes du vecteur  $\mathbf{F}_c$  :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_c \quad (33)$$

En utilisant la méthode de Lagrange (voir [21]), on définit le vecteur  $\lambda(t)$  de la manière suivante :

$$\mathbf{F}_c = -\mathbf{A}^T\lambda \quad (34)$$

Donc à partir de l'équation 33 :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^T\lambda = \mathbf{F}_e \quad (35)$$

Les équations 31 et 35 nous permettent de construire une équation matricielle régissant la dynamique du système contraint :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (36)$$

Au demeurant, on suppose que la matrice de l'équation 36 est inversible, ce qui implique qu'il n'y a pas de masses dans  $\mathbf{M}$  égalent à zéro et que  $\mathbf{A}$  est une matrice de contraintes remplie. On obtient alors :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{F}_e \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (37)$$

Comme il a été mis en évidence par Arabyan et Wu [2], on peut écrire la matrice inversée de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} \\ (\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1} & -(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Par conséquent, les équations 36 et 38 nous mènent à l'expression de l'accélération du système dynamique :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{x}} &= (\mathbf{M}^{-1} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1})\mathbf{F}_e + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e) \end{aligned} \quad (39)$$

En d'autres termes, en utilisant l'équation 32, nous obtenons

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_u + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_u) \quad (40)$$

L'équation 40 est intéressante en ceci qu'elle met en évidence que la dynamique du système contraint résulte d'une correction apportée à la dynamique du système non-contraint issue des conditions de couplage. D'autre part, on peut de même à partir de l'équation 36 obtenir l'expression du multiplicateur de Lagrange  $\lambda(t)$  :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= (\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e - (\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}\mathbf{b} \\ &= -(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e) \end{aligned} \quad (41)$$

Puis, à partir des équations 34 et 41, nous pouvons déduire l'expression du vecteur des efforts de contraintes  $\mathbf{F}_c(t)$  :

$$\mathbf{F}_c(t) = \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_e) \quad (42)$$

Au demeurant, on définit la matrice  $\mathbf{B}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{M}^{-1/2}$ . Ceci nous permet de réécrire le second terme de l'équation 40 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1} &= \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{A}^T)^{-1} \\ &= \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{B}^T)^{-1} = \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{B}^+ \end{aligned} \quad (43)$$

On obtient alors l'équation dynamique du système contraint correspondant à l'équation 3 :

$$\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_u + \mathbf{M}^{-1/2}\mathbf{B}^+(\mathbf{b} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_u). \quad (44)$$

Du reste, à partir de l'équation 42, on retrouve le résultat correspondant à l'équation 4 :

$$\mathbf{F}_c(t) = \mathbf{M}^{1/2}\mathbf{B}^+(\mathbf{b} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}_u). \quad (45)$$

## A.2 Projection des matrices dans la base modale

Nous voudrions écrire les équations Udwadia-Kalaba en considérant un développement modal de la réponse physique du système vibratoire (voir [1]). Nous pouvons réécrire le développement modal de l'équation 6 sous forme matricielle :

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}\mathbf{q} \quad (46)$$

où  $\mathbf{x}$  correspond au vecteur contenant les réponses physiques du système vibratoire,  $\mathbf{q}$  le vecteur des amplitudes modales, et  $\mathbf{\Phi}$  la matrice des déformées modales, que l'on définit de la façon suivante :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^1 \\ \mathbf{x}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}^S \end{pmatrix} \quad (47)$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{q}^S \end{pmatrix} \quad (48)$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{\Phi}^S \end{bmatrix} \quad (49)$$

Sachant que la base modale du sous-système vibratoire  $s$  avec  $N_s$  modes se définit comme suit :

$$\mathbf{q}^s(t) = \begin{pmatrix} q_1^s(t) \\ q_2^s(t) \\ \vdots \\ q_{N_s}^s(t) \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (50)$$

$$\mathbf{\Phi}^s = \begin{pmatrix} \phi_1^s(\mathbf{r}_1^s) & \phi_2^s(\mathbf{r}_1^s) & \dots & \phi_{N_s}^s(\mathbf{r}_1^s) \\ \phi_1^s(\mathbf{r}_2^s) & \phi_2^s(\mathbf{r}_2^s) & \dots & \phi_{N_s}^s(\mathbf{r}_2^s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^s(\mathbf{r}_{R_s}^s) & \phi_2^s(\mathbf{r}_{R_s}^s) & \dots & \phi_{N_s}^s(\mathbf{r}_{R_s}^s) \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, \dots, S. \quad (51)$$

où  $R = 1, 2, \dots, R_s$  met en évidence les coordonnées où la déformée modale est définie. En dérivant deux fois l'équation 46 et en la substituant dans l'équation 3, on obtient donc :

$$\mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} + \mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}}) \quad (52)$$

Puis, on définit la matrice d'inertie modale  $\mathbf{M} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi}$ , et donc sa matrice inverse  $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{\Phi}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^T$ . De ces définitions et de l'équation 52, on a :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}} + \mathbf{\Phi}^T\mathbf{A}^T(\mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{A}^T)^{-1}(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\ddot{\mathbf{q}}_{\mathbf{u}}) \quad (53)$$

En introduisant la matrice de contraintes modale  $\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}$ , on en déduit :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}_u + M^{-1} \mathbf{A}^T (\mathbf{A} M^{-1} \mathbf{A}^T)^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A}^T \ddot{\mathbf{q}}_u) \quad (54)$$

Après avoir défini la matrice  $\mathbf{B} = \mathbf{A} M^{-1/2}$ , on parvient alors à l'équation du mouvement vibratoire dans la base modale :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \ddot{\mathbf{q}}_u + M^{1/2} \mathbf{B}^+ (\mathbf{b} - \mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}}_u). \quad (55)$$

## B La condition de stabilité

On cherche à déterminer la condition de stabilité de l'équation 25. Pour ce faire, on utilise une méthode numérique présentée par Bilbao [3]. On considère l'équation différentielle sans second membre du système conservatif associé et on la discrétise avec un pas de temps  $\Delta_t$ , tel que  $\mathbf{q} = \mathbf{q}^n$  :

$$\frac{\mathbf{q}^{n+1} - 2\mathbf{q}^n + \mathbf{q}^{n-1}}{\Delta_t^2} = -\mathbf{W} M^{-1} \mathbf{K} \mathbf{q}^n \Leftrightarrow \mathbf{q}^{n+1} = (2\mathbf{I} - \Delta_t^2 \mathbf{W} M^{-1} \mathbf{K}) \mathbf{q}^n - \mathbf{q}^{n-1} \quad (56)$$

Puis, on effectue un *Ansatz* de la forme  $u^n = \phi z^n$  pour obtenir une équation aux valeurs propres :

$$\Delta_t \mathbf{W} M^{-1} \mathbf{K} \phi = -(z - 2 + z^{-1}) \phi \quad (57)$$

On souhaite que les racines de cette équation soient des complexes conjugués. Pour cela, on peut montrer [3] qu'il faut respecter la condition suivante :

$$\Delta_t \leq \frac{2}{\max(\text{eig}(\mathbf{W} M^{-1} \mathbf{K}))} \quad (58)$$

## C la stabilisation de Baumgarte

Lors de l'intégration numérique de l'équation 25, de petites erreurs peuvent entraîner le non-respect des conditions de contraintes définies par l'équation 23 et ainsi mener à des instabilités numériques. Pour pallier ce problème, on peut introduire des termes de retour qui vont pénaliser la réponse du système si les conditions de continuité venaient à être transgressées [15]. Ces termes sont introduits au sein de l'équation 23 de la façon suivante :

$$\mathbf{A} \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{b} - 2\alpha \dot{\mathbf{q}} - \beta^2 \mathbf{q} \quad (59)$$

Dès lors, l'équation 25 devient :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \Delta_t [(\mathbf{W} M^{-1}) (-\mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{F}_{\text{ext}}) - M^{-1/2} \mathbf{B}^+ \mathbf{A} (2\alpha \dot{\mathbf{q}} + \beta^2 \mathbf{q})] \quad (60)$$

Les valeurs de  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent varier selon différentes sources [2], [10], [15]. L'une d'entre elles [15] propose  $\alpha = \beta$  variant entre 1 et 10.

## D Modèle de dissipation de la vibration de corde

Dans le cas des cordes, l'amortissement de la structure vibratoire est faible. Ceci nous permet d'ajouter une partie imaginaire à l'expression des fréquences propres prenant en compte le phénomène de dissipation. Cette dissipation provient de plusieurs phénomènes, où une étude approfondie de ces derniers a été faite par Valette et Cuesta [23]. L'une des sources de dissipation est celle qui est interne à la corde, liée aux effets de frottement lorsque la corde se met en mouvement. Ces frottements sont dus à la viscoélasticité et à la thermoélasticité du matériau et sont pris en compte par le coefficient de qualité  $Q_{\text{visc-term}}$  dont l'expression est la suivante :

$$Q_{n_{visc-term}}^{-1} = \frac{4\pi^2 \rho_L EI}{T^2} (nf_0)^2 (\delta_{ve} + \delta_{te}) \quad (61)$$

où  $E$  renvoie au module de Young de la corde,  $I$  au moment quadratique de la corde,  $T$  à la tension de la corde,  $\rho_L$  à la densité linéique de la corde, et enfin  $\delta_{ve}$  et  $\delta_{te}$  constituant la partie imaginaire du module de Young de la corde.

De plus, au niveau microscopique, la corde représente un réseau cristallin. Au cours de l'histoire de la corde, des irrégularités se forment au sein du réseau, ceci se traduisant à l'échelle macroscopique par des déformations. On symbolise cet effet par le terme  $Q_{struc}$  considéré comme une valeur constante. En sus, lors de sa vibration, la corde effectue des frottements au contact de l'air, engendrant alors des amortissements. Il est possible de modéliser ces derniers en établissant l'hypothèse d'un écoulement statique sans viscosité [23]. Ce frottement visqueux dénoté  $Q_{n_{air}}$  se modélise comme suit :

$$Q_{n_{air}}^{-1} = \frac{R}{2\pi\rho_L} (nf_0)^{-1} \quad (62)$$

où  $R$  désigne la résistance mécanique :

$$R = 2\pi\eta + 2\pi d_s \sqrt{\pi\eta_{air}\rho_{air}f} \quad (63)$$

et où  $\rho_{air}$  et  $\eta_{air}$  correspondent respectivement à la viscosité dynamique et à la densité de l'air, et  $d_s$  représente le diamètre de la corde. Cela étant, on aboutit à notre modèle d'amortissement de corde décrit par l'équation ci-contre :

$$Q_n^{-1} = Q_{n_{air}}^{-1} + Q_{n_{visc-term}}^{-1} + Q_{struc}^{-1} = \frac{R}{2\pi\rho_L} (nf_0)^{-1} + \frac{4\pi^2 \rho_L EI \delta_{ve}}{T^2} (nf_0)^2 + Q_{struc}^{-1} \quad (64)$$

## E La méthode ESPRIT

Pour extraire les paramètres modaux d'un signal vibratoire, parmi lesquels les amortissements, nous utilisons la méthode ESPRIT [20]. On fait tout d'abord l'hypothèse que le signal  $x[t]$  suit le modèle ESM (*Exponential Sinusoidal Model*) non bruité. Le signal  $x[t]$  s'écrit alors de la façon suivante :

$$x[t] = \sum_{m=1}^M \alpha_k e^{(\delta_k + jf_k)t}, \quad (65)$$

où  $\alpha_k$  représente les amplitudes complexes,  $\delta_k$  les amortissements réduits et  $f_k$  les fréquences modales réduites. Puis, la méthode ESPRIT effectue une diagonalisation de la matrice  $\hat{R}_{xx}$  appelée matrice de corrélation définie comme suit :

$$\hat{R}_{xx} = \frac{1}{N - n + 1} X X^H,$$

où  $X$  est la matrice de Hankel de dimension  $n \times (N - n + 1)$  construite avec  $N$  échantillons successifs du signal  $x$ , telle que

$$X = \begin{pmatrix} x[0] & x[1] & \dots & x[N-n] \\ x[1] & x[2] & \dots & x[N-n+1] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x[n-1] & x[n] & \dots & x[N-1] \end{pmatrix}. \quad (66)$$

Les valeurs propres de la matrice de corrélation sont classées par ordre décroissant : les vecteurs propres associés aux  $K$  plus grandes valeurs propres forment une base de l'espace signal que l'on

rassemble dans une matrice  $W$  ; les autres vecteurs propres forment une base de l'espace bruit. Par l'intermédiaire de la base de l'espace signal  $W$ , nous pouvons extraire les pôles complexes  $z_k = e^{\delta_k + jf_k}$  du signal analysé en déterminant les valeurs propres de la matrice  $\Phi$  appelée matrice spectrale :

$$\Phi = W_{\downarrow}^{\dagger} W_{\uparrow}, \quad (67)$$

où  $W^{\dagger}$  représente la pseudo inverse de la matrice  $W$  et  $W_{\downarrow}$  et  $W_{\uparrow}$  désignent respectivement la matrice obtenue par suppression de la dernière ligne de la matrice  $A$  et celle obtenue par suppression de la première ligne de la matrice  $W$ . C'est à partir de l'extraction des pôles complexes que nous déduisons les amortissements du signal vibratoire. On applique cette méthode sur le signal vibratoire issu de l'excitation avec le fil de cuivre présentée dans la partie 3.3 et on tente de faire correspondre les amortissements du modèle de dissipation (annexe D) avec les valeurs obtenues avec ESPRIT.

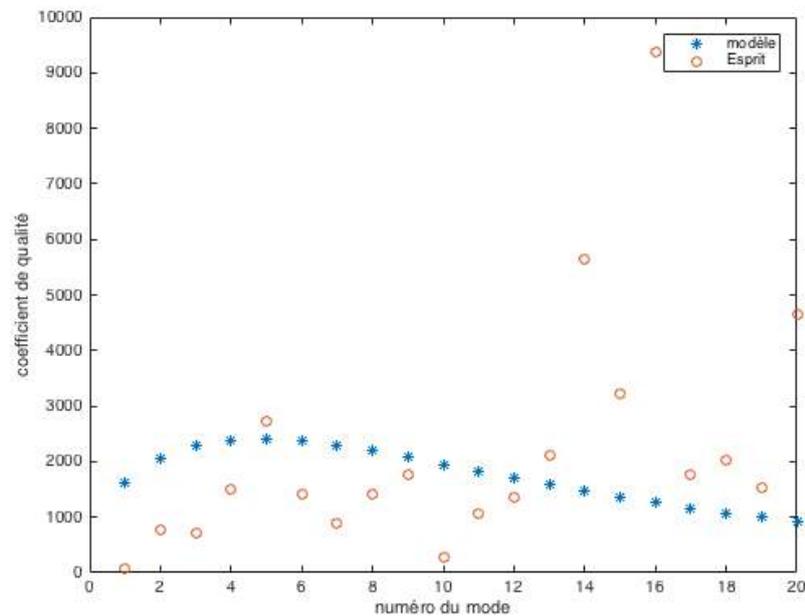


FIGURE 24 – Coefficients de qualité en fonction des fréquences, donnés par le modèle de Valette et Cuesta et donnés par la méthode ESPRIT

On remarque sur la figure 24 que, pour le moment, la correspondance entre le modèle et les résultats issus du signal expérimental n'est pas encore atteinte. En effet, le signal de base utilisé pour la méthode ESPRIT est un signal vibratoire de corde de *Fa3* installé sur le clavicorde. Donc cette corde subit l'influence du couplage avec le chevalet et la tangente, ce qui influence les amortissements de la corde. Pour obtenir de meilleurs résultats, il faudrait ré-effectuer la mesure vibratoire avec la même corde installée sur un banc de corde afin de l'isoler et enlever toute influence venant du couplage.

## F Signal de vitesse de la tangente

Voici sur la figure 25 un signal de vitesse de la tangente correspondant à la corde de *Fa3* mise en excitation par le doigt robotisé. Le début du signal correspond à la mise en excitation de la corde, lorsque la tangente est soulevée. A la fin, le signal met en évidence le relâchement de la tangente avec la corde lorsque le doigt robotisé relâche la touche.

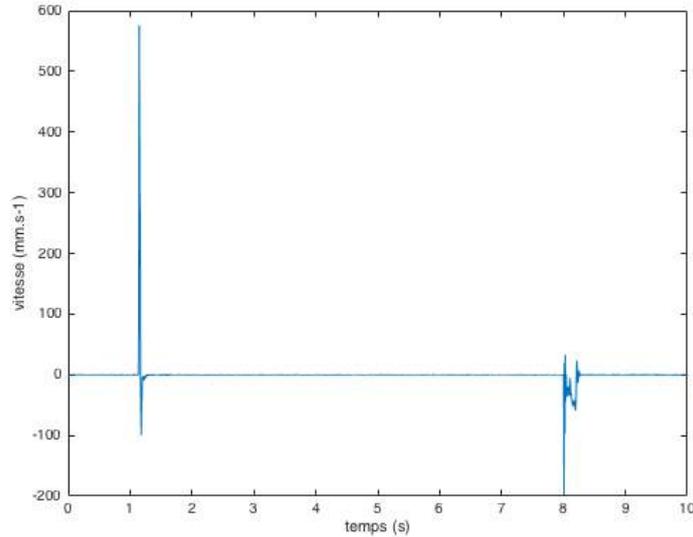


FIGURE 25 – Mesure de la vitesse de la tangente soulevée allant mettre en excitation la corde.

## G Détermination des matrices d'inertie et de raideur du chevalet

Après avoir obtenu une estimation des déformées du système vibratoire suite à notre analyse modale, tout l'enjeu est de pouvoir déterminer la matrice d'inertie et la matrice de raideur à partir de ces estimations. Pour cela, nous avons procédé à une identification à partir des modes réels [11]. En d'autres termes, les matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  vont être identifiées à partir des valeurs propres et des vecteurs propres du système conservatif associé à notre système dissipatif. En vertu du caractère conservatif du système associé, les valeurs propres  $\omega_\nu$  et les vecteurs propres  $Y_\nu$ , correspondent alors aux modes réels de ce système. Ils satisfont alors les propriétés d'orthogonalité relativement aux matrices  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{K}$  de la façon suivante :

$$Y^T \mathbf{M} Y = I_{d_N}, \quad Y^T \mathbf{K} Y = \omega^2 \quad (68)$$

où  $Y = [Y_1, \dots, Y_N]$  désigne la matrice modale et  $\omega = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_N)$  représente la matrice spectrale. C'est à partir de ces relations d'orthogonalité que nous pouvons déterminer les matrices d'inertie et de raideur dans la base modale :

$$\mathbf{M}^{-1} = Y Y^T, \quad \mathbf{K}^{-1} = Y^T \omega^{-2} Y \quad (69)$$

## H Base modale expérimentale du chevalet

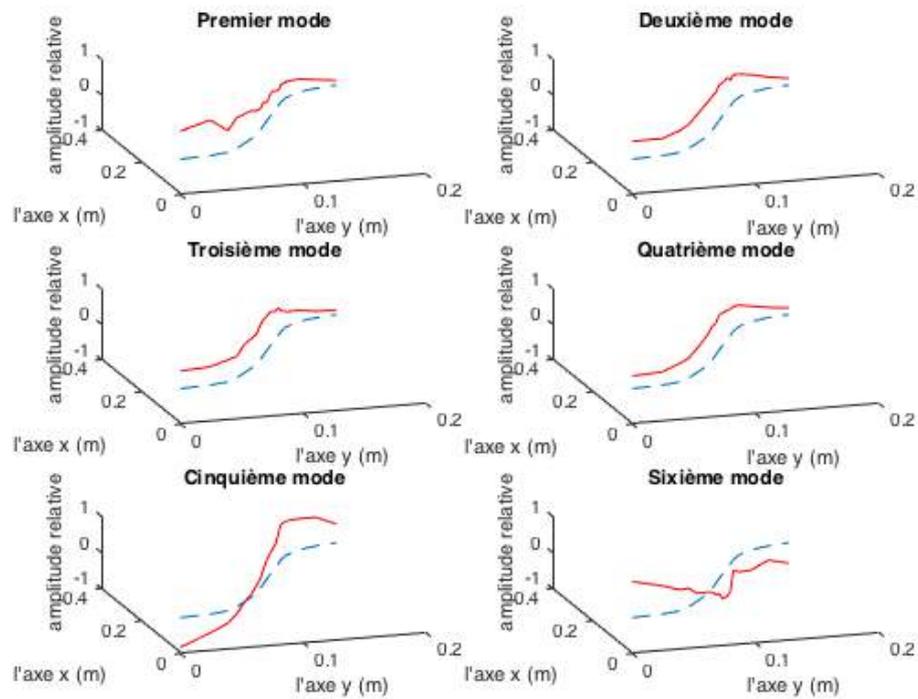


FIGURE 26 – Illustration des déformations modales expérimentales du chevalet selon le mode de vibration, allant du mode 1 au mode 6 (avec en rouge la déformée et en pointillé le chevalet au repos)

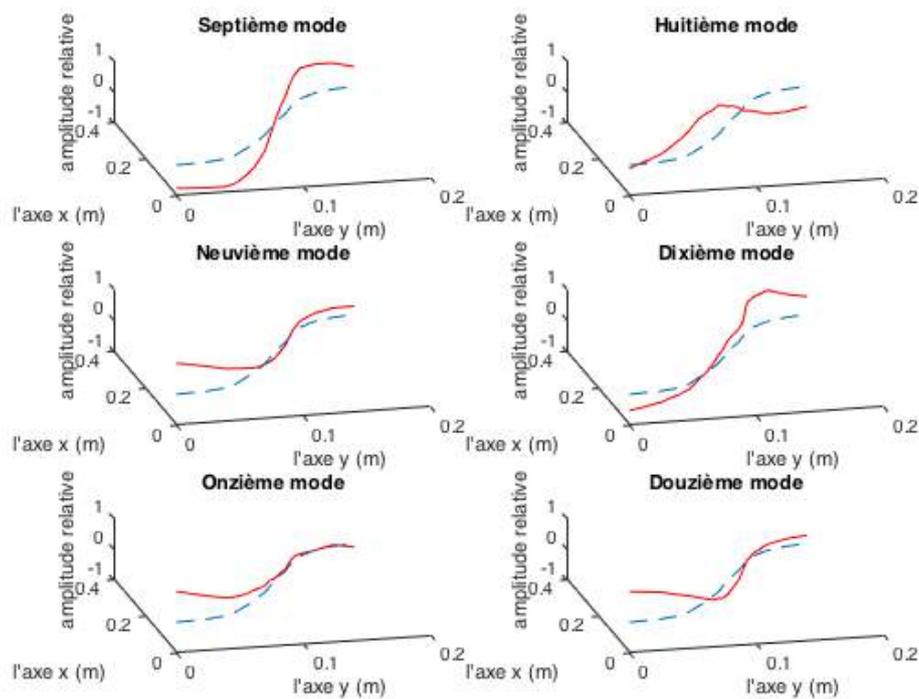


FIGURE 27 – Illustration des déformations modales expérimentales du chevalet selon le mode de vibration, allant du mode 7 au mode 12 (avec en rouge la déformée et en pointillé le chevalet au repos)

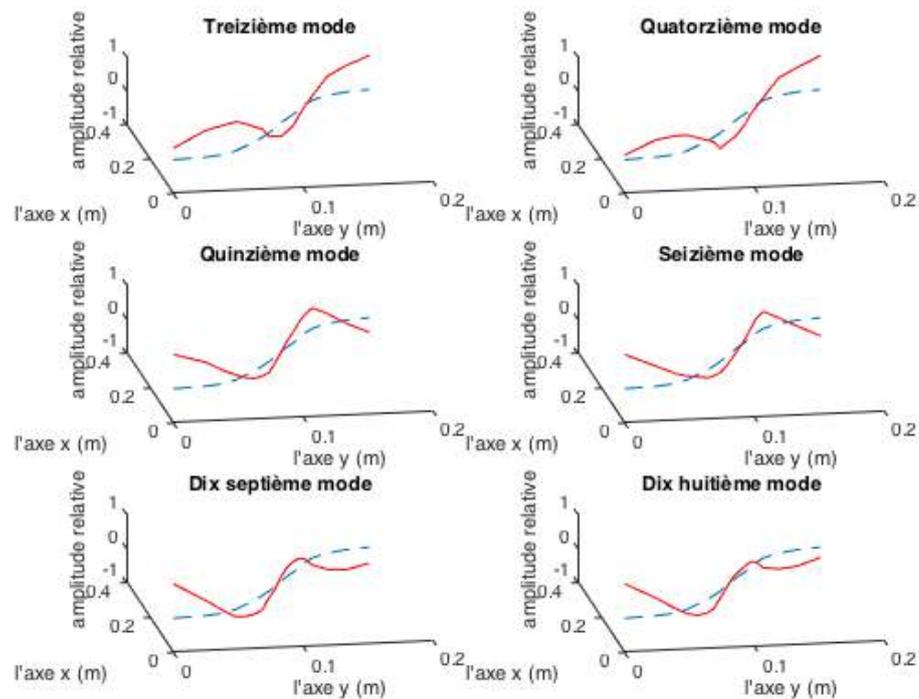


FIGURE 28 – Illustration des déformations modales expérimentales du chevalet selon le mode de vibration, allant du mode 13 au mode 18 (avec en rouge la déformée et en pointillé le chevalet au repos)

## I Courbes de convergence de la solution numérique de la vibration de la corde étudiée

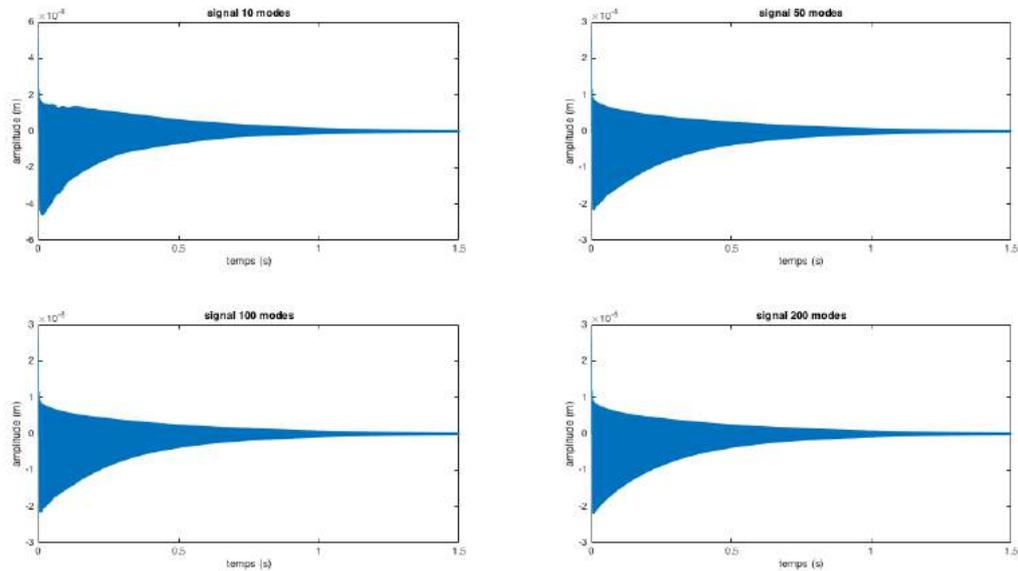


FIGURE 29 – Comparaison des courbes représentatives des signaux de simulation de la partie jouée de la corde de *Fa3* avec 10 modes, 50 modes, 100 modes et 200 modes

## J Valeurs numériques des paramètres de corde de *Fa3* du clavicorde pour la confrontation modèle-simulation

Longueur de la corde	$L = 36.9$ cm
Point de pincement	$x_p = 2$ cm
Diamètre de la corde	$d = 0.325$ mm
Matériau	laiton
fréquence fondamentale	$f_0 = 330$ Hz

## K Graphes de transfert d'énergies vibratoires de la corde excitée aux cordes mortes

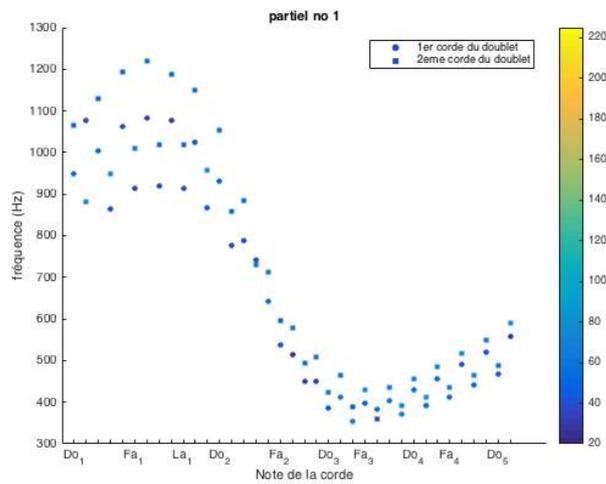


FIGURE 30 – Énergie des premiers partiels des cordes sympathiques

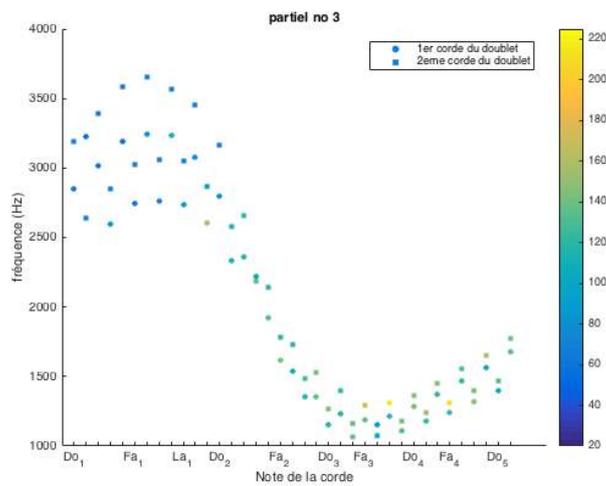


FIGURE 31 – Énergie des troisièmes partiels des cordes sympathiques

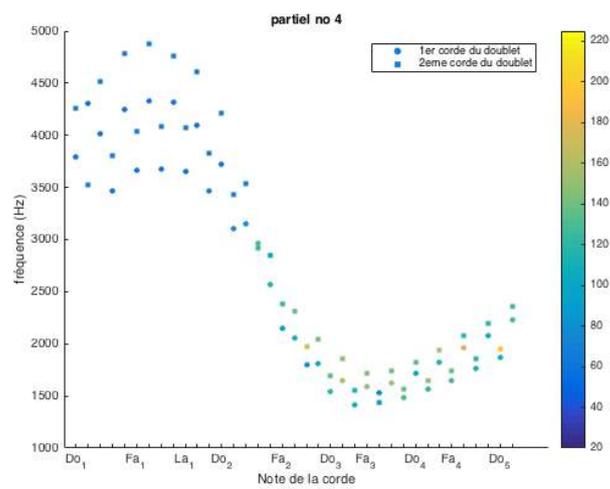


FIGURE 32 – Énergie des quatrièmes partiels des cordes sympathiques

## Résumé/ *Abstract*

Le clavicorde est un instrument de musique à clavier dont l'origine remonte au XIV<sup>ème</sup> siècle. Cet instrument possède quelques particularités s'agissant de sa facture instrumentale et de son fonctionnement acoustique. En effet, ses cordes sont mises en vibration par l'intermédiaire de tiges de métal, appelées tangentes, qui viennent rentrer en contact avec ces cordes par la pression du doigt sur les touches du clavier. Ces cordes sont toutes couplées à un même chevalet et se divisent en deux parties différentes : une partie jouée, où les tangentes frappent les cordes, qui va du sillet au chevalet, et une partie morte, qui va du chevalet aux chevilles. Lorsque les cordes jouées sont excitées, il y a un transfert d'énergie vibratoire des cordes jouées aux cordes mortes par le biais du couplage avec le chevalet. Ceci provoque la vibration des cordes mortes. On dit alors que ces cordes vibrent par sympathie. Par l'intermédiaire du rayonnement du son par la table d'harmonie, la mise en vibration des cordes mortes crée un effet de réverbération nettement audible. Dans ce travail de stage, nous voudrions étudier théoriquement et expérimentalement cette transmission d'énergie vibratoire résultant du couplage entre le chevalet et les cordes. Pour ce faire, nous avons conduit des mesures acoustiques en introduction pour illustrer cet effet, faire la différence entre effet de sympathie et effet de réverbération, et pour se rendre compte du comportement de notre clavicorde d'étude. Ensuite, un formalisme de couplage entre différents systèmes vibratoires basé sur la formulation Udwadia-Kalaba a été utilisé afin de simuler cet effet de sympathie dans le cas du clavicorde. Par la suite, le protocole de mesure vibratoire et les résultats expérimentaux sont mis en avant dans l'objectif d'étudier le transfert d'énergie vibratoire sur notre clavicorde d'étude. Enfin, une confrontation entre les résultats du modèle et les résultats expérimentaux nous permettent de juger de la pertinence du modèle et d'envisager des perspectives d'améliorations.

*The clavichord is a keyboard instrument whose origin goes back to the XIV<sup>th</sup> century. This instrument has some specific features when it comes to its instrument-making and its acoustic behavior. Indeed, its strings are set into vibration by way of metal rods, called tangents, which come into contact with these strings by means of the finger's pressure on the keys of the keyboard. These strings are all coupled with the same bridge and are divided into two different parts : a played part, whereby the tangents strike the strings, that goes from the nut to the bridge, and a death part, that goes from the bridge to the pegs. When the played strings are excited, there is a vibratory energy transfer from these strings to the death strings because of the coupling with the bridge. This leads to the vibration of the death strings. Therefore we say that these strings vibrate sympathetically. Through the sound radiation by the soundboard, this setting into vibration of the death strings creates a reverberation effect, which is clearly audible. In this work, we would like to study theoretically and experimentally this vibratory energy transmission caused by the coupling between the bridge end the strings and creating this sympathetic effect. To this effect, we have done acoustic measurements to illustrate this effect, making clearly the difference between sympathetic effect and reverberation effect, and also to illustrate the acoustic behavior of our clavichord of study. Furthermore, a coupling formalism, used to couple different vibratory systems, based on the Udwadia-Kalaba formulation has been used in the purpose of simulating this sympathetic effect, considering the case of the clavichord. Afterwards, the protocol for the vibratory measurements is put forward and the experimental results are presented to study the vibratory energy transfer when it comes to our clavichord of study. In the end, a confrontation between theoretical results coming from the model and experimental results enables us to estimate the relevance of this model and to envisage some perspectives to improve it.*

## Mots clés/ *Keywords*

Clavicorde, corde, vibration, sympathie, réverbération, couplage, Udwadia-Kalaba, tangente, doigt robotisé, chevalet, simulation, mesures vibratoires.

*Clavichord, string, vibration, sympathy, reverberation, coupling, Udwadia-Kalaba, tangent, robotized finger, bridge, simulation, vibratory measurements.*