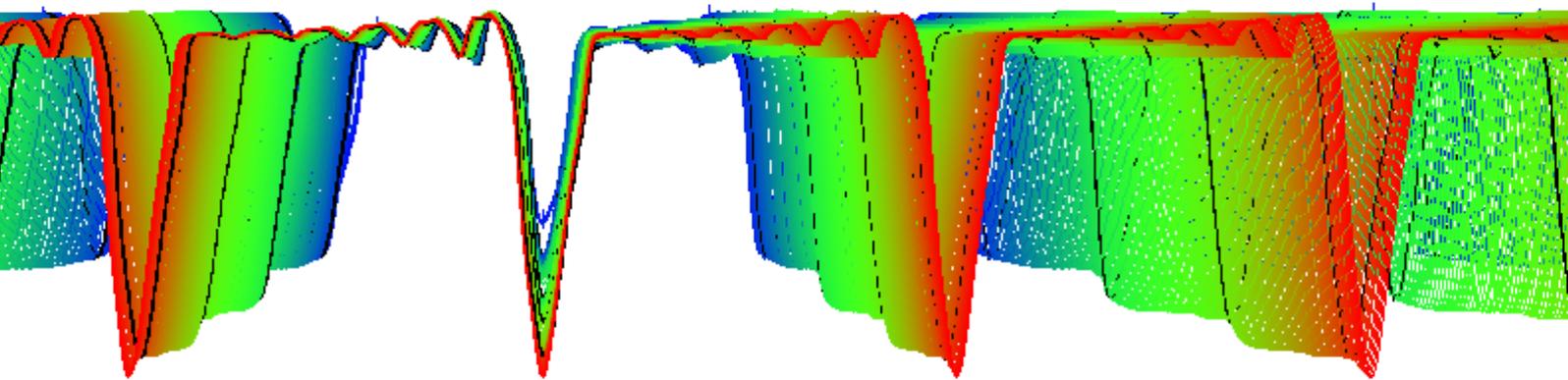




Rapport de stage  
Master ATIAM

# PRODUCTION DE SON PAR LES INSTRUMENTS CONIQUES À ANCHE

Tom COLINOT



**Encadrement** Jean KERGOMARD, Directeur de Recherche, CNRS HDR, Émérite



Année universitaire 2016-2017

Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, LMA, Marseille, France

# Table des matières

<b>1</b>	<b>État de l'art</b>	<b>4</b>
1.1	Mécanisme d'excitation des instruments à anche . . . . .	4
1.2	Modèles minimaux de résonateurs coniques . . . . .	5
1.2.1	Résonateur tronconique sans bec . . . . .	5
1.2.2	Résonateur tronconique avec bec cylindrique . . . . .	7
1.2.3	Résonateur tronconique avec bec localisé . . . . .	7
1.3	Approximation analytique : le mouvement de Helmholtz . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Étude analytique</b>	<b>10</b>
2.1	Formulation en système différentiel neutre à retard . . . . .	10
2.1.1	Adimensionnement du temps . . . . .	10
2.1.2	Étude de la forme d'onde pendant l'épisode d'anche fermée . . . . .	10
2.2	Mouvement de Lawergren . . . . .	11
2.3	Approximation polynomiale de la caractéristique non linéaire . . . . .	13
2.3.1	Construction de l'approximation . . . . .	13
2.3.2	Application : description des oscillations à anche ouverte . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Étude du comportement d'un modèle numérique d'instrument conique</b>	<b>15</b>
3.1	Existence de régimes périodiques pour le modèle tronconique sans bec . . . . .	15
3.2	Cartographies de régime . . . . .	15
3.3	Fréquence de jeu . . . . .	17
3.3.1	Période des oscillations en fonction de la géométrie . . . . .	17
3.3.2	Fréquence de jeu en fonction des paramètres de contrôle . . . . .	18
3.4	Décomposition de la forme d'onde . . . . .	19
3.4.1	Dépendance des pressions extrémales à la longueur du tube . . . . .	19
3.4.2	Description des oscillations à anche ouverte . . . . .	20

## Remerciements

Je tiens à remercier Jean Kergomard pour ses conseils avisés et son enthousiasme scientifique. Merci aussi à Pierre pour l'hébergement dans son palace du Camas, et des discussions aussi enrichissantes qu'agréables. Un grand merci à Philippe, avec qui nous allons faire de belles choses en thèse, pour ses remarques et sa volonté, à Christophe, pour son acuité scientifique et ses précieux avis, à Étienne pour sa patience et son aide dans la compréhension et la mise en œuvre des méthodes d'étude des systèmes à retard. Merci à PYB pour le rock'n'roll, à Blandine pour la confiture, et à Hélia. Merci à Papa et Maman, *free your mind and the rest will follow*. Merci à mes 4 chats, et surtout à Laura, qui me donne la force d'avancer depuis toujours.

## Résumé

Les instruments coniques à anche, parmi lesquels on trouve le saxophone, le hautbois et le basson, n'ont pas fait l'objet d'études abondantes, contrairement à leurs homologues cylindriques comme la clarinette. De ce fait, de nombreux mécanismes contrôlant la production de son dans ces instruments restent inexplorés. Ceci peut s'expliquer par les difficultés mathématiques inhérentes à la modélisation d'un résonateur conique. Ce travail débute par une brève présentation des modèles idéalisés existants concernant les instruments coniques à anche, ainsi que les résultats analytiques afférents, basés notamment sur les travaux de Gokhshtein. Ensuite, nous présentons une nouvelle formulation pour un modèle simple d'instrument conique à anche, qui mène à une approximation de la fréquence de jeu. De plus, cette formulation permet une meilleure explication de certains aspects de la forme d'onde de pression à l'entrée du résonateur dans le premier registre du saxophone, du hautbois et du basson, ainsi qu'une meilleure compréhension de la dynamique à l'œuvre pendant les oscillations. On s'intéresse notamment aux oscillations de la pression pendant l'épisode d'anche ouverte. Par ailleurs, une approximation de la forme d'onde complète différente du mouvement de Helmholtz est décrite analytiquement. Enfin, en vue de développements futurs des études analytiques, le comportement d'un modèle de synthèse numérique correspondant à la géométrie et aux hypothèses de l'étude analytique est exploré et décrit. En particulier, nous examinons l'évolution de la fréquence de jeu en fonction des paramètres de contrôle et de géométrie du résonateur, ainsi que l'influence du volume du bec sur les régimes d'oscillations.

**Mots-clés :** Acoustique, Instruments de musique, Anche, Cône, Systèmes dynamiques, Équations différentielles à retard, Synthèse numérique

## Abstract

The reed conical instruments, including saxophones, oboes and bassoons, have not been studied extensively, contrary to their cylindrical counterparts such as the clarinet, and many aspects of the sound production remain unexplored. This may be explained by the mathematical difficulties encountered when modeling a conical resonator. This work starts with a brief study of the existing idealized models of reed conical instruments, as well as the pertaining analytical results, notably based on the work by Gokhshtein. Then, we present a novel approach of a reed conical instrument model, leading to a new approximation of the playing frequency and further explanation of the pressure waveform at the entrance of the resonator in the first register of the saxophone, bassoon or oboe. The formulation allows for a better understanding of the dynamics at play in each part of the period. A fully analytical approximation of the waveform, different from the Helmholtz motion, is also proposed. Finally, aiming at further analytical developments, the behavior of a numerical synthesis model based on the geometry and hypothesis used for the analytical study is explored and described. In particular, we examine the dependence of the playing frequency upon the geometry of the resonator and the control parameters, and the influence of the mouthpiece volume on the oscillation regimes.

**Keywords :** Acoustics, Musical instruments, Reed, Cone, Dynamic systems, Delay differential equations (DDE), Numerical synthesis

## Introduction

La modélisation et la compréhension du fonctionnement des instruments de musique auto-oscillants, qui regroupent notamment les instruments à cordes frottées, les flûtes et les instruments à anche (cuivres et bois), représente un véritable défi scientifique. En effet, pour produire des sons, ce type d'instruments utilise des éléments fortement non linéaires qui permettent de transformer l'énergie fournie par le musicien sous forme de source quasiment continue – comme son souffle ou le mouvement qu'il impose à l'archet – en une vibration de fréquence audible. Ainsi, le timbre et la fréquence des sons produits par de tels instruments dépendent de l'interaction entre le musicien, l'élément fortement non linéaire d'excitation et le résonateur (la corde frottée ou l'air contenu dans l'instrument à vent).

On s'intéresse ici aux instruments à anche en roseau, les bois. Jusqu'à présent, de nombreux résultats ont été fournis sur les instruments à résonateur cylindrique de la famille des clarinettes, portant sur l'apparition des oscillations [1], l'estimation de la fréquence de jeu [24] ou encore le spectre des signaux produits [10]. En revanche, le fonctionnement des instruments à résonateur conique comme le hautbois, le basson ou le saxophone est beaucoup moins bien décrit, car la description du comportement acoustique d'un cône est moins aisée que celle d'un cylindre. Le problème du son et du timbre de tels instruments a été parfois envisagé d'un point de vue expérimental, en étudiant les sons produits par l'instrument comme dans [2] ou plus récemment [8]. Des modèles numériques permettant la synthèse des signaux produits par les instruments à résonateur coniques montrant une bonne adéquation avec les instruments réels existent également [16] mais les résultats analytiques portant sur les cônes sont rares. L'utilisation d'une géométrie équivalente en basse fréquence permet d'aboutir à une description de la forme d'onde analogue à celle des instruments à cordes frottées [4] et donne lieu à des prédictions intéressantes sur les régimes obtenus [6], mais ce formalisme ne permet pas d'expliquer certains aspects des signaux observés expérimentalement. Gokhstein [12, 13, 11, 14] propose des explications couplées à des résultats expérimentaux permettant une meilleure compréhension des mécanismes régissant les oscillations du premier registre du basson, et propose [15] une nouvelle forme d'onde analytique. L'objectif du présent travail est d'améliorer la description de la forme d'onde des signaux produits par les instruments à anche à résonateur conique, en prenant pour base un modèle physique idéalisé [17] obtenu à partir d'hypothèses fortes sur les écoulements, la géométrie, et le comportement de l'anche, ainsi que l'outil de synthèse numérique qui en est dérivé.

Après avoir rappelé les résultats scientifiques existants portant sur les instruments coniques à anche et défini le modèle physique, on propose un formalisme permettant de classifier le système obtenu et d'appréhender son comportement. On propose également une forme d'onde analytique complète du signal de pression interne de l'instrument, ainsi qu'une approximation polynomiale globale de la caractéristique non linéaire qui élargit le champ des méthodes d'études applicables au système tout en conservant une dynamique semblable. Par la suite, on cherche à décrire quantitativement les signaux produits par le modèle de synthèse numérique en fonction des paramètres, afin de mettre en évidence les aspects caractéristiques du comportement des instruments coniques, à comparer aux résultats expérimentaux et analytiques existant et à venir.

# 1 État de l'art

Les instruments coniques étudiés ici incluent toute la famille des saxophones, à anche simple, mais aussi les instruments à anche double comme le hautbois et le basson.

## 1.1 Mécanisme d'excitation des instruments à anche

Le modèle de l'excitateur non linéaire décrit ici est applicable à tous les instruments à anche simple ou double, à résonateur conique ou cylindrique. Il comprend le comportement de l'anche et de l'écoulement dans le bec. On s'intéresse ici à une anche en-dedans, qui tend à se fermer lorsque la pression dans la bouche du musicien est supérieure à la pression dans l'instrument. Ce cas correspond notamment aux anches de saxophones. On utilisera les variables adimensionnées suivantes, dont les notations sont calquées sur [4] :

$$\tilde{p} = \frac{p}{p_M} \quad , \quad \tilde{u} = Z_c \frac{u}{p_M}, \quad (1)$$

où  $p$  et  $u$  sont respectivement la pression et le débit à l'entrée de l'instrument,  $p_M$  est la pression nécessaire à fermer complètement le conduit d'anche, et  $Z_c$  est l'impédance caractéristique d'un cylindre de même section d'entrée  $S$  que le résonateur tronconique.  $Z_c$  s'exprime en fonction de  $\rho$ , masse volumique de l'air,  $c$ , vitesse du son dans l'air, et  $S$ , section d'entrée de l'instrument, comme  $Z_c = \frac{\rho c}{S}$ . Les grandeurs appelées "paramètres de contrôle", que le musicien peut régler au cours d'une exécution, sont

$$\gamma = \frac{p_m}{p_M} \quad , \quad \zeta = Z_c w H \sqrt{\frac{2}{\rho p_M}}, \quad (2)$$

où  $p_m$  est la pression dans la bouche de l'instrumentiste,  $w$  est la largeur du canal d'anche et  $H$  est la hauteur du canal d'anche au repos. Les paramètres de contrôle  $\zeta$  représente l'ouverture d'anche adimensionnée.

Pour toute la suite de ce document, pour alléger les notations,  $p$  et  $u$  désigneront la pression et le débit adimensionnés.

**Caractéristique non linéaire : relation pression-débit** La section du canal d'anche et la vitesse de l'écoulement varient en fonction de la différence de pression entre la bouche du musicien et l'entrée de l'instrument. On considère que :

- la section du canal d'anche dépend linéairement de sa hauteur ;
- l'anche se comporte comme un ressort sans dynamique ;
- l'écoulement dans le canal d'anche est incompressible, non visqueux et stationnaire ;
- le jet formé à la sortie du canal d'anche se déstructure entièrement dans le bec : la vitesse d'écoulement à l'entrée du résonateur est négligeable.

On obtient l'expression suivante du débit en fonction de la pression :

$$u = F(p) = \begin{cases} \zeta(1 - \gamma + p) \text{sign}(\gamma - p) \sqrt{|\gamma - p|} & \text{si } p \geq \gamma - 1 \\ 0 & \text{si } p < \gamma - 1 \end{cases} . \quad (3)$$

**Régularisation de la fonction d'anche** Dans certaines études, il est intéressant d'éliminer les singularités de la fonction d'anche. Une régularisation est proposée dans [17] :

$$F_r(p) = \zeta H_1(1 - \gamma + p) H_2(\gamma - p) \quad (4)$$

$$\text{où } H_1(x) = O_a + x \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan \left( \frac{x}{\pi O_a} \right) \right) \quad (5)$$

$$\text{et } H_2(x) = \text{sign}(x) \sqrt{x \tanh(x/V_a)}, \quad (6)$$

où  $O_a$  et  $V_a$  sont des paramètres réglant la régularisation. Sans indication contraire, on prendra  $O_a = 0.1$  et  $V_a = 0.05$ . La fonction d'anche avec et sans régularisation est représentée en figure 1, pour des valeurs de  $\gamma$  et  $\zeta$  typiques dans le cas du saxophone.

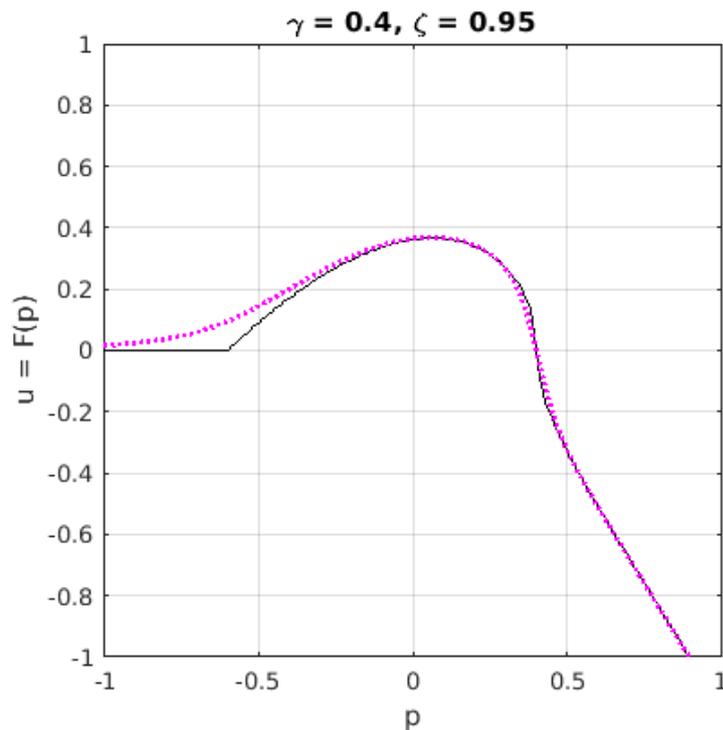


FIGURE 1 – Caractéristique non linéaire du système anche-écoulement : — brute,  $\cdots$  régularisée.

## 1.2 Modèles minimaux de résonateurs coniques

On se concentrera ici sur trois modèles en particulier, usuellement employés dans la littérature pour caractériser le fonctionnement des instruments coniques tout en prenant en compte un nombre restreint de paramètres. Le résonateur y est représenté par un ou deux éléments acoustiques de géométrie simple, ce qui permet à ces modèles d'être applicable à tous les instruments coniques, mais aussi d'offrir certaines possibilités d'étude analytique, inenvisageables pour les géométries plus complexes.

### 1.2.1 Résonateur tronconique sans bec

Le premier modèle d'instrument conique à envisager est un tube tronconique seul. Il est défini par deux paramètres, on utilisera ici la longueur du tube  $l$  et la longueur du sommet manquant du cône  $x_1$ . On reprend ici la formulation présentée dans [18], qui mène à l'algorithme de synthèse temporelle utilisé pour la suite de ce travail.

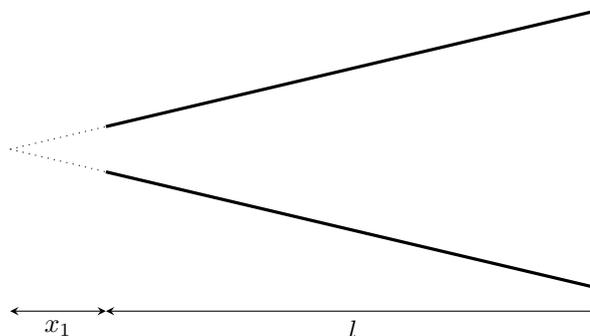


FIGURE 2 – Schéma du modèle de résonateur tronconique sans bec, avec ses deux paramètres géométriques.

Un résonateur tronconique peut être considéré comme un guide d'onde unidimensionnel propa-

geant non pas des front d'ondes plans comme un cylindre, mais des fronts d'onde sphériques. On rappelle ici l'équation des ondes sphériques, en omettant les termes sources

$$\frac{\partial^2 p(r, t)}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial p(r, t)}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(r, t)}{t^2} = 0, \quad (7)$$

qui admet une solution de forme

$$p(r, t) = q^+(t - r/c) + q^-(t + r/c), \quad (8)$$

où  $q^\pm = a^\pm \exp(\mp jkr)/r$ . La conservation de la quantité de mouvement implique pour le débit acoustique

$$u(r, t) = q^+(t - r/c) - q^-(t + r/c) + \frac{c}{r} \int_0^t p(r, t') dt'. \quad (9)$$

On se place maintenant à l'entrée du tube, c'est à dire en  $r = x_1$ , où on a

$$p_1 = q_1^+ + q_1^- \quad (10)$$

$$u_1 = q_1^+ - q_1^- + \frac{c}{x_1} \int_0^t p_1(t') dt'. \quad (11)$$

Le modèle considéré ne prend pas en compte les pertes<sup>1</sup>; on fait de plus l'hypothèse d'une impédance de rayonnement nulle en bout de tube. On obtient donc une relation entre les ondes aller et retour  $q_1^+$  et  $q_1^-$ , soit

$$q_1^-(t) = q_1^+(t - \tau), \quad (12)$$

où  $\tau = \frac{2l}{c}$ , la durée correspondant à un aller-retour de l'onde dans le tube. En remplaçant  $q_1^+$  et  $q_1^-$  par leurs expressions, on obtient

$$p_1^-(t) = -p_1^+(t - \tau) - \frac{1}{2} \frac{c}{x_1} \int_{t-\tau}^t p_1(t') dt', \quad (13)$$

avec  $p_1^+ = \frac{p_1 + u_1}{2}$  et  $p_1^- = \frac{p_1 - u_1}{2}$ . Les grandeurs  $p_1^+$  et  $p_1^-$  sont liées par une fonction non linéaire déduite de la fonction d'anche par une rotation de 45°, appelée  $G$  [23], telle que

$$p_1^+(t) = G(-p_1^-(t)). \quad (14)$$

**Discrétisation** L'équation (13) peut être discrétisée en vue d'une simulation numérique, en utilisant l'approximation d'Euler arrière pour l'intégrale, afin d'obtenir une récurrence strictement causale. La fonction  $G$  est une non-linéarité sans mémoire. Ces deux éléments permettent une synthèse temporelle des signaux produits par le cône sans bec, comme

$$p_n^- = -p_n^+ - \frac{ct_s}{2x_1} \sum_{i=n-2^*M-1}^{n-1} p_i \quad (15)$$

$$p_n^+ = G(p_n^-) \quad (16)$$

$$p_n = p_n^+ + p_n^-, \quad (17)$$

où  $t_s = 1/F_s$  est la période d'échantillonnage.

**Commentaire sur les signaux produits** Le modèle d'instrument à anche tronconique sans bec ne permet pas de reproduire les régimes observés expérimentalement. En effet, les signaux obtenus pour des conicités typiques des instruments à vent coniques ne convergent pas rapidement vers un cycle limite. Cet effet est expliqué, notamment dans [18], par la forte inharmonicité du cône seul.

1. La propagation est donc définie par un unique paramètre, le retard, comme pour le cylindre.

### 1.2.2 Résonateur tronconique avec bec cylindrique

Afin d'obtenir une meilleure harmonicité entre les fréquences du résonateur, tout en conservant son caractère conique, il est possible d'inclure un élément représentant le bec dans le modèle. Benade [3] propose une géométrie de bec constituée d'un cylindre et d'un tronc de cône de conicité différente de celle du cône principal. Ce choix est étudié dans [5], où le premier cylindre est remplacé par une compliance acoustique tout en conservant un cône secondaire. Plus récemment, un modèle avec incluant un bec cylindrique seul [17] suffit à produire des régimes périodiques avec les valeurs de conicité typiques des instruments étudiés. L'ajout d'un bec cylindrique de longueur  $y$  mène à la condition de continuité suivante entre les ondes aller et retour dans le bec  $p^+$  et  $p^-$  et les grandeurs  $p_1^+$  et  $p_1^-$  définies à l'éq. (13) à l'entrée du tronc de cône, déduites des conditions de continuité de pression et de débit acoustique au niveau d'un changement de section [4] :

$$2p_1^+ = (1 + \mu)p^+(t - y/c) + (1 - \mu)p^-(t + y/c) \quad (18)$$

$$2p_1^- = (1 - \mu)p^+(t - y/c) + (1 + \mu)p^-(t + y/c), \quad (19)$$

où  $\mu = S_m/S_1$  est le rapport entre la section du bec  $S_m$  et la section d'entrée du tronc de cône  $S_1$ . Ainsi on peut obtenir une relation entre  $p^-(t)$  et les valeurs passées de  $p^+$  et  $p^-$  :

$$p^-(t) = K(p^-(t - \tau) + p^+(t - 2y/c)) - p^+(t - \tau - 2y/c) + \frac{c}{x_1(1 + \mu)} \int_{t-\tau}^t (p^+(t' - 2y/c) + p^-(t')) dt', \quad (20)$$

avec  $K = (\mu - 1)/(\mu + 1)$ .

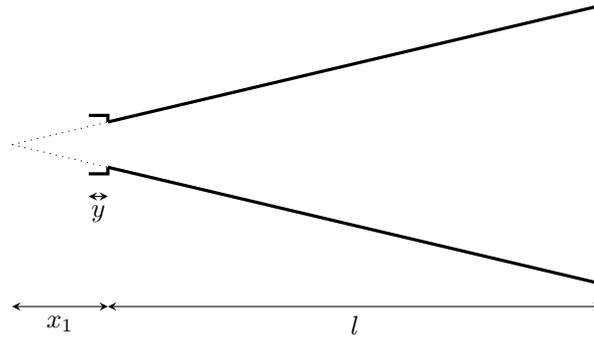


FIGURE 3 – Schéma du modèle de résonateur tronconique avec bec cylindrique.

### 1.2.3 Résonateur tronconique avec bec localisé

Lorsque le bec cylindrique est court devant les longueurs d'onde en jeu, il peut être remplacé par une compliance en parallèle. De plus, la proximité de la fréquence de jeu avec les maximums de l'impédance d'entrée du résonateur permet d'ignorer la masse acoustique de l'air dans le bec. On peut donc obtenir le même type de régimes périodiques et éliminer le paramètre de longueur du bec pour ne garder que celui de son volume. La compliance s'exprime alors par  $V_m/(\rho c^2)$ , où  $V_m$  est le volume du bec cylindrique. Les équations liant la pression et le débit  $p$  et  $u$  à l'entrée du résonateur aux grandeurs  $p_1$  et  $u_1$  à l'entrée du cône sont alors

$$p = p_1 \quad (21)$$

$$u = u_1 + \frac{V_m}{\rho c^2} \frac{dp}{dt}. \quad (22)$$

En utilisant l'équation (9), on peut écrire les ondes sphériques aller et retour dans le cône

$$q_1^-(t) = p^-(t) + \frac{c}{2x_1} \int_0^t p(t') dt' + K_m \frac{x_1}{6c} \frac{dp}{dt}(t) \quad (23)$$

$$q_1^+(t) = p^+(t) - \frac{c}{2x_1} \int_0^t p(t') dt' - K_m \frac{x_1}{6c} \frac{dp}{dt}(t), \quad (24)$$

où l'on introduit  $K_m = V_m/(x_1 S_1/3)$ , le rapport entre le volume du bec et celui du sommet manquant du cône. La propagation dans le tube est décrite par l'expression (12). En remplaçant  $q_1^-$  et  $q_1^+$  par leurs expressions (eq. (23)), on obtient la relation

$$\frac{dp}{dt}(t) = \frac{dp}{dt}(t - \tau) - \frac{6c}{K_m x_1} \left[ p^-(t) + p^+(t - \tau) + \frac{c}{2x_1} \int_{t-\tau}^t p(t') dt' \right], \quad (25)$$

qui donne l'évolution de la pression en fonction de l'histoire de la pression et du débit à l'entrée du résonateur.

**Discrétisation** En vue d'une synthèse des signaux de pression et de débit à l'entrée du résonateur, l'équation (25) peut être discrétisée grâce aux approximations des différences finies à droite et l'approximation trapézoïdale

$$\frac{dp}{dt}(t) \leftarrow \frac{p_{n+1} - p_n}{t_s} \quad (26)$$

$$\int_{t-\tau}^t p(t') dt' \leftarrow t_s \sum_{i=n-2M}^n \frac{p_i + p_{i-1}}{2}, \quad (27)$$

où  $t_s$  est la période d'échantillonnage et  $M = \ell/(ct_s)$  est le nombre de périodes d'échantillonnage correspondant à la longueur  $\ell$  du tronc de cône. On obtient ainsi la formule permettant de compléter le pas  $n$  de la synthèse :

$$I_n = I_{n-1} + \frac{ct_s}{4x_1} (p_n + p_{n-1} - p_{n-2M} - p_{n-2M-1}) \quad (28)$$

$$p_{n+1} = p_n + p_{n-2M+1} - p_{n-2M} - \frac{6ct_s}{K_m x_1} \left( \frac{1}{2}(p_n - u_n) + \frac{1}{2}(p_{n-2M} + u_{n-2M}) + I_n \right) \quad (29)$$

$$u_{n+1} = F(p_{n+1}). \quad (30)$$

Ici, contrairement au modèle à résonateur tronconique sans bec, on n'utilise pas la caractéristique non linéaire  $G$  liant les ondes aller et retour, mais directement la caractéristique  $F$ .

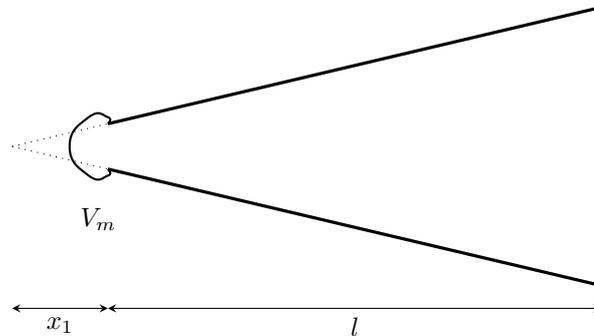


FIGURE 4 – Schéma du modèle de résonateur tronconique avec bec localisé.

**Validation expérimentale du modèle** Le modèle de résonateur tronconique à bec localisé produit des signaux de pression interne dont les caractéristiques sont très semblables à celles des signaux mesurés sur des instruments réels, à la bouche artificielle. Kergomard et collègues proposent par exemple une comparaison dans [17], reproduite ici en figure 5. En effet, le modèle de synthèse permet de reproduire plusieurs caractéristiques du signal mesuré expérimentalement :

- le rapport de longueur entre les portions à pression positive et négative du signal ainsi que les valeurs maximales et minimales de pression ;
- la forme arrondie de l'épisode de pression négative, qui correspond à la partie de la période où l'anche est fermée ;
- les petites oscillations croissantes lorsque la pression est positive, qui sont fidèles au signal mesuré notamment en termes de pulsation et d'enveloppe.

On effectuera donc pendant ce travail l'étude exclusive du comportement du modèle numérique et non de signaux mesurés, ce qui présente des avantages pratiques majeurs.

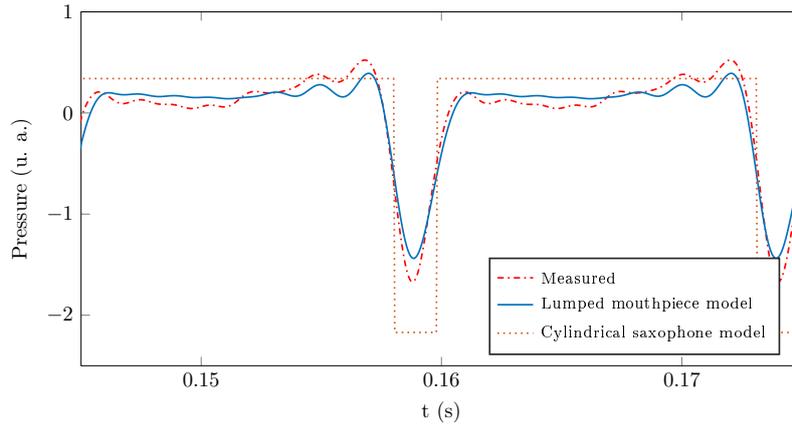


FIGURE 5 – Comparaison entre formes d’ondes de pression interne analytique, synthétisée par le modèle à résonateur tronconique et bec localisé, et mesurée. Reproduit depuis [17].

### 1.3 Approximation analytique : le mouvement de Helmholtz

Le mouvement de Helmholtz, dans le cas des instruments coniques, est une solution pour une géométrie équivalente au cône en basse fréquence, appelée saxophone traversier. On assimile ainsi le résonateur de l’instrument tronconique à un cylindre de longueur  $\ell + x_1$ , ouvert à ses deux extrémités, excité à une distance  $x_1$  de l’entrée. Le changement est justifié par l’approximation valable en basse fréquence  $kx_1 \simeq \tan(kx_1)$ . Ceci permet de remplacer le terme  $\frac{1}{jkx_1}$  dans l’impédance du cône par  $\frac{1}{j \tan(kx_1)}$  :

$$Z_{Cone} = \frac{Z_c}{\frac{1}{j \tan(k\ell)} + \frac{1}{jkx_1}} \quad kx_1 \simeq \tan(kx_1) \quad Z_{ST} = \frac{Z_c}{\frac{1}{j \tan(k\ell)} + \frac{1}{j \tan(kx_1)}}. \quad (31)$$

La même approximation est valable pour la géométrie incluant un cône tronqué et un bec localisé de volume unitaire, en s’appuyant cette fois sur un développement en série du terme  $1/(j \tan(kx_1))$  valable en basse fréquence :

$$Z_{CLM} = \frac{Z_c}{\frac{1}{j \tan(k\ell)} + \frac{1}{jkx_1} + \frac{jkx_1}{3}} \quad kx_1 \simeq \tan(kx_1) \quad Z_{ST} = \frac{Z_c}{\frac{1}{j \tan(k\ell)} + \frac{1}{j \tan(kx_1)}}. \quad (32)$$

La géométrie cylindrique permet de rechercher une solution de période  $T_H = 2L/c$ , où  $L = \ell/x_1$  est la longueur totale du saxophone traversier. On recherche une forme d’onde de pression rectangulaire à deux états  $p_S$  (court) et  $p_L$  (long), de rapport cyclique  $\beta = x_1/L$ . Les hypothèses permettant d’obtenir l’expression du mouvement de Helmholtz sont les suivantes :

1. impédance nulle à fréquence nulle, c’est à dire moyenne nulle de la pression acoustique au cours d’une période :

$$\beta p_S + (1 - \beta)p_L = 0; \quad (33)$$

2. conservation de l’énergie, débit constant au cours de la période :

$$F(p_S) = F(p_L). \quad (34)$$

On se concentre ici sur le mouvement de Helmholtz standard à anche battante, c’est à dire celui pour lequel l’anche se ferme à chaque épisode de pression négative court  $p_S < 0$ . Le débit à l’état bas est donc nul,  $F(p_S) = 0$ . Pour satisfaire les conditions (33) et (34), la seule solution est  $p_L = \gamma$ , où le débit s’annule aussi. La valeur de  $p_S$  obtenue est alors

$$p_S = -\gamma \frac{1 - \beta}{\beta}. \quad (35)$$

Cette solution est valable pour  $\gamma > \beta$ . Il est à noter qu’un mouvement de Helmholtz dit "inverse", où l’état haut et court  $\beta T$  de la pression se trouve à  $p_S = \gamma$  est théoriquement possible pour  $\gamma > 1 - \beta$ . Ce mouvement est annoncé notamment dans [6]. On se restreindra cependant ici au mouvement de Helmholtz à anche battante standard, qui correspond au premier registre recherché habituellement par le musicien pour les instrument coniques à anche.

## 2 Étude analytique

### 2.1 Formulation en système différentiel neutre à retard

Afin de rechercher des outils d'étude analytique du système constitué par l'excitateur non linéaire et le résonateur tronconique avec bec localisé, il peut être utile de mettre en évidence la classe de systèmes à laquelle il se rattache. En dérivant l'équation (25) par rapport au temps, avec une pression continue, il est possible d'obtenir une loi de comportement faisant intervenir uniquement la pression interne et ses dérivées successives :

$$\frac{d^2 p}{dt^2}(t) = \frac{d^2 p}{dt^2}(t - \tau) - \frac{3c}{K_m x_1} \left( (1 - F'(p(t))) \frac{dp}{dt}(t) + (1 + F'(p(t - \tau))) \frac{dp}{dt}(t - \tau) + \frac{c}{x_1} (p(t) - p(t - \tau)) \right), \quad (36)$$

où  $F'(p)$  désigne la dérivée de la caractéristique non linéaire par rapport à la pression. Ce type de forme a été utilisé par exemple dans [7] avec une caractéristique cubique, en vue d'une décomposition modale. Le système ainsi formulé apparaît comme un système différentiel neutre à retard [9], c'est à dire qu'il fait intervenir la dérivée de la grandeur d'intérêt retardée.

#### 2.1.1 Adimensionnement du temps

Afin de faire apparaître plus clairement certaines propriétés du système et d'alléger l'écriture, on réalise le changement d'échelle temporelle

$$\tilde{t} \leftarrow \frac{c}{x_1} \sqrt{\frac{3}{K_m}} t. \quad (37)$$

On adimensionne également le retard  $\tau$ , qui devient

$$\tilde{\tau} = \frac{2\ell}{x_1} \sqrt{\frac{3}{K_m}}. \quad (38)$$

Jusqu'à la fin du document, on utilisera le temps et le retard adimensionnés en omettant les tildes. Le changement de variable donne pour l'équation de comportement :

$$\ddot{p} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{K_m}} (1 - F'(p)) \dot{p} + p = \ddot{p}_\tau - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{K_m}} (1 + F'(p_\tau)) \dot{p}_\tau + p_\tau. \quad (39)$$

Il apparaît ici que la modification du paramètre  $x_1$ , tous paramètres égaux par ailleurs, ne donne lieu qu'à une dilatation de la forme d'onde en temps, et ne change pas la dynamique du système.

#### 2.1.2 Étude de la forme d'onde pendant l'épisode d'anche fermée

Lorsque l'anche est fermée, le débit est nul, ce qui permet une formulation linéaire de l'évolution de la pression. En supposant de plus que la pression retardée  $p(t - \tau)$  est constante et égale à  $C$ , de manière similaire à l'hypothèse formulée pour obtenir le mouvement de Lawergren, on obtient, dans le cas d'un volume de bec égal à celui du cône manquant ( $K_m = 1$ )<sup>2</sup>, une expression pour la pression à anche fermée

$$\ddot{p} + \sqrt{3} \dot{p} + p = C. \quad (40)$$

Cette équation différentielle ordinaire peut être résolue explicitement, et en imposant les conditions initiales à la fermeture de l'anche ( $t = 0$ )

$$\begin{cases} p(0) &= \gamma - 1 \\ \dot{p}(0) &= K_d, \end{cases} \quad (41)$$

on obtient une expression de la pression, faisant intervenir les paramètres  $C$  et  $K_d$ , pendant l'épisode d'anche fermée

$$p_c(t) = C + \sqrt{3} \left( \gamma - C - 1 + \frac{2K_d}{\sqrt{3}} \right) e^{-t\sqrt{3}/2} \sin(t/2) + (\gamma - C - 1) e^{-t\sqrt{3}/2} \cos(t/2). \quad (42)$$

2. La généralisation à un autre volume de bec est immédiate mais les expressions deviennent longues.

## 2.2 Mouvement de Lawergren

Les instruments à anche ont un comportement analogue à celui des instruments à cordes frottées. Pour les instruments à anche à résonateur conique, l'approximation du saxophone traversier, résumée dans [4] et notamment étudiée dans [6], permet d'aboutir à une équivalence formelle avec la corde frottée et de justifier le mouvement de Helmholtz dans le cas des instruments coniques.

Même si le mouvement de Helmholtz reste la forme d'onde analytique la plus connue et la plus utilisée pour les instruments à cordes frottées, certains auteurs ont recherché d'autres formulations expliquant les mouvements observés expérimentalement de manière analytique. En particulier, Lawergren [20] a proposé une expression de la vitesse de déplacement de la corde du violon définie en deux morceaux correspondant aux phases de glissement et d'accroche (phases notées respectivement  $a$  et  $b$ ) de l'archet par la somme d'une fonction sinusoïdale et d'une composante continue :

$$v_a(\hat{t}) = v_0 \left( \frac{\cos(2\pi\hat{t}/\beta) \sin(\pi(1-\delta)/\beta)}{\beta \sin(\pi/\beta)} - \frac{1-\delta}{\beta} \right) \quad \text{pour } -\frac{\delta}{2} < \hat{t} < \frac{\delta}{2} \quad (43)$$

$$v_b(\hat{t}) = v_0 \left( \frac{\delta}{\beta} - \frac{\cos(2\pi(\hat{t}-1/2)/\beta) \sin(\pi\delta/\beta)}{\beta \sin(\pi/\beta)} \right) \quad \text{pour } \frac{\delta}{2} < \hat{t} < 1 - \frac{\delta}{2} \quad (44)$$

où  $\hat{t} = t/T_H$  est le temps adimensionné par la période du mouvement de Helmholtz  $T_H = c/(2L)$  avec  $L$  la longueur totale de la corde,  $v_0$  la vitesse d'archet,  $\beta$  tel que  $\beta \times L$  corresponde à la distance du chevalet à l'archet et  $\delta$  tel que  $\delta \times L$  soit la distance du chevalet au point d'observation. Cette expression de la vitesse est obtenue en réalisant les trois conditions suivantes :

1. accélération finie à tout instant : quel que soit  $\delta$ , continuité de la vitesse  $\hat{t} = \delta/2$  à la jonction des segments de forme d'onde

$$v_a(\delta/2) = v_b(\delta/2); \quad (45)$$

2. pas de déplacement global de la corde (moyenne de vitesse nulle sur la période) :

$$\int_0^1 v(\hat{t}) d\hat{t} = 0; \quad (46)$$

3. pendant la phase d'accroche, la vitesse de la corde sous l'archet  $\delta = \beta$  est égale à la vitesse de l'archet :

$$v_b \Big|_{\delta=\beta} = v_0. \quad (47)$$

Pour les instruments coniques à anche, on peut définir des conditions analogues s'appliquant à la pression à l'entrée du résonateur :

1. continuité de la pression en  $\hat{t} = \delta/2$  à la jonction des segments de forme d'onde

$$p_a(\delta/2) = p_b(\delta/2); \quad (48)$$

2. moyenne de pression acoustique nulle sur la période :

$$\int_0^1 p(\hat{t}) d\hat{t} = 0; \quad (49)$$

3. pendant la phase d'anche ouverte, la pression dans le bec est égale à la pression dans la bouche du musicien :

$$p_b = \gamma. \quad (50)$$

Les phases  $a$  et  $b$  de la pression sont définies de manière analogue, mais l'observation de la forme d'onde expérimentale conduit à revoir leurs durées relatives. On constate en effet sur les signaux de pression synthétisés que l'instant de pression minimale et l'instant de pression maximale, qui survient juste avant la fermeture de l'anche, sont séparées de  $\tau$ . De plus, une reformulation de l'équation de comportement (25) en faisant intervenir  $I(t) = \int_{t-\tau}^t p(t') dt'$ , en tant que variable,

avec le temps adimensionné défini à l'eq. (37), permet d'obtenir la pulsation du sinus de la phase  $b$  :

$$\ddot{I} + I = -2\sqrt{\frac{3}{K_m}}(p^- + p_\tau^+). \quad (51)$$

Ce système peut être interprété comme un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_1 = 1$ , avec un terme source

$$s = -2\sqrt{\frac{3}{K_m}}(p^- + p_\tau^+) \quad (52)$$

contenant la non-linéarité. La durée de la phase  $b$  où l'anche se ferme correspond à une période de l'oscillateur à  $\omega_1$ , soit  $2\pi$ . La période des oscillations utilisée pour le calcul du mouvement de Lawergren est donc

$$T_L = \tau + \pi \quad (53)$$

en temps adimensionné. En comparaison, la période du mouvement de Helmholtz en temps adimensionné s'exprime

$$T_H = \tau + 2\sqrt{\frac{3}{K_m}}. \quad (54)$$

Le cas d'égalité est obtenu pour  $K_m = 12/\pi^2$ , qui est une valeur particulière discutée au 3.2. La résolution des conditions (48), (49) et (50) mène à l'expression suivante pour la pression d'entrée du résonateur :

$$p_{Lg}(t) = \begin{cases} \gamma & \text{pour } t < \tau - \pi \\ -\frac{1}{2}\frac{\gamma(\tau-\pi)}{\pi} - \frac{1}{2}\frac{\gamma(\tau+\pi)}{\pi} \cos(t - \tau) & \text{pour } t > \tau - \pi \end{cases} \quad (55)$$

La figure 6 présente une comparaison entre les mouvements de Helmholtz et de Lawergren et un signal de pression synthétisé. Le mouvement de Lawergren rend compte de la forme d'onde de pression à anche fermée de manière plus précise que le Helmholtz à deux états. Cette approximation concerne l'ensemble de la forme d'onde de pression, contrairement à l'équation (42) qui n'est valable que lors du plaquage de l'anche.

Il est à noter que le travail de Lawergren sur le violon prévoit une extension de ce mouvement en ajoutant des termes sinusoïdaux de pulsation multiple de  $\omega_1$ . Cependant, les conditions permettant d'obtenir les amplitudes de ces composantes analytiquement ne sont pas connues, et Lawergren propose de les estimer au mieux à partir de mesures de forme d'ondes. En ajoutant un ou deux termes, l'adéquation aux mesures effectuées sur le violon est bonne, mais cette méthode ne permet pas de prévoir les caractéristiques de la forme d'onde.

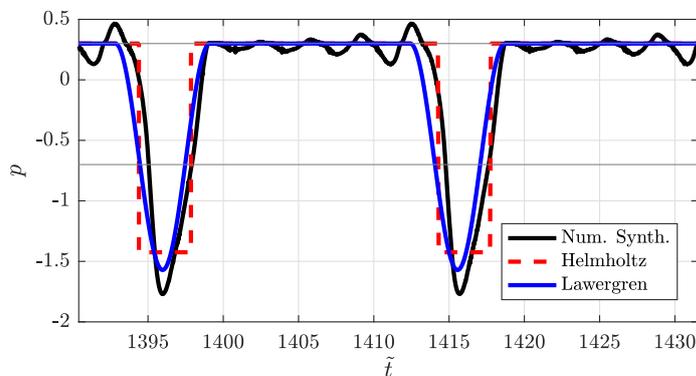


FIGURE 6 – Mouvements de Lawergren et de Helmholtz obtenue pour une configuration géométrique correspondant à une note grave de saxophone ténor.

## 2.3 Approximation polynomiale de la caractéristique non linéaire

### 2.3.1 Construction de l'approximation

Afin de gagner en simplicité et en régularité des signaux synthétisés, on se propose de rechercher une approximation polynomiale de la caractéristique non linéaire qui permettrait un fonctionnement similaire du modèle de synthèse. Une approximation polynomiale d'ordre 3 est couramment utilisée [4] dans le cas de la clarinette et du saxophone, elle correspond à un développement limité de la caractéristique complète autour de  $p = 0$ . Cette approximation permet d'obtenir des résultats de stabilité dans le cas de la clarinette et du saxophone, et fonctionne également dans le cas de l'étude du contenu spectral de la forme d'onde de la clarinette, dans le cas d'anche non battante. Cependant, le premier registre du saxophone présente un épisode d'anche battante important, et la caractéristique cubique autour de  $p = 0$  cesse d'être valable. C'est pourquoi on recherche ici une approximation globale, en imposant des correspondances ponctuelles entre l'approximation cubique et la caractéristique non linéaire complète :

$$\begin{cases} F_3(\gamma - 1) = 0 & \text{débit nul au plaquage d'anche} \\ F_3'(\gamma - 1/3) = 0 & \text{même pression au débit maximal} \\ F_3(\gamma - 1/3) = \frac{2\sqrt{3}}{9}\zeta & \text{débit maximal identique} \\ F_3(\gamma) = 0 & \text{débit nul à l'équilibre des pressions} \end{cases} \quad (56)$$

Ces quatre conditions permettent de calculer les valeurs des coefficients  $a, b, c, u_0$  de la caractéristique polynomiale globale définie par :

$$F_3(p) = \begin{cases} u_0 + ap + bp^2 + cp^3 & \text{si } p \geq \gamma - 1 \\ 0 & \text{si } p < \gamma - 1 \end{cases} \quad (57)$$

On trouve ainsi les valeurs de  $a, b, c$  et  $u_0$  suivantes

$$\begin{aligned} a &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta(3\gamma^2 - 4\gamma + 1) \\ b &= \frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta(3\gamma - 2) \\ c &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta \\ u_0 &= -\frac{3\sqrt{3}}{2}\zeta(\gamma^2 - \gamma - 1) \end{aligned} \quad (58)$$

La figure 7 représente la caractéristique non linéaire approchée  $F_3$  superposée à la caractéristique habituelle (eq. (3)). La caractéristique polynomiale est continûment dérivable partout, contrairement à la caractéristique habituelle qui présente deux points singuliers en  $p = \gamma$  (dérivée infinie) et  $p = \gamma - 1$  (point anguleux). La figure 8 représente deux exemples de formes d'ondes de pression en régime permanent synthétisées grâce à ces deux caractéristiques. Les caractéristiques de la forme d'onde sont assez fidèlement conservées, notamment en termes d'extremums et de période d'oscillations.

### 2.3.2 Application : description des oscillations à anche ouverte

Un exemple d'application de la caractéristique polynomiale approchée est la description des oscillations qui apparaissent lors de l'épisode de pression positive, autour de l'équilibre de pressions entre l'entrée du résonateur et la bouche du musicien :  $p \simeq \gamma$ . Ce phénomène est analogue aux oscillations dites de Schelleng (*Schelleng's ripples*) [22, 19, 21] observées sur les formes d'ondes de vitesse de cordes de violons. On propose ici une description de leur évolution, en analysant le rapport entre la pression et la pression retardée induite par l'équation de comportement (51) autour de  $p = \gamma$ . Dans cette région, les variations de pression sont faibles, on peut donc reformuler l'équation (51) comme

$$-2\sqrt{3/K_m}(p^- + p^+) = I. \quad (59)$$

On pose alors  $p = \gamma + \epsilon P$ , ce qui donne

$$-2\sqrt{3/K_m}\gamma - 2\sqrt{3/K_m}(\epsilon P - F(\gamma + \epsilon P) + \epsilon P_\tau - F(\gamma + \epsilon P_\tau)) = I. \quad (60)$$

On effectue un développement limité du débit au voisinage de  $\gamma$  :

$$F(\gamma + \epsilon P) = 0 + F'(\gamma)\epsilon P, \quad (61)$$

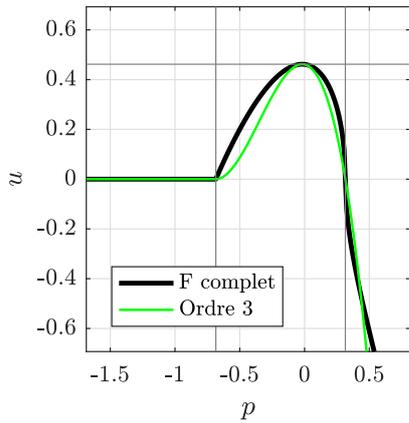


FIGURE 7 – Caractéristique non linéaire complète  $F$  (noir) et approximation globale à l'ordre 3  $F_3$  (vert).



FIGURE 8 – Signaux de pression interne synthétisés pour le même couple  $(\gamma, \zeta)$  avec les caractéristiques  $F$  (noir) et  $F_3$  (vert)

ce qui permet de séparer l'équation selon l'ordre de  $\epsilon$  :

$$\epsilon^0 : I = -2\sqrt{3/K_m}\gamma \quad (62)$$

$$\epsilon^1 : P = -\frac{1 + F'(\gamma)}{1 - F'(\gamma)}P_\tau. \quad (63)$$

On obtient le rapport entre les oscillations et celles de la période précédente :

$$A_r = P/P_\tau = \frac{F'(\gamma) + 1}{F'(\gamma) - 1}. \quad (64)$$

Avec la caractéristique non linéaire habituelle, la dérivée n'est pas définie en  $p = \gamma$ , c'est pourquoi on utilise la caractéristique polynomiale  $F_3$ . Le rapport d'amplification des oscillations s'écrit alors en fonction des paramètres de contrôles :

$$A_r = \frac{\zeta - \frac{2}{3\sqrt{3}}}{\zeta + \frac{2}{3\sqrt{3}}}. \quad (65)$$

On peut vérifier par synthèse numérique ce résultat avec la fonction polynomiale approchée en figure 9. On retrouve également une bonne correspondance en utilisant la même formule pour des signaux synthétisés à l'aide de la caractéristique  $F$  complète (fig. 10). On peut effectuer plusieurs remarques sur le facteur théorique d'amplification des oscillations  $A_r$  :

- il dépend exclusivement de  $\zeta$ , et ne fait donc pas intervenir le paramètre de pression dans la bouche du musicien  $\gamma$  ;
- la correspondance avec les signaux synthétisés est meilleure pour de fortes valeurs de  $\zeta$  ;
- l'expression trouvée s'annule et change de signe en  $\zeta = 2/(3\sqrt{3}) \simeq 0.38$ . Les signaux synthétisés pour en dessous de cette valeur de  $\zeta$  correspondent à des régimes quasi-périodiques et aux registres supérieurs de l'instrument (voir figure 12).

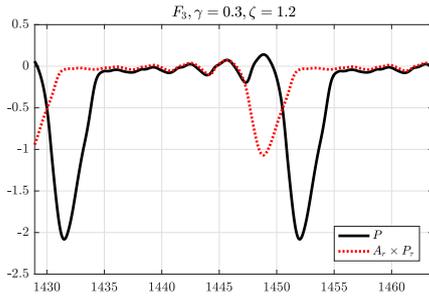


FIGURE 9 – Amplification des oscillations autour de  $p = \gamma$ , signaux synthétisés avec la caractéristique polynomiale  $F_3$

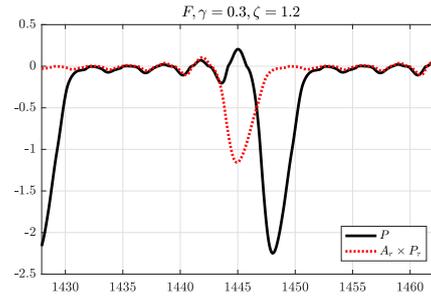


FIGURE 10 – Amplification des oscillations autour de  $p = \gamma$ , signaux synthétisés avec la caractéristique  $F$

### 3 Étude du comportement d'un modèle numérique d'instrument conique

#### 3.1 Existence de régimes périodiques pour le modèle tronconique sans bec

Comme cela a été évoqué en 1.2.1, le modèle d'instrument dont le résonateur est un simple cône tronqué sans bec produit rarement des régimes périodiques [18], en particulier pour des dimensions typiques des instruments réels. Cependant, d'un point de vue géométrique, le cône tronqué tend vers un cylindre quand la longueur de son sommet manquant augmente. Par conséquent, on peut espérer obtenir des régimes périodiques dans cette région de faible conicité, proche par exemple du mouvement de Helmholtz de la clarinette. Ici, un critère d'apériodicité simple est utilisé pour rechercher un seuil de conicité en dessous duquel des régimes périodiques peuvent apparaître. Ce critère est basé sur la variance de la durée entre deux changements de signe identiques et s'exprime

$$A_{ZC} = \log_{10} \left( \text{Var}_D(t[ZC_{i+2}] - t[ZC_i]) \right), \quad (66)$$

où  $t[ZC_i]$  désigne l'instant auquel la pression  $p$  change de signe (de positif vers négatif) pour la  $i^{\text{ème}}$  fois. Le calcul du descripteur est limité à une partie centrale  $D$  du signal pour éviter le transitoire et s'affranchir d'éventuels effets de bord. Cette approche rapide et simple s'applique à des signaux à très faible niveau de bruit, et fonctionne mieux avec seulement deux changements de signe par période. Le mouvement recherché, qui s'apparente au mouvement de Helmholtz pour la clarinette, présente cette caractéristique.

Deux cartographies d'apériodicité sont représentées en figure 11, pour deux valeurs du paramètre d'appui sur l'anche  $\zeta$ . La conicité est mesurée par le paramètre adimensionné  $\beta$ , défini comme

$$\beta = \frac{x_1}{x_1 + \ell}, \quad (67)$$

tel que  $\beta \rightarrow 1$  indique une géométrie quasi-cylindrique. Pour  $\beta < 0.7$ , les régimes périodiques sont rares, alors que lorsque  $\beta > 0.7$ , la plupart des résultats peuvent être considérés comme périodiques. L'intuition géométrique est donc confirmée, puisque les cônes tronqués quasi-cylindriques s'avèrent capable de produire des régimes périodiques, comme les cylindres. Cependant, pour les instruments coniques réels, les valeurs courantes de  $\beta$  se situent dans l'intervalle  $[0.2, 0.5]$ , et dans cette région, le cône tronqué sans bec ne produit presque jamais de régime périodique.

#### 3.2 Cartographies de régime

Un outil courant de représentation du comportement global d'un système dynamique complexe est la cartographie de régimes, qui représente les différents types de régimes qui apparaissent en fonction de la valeur des paramètres du modèle. Ici, il est intéressant de décrire le comportement d'une configuration géométrique donnée selon les valeurs de  $\gamma, \zeta$  : la cartographie représente alors les régimes que le musicien peut espérer produire avec un doigté donné, en modifiant seulement la pression dans sa bouche  $\gamma$  et l'appui sur l'anche  $\zeta$ .

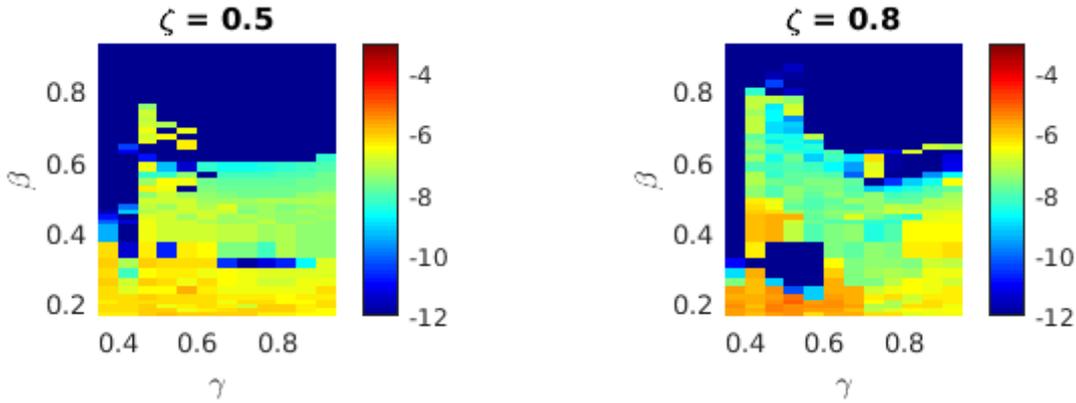


FIGURE 11 – Carte d’apériodicité  $\log_{10}(A_{ZC}(\gamma, \beta))$  pour  $\zeta = 0.5$ . Les régions **bleu foncé** correspondent à des régimes périodiques. Une valeur de  $A_{ZC}$  supérieure à  $10^{-8}$  peut être considérée comme un régime quasi-périodique.

**Étude de l’influence du volume du bec** Le volume du bec, ici représenté par le paramètre  $K_m$ , influe notamment sur l’inharmonicité du résonateur. Le choix habituel  $K_m = 1$ , c’est à dire un bec de volume égal à celui du sommet manquant du tronc de cône, correspond à une approximation basse fréquence de l’impédance du *saxophone traversier* équivalent au tronc de cône, qui est constitué de deux cylindres de longueurs  $\ell$  et  $x_1$  placés en parallèle. L’impédance du résonateur tronconique avec bec localisé de volume  $V_m = K_m x_1 S_1 / 3$  variable s’exprime

$$Z_{CLM} = \frac{Z_c}{\frac{1}{j \tan(k\ell)} + \frac{1}{jkx_1} + j \frac{kx_1}{3} K_m}. \quad (68)$$

En fixant  $K_m$  à l’unité, l’expression  $1/(jkx_1) + jkx_1/3$  correspond au développement en séries de  $1/(j \tan(kx_1))$  pour  $kx_1$  tendant vers 0, c’est-à-dire des longueurs d’ondes caractéristiques très grandes devant  $x_1$  : on retrouve l’approximation de l’équation (32). Cependant les résonances obtenues avec  $K_m = 1$  ne sont pas parfaitement harmoniques. Un autre choix possible,  $K_m = 12/\pi^2$ , correspond au développement en séries de  $\frac{1}{j \tan(kx_1)}$  pour  $kx_1 \sim \pi/2$  et mène à une inharmonicité plus faible. Cependant, les régimes produits par le système complet incluant l’excitateur non linéaire sont difficiles à prévoir directement à partir de la seule impédance. Par conséquent, une manière de qualifier ces choix de paramètres les uns par rapport aux autres est d’étudier directement leur effet sur les signaux synthétisés. Par la suite, on utilisera une mesure de l’inharmonicité du deuxième pic d’impédance définie comme

$$IH_2 = \frac{f_2 - f_1}{f_1} - 1, \quad (69)$$

exprimée en pourcentage, où  $f_1$  et  $f_2$  sont les fréquences du premier et second pic d’impédance. Cette définition est notamment utilisée dans l’étude de l’effet de l’inharmonicité sur les régimes produits par un saxophone alto joué à la bouche artificielle [8].

La figure 12 présente trois cartographies de régime, obtenues pour une configuration géométrique proche de celle d’un saxophone alto, doigté  $G$ , et des volumes de bec proches de celui du cône manquant  $x_1 S_1 / 3$ . Le paramètre de volume de bec  $K_m$  influence l’inharmonicité entre les deux premiers pics, qui diminue quand  $K_m$  augmente. Ainsi pour  $K_m = 1.2 \simeq 12/\pi^2$ , les deux premières résonances de l’instrument sont quasiment harmoniques. On s’intéresse ici particulièrement à la surface de la région qui correspond au premier registre de l’instrument (en cyan sur la figure 12). En effet, le premier registre est celui que le musicien cherche le plus souvent avec ces configurations géométriques – le second registre est souvent émis à l’aide d’un trou de registre débouché, non pris en compte ici. On constate que pour une inharmonicité plus faible des deux premiers pics, la région de paramètres qui mènent à la synthèse d’un signal du premier registre est de plus en plus grande. En revanche, un bec très volumineux favorise l’émission de régimes quasi-périodiques à forte pression dans la bouche  $\gamma$ .

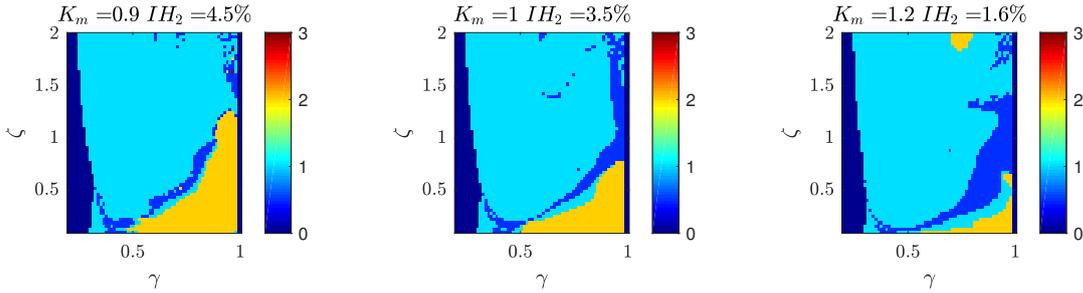


FIGURE 12 – Cartographies de registre produits par le modèle à résonateur tronconique ( $\ell/x_1 = 3$ ) et bec localisé sans pertes, pour  $K_m = 0.9, 1$  et  $1.1$ . La région **cyan** correspond au premier registre de l'instrument, le registre 0.5 (**bleu**) représente les régimes quasi- ou aperiodiques, le registre 0 (**bleu foncé**) représente l'absence d'oscillations. Le second registre est indiqué en **orange**.

### 3.3 Fréquence de jeu

La fréquence de jeu est un paramètre crucial dans un contexte musical, puisqu'elle correspond à la justesse de la note produite. On s'intéresse ici à la fréquence produite par le modèle de synthèse numérique, afin de dégager des tendances et des comportements caractéristiques avec pour perspective finale une interprétation analytique qui permettrait de prédire et de quantifier ces effets.

#### 3.3.1 Période des oscillations en fonction de la géométrie

**Effet de la longueur du tube** Le paramètre géométrique variable en situation de jeu, qui permet de conditionner la note émise par l'instrument, est la longueur du tube. Dans le cas des instruments réels, la variation de longueur équivalente est réalisée par l'ouverture ou la fermeture de trous latéraux sur le résonateur. Ici, on néglige tout effet des trous latéraux en aval du premier trou ouvert, on considère que tous les trous fermés le sont parfaitement, et l'on fait simplement varier la longueur totale  $\ell$  du tube. On se concentre sur le premier registre, en comparant la période des oscillations obtenues au retard de propagation correspondant à un aller-retour dans le tube. On trace ainsi non pas la période  $T$ , mais la différence  $T - \tau$  en fonction du retard  $\tau$ . Cette différence peut être interprétée comme une correction de longueur. La différence entre la période des oscillations et le retard est supposée indépendante de la longueur dans les approximations analytiques de Helmholtz et Lawergren, mais la synthèse numérique fait apparaître une dépendance complexe, avec des sauts de fréquence pour certaines valeurs particulières du retard pour un paramètre d'appui sur l'anche  $\zeta$  grand (figure 13). Pour  $\zeta$  plus petit (figure 14), on trouve des variations moins importantes de la différence période-retard et les sauts disparaissent. Dans ce cas, la période prévue par la méthode de Lawergren (53) semble fournir une meilleure approximation de la période obtenue en synthèse que celle la période prévue dans le cadre du mouvement de Helmholtz.

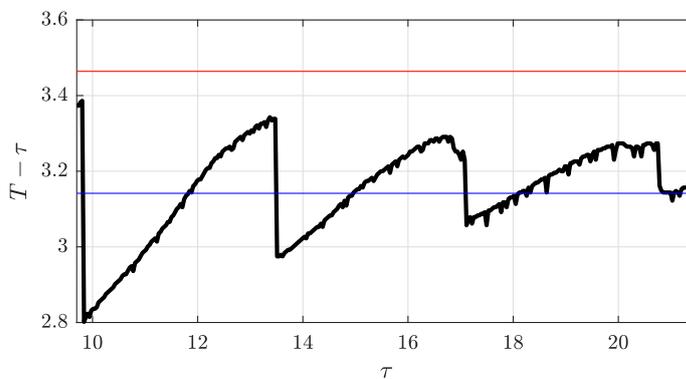


FIGURE 13 – Différence entre période d'oscillation et retard du signal synthétisé (**noir**) et prédictions théoriques (Helmholtz **rouge** et Lawergren **bleu**) pour  $\zeta = 1.6$  et  $\gamma = 0.35$

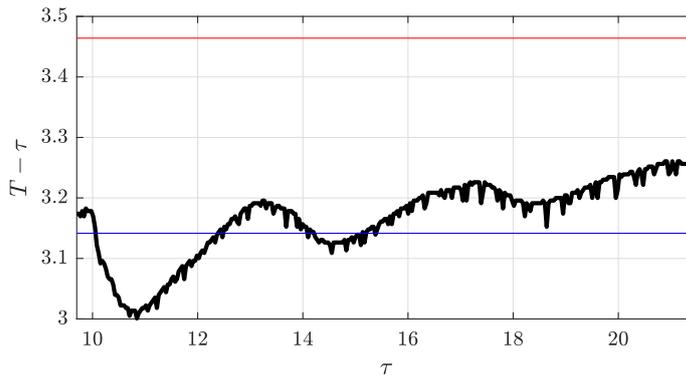


FIGURE 14 – Différence entre période d’oscillation et retard du signal synthétisé (**noir**) et prédictions théoriques (Helmholtz **rouge** et Lawergren **bleu**) pour  $\zeta = 1$  et  $\gamma = 0.35$

**Tendance globale en fonction de la longueur du tube et du volume du bec** Malgré la complexité de la dépendance de la période des oscillations au paramètre de retard  $\tau$ , on se propose de rechercher une approximation empirique simple en fonction des paramètres géométriques, sous la forme suivante :

$$T = \tau + A_\ell \frac{\ell}{x_1} + A_K K_m + B. \quad (70)$$

Afin de déterminer les paramètres  $A_\ell$ ,  $A_K$  et  $B$ , on utilise une optimisation au sens des moindres carrés avec pour cible les périodes d’oscillation estimées en synthèse. La forme de dépendance choisie ne vise pas à décrire les variations locales de la période en la géométrie mais à trouver une règle globale simple. On présente un résultat d’optimisation en figure 15. Sur cette figure apparaissent la différence entre périodes estimées et retards des signaux synthétisés, qui sont choisis comme objectif de l’ajustement d’un plan au sens des moindres carrés. Les coefficients sont estimés à

$$A_\ell = 0.0363 \quad A_K = 0.954 \quad B = 2.06. \quad (71)$$

On constate que le coefficient réglant la dépendance en  $\ell$  est faible devant les deux autres : les approximations de périodes comme celles qu’utilisent les mouvements de Helmholtz et Lawergren sont donc a priori valables comme tendance globale sur une large plage de variation du retard  $\tau$ . De plus, la dépendance en  $K_m$  est assez bien décrite par  $A_K \sim 1$ . Cette dépendance d’apparence simple conduit à espérer une interprétation analytique, au même titre que la dépendance en le paramètre de longueur du sommet manquant  $x_1$ , qui peut être éliminée par adimensionnement du temps.

### 3.3.2 Fréquence de jeu en fonction des paramètres de contrôle

La géométrie du résonateur conditionne très largement la période des oscillations, en particulier la longueur du tronc de cône. Cependant, pour une configuration géométrique donnée, cette période varie en fonction des paramètres de contrôle dus à l’action de la bouche du musicien, et ce même au sein d’un registre de l’instrument. Ces variations étant moins importantes que celles causées par la géométrie, on représente la variation de la fréquence de jeu en cents, avec pour référence la fréquence théorique du mouvement de Helmholtz correspondant à la géométrie :

$$\Delta f_{cents} = 1200 \log_2 \left( \frac{f}{c/(2(\ell + x_1))} \right), \quad (72)$$

où  $f$  est la fréquence estimée du signal de pression synthétisé en Hertz. On s’intéresse ici en particulier aux variations de fréquence qui apparaissent dans le premier registre de l’instrument. La figure 16 représente ces variations de fréquences, dans la région où le régime produit est assimilable au premier registre, pour deux valeurs du volume du bec. Plusieurs phénomènes caractérisant l’évolution de la fréquence de jeu peuvent être relevés.

- La fréquence de jeu diminue globalement quand le paramètre de pression dans la bouche  $\gamma$  augmente. L’amplitude et les caractéristiques de cette variation sont conditionnées par le paramètre  $\zeta$ .

$$\gamma = 0.35 \quad \zeta = 1.6 ; T_{fit}(K_m, \ell/x_1) = \tau + 2.06 + 0.954K_m + 0.0363\ell/x_1 ; R^2 = 0.93$$

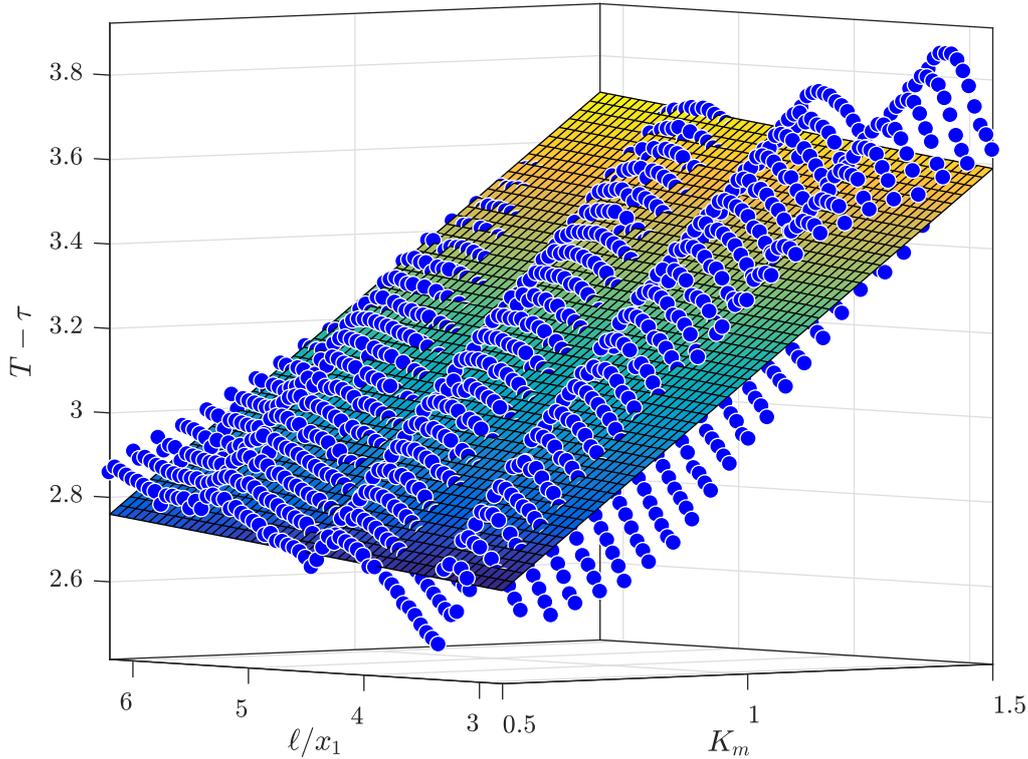


FIGURE 15 – Ajustement d’un plan représentant l’évolution de la différence période-retard en fonction de la géométrie du résonateur, avec pour objectif • les différences période-retard estimées à partir des signaux de pression internes synthétisés.

- La variation de la fréquence de jeu est continue, sauf pour de fortes valeurs du paramètre  $\zeta$  où il existe une région de variation abrupte de la fréquence de jeu en fonction de  $\gamma$ . Ce saut s’accompagne sur la forme d’onde de pression interne d’un changement du nombre d’oscillations de pression à anche ouverte. La figure 17 représente les signaux obtenus de part et d’autre du saut de fréquence de jeu.

### 3.4 Décomposition de la forme d’onde

La forme d’onde caractéristique du premier registre du saxophone est complexe, et il n’est pas aisé de la décrire de manière globale. C’est pourquoi en vue de disposer de références pour les études analytiques, on se propose de quantifier la variations de certains attributs de la forme d’onde en fonction des paramètres de contrôle et des paramètres géométriques.

#### 3.4.1 Dépendance des pressions extrémales à la longueur du tube

Le comportement des pressions minimales et maximales de la pression en fonction du retard  $\tau$  dû un aller-retour des ondes de pression dans le résonateur montre des propriétés intéressantes. En effet, bien que les formes d’ondes analytiques de Helmholtz et de Lawergren prévoient une pression minimale proportionnelle au retard, l’évolution dans le cas des signaux obtenus par synthèse numérique s’effectue plutôt par paliers, et fait apparaître des valeurs particulières de  $\tau$  où le comportement change brutalement (voir figure 18). Cet effet est accentué par une grande valeur du paramètre  $\zeta$  : pour  $\zeta = 1$  (figure 19) on trouve toujours un comportement irrégulier mais les changements de pente sont moins marqués.

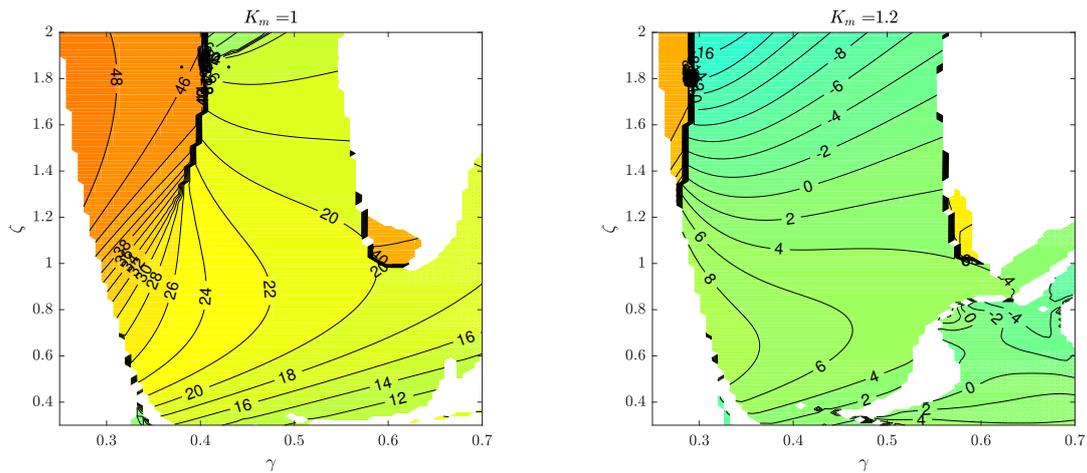


FIGURE 16 – Cartographies : écart en cents entre la fréquence de la note synthétisée et la fréquence du mouvement de Helmholtz  $f_H = c/(2(\ell + x_1))$  pour un cône correspondant à une note grave de saxophone ténor avec deux volumes de bec :  $K_m = 1$  (gauche) et  $K_m = 1.2$  (droite). Les régions en blanc correspondent aux régimes autres que le premier registre. Les deux points noirs sur la cartographie  $K_m = 1$  sont les coordonnées de contrôles utilisées pour synthétiser les signaux de la figure 17.

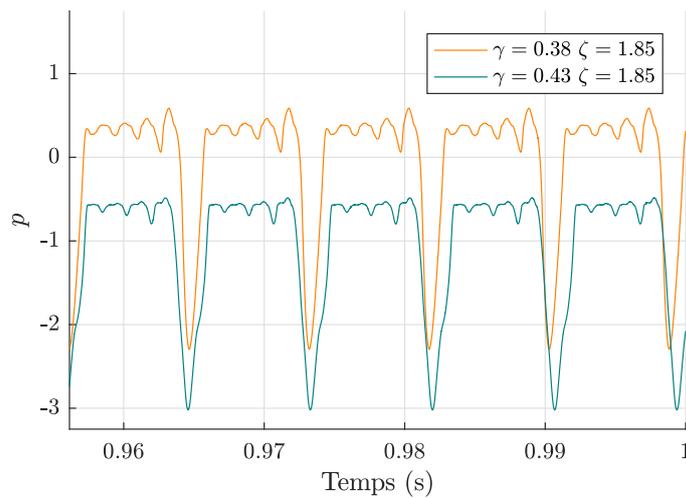


FIGURE 17 – Signaux de pression internes synthétisés : sous-régimes à 3 et 4 pseudo-périodes à anche ouverte pour  $\tau = 8\sqrt{3}$  et  $K_m = 1$ . La courbe inférieure a été décalée pour des raisons de clarté.

### 3.4.2 Description des oscillations à anche ouverte

L'un des aspects de la forme d'onde actuellement non prévu par les approximations analytiques est l'apparition d'oscillations secondaires de pression pendant l'épisode d'anche ouverte. Gokhstein [12] propose une première explication de ces oscillations et lie leur apparition aux paramètres de contrôle  $\gamma$  et  $\zeta$ . Ici, on s'intéresse principalement à la dépendance de ces oscillations à la géométrie, en particulier le retard de propagation  $\tau$ . Pour décrire les oscillations, on adopte un modèle sinusoïdal exponentiellement amplifié avec une constante additive de la forme

$$p_{fit}(t_{fit}) = K \exp(\sigma t_{fit}) \cos(\omega_2 t_{fit}) + C. \quad (73)$$

La méthode de description consiste à estimer les paramètres  $K, \sigma, \omega_2$  et  $C$  induisant la meilleure correspondance au sens des moindres carrés entre le modèle  $p_{fit}$  et la pression synthétisée  $p$  tronquée à un épisode d'anche ouverte (voir figure 20). Le temps  $t_{fit}$  subit un changement d'origine pour faire correspondre  $t_{fit} = 0$  au maximum de pression synthétisée. La méthode d'optimisation

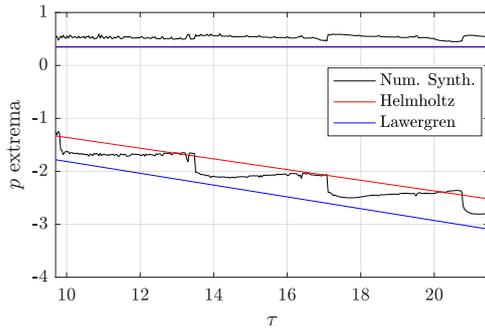


FIGURE 18 – Pressions extrémales synthétisées (noir) et théoriques (Helmholtz rouge et Lawergren bleu) pour  $\zeta = 1.6$  et  $\gamma = 0.35$

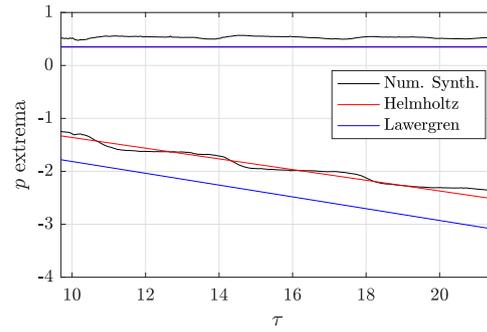


FIGURE 19 – Pressions extrémales synthétisées (noir) et théoriques (Helmholtz rouge et Lawergren bleu) pour  $\zeta = 1$  et  $\gamma = 0.35$

est l'algorithme de moindres carrés non linéaires à région de confiance employé dans la fonction `lsqcurvefit` de MATLAB.

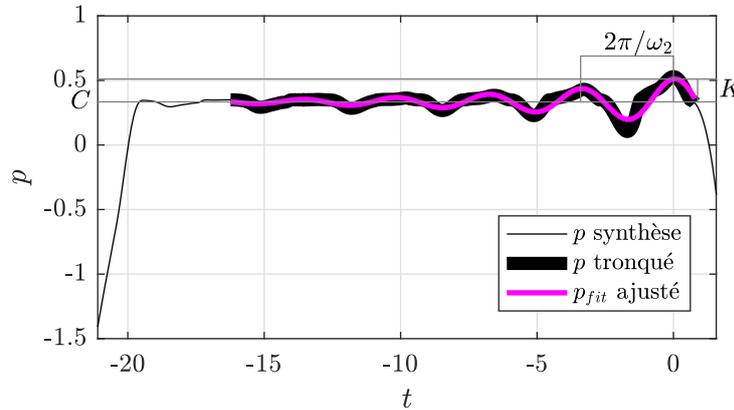


FIGURE 20 – Description des oscillations à anche ouverte : exemple d'ajustement du modèle de pression  $p_{fit}$  (magenta) à un signal synthétisé (noir).

Les résultats obtenus pour le couple de paramètres de contrôles  $\gamma = 0.35, \zeta = 1$  et un volume de bec  $K_m = 1$  sont représentés en figure 21. Les courbes obtenues sont irrégulières : en effet, la forme employée ne permet pas de décrire complètement les oscillations synthétisées : la pseudo-période paraît légèrement variable, les oscillations sont asymétriques, et leur amplification n'est pas toujours bien représentée par une exponentielle. On peut cependant analyser les résultats obtenus et formuler plusieurs constats :

- de même que pour la période globale, des sauts sont observés pour des configurations géométriques particulières, ce qui suggère que les variations abruptes des pressions extrémales correspondent à des changements de sous-régimes affectant la forme d'onde complète ;
- la valeur de la constante additive  $C$  n'est pas exactement égale à  $\gamma$  comme le prévoit le mouvement de Helmholtz ; une forme d'onde analytique plus générale et satisfaisante basée sur le mouvement de Helmholtz devra donc sans doute abandonner l'hypothèse d'équilibre des pressions entre bouche du musicien et entrée du résonateur à anche ouverte ;
- la pulsation des oscillations  $\omega_2$  reste dans une région assez réduite autour de 2, il est donc possible d'envisager de la fixer pour une étude analytique ultérieure, comme pour la différence période-retard du mouvement de Helmholtz.

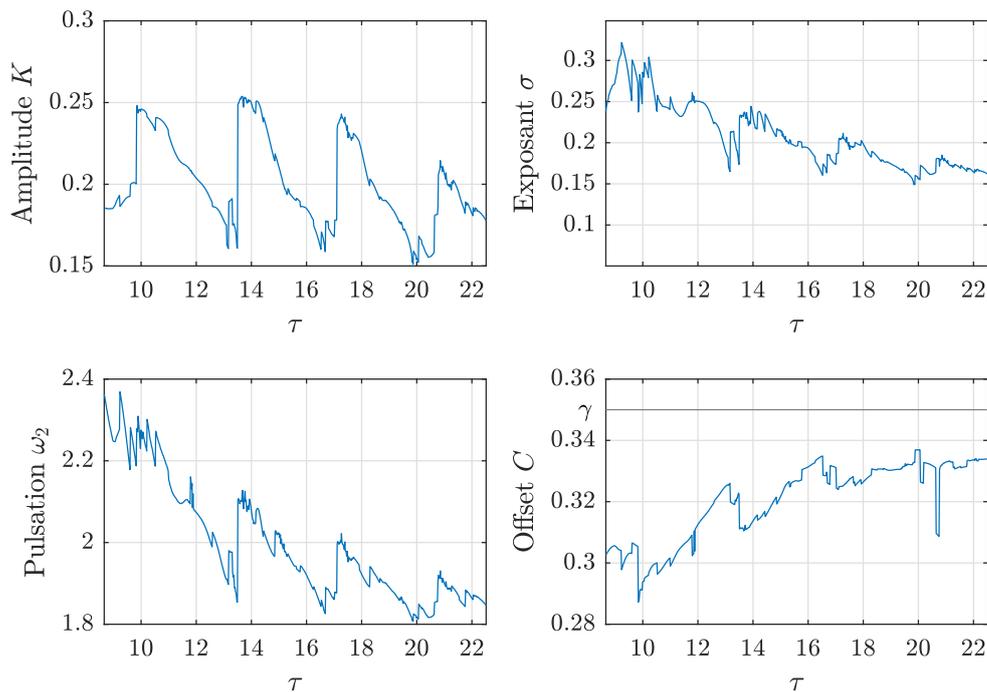


FIGURE 21 – Paramètres ajustés des oscillations à anche ouverte : amplitude maximale  $K$ , exposant  $\sigma$ , pseudo-pulsation  $\omega_2$  et composante continue  $C$ .

## Conclusion

Ce travail d'exploration du comportement des instruments coniques à anches montre à quel point le système étudié est complexe, malgré les hypothèses physiques fortes formulées lors de la construction du modèle. L'aspect fortement non linéaire couplé au caractère neutre à retard de l'équation de comportement place le système à la pointe de l'état de l'art concernant l'étude des systèmes dynamiques. Une simplification plus poussée du système, s'inspirant notamment des travaux de Gokhstein, pourra être développée pour obtenir des résultats simples. Toutefois, à l'aide du formalisme développé dans ce travail, il est possible d'appliquer des méthodes générales permettant d'obtenir des résultats concernant la stabilité et les caractéristiques des régimes obtenus par de tels systèmes, comme l'analyse multi-échelle. Parmi les autres pistes analytiques, on peut aussi citer l'approfondissement de l'analogie avec les instruments à cordes frottées.

L'étude paramétrique de descripteurs des signaux synthétisés numériquement comme la fréquence de jeu ou le régime d'oscillations ouvre la porte à des études analytiques plus poussées, mais elle a également une valeur en tant que cartographie prédictive du comportement d'un instrument réel. Grâce à un affinement progressif des hypothèses permettant d'identifier l'effet de chacun des mécanismes physiques à l'œuvre dans l'instrument, on peut espérer aboutir à un outil prédictif efficace permettant d'analyser et de décrire le comportement d'un instrument virtuel, qui pourra servir de prototype à un instrument réel en conception. En particulier, les hypothèses formulées ici ne sont pas valides à haute fréquence. En vue d'une étude basée sur le son rayonné, il sera nécessaire de prendre en compte des phénomènes comme les trous latéraux, la dynamique de l'anche, ou la dépendance des pertes à la fréquence.

Le travail sur les instruments coniques à anche sera poursuivi en thèse par une étude de l'influence de la géométrie du saxophone sur la qualité de l'instrument, à définir et à quantifier en fonction des caractéristiques des sons produits, et le développement d'un instrument à vent à géométrie basée sur l'approximation à deux cylindres d'un résonateur conique.

## Références

- [1] John Backus. Small-vibration theory of the clarinet. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 35(3) :305–313, 1963.
- [2] AH Benade and SJ Lutgen. The saxophone spectrum. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 83(5) :1900–1907, 1988.
- [3] AH Benade and W Bruce Richards. Oboe normal mode adjustment via reed and staple proportioning. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 73(5) :1794–1803, 1983.
- [4] Antoine Chaigne and Jean Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [5] Jean-Pierre Dalmont, Bruno Gazengel, Joël Gilbert, and Jean Kergomard. Some aspects of tuning and clean intonation in reed instruments. *Applied acoustics*, 46(1) :19–60, 1995.
- [6] Jean-Pierre Dalmont, Joël Gilbert, and Jean Kergomard. Reed instruments, from small to large amplitude periodic oscillations and the helmholtz motion analogy. *Acta Acustica united with Acustica*, 86(4) :671–684, 2000.
- [7] Vincent Debut. *Deux études d'un instrument de musique de type clarinette : analyse des fréquences propres du résonateur et calcul des auto-oscillations par décomposition modale*. PhD thesis, Université de la Méditerranée-Aix-Marseille II, 2004.
- [8] Jean-Baptiste Doc and Christophe Vergez. Oscillation regimes produced by an alto saxophone : Influence of the control parameters and the bore inharmonicity. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(4) :1756–1765, 2015.
- [9] Thomas Erneux. *Applied delay differential equations*, volume 3. Springer Science & Business Media, 2009.
- [10] Joël Gilbert, Jean Kergomard, and Edouard Ngoya. Calculation of the steady-state oscillations of a clarinet using the harmonic balance technique. *The journal of the Acoustical Society of America*, 86(1) :35–41, 1989.
- [11] A Ya Gokhshtein. Role of airflow modulator in the excitation of sound in wind instruments. In *Soviet Physics Doklady*, volume 26, page 954, 1979.
- [12] A Ya Gokhshtein. Self-vibration of finite amplitude in a tube with a reed. In *Soviet Physics Doklady*, volume 24, page 739, 1979.
- [13] A Ya Gokhshtein. Pressure jumps in the reflection of a wave from the end of a tube and their effect on the pitch of the sound. In *Soviet Physics Doklady*, volume 25, page 462, 1980.
- [14] A Ya Gokhshtein. Frequency-coinciding resonances of sound absorption and amplification in an expanding waveguide with a gas flow. In *Soviet Physics Doklady*, volume 28, page 632, 1983.
- [15] A Ya Gokhshtein. New conception of sound generation in conical woodwinds. In *International Symposium on Musical Acoustics*, volume 4, page 121, 1995.
- [16] Ph Guillemain. A digital synthesis model of double-reed wind instruments. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*, 2004 :990–1000, 2004.
- [17] J Kergomard, P Guillemain, Fabrice Silva, and Sami Karkar. Idealized digital models for conical reed instruments, with focus on the internal pressure waveform. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 139(2) :927–937, 2016.
- [18] Jean Kergomard, Philippe Guillemain, and Fabrice Silva. Choice of algorithms for reed instruments oscillations : how to solve the equation for the nonlinear characteristics? In *Acoustics 2012*, 2012.
- [19] J Kohut and MV Mathews. Study of motion of a bowed violin string. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 49(2B) :532–537, 1971.
- [20] B Lawergren. On the motion of bowed violin strings. *Acta Acustica united with Acustica*, 44(3) :194–206, 1980.
- [21] Michael E McIntyre, Robert T Schumacher, and James Woodhouse. Aperiodicity in bowed-string motion. *Acta Acustica united with Acustica*, 49(1) :13–32, 1981.
- [22] John C Schelleng. The bowed string and the player. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 53(1) :26–41, 1973.

- [23] P-A Taillard and Jean Kergomard. An analytical prediction of the bifurcation scheme of a clarinet-like instrument : Effects of resonator losses. *Acta Acustica united with Acustica*, 101(2) :279–291, 2015.
- [24] Theodore A Wilson and Gordon S Beavers. Operating modes of the clarinet. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 56(2) :653–658, 1974.