

MASTER SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR - SPÉCIALITÉ ACOUSTIQUE - PARCOURS ATIAM

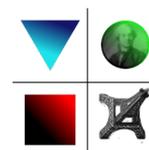
INSTITUT DE RECHERCHE ET COORDINATION ACOUSTIQUE/MUSIQUE - TÉLÉCOM
PARISTECH - UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

MÉMOIRE DE RECHERCHE

Optimisation de la perce interne d'instruments de la famille des flûtes : une approche mathématique pour un problème de facture instrumentale

Clément Bonvoisin
Master ATIAM
Promotion 2016-2017

Sous la direction de Benoît Fabre
Lutherie - Acoustique - Musique
Institut Jean-le-Rond d'Alembert
Université Pierre et Marie Curie



Mars 2017 — Juillet 2017

Table des matières

1	Les flûtes et les mathématiques : une introduction	2
2	État de l'art sur les instruments à vent et leur optimisation	5
2.1	Modèles pour les instruments à vent	5
2.2	Optimisation d'instruments à vent : quelles approches?	8
3	Éléments de mathématiques pour l'optimisation de perce	11
3.1	Espaces fonctionnels classiques	11
3.2	Quelques résultats de théorie spectrale	14
4	Flûte cylindrique : position et dimension des trous latéraux	18
4.1	Écriture du problème, résolution	18
4.2	Fonction de coût et gradient de coût	20
4.3	Implémentations algorithmiques et résultats numériques	21
5	Flûte tubulaire : vers un modèle amélioré	27
5.1	Description mathématique du résonateur, notion de domaine mince	27
5.2	Dérivation du modèle d'instrument tubulaire percé : plan de démonstration	29
6	De l'évaluation aux améliorations : mise en perspective	32

1 Les flûtes et les mathématiques : une introduction

Les instruments de la famille des flûtes peuvent être considérés sous des points de vue différents : ils sont à la fois un objet d'intérêt pour la composition et la performance musicales, pour la musicologie, pour la facture instrumentale ou encore pour l'acoustique. De la même façon, il est possible de tisser des liens entre différents domaines des mathématiques et certains des points de vue précédents : l'acoustique présente des liens assez immédiats avec la théorie des équations aux dérivées partielles ou l'analyse numérique (par le biais des équations de la mécanique des fluides ou de la mécanique vibratoire), là où la composition musicale et la musicologie possèdent des liens avec des problématiques d'algèbre, de théorie des catégories ou encore d'informatique théorique. Notre première tâche est donc de spécifier les liens que nous souhaitons développer entre mathématiques et flûtes.

La réflexion que nous souhaitons ouvrir dans les pages qui suivent est celle du lien entre la forme d'un instrument et le son qu'il produit. Nous pouvons dès lors préciser quelque peu les domaines scientifiques touchés par notre étude : pour ce qui est de la flûte, la forme de l'instrument relève de la facture instrumentale, là où le son qui en est produit est l'objet d'étude de l'acoustique ; côté mathématiques, notre problème se situe à l'interface entre la géométrie, qui étudie la forme des objets, et l'analyse, qui permet ici l'étude des mécanismes de production du son au sein d'une flûte.

Précisons le propos : le but de la facture instrumentale est de proposer des instruments répondant à certaines attentes, qu'elles soient de l'ordre de l'esthétique ou de la pratique ; il s'agit en effet de proposer des objets intéressants du point de vue musical, et notamment que ces objets soient jouables pour les instrumentistes. Ce travail peut être reformulé du point de vue des mathématiques, dès lors que l'on sait quantifier les attentes musicales et pratiques : il s'agit alors de minimiser l'écart entre lesdites attentes et les résultats obtenus avec l'instrument fabriqué. Cette reformulation pose deux questions : d'une part, celle de la modélisation des contraintes esthétiques et de jouabilité ; d'autre part, celle de l'optimisation de l'écart sus-cité, que nous appellerons conventionnellement fonction de coût.

Si la question de la quantification des attentes est de prime importance pour la facture instrumentale comme pour le problème d'optimisation qui nous occupe, nous la rejetons pour le moment à une exploration ultérieure, et souhaitons d'abord approfondir la démarche d'optimisation. Il s'agit en effet de savoir quels sont les paramètres sur lesquels le facteur pourra effectivement jouer lors de la fabrication de l'instrument. À ce stade, il nous faut répondre à une interrogation passée sous le tapis jusqu'à maintenant : qu'est-ce qu'une flûte ? Si la réponse à cette question varie selon le champ d'investigation scientifique, nous faisons le choix d'une réponse du point de vue de l'acoustique (voir par exemple [1], [2]) : une flûte est un instrument de musique dont la production de son est le résultat du couplage entre un résonateur



FIGURE 1 – La quena, flûte sud-américaine

et une source aéro-acoustique, créée par l'interaction entre un jet d'air et un biseau.

Cette définition prend en compte une large famille d'instruments, et montre la diversité des paramètres à prendre en compte dans le processus de fabrication/optimisation :



FIGURE 2 – Exemples d'ocarinas

nature du biseau (en encoche pour les quenass, comme visible sur la figure 1, en anneau pour les flûtes traversières, droit pour les flûtes à bec), forme du résonateur (tubulaire pour les flûtes traversières, globulaire pour les ocarinas et les xuns - voir respectivement les figures 2 et 4), contrôle de la note produite (réglée par la longueur des tuyaux sur un orgue, par la fermeture de trous latéraux sur les flûtes à bec, ou encore par des systèmes de clés sur les flûtes traversières Boehm - on appréciera cette évolution sur la figure 3).

La problématique se complexifie au regard de l'histoire de la facture instrumentale. Ainsi, là où les fifres du Moyen-Âge, ancêtres des flûtes modernes, puis les flûtes de la Renaissance jusqu'à environ 1680, ont une forme de perce interne essentiellement cylindrique, la fin du XVII^{ème} siècle marque un changement de conception avec l'apparition de flûtes dont, grossièrement, la partie supérieure (en partant de l'embouchure) est cylindrique, et la partie inférieure est conique par morceaux, avec un diamètre de perce se réduisant à mesure que l'on approche de la terminaison de l'instrument. Une nouvelle rupture historique est marquée dans le courant du XIX^{ème} siècle, avec le retour à des flûtes essentiellement cylindriques, dont la partie supérieure est toutefois légèrement conique, tendant à réduire le diamètre de la partie cylindrique (voir par exemple [3], [4], [5]). Ces évolutions se couplent de changements notoires, tant dans la pratique instrumentale que dans la tonalité de l'instrument. Nous observons donc, au sein d'une même famille d'instruments, des évolutions plus fines de la facture instrumentale, au niveau de la forme du résonateur. Il convient de plus de noter que ces changements de conception sont, pour autant qu'on le sache, le fruit d'expérimentations (voir par exemple [3], page 162 : «*À ma connaissance, toutes les modifications effectuées par le passé sur la perce interne des instruments à vent ont été complètement empiriques*»). On trouvera dans les mêmes ouvrages une description de l'évolution des systèmes de trous latéraux, de la simple fermeture successive par les doigts au système de clés mis au point par Theobald Boehm dans la première moitié du XIX^{ème} siècle. Le contrôle de l'instrument par la le musicien·ne en est transformé, notamment pour les doigtés de jeu, mais également pour le souffle de l'instrumentiste - en effet, les changements de technique de jeu accompagnent ceux de l'esthétique sonore et de la facture.



FIGURE 3 – À gauche, flûte de fabrication baroque ; à droite, flûte de fabrication type Boehm

Cette discussion nous permet de comprendre que notre objectif est en réalité double :

d'une part, l'évolution historique étant le fait d'expériences, il est intéressant d'obtenir une théorie, fondée sur des considérations physiques, permettant d'expliquer les changements radicaux comme les évolutions mineures de la facture des flûtes, en fonction des critères des époques où les dites modifications ont lieu ; d'autre part, à partir d'un tel modèle, il devient envisageable d'améliorer les conceptions actuelles de flûtes, mais également de proposer des paradigmes novateurs pour la facture instrumentale.



FIGURE 4 –
Le xun, flûte
chinoise

Cette brève introduction permet donc de comprendre la problématique de nos travaux : comment l'optimisation mathématique de la perce interne des flûtes permet-elle de réinterpréter les perces historiques, tout en proposant des formes de perces innovantes et intéressantes sur le plan musical ? Pour ébaucher une réponse à cette question, nous réalisons dans le chapitre suivant un bref état de l'art des travaux existants sur la question. Nous proposons ensuite des développements sur un modèle simplifié d'instrument cylindrique percé issu de la littérature récente ; finalement, nous tracerons les lignes directrices d'une preuve mathématique permettant de généraliser ledit modèle au cas où l'instrument présente des variations de section droite dans la perce interne. Ces travaux n'ayant en outre pas vocation à apporter une réponse définitive, nous esquisserons en conclusion les lignes directrices de l'exploration de notre problématique, qui seront l'objet de travaux ultérieurs.

2 État de l’art sur les instruments à vent et leur optimisation

Ayant précisé, dans la section précédente, les problématiques qui se posent dans nos travaux, nous cherchons désormais à préciser le contenu scientifique de ceux-ci. Un regard sur la littérature existante concernant les instruments à vent nous permet de comprendre mieux les questions que nous nous posons : tout d’abord, nous devons comprendre le fonctionnement générique des instruments à vent, ce qui nous permettra de restreindre le champ d’étude du travail présent, et de rejeter certains éléments de modélisation à des travaux ultérieurs. Nous verrons alors quels sont les modèles existants à l’heure actuelle, et leurs limites dans le cadre de l’optimisation de la perce de l’instrument. Ceci nous permettra de dégager plus précisément les problèmes scientifiques que nous chercherons à résoudre par le travail présenté ci-après.

2.1 Modèles pour les instruments à vent

Le principal élément de modélisation concernant les instruments à vent est la boucle d’auto-oscillation. Celle-ci permet de comprendre de quelle manière l’instrumentiste produit le son, par l’intermédiaire d’un composant non-linéaire et d’un résonateur linéaire, selon la boucle de rétroaction présentée à la figure 5.

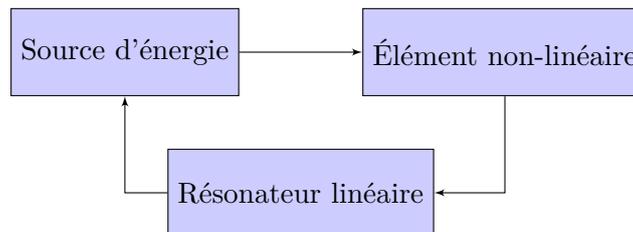


FIGURE 5 – Boucle d’auto-oscillation d’un instrument à vent

Ce schéma abstrait permet d’analyser aussi bien les instruments de la famille des flûtes qu’à anche, ou encore à cordes frottées (voir à ce sujet [2], [6]). Dans le cas qui nous intéresse, la source d’énergie correspond au jet d’air produit par le musicien ; l’élément non-linéaire correspond au biseau de la flûte, dont l’interaction avec le jet d’air produit un écoulement turbulent. C’est ce dernier qui, en entrant en interaction avec le résonateur qu’est le corps de l’instrument, va produire l’onde acoustique qui sera rayonnée à l’extrémité passive de l’instrument.

Si, à l’heure actuelle, la littérature propose des modèles satisfaisants des différentes composantes de la boucle d’auto-oscillation (voir par exemple [7]), permettant d’obtenir des prédictions satisfaisantes sur les sons produits par l’instrument, notre objectif est ici de comprendre les effets induits par les paramètres de facture et de jeu sur le son produit, selon une démarche inverse. De ce point de vue, l’élément le plus commun à la modélisation est la partie résonante de l’instrument : il s’agit, la plupart du temps, d’un conduit tubulaire percé à certaines positions - cette configuration étant en

outre commune à certains instruments de la famille des anches. Sa description peut être rudimentaire (propagation d’ondes acoustiques dans un cylindre ouvert aux deux extrémités), comme elle peut intégrer des éléments plus complexes (pertes d’origine visqueuse ou thermique, rayonnement, géométrie de la perce interne, présence de trous latéraux) avec des précisions variables (discrétisation de la perce interne, ou description de celle-ci par une fonction analytique, par exemple).

Ligne de transmission

Le formalisme généralement retenu dans la littérature pour la modélisation d’un tel résonateur est celui de la ligne de transmission (voir notamment [2], [8]). Celui-ci consiste en la discrétisation du résonateur en un certain nombre de segments (selon le schéma de la figure 6 par exemple), sur lesquels les vecteurs pression-débit à chaque extrémité sont liés par une matrice de transfert. Mathématiquement, si on a discrétisé en N tronçons le résonateur, on a alors, pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{pmatrix} P_i \\ U_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{i+1} \\ U_{i+1} \end{pmatrix}, \quad i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (1)$$

La matrice de transfert dépend alors de la nature du tronçon considéré, ainsi que des éléments de modélisation à prendre en compte.

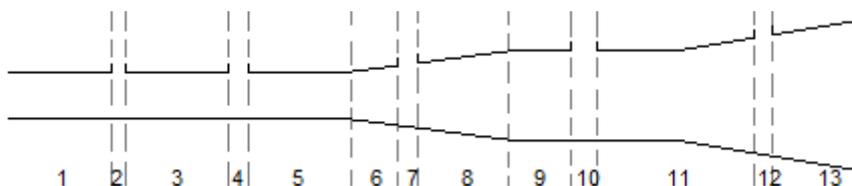


FIGURE 6 – Principe de la ligne de transmission

Ainsi, on pourra ajuster les coefficients A_i, B_i, C_i, D_i intervenant dans le calcul de (1) selon que le tronçon i représente un cylindre, un cône tronqué ou encore un trou, en intégrant un certain nombre d’éléments de modélisation (pertes visqueuse et thermique, trou ouvert ou fermé, hauteur de cheminée pour les trous, etc.).

Cette méthode présente l’avantage d’offrir une description assez précise des mécanismes intervenant au sein du résonateur, tout en étant assez simple du point de vue calculatoire : on obtient en effet par de simples produits matriciels un lien entre les vecteurs pression-débit aux embouchures active et passive de l’instrument. À l’aide d’un modèle de rayonnement à l’extrémité passive, on obtient alors une expression simple de l’impédance (ou de l’admittance) d’entrée, qui permet une caractérisation précise de l’instrument (voir [6], [8], par exemple). Nous verrons par la suite que la plupart des travaux actuels en optimisation pour les instruments à vent utilisent cette description pour la partie résonante de l’instrument.

Néanmoins, on perçoit dès maintenant l’une des limitations essentielles de ladite description : à notre connaissance, les géométries possibles pour un segment de résonateur

sont limitées aux cylindres et troncs de cônes. Si une telle discrétisation offre d'ores et déjà une large gamme de possibilités pour la description de géométries existantes, il s'agit néanmoins d'un défaut majeur pour le problème inverse, qui nécessite donc de restreindre l'ensemble des géométries possibles pour la perce interne du résonateur en faisant des *a priori* sur celle-ci.

Modèles différentiels

À ce stade, ayant constaté le défaut principal du formalisme de la ligne de transmission pour notre problématique, nous pouvons revenir en arrière dans la description : les matrices de transfert sont en effet obtenues à l'aide de simplifications de calcul dans l'équation d'onde, modèle de base de la propagation acoustique au sein d'un résonateur. Le principal inconvénient étant alors la lourdeur calculatoire de simulations de propagation d'ondes, qui peut être contourné par des simplifications.

L'approximation 1D obtenue de cette manière, pour des résonateurs de section droite variable, est appelée dans la littérature équation des pavillons, ou équation de Webster. En notant $S(x)$ la surface de la section droite du résonateur à l'abscisse x , elle s'écrit, en l'absence de sources et à température uniforme ([2]) :

$$\frac{S(x)}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(S(x) \frac{\partial p}{\partial x} \right) = 0 \quad (2)$$

La littérature concernant cette équation est foisonnante et permet à la fois de préciser les conditions de sa validité et d'en donner des extensions ([9]), mais aussi de donner des éléments de résolution ([10]). L'analyse *a priori* de cette équation laisse néanmoins entrevoir son principal avantage : la description se fait cette fois avec une surface de section droite vue comme fonction de la variable x . Il convient de noter qu'une telle description doit être enrichie de conditions aux bords, permettant de modéliser le comportement de l'instrument aux extrémités passive et active. Nous y reviendrons.

Notons toutefois que cette description ne permet pas, telle quelle, la prise en compte de l'influence des trous latéraux sur l'instrument. Nous disposons en revanche du résultat de Romain Joly ([11]) à ce sujet, dérivé pour le cadre restreint d'un instrument parfaitement cylindrique. Celui-ci utilise des techniques asymptotiques de type domaine mince - nous reviendrons ultérieurement sur ce point - afin de prouver que, dans l'approximation d'un cylindre de rayon r_c négligeable devant sa longueur L , et en supposant le rayon r_t du trou latéral négligeable devant le rayon du cylindre, l'influence de ceux-ci peut se modéliser comme une discontinuité de la dérivée spatiale de la pression. Plus précisément, dans la limite où le rapport $r_c/L \rightarrow 0$, les modes et fréquences propres d'un instrument cylindrique sont solutions de :

$$\begin{cases} p''(x) + \lambda p(x) = 0, & x \in (0, a) \cup (a, 1) \\ p(0) = p(1) = 0 \\ p'(a^+) - p'(a^-) = \alpha \delta p(a) \end{cases} \quad (3)$$

Les conditions aux limites envisagées ici font fi du rayonnement de l'instrument, ainsi que de la présence de l'instrumentiste : (3) décrit donc le résonateur comme composant

purement passif. Le coefficient α intervenant dans la condition de discontinuité est donné par l'intermédiaire de la fonction ζ , solution de l'équation de Poisson sur le demi-espace percé :

$$\begin{cases} \delta\zeta = 0 \text{ sur } K \\ \zeta = 0 \text{ sur } \partial K_h \\ \partial_\nu \zeta = 0 \text{ sur } \partial K_u \\ \bar{\zeta} = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Certaines notations doivent évidemment être précisées :

- nous désignons par K le demi-espace ouvert : $K = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+^*$ et par K_ϵ , $\epsilon > 0$ les ensembles :

$$K_\epsilon = \left(-\frac{1}{2\delta\epsilon}, \frac{1}{2\delta\epsilon} \right)^2 \times \left(-\frac{1}{\delta\epsilon}, 0 \right)$$

- la partie ∂K_h correspond au disque de centre 0 de rayon $1/2$ dans le plan d'équation $x_3 = 0$: $\partial K_h = \mathcal{C} \left(0, \frac{1}{2} \right) \times \{0\}$
- ∂K_u correspond au complémentaire de ∂K_h dans le plan d'équation $x_3 = 0$
- la notation $\bar{\zeta}$ désigne la moyenne de ζ sur K , définie par :

$$\bar{\zeta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|K_\epsilon|} \int_{K_\epsilon} \zeta(x) dx$$

où $|K_\epsilon|$ désigne le volume de K_ϵ

On obtient alors les coefficients apparaissant dans l'écriture du modèle dérivé par Romain Joly comme :

$$\alpha = \int_K |\nabla \zeta|^2, \quad \delta = \frac{r_t L}{r_c^2}$$

Bien que pratique du point de vue calculatoire, comme nous le verrons ultérieurement, ce modèle ne convient en revanche pas pour l'exploration que nous souhaitons mener, puisqu'il ne correspond qu'au cas d'un instrument cylindrique. Nous chercherons donc à l'améliorer pour prendre en compte le cas d'un instrument tubulaire. Il est néanmoins significatif de noter, à ce stade, que les profils de pression calculés par ce modèle sont en accord avec ceux donnés par [12], [13] pour des instruments percés ; ceci tout en gardant à l'esprit qu'une évaluation ne saurait se limiter à de telles considérations. Nous verrons en outre que ce modèle, aussi rudimentaire soit-il, permet déjà de comprendre certaines évolutions de facture.

2.2 Optimisation d'instruments à vent : quelles approches ?

La littérature sur l'optimisation de caractéristiques géométriques de dispositifs acoustiques balaie un nombre assez divers de situations, allant du haut-parleur pour lequel on cherche à minimiser l'onde réfléchie à l'intérieur du dispositif (maximisant ainsi l'onde rayonnée dans l'espace acoustique) ([14]) à des travaux plus récents sur les cuivres, prenant en compte l'influence de l'instrumentiste par l'intermédiaire d'un modèle de masque

musicien, dont le critère d'optimisation repose sur des simulations de jeu ([15]). La diversité des approches concernant l'optimisation doit en particulier inviter à réfléchir autant sur les critères retenus pour l'optimisation que sur les méthodes employées pour celle-ci : les travaux présentés dans [15] emploient des méthodes d'optimisation sans dérivation, contraintes par la nature stochastique du modèle retenu, là où l'approche développée par [14] est plus proche de l'optimisation de formes (voir notamment [16], [17] à ce sujet), là aussi dictée par le modèle, posé comme une équation aux dérivées partielles dans un domaine du plan. Plusieurs questions se posent donc : celle du modèle retenu pour l'instrument, celle des outils d'optimisation mis en œuvre, et finalement celle des critères utilisés pour juger de la qualité des instruments. Comme esquissé précédemment, ces questions ne sont pas parfaitement indépendantes.

Ainsi, la prise en compte ou non de certains éléments dans la modélisation permet généralement d'accéder à plus de critères permettant l'évaluation de l'instrument : un modèle limité à la description d'un résonateur passif ne pourrait prendre en compte que les seules fréquences de résonance dans l'évaluation de l'instrument (et poser sur celles-ci un critère de justesse), là où la nature auto-oscillante des instruments de la famille des flûtes oblige à modéliser l'interaction entre musicien et instrument pour obtenir des informations sur le timbre des sons produits ([15]). La modélisation des pertes au sein du résonateur, qu'elles soient d'origine visqueuse, thermique ou radiative, permet en outre de prendre en compte des éléments concernant l'intensité des pics d'impédance de l'instrument, et donc sur la jouabilité des différents régimes de jeu (que l'on trouve par exemple dans les travaux sur la clarinette logique menés dans [18], [19]).

Si l'on peut donc, des considérations qualitatives précédentes, déduire qu'au plus un modèle de flûte sera enrichi d'éléments de description, au plus les critères d'évaluation seront précis - une loi qui semble *a priori* raisonnable -, on comprend assez bien que la richesse du modèle impose également la complexité des stratégies d'optimisation déployées : ainsi, la prise en compte de l'instrumentiste dans les travaux sur les cuivres [15] amène à la mise en œuvre de méthodes d'optimisation sans dérivée (détaillées dans [20], [21], [22] notamment), plus élaborées que les méthodes de descente de gradient classiquement utilisées (dans [18], [19] par exemple).

Si les résultats obtenus dans les travaux sus-cités sont évidemment de qualité, nous tenons ici à remarquer un aspect de ceux-ci : tous reposent sur des modèles de type ligne de transmission - exception faite de [14], dont le contexte est différent puisqu'il s'agit d'y optimiser la forme d'un haut-parleur. Or, nous avons mentionné à la sous-section précédente ce qui constitue, à nos yeux, une limite du formalisme de la ligne de transmission : la discrétisation *a priori* de la forme du résonateur ne permettrait pas une flexibilité suffisante pour explorer de nouvelles possibilités instrumentales, ni pour expliquer certaines évolutions de perçes historiques.

À ce stade, il est intéressant de se pencher plus en détail sur le travail réalisé par Georges Le Vey dans [23] : si la visée applicative de l'article est réduite, notamment en raison du caractère peu physique du critère d'optimisation posé, mais également en raison du manque de réalisme du modèle (pas de prise en compte des trous latéraux, ni des pertes au sein du résonateur), celui-ci a toutefois l'intérêt d'ouvrir une perspective

théorique importante en proposant l'utilisation du formalisme de la théorie du contrôle pour le problème de l'optimisation de perce, à l'aide de l'équation de Webster. Sans rentrer pour l'instant dans les détails de la théorie du contrôle, décrivons rapidement l'idée. En réécrivant l'équation 2 en régime harmonique, on obtient, avec $D(x)$ désignant le diamètre de perce à l'abscisse x :

$$p''(x) + 2\frac{D'(x)}{D(x)}p'(x) + k^2p(x) = 0 \quad (5)$$

L'équation précédente est intéressante en ce qu'elle permet de constater que toute fonction de coût J posée sur les valeurs propres k_n de (5) dépendra *in fine* de la fonction D , et plus précisément du rapport $u = D'/D$, les valeurs propres étant elles-mêmes fonctions de ce même rapport. Envisageons alors une fonction de coût J , abstraite à ce stade, décrivant la qualité de l'instrument : le problème de l'instrument optimal au sens de J revient alors au problème d'optimisation suivant :

$$\text{Trouver } u^* \in X \text{ telle que } \forall u \in X, J(u^*) \leq J(u) \quad (6)$$

Ici, X désigne un ensemble de fonctions admissibles pour le rapport D'/D : c'est donc un espace de contraintes pour la variation logarithmique du diamètre de perce. L'article de Georges Le Vey [23] s'attache alors à expliquer en quoi la théorie du contrôle est un formalisme pertinent pour résoudre le problème d'optimisation (6). Nous renvoyons le lecteur intéressé par ledit formalisme à l'ouvrage d'Emmanuel Trélat [24] sur le sujet, qui y constitue une introduction de choix.

3 Éléments de mathématiques pour l'optimisation de perce

Comme le précise le titre, nous n'avons pas pour objectif ici de faire un exposé détaillé des outils mathématiques pouvant intervenir dans les problématiques liées à l'optimisation de perce. Notre but est ici d'introduire certaines notions dont nous nous servirons dans cet exposé, afin de motiver les recherches effectuées au cours du stage. Nous présentons donc succinctement la philosophie derrière l'analyse fonctionnelle, et en détaillons les notions utiles pour ce travail.

L'idée directrice de l'analyse fonctionnelle est de traiter des problèmes d'analyse à l'aide d'outils provenant de l'algèbre linéaire et de la topologie. On ne considère donc plus les fonctions comme correspondances entre deux ensembles, associant à chaque élément de l'ensemble de départ un élément de l'ensemble d'arrivée, mais en tant qu'éléments de certains espaces vectoriels normés. Nous poserons donc ici quelques bases à ce sujet, en introduisant les espaces classiques utilisés en analyse fonctionnelle, quelques propriétés de base de ces espaces, ainsi que des résultats issus de la théorie spectrale.

La·e lecteur·rice intéressé·e pourra se référer à l'ouvrage de Haïm Brézis [25] pour une présentation plus détaillée de l'analyse fonctionnelle et de ses applications aux équations aux dérivées partielles ; nous renvoyons en outre au livre de Bernard Helffer [26] pour un exposé plus complet des notions introduites concernant la théorie spectrale. Finalement, nous considérons comme admises les notions élémentaires sur les mesures de Lebesgue et l'intégration (théorèmes d'existence et d'unicité de la mesure de Lebesgue, intégrations par parties, par changement de variable), et renvoyons toute curiosité sur ce sujet à l'ouvrage-référence de Walter Rudin [27].

3.1 Espaces fonctionnels classiques

La principale difficulté de l'analyse fonctionnelle est aussi sa principale richesse : les espaces vectoriels utilisés ayant pour vecteur des fonctions, il s'agit, dans la majorité des cas qui nous intéressent, d'espaces de dimension infinie. Dès lors, contrairement à la dimension finie, il n'y a plus équivalence des normes en général, et la façon de mesurer une fonction devient donc un élément central de toute théorie.

De là proviennent notamment les espaces de Lebesgue, définis par les normes fonctionnelles d'ordre p , où $p \geq 1$. Pour toute fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, on définit :

$$\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

On peut alors définir les espaces de Lebesgue par :

$$L^p(\Omega; dx) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \|f\|_p < +\infty\}$$

Dès ici, trois remarques s'imposent :

- Nous avons ici défini les espaces de Lebesgue pour des fonctions numériques, c'est-à-dire à valeurs dans \mathbb{R} ; on peut évidemment généraliser cette construction à des

fonctions à valeurs vectorielles, en utilisant une norme au lieu de la valeur absolue dans la définition de $\|\cdot\|_p$; les normes étant équivalentes en dimension finie, le choix de la norme sur un espace euclidien importe peu pour définir $\|\cdot\|_p$

- En outre, nous avons ici fait le choix d'intégrer par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , notée dx : il convient de noter que l'on peut définir de manière analogue des espaces $L^p(\Omega; \mu)$ pour toute mesure positive sur \mathbb{R}^n . En particulier, si h est une fonction positive sur \mathbb{R}^n , on définit des espaces de Lebesgue pondérés par :

$$L^p(\Omega; hdx) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} |f(x)|^p h(x) dx < \infty \right\}$$

- Du point de vue de la théorie de l'intégration, deux fonctions sont équivalentes si et seulement si elles sont égales presque partout, c'est-à-dire partout sauf sur un ensemble de mesure nulle. Pour définir correctement les espaces L^p , et en particulier obtenir la structure d'espace vectoriel normé recherchée, il faudrait en réalité quotienter les ensembles définis ci-dessus par la relation d'équivalence «égalité presque partout».

Les espaces ainsi construits sont munis d'une structure d'espace vectoriel normé par la norme $\|\cdot\|_p$ (la preuve de ce résultat, qu'on trouvera dans [27], est une conséquence de l'inégalité de Minkowski). Néanmoins, dans le cadre que nous cherchons à explorer, et plus généralement dans le cadre des équations aux dérivées partielles, les espaces de Lebesgue sont limités, en ce sens qu'ils ne donnent aucune information sur les dérivées partielles des fonctions utilisées.

Pour dépasser ce problème, nous devons tout d'abord dire deux mots sur le concept de dérivée faible : il s'agit de généraliser l'opération de dérivation classique au point de vue de l'intégration. L'idée provient de la théorie des distributions - nous référons à l'ouvrage de Laurent Schwartz [28] pour tout complément à ce sujet -, nous la présentons ici du point de vue intégrale : une fonction $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est la dérivée partielle faible de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par rapport à la i -ème si et seulement si pour toute fonction φ de classe \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω , on a :

$$\int_{\Omega} f(x) \partial_i \varphi(x) dx = - \int_{\Omega} g(x) \varphi(x) dx$$

Il s'agit en réalité de généraliser la formule d'intégration par parties : l'équation précédente est généralement vérifiée par la dérivée au sens classique, et donc la notion de dérivée au sens des distributions (ou dérivée faible) étend bien cette notion. Par abus d'écriture, nous noterons $\partial_i f$ la dérivée faible de la fonction f . Ces notions nous permettent alors de définir les espaces de Sobolev, qui forment un cadre très utile pour la résolution de nombre d'équations aux dérivées partielles : si $p \geq 1$ et $s \in \mathbb{N}$, on appelle espace de Sobolev d'ordre (p, s) l'ensemble défini par :

$$W^{s,p}(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in L^p(\Omega) \text{ et } \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \partial^\alpha f \in L^p(\Omega) \}$$

Les espaces de Sobolev sont alors également des espaces vectoriels normés, pour les normes de Sobolev :

$$\forall f \in W^{s,p}(\Omega), \|f\|_{W^{s,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha f\|_p \right)^{1/p}$$

Dans le cadre de ce mémoire, nous travaillerons la plupart du temps dans le cas où $p = 2$: on note alors $H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$. Notons que dans ce cas, les espaces $H^s(\Omega)$ sont munis d'une structure euclidienne, c'est-à-dire que la norme dérive d'un produit scalaire, celui-ci étant défini par :

$$\langle f, g \rangle_{H^s} = \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} \partial^\alpha f(x) \partial^\alpha g(x) dx$$

Notons pour finir que de les remarques valables pour les espaces de Lebesgue restent vraies pour les espaces de Sobolev : on peut ainsi définir des espaces de Sobolev pour les fonctions vectorielles, et également pour des mesures μ différentes de la mesure de Lebesgue.

Ces quelques définitions nous permettent d'appréhender mieux les outils employés dans les parties qui suivent. Nous exposons dans la suite les principaux résultats sur lesquels reposent les travaux qui suivent, sans prétendre à l'exhaustivité, mais plutôt dans un souci d'intelligibilité du propos.

Après avoir passé en revue les espaces classiques de l'analyse fonctionnelle que sont les espaces de Lebesgue et de Sobolev, nous dressons ici quelques propriétés courantes des espaces vectoriels normés de dimension infinie, afin de rendre le propos qui suit intelligible, et de familiariser la-e lecteur-riche avec certaines notions centrales en analyse fonctionnelle. Commençons par définir la notion de complétude :

Définition 3.1 (Complétude). Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est complet si et seulement si toute suite de Cauchy converge. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ est dite de Cauchy si et seulement si :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall (n, m) > N, \|x_n - x_m\| < \epsilon$$

De cette définition découle la notion d'espace de Hilbert, qui généralise la notion d'espace euclidien en dimension infinie. Elle est notamment nécessaire pour appréhender les outils de théorie spectrale utile à la suite de ce mémoire :

Définition 3.2 (Espace de Hilbert). Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est dit de Hilbert si et seulement si il est complet et que sa norme dérive d'un produit scalaire.

Ceci clôt la présentation des notions utiles d'analyse fonctionnelle pour ce mémoire, et nous permet donc d'aborder la présentation des outils théoriques derrière l'analyse modale - outils reposant essentiellement sur les espaces de Hilbert, bien que nous ne verrons pas directement l'implication mathématique de cette notion, qui nous emmènerait dans un exposé bien moins concis.

3.2 Quelques résultats de théorie spectrale

Enfin, afin de terminer notre survol de l'analyse fonctionnelle, disons quelques mots de la théorie spectrale : là où l'analyse fonctionnelle considère les fonctions comme objets d'espaces vectoriels normés, la théorie spectrale concerne l'étude d'opérateurs linéaires entre espaces vectoriels normés. Il s'agit en fait d'une généralisation de l'algèbre linéaire classique au cas d'espaces de dimension infinie. Ce cadre est particulièrement adapté pour l'étude des équations aux dérivées partielles linéaires. Nous donnons ici quelques définitions de base sur les opérateurs non-bornés, ainsi que deux théorèmes très utiles en analyse : le théorème de décomposition spectrale pour un opérateur auto-adjoint, ainsi que le principe du min-max. Nous renvoyons à [26] pour les démonstrations de ces résultats, ainsi que de plus amples développements sur le sujet.

Commençons tout d'abord par introduire le concept fondamental de la théorie spectrale pour les opérateurs différentiels : celui d'opérateur non-borné.

Définition 3.3. Soit H un espace de Hilbert. Un opérateur non-borné sur H est un couple (D, T) où $D \subset H$ est un sous-espace vectoriel de H et $T : D \rightarrow H$ est une application linéaire de D vers H .

Si cette notion peut sembler sibylline au premier abord, démystifions-la immédiatement au travers d'un exemple important : si $H = L^2(\Omega)$ où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert et si $D = H^2(\Omega)$, alors l'opérateur laplacien va de D dans H et est linéaire ; il s'agit donc d'un opérateur non-borné.

La structure d'espace de Hilbert de H présente en outre un intérêt : celui de pouvoir définir une notion d'opérateur adjoint - par analogie avec les matrices adjointes de l'algèbre linéaire classique. Commençons par définir le domaine adjoint :

Définition 3.4 (Domaine adjoint). Soit (D, T) un opérateur non-borné sur H . On nomme domaine adjoint et on note $D(T^*)$ l'ensemble :

$$D(T^*) = \{v \in H \mid u \mapsto \langle Tu, v \rangle_H \text{ est linéaire continue sur } D\} \quad (7)$$

La linéarité étant ici assurée, la continuité s'entend au sens de la topologie de H en tant qu'espace de Hilbert. Une conséquence de cette définition est l'existence d'un opérateur adjoint (par l'intermédiaire du théorème de Riesz, voir [26] ou [25] par exemple) :

Définition 3.5 (Opérateur adjoint). Soit (D, T) un opérateur non-borné sur H . Alors il existe une application linéaire sur $D(T^*)$, notée T^* et appelée adjointe de T , telle que :

$$\forall u \in D, \forall v \in D(T^*), \langle Tu, v \rangle_H = \langle u, T^*v \rangle_H$$

Si $\forall u, v \in D, \langle Tu, v \rangle_H = \langle u, Tv \rangle_H$, on dit que T est symétrique.

Si $D(T^*) = D$ et $T = T^*$, on dit que (D, T) est un opérateur auto-adjoint.

La notion d'opérateur symétrique est en réalité très proche de celle d'opérateur auto-adjoint : le théorème d'extension de Friedrichs, que nous présentons ci-après, permet de faire la jonction entre ces deux notions. Renvoyant les preuves à la littérature ([26]), nous présentons tout d'abord la notion d'opérateur semi-borné, afin de présenter le théorème de Friedrichs :

Définition 3.6. Un opérateur (D, T) est dit semi-borné inférieurement si, et seulement si, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall u \in D, \langle Tu, u \rangle_H \geq C \|u\|_H^2$$

Comme annoncé, une conséquence de cette définition est le théorème suivant :

Théorème 3.1 (Friedrichs). *Un opérateur (D, T) symétrique semi-borné inférieurement possède une extension auto-adjointe, c'est-à-dire qu'il existe un opérateur (V, \tilde{T}) tel que $D \subset V$, $\forall u \in D, \tilde{T}u = Tu$ et (V, \tilde{T}) est auto-adjoint.*

Ces notions, bien que présentant peu d'intérêt en apparence car abstraites, permettent en fait de traiter correctement le cas du laplacien : soit en effet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \partial\Omega$ deux parties disjointes la frontière de Ω , telles que $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \partial\Omega$. On pose :

$$H_F^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \mid u = 0 \text{ sur } \Gamma_D \text{ et } \partial_\nu u = 0 \text{ sur } \Gamma_N \right\}$$

Cet espace permet donc de modéliser, dans un ensemble Ω , la présence de conditions de Dirichlet sur une frontière Γ_D et de conditions de Neumann sur une frontière Γ_N . On peut alors définir l'opérateur :

$$\Delta_F : H_F^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega) \text{ tel que } \forall u \in H_F^2(\Omega), \Delta_F u = - \sum_{i=1}^n \partial_{ii}^2 u$$

On peut alors montrer (voir [26] par exemple) que cet opérateur vérifie les hypothèses du théorème d'extension de Friedrichs, et qu'il possède donc une extension auto-adjointe.

Cet opérateur permet de modéliser le laplacien muni de conditions mixtes aux bords : dans notre cas, il permettra de modéliser le comportement de résonateur d'une flûte, dans l'hypothèse de l'absence de rayonnement et d'interaction avec l'instrumentiste - Γ_D représente alors le corps solide de la flûte, là où Γ_N représente les ouvertures dans celui-ci. L'intérêt de cette discussion réside alors dans l'analyse en tant que résonateur de la flûte, notamment du point de vue de l'analyse modale. À ce stade, nous pouvons donc introduire la notion mathématique de spectre :

Définition 3.7 (Spectre d'un opérateur). Soit (D, T) un opérateur non-borné sur un espace H . On appelle spectre de l'opérateur (D, T) et on note $\sigma(T)$ l'ensemble défini par :

$$\sigma(T) = \{ \lambda \in \mathbb{R} \mid T - \lambda Id \text{ n'est pas inversible} \}$$

Cette notion recouvre celle de valeur propre (pour lesquelles l'opérateur $T - \lambda Id$ est non-injectif, c'est-à-dire qu'il existe $u \in D$ non-nul tel que $Tu = \lambda u$), mais ne s'y restreint pas : en effet, il peut exister des valeurs spectrales telles que $T - \lambda Id$ est non-surjectif.

Nous touchons ici à l'un des objectifs de ce paragraphe : expliquer que le spectre du laplacien Δ_F se réduit à ses seules valeurs propres, qui constituent une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs tendant vers ∞ . Introduisons pour cela une dernière définition :

Définition 3.8 (Résolvante). Soit (D, T) un opérateur. On appelle résolvante et on note $R_\lambda(T)$, pour $\lambda \notin \sigma(T)$, l'inverse de l'application $T - \lambda I$. On dit que T est à résolvante compacte si, et seulement si il existe $\lambda \notin \sigma(T)$ tel que, pour toute suite $(u_n) \in H$ telle que pour tout $y \in H$, $\langle u_n, y \rangle_H$ est une suite convergente, la suite $R_\lambda(T)u_n$ converge dans H .

Cette définition, bien qu'abstraite dans notre cas, nous permet de formuler les hypothèses et conclusions des théorèmes qui nous intéressent : le théorème de décomposition spectrale pour les opérateurs non-bornés auto-adjoint à résolvante compacte, et le principe du min-max.

Théorème 3.2 (Décomposition spectrale). Soit (D, T) un opérateur non-borné auto-adjoint, dont la résolvante est compacte pour une valeur $\lambda \notin \sigma(T)$. Alors le spectre de T se réduit à ses seules valeurs propres, qui forment une suite divergente. De plus, on a l'existence d'une base orthonormée de vecteurs propres $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vérifiant :

$$T\phi_n = \lambda_n \phi_n$$

où $\lambda_n \rightarrow \infty$ est la suite des valeurs propres de T .

Ce théorème abstrait est le fondement de l'analyse modale : il permet de décomposer tout élément de l'espace H en une suite de vecteurs propres de l'opérateur T . On peut montrer (c'est fait dans [26]) que le laplacien vérifie ces hypothèses sous un panel assez large de conditions aux bords - y compris celles posées pour l'opérateur Δ_F qui nous occupe.

Terminons sur un résultat fondant la caractérisation variationnelle des valeurs propres, fort utile pour leur étude mathématique : le principe du min-max, énoncé ici sous une version simplifiée.

Théorème 3.3 (Min-max). Soit (D, T) un opérateur non-borné, semi-borné inférieurement, vérifiant les hypothèses du théorème 3.2. Soient $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ les valeurs propres de T , prises en ordre croissant et comptées avec leur ordre de multiplicité. Alors on a :

$$\lambda_n = \sup_{u_1, \dots, u_{n-1}} \inf_{v \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1}) \cap D} \frac{\langle Tv, v \rangle_H}{\|v\|_H^2} \quad (8)$$

La fraction présente dans l'équation (8) est appelée quotient de Rayleigh.

Bien qu'en apparence compliquée, cette caractérisation des valeurs propres permet en réalité d'extraire de nombreuses informations. Elle est notamment utilisée par Romain Joly [11] dans la dérivation du modèle évoqué précédemment : nous l'exposons ici pour la lisibilité du schéma de preuve proposé en fin de mémoire.

Nous terminons ici cette incursion dans le domaine des mathématiques, ainsi que la présentation des notions utiles pour la suite du travail. Achéons cette présentation en espérant qu'elle puisse être utile à la compréhension du matériau qui suit, et qu'elle puisse intéresser la-e lecteur-ric-e : par souci de concision, nous ne pouvons exposer dans

ces lignes l'ensemble des preuves des résultats énoncés, ni les nombreux résultats intermédiaires pourtant utiles à la compréhension de ce qui précède. Outre les références sus-citées, nous invitons les éventuel·le·s curieux·ses à se plonger dans l'introduction de Pierre Lévy-Bruhl [29], ainsi que dans l'œuvre de Michael Reed et Barry Simon [30], qui brosse un tableau d'ensemble des méthodes mathématiques pour la physique fort instructif.

4 Flûte cylindrique : position et dimension des trous latéraux

L'objectif de cette section est de présenter la résolution « complète » du problème dans le cas d'une flûte cylindrique percée. La démarche suivie consiste à aborder le problème sous l'angle mathématique, à l'aide du modèle présenté par Romain Joly. La résolution de ce problème amène à une description analytique des fréquences et modes propres de l'instrument, dans l'approximation du modèle de Joly.

La qualité du résonateur attendu se mesure alors à l'aide d'une fonction de coût, qu'il conviendra d'optimiser : la sous-section 2 explicite la fonction de coût utilisée, et détaille le calcul du gradient de celle-ci. La sous-section 3 relate les différentes expériences menées sous MATLAB à partir du modèle ainsi travaillé : visualisation de fonctions de coût dans différentes configurations, stratégies d'optimisation, résultats obtenus par l'optimisation.

Enfin, la dernière sous-section s'attache à la réalisation et à l'évaluation expérimentale de flûtes cylindriques, selon les prédictions obtenues dans la section 3. On pourra en particulier tirer un premier bilan de la méthode et du modèle mis en place, et notamment mesurer son adéquation à la réalité.

4.1 Écriture du problème, résolution

Le résultat obtenu par Romain Joly [11] nous permet de considérer que les fréquences propres de la flûte sont obtenus, en première approximation, par les valeurs propres de l'opérateur différentiel Δ_J défini par :

$$\begin{aligned} \Delta : H_J^2(0,1) &\rightarrow L^2(0,1) \\ p &\longmapsto -p'' \end{aligned} \quad (9)$$

Ici, l'espace fonctionnel $H_J^2(0,1)$ permet de modéliser à la fois la régularité de la fonction que l'on souhaite trouver, ainsi que les conditions aux bords et aux trous ouverts. Autrement dit, si l'on considère une flûte dont n trous sont ouverts, décrits en première approche par les paramètres $(a_i, \delta_i)_{1 \leq i \leq n}$, on a :

$$H_J^2(0,1) = \left\{ p \in H^2(0,1) \mid p(0) = p(1) = 0, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p'(a_i^+) - p'(a_i^-) = \alpha \delta_i p(a_i) \right\}$$

La théorie des opérateurs linéaires sur des espaces hilbertiens nous assure alors que le spectre de l'opérateur Δ_J est réduit à ses valeurs propres (ref. bib? ref. annexe?), et que ces valeurs propres forment une suite croissante, tendant vers l'infini. On obtient donc l'existence de $(\lambda_k((a_i, \delta_i)_{1 \leq i \leq n}))_{k \in \mathbb{N}}$ et de fonctions propres $(p_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset H^2(0,1)$ tels que :

$$\begin{cases} p_k''(x) + \lambda_k((a_i, \delta_i)_i) p_k(x) = 0 & x \in (0,1) \setminus \{a_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\} \\ p_k(0) = p_k(1) = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, p_k'(a_i^+) - p_k'(a_i^-) = \alpha \delta_i p_k(a_i) \end{cases} \quad (10)$$

Pour la simplicité des notations, nous omettrons désormais la dépendance en (a_i, δ_i) des valeurs et vecteurs propres du problème (10) lorsque ces dépendances ne sont pas pertinentes. La résolution de ce problème ne pose pas de difficulté majeure. Posant $f_k = \sqrt{\lambda_k}$, et en notant $a_0 = 0$, $a_{n+1} = 1$, on obtient alors l'existence de constantes $(A_{i,k}, B_{i,k})$ telles que :

$$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall x \in (a_i, a_{i+1}), p_k(x) = A_{i,k} \cos(f_k x) + B_{i,k} \sin(f_k x)$$

On obtient alors 2 équations sur les constantes $(A_{i,k}, B_{i,k})$ à l'aide de la nullité aux bords du domaine, n équations par les conditions de discontinuité de p' aux positions des trous, et n autres équations par la continuité de p aux positions des trous - soit $2n + 2$ équations pour $2n + 2$ inconnues. Après calculs, le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} A_{0,k} = 0 \\ A_{n,k} \cos(f) + B_{n,k} \sin(f) = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_{i,k} \cos(f a_i) - A_{i+1,k} \cos(f a_i) + B_{i,k} \sin(f a_i) - B_{i+1,k} \sin(f a_i) = 0 \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, f [A_{i,k} \sin(f a_i) - A_{i+1,k} \sin(f a_i) - B_{i,k} \cos(f a_i) + B_{i+1,k} \cos(f a_i)] = \alpha \delta_i p(a_i) \end{cases}$$

Afin de garder une certaine forme de symétrie dans le système, et d'exploiter la propriété de continuité de p aux points a_i , nous choisissons alors d'écrire :

$$p_k(a_i) = \frac{A_{i,k} + A_{i+1,k}}{2} \cos(f a_i) + \frac{B_{i,k} + B_{i+1,k}}{2} \sin(f a_i)$$

On peut alors rassembler le système de $2n + 2$ équations obtenues sous une forme matricielle. Posons pour cela les matrices élémentaires suivantes (on omet l'indice k pour simplifier) :

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos(f a_i) & \sin(f a_i) \\ f \sin(f a_i) - \frac{\alpha \delta_i}{2} \cos(f a_i) & -(f \cos(f a_i) + \frac{\alpha \delta_i}{2} \sin(f a_i)) \end{pmatrix}$$

$$N_i = \begin{pmatrix} -\cos(f a_i) & -\sin(f a_i) \\ -(f \sin(f a_i) + \frac{\alpha \delta_i}{2} \cos(f a_i)) & f \cos(f a_i) - \frac{\alpha \delta_i}{2} \sin(f a_i) \end{pmatrix}$$

En notant de plus $L_0 = (1 \ 0)$ et $L_{n+1} = (\cos(f) \ \sin(f))$, on peut alors assembler la matrice du système d'équations par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} L_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ M_1 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & N_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & M_n & N_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & L_{n+1} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ B_n \end{pmatrix} \quad (11)$$

Le problème aux bords et aux trous initialement posé devient alors un problème de non-inversibilité de la matrice A , pour laquelle il doit exister $X \in \mathbb{R}^{2n+2}$ non-nul tel que $AX = 0$. On obtient donc classiquement les valeurs propres comme zéros du déterminant de la matrice A , vue comme fonction de f . On a donc :

$$f \text{ est valeur propre de l'opérateur (9) ssi } \det(A((a_i, \delta_i)_i, f)) = 0 \quad (12)$$

4.2 Fonction de coût et gradient de coût

À ce stade, nous avons donc en main les éléments permettant de décrire, dans l'approximation de Romain Joly, les fréquences et modes propres d'une flûte cylindrique percée, en tant que résonateur passif. Ce modèle ne retenant pas de description des pertes visco-thermiques, ni d'interaction musicien-instrument, toute démarche d'optimisation basée sur ce modèle est limitée : on ne peut pas tirer d'information sur le timbre et sur la jouabilité de l'instrument. Il faut donc se contenter d'informations concernant la justesse de l'instrument.

Cette justesse est évaluée sur les différentes positions de doigts que le musicien est susceptible d'utiliser : on cherche à y optimiser l'écart entre les modes propre successifs et les fréquences désirées aux registres correspondants. Si n désigne le nombre de trous de la flûte, et m le nombre de positions susceptibles d'être utilisées par le flûtiste, on peut alors décrire ces positions sous la forme d'une matrice $P \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de 0 (trou fermé) et de 1 (trou ouvert), de taille (n, m) . À chaque doigté, on associe en outre un certain nombre de fréquences cibles (correspondant aux notes voulues pour les différents registres, dans chaque position) : pour tout $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$, on a donc un entier n_j (typiquement, $n_j \in \{1, 2, 3\}$), et un vecteur $(f_{j,k}^c)_{1 \leq k \leq n_j}$ de fréquences cibles.

La fonction de coût est alors donnée, en notant P_j la j -ième colonne de P , par :

$$J((a_i, \delta_i)_{1 \leq i \leq n}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} \left[f_{j,k} \left((a_i, \delta_i)_{i \in \{P_j=0\}} \right) - f_{j,k}^c \right]^2 \quad (13)$$

Grâce à l'équivalence (12), on peut alors affirmer que les fréquences propres intervenant dans le calcul de (13) sont des zéros des fonctions $G_j(a, \delta, f) = \det(A(a, \delta, f))$, où l'on a $(a, \delta) = (a_i, \delta_i)_{i \in \{P_j=0\}}$. Ces fonctions sont en outre \mathcal{C}^∞ sur leur domaine de définition, comme compositions, sommes et multiplications de fonctions elles-mêmes \mathcal{C}^∞ . Le théorème des fonctions implicites (voir annexes) permet alors d'affirmer le caractère \mathcal{C}^1 des différentes fréquences propres intervenant dans (13) (qui est donc elle-même \mathcal{C}^1). Les dérivées partielles sont obtenues facilement à l'aide du théorème des fonctions implicites :

$$\frac{\partial f_{j,k}}{\partial a_l}(a_i, \delta_i) = -\frac{\frac{\partial G_j}{\partial a_l}(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i))}{\frac{\partial G_j}{\partial f}(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i))}, \quad \frac{\partial f_{j,k}}{\partial \delta_l}(a_i, \delta_i) = -\frac{\frac{\partial G_j}{\partial \delta_l}(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i))}{\frac{\partial G_j}{\partial f}(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i))}$$

À partir de l'expression de la différentielle du déterminant, on obtient aisément, à l'aide de la règle de différentiation des composées de fonctions et de l'expression de la différentielle du déterminant (voir annexes ?), les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial f_{j,k}}{\partial a_l}(a_i, \delta_i) = -\frac{\text{tr}({}^t \text{Com}A(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i)) \partial_{a_l} A(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i)))}{\text{tr}({}^t \text{Com}A(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i)) \partial_f A(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i)))} \quad (14)$$

$$\frac{\partial f_{j,k}}{\partial \delta_l}(a_i, \delta_i) = -\frac{\text{tr}({}^t \text{Com}A(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i)) \partial_{\delta_l} A(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i)))}{\text{tr}({}^t \text{Com}A(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i)) \partial_f A(a_i, \delta_i, f_{j,k}(a_i, \delta_i)))} \quad (15)$$

On obtient finalement les dérivées partielles intervenant dans les expressions (14) et (15) en dérivant bloc par bloc. On obtient les dérivées partielles des matrices par bloc aisément :

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_i}{\partial a_l}(a_i, \delta_i, f) &= \delta(i, l) f \begin{pmatrix} -\sin(fa_i) & \cos(fa_i) \\ f \cos(fa_i) + \frac{\alpha \delta_i}{2} \sin(fa_i) & f \sin(fa_i) - \frac{\alpha \delta_i}{2} \cos(fa_i) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial N_i}{\partial a_l}(a_i, \delta_i, f) &= \delta(i, l) f \begin{pmatrix} \sin(fa_i) & -\cos(fa_i) \\ -f \cos(fa_i) + \frac{\alpha \delta_i}{2} \sin(fa_i) & -\left(f \sin(fa_i) + \frac{\alpha \delta_i}{2} \cos(fa_i)\right) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial M_i}{\partial \delta_l}(a_i, \delta_i, f) &= \frac{\partial N_i}{\partial \delta_l} = \delta(i, l) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\alpha}{2} \cos(fa_i) & -\frac{\alpha}{2} \sin(fa_i) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial M_i}{\partial a_l}(a_i, \delta_i, f) &= a_i \begin{pmatrix} -\sin(fa_i) & \cos(fa_i) \\ f \cos(fa_i) + \frac{\alpha \delta_i}{2} \sin(fa_i) & f \sin(fa_i) - \frac{\alpha \delta_i}{2} \cos(fa_i) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin(fa_i) & -\cos(fa_i) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial N_i}{\partial a_l}(a_i, \delta_i, f) &= a_i \begin{pmatrix} \sin(fa_i) & -\cos(fa_i) \\ -f \cos(fa_i) + \frac{\alpha \delta_i}{2} \sin(fa_i) & -\left(f \sin(fa_i) + \frac{\alpha \delta_i}{2} \cos(fa_i)\right) \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\sin(fa_i) & \cos(fa_i) \end{pmatrix} \\ \partial_{a_l} L_0 &= \partial_{\delta_l} L_0 = \partial_f L_0 = \partial_{a_l} L_{n+1} = \partial_{\delta_l} L_{n+1} = 0 ; \partial_f L_{n+1} = (-\sin f \quad \cos f) \end{aligned}$$

À partir de ce qui précède, on peut envisager de calculer le gradient de la fonction de coût (13), et donc réaliser une optimisation par descente de gradient. Reste donc à voir de quelles manières on peut envisager l'optimisation de l'instrument.

4.3 Implémentations algorithmiques et résultats numériques

Avant toute démarche d'optimisation, nous souhaitons ici avoir une idée de la forme de la fonction de coût ; néanmoins, celle-ci étant défini sur un sous-ensemble de \mathbb{R}^{2n} , nous ne pouvons pas la visualiser directement.

À ce stade, on peut adopter une démarche plus proche de la facture instrumentale : positionner et dimensionner un trou, puis, celui-ci étant fixé, positionner et dimensionner le trou «suivant», etc. Mathématiquement, cela revient à l'algorithme suivant :

- fixer une position et une dimension initiale pour chacun des trous : $(a_i^0, \delta_i^0)_{1 \leq i \leq n}$
- minimiser la fonction de coût $J(\cdot, \cdot, (a_i^0, \delta_i^0)_{2 \leq i \leq n})$, où l'on a fixé toutes les coordonnées, à l'exception des deux premières ; on obtient ainsi un couple (a_1^*, δ_1^*)
- minimiser la fonction $J(a_1^*, \delta_1^*, \cdot, \cdot, (a_i^0, \delta_i^0)_{3 \leq i \leq n})$, où l'on a fixé toutes les coordonnées, à l'exception des troisième et quatrième ; on obtient ainsi un couple (a_2^*, δ_2^*)
- ... et ainsi de suite jusqu'à la minimisation de $J((a_i^*, \delta_i^*)_{1 \leq i \leq n-1}, \cdot, \cdot)$, ce qui achève l'optimisation

Ce programme ne donne pas en général un minimum global de la fonction de coût, si tant est qu'un tel minimum existe ; il a néanmoins l'avantage d'être intuitif par rapport à la facture instrumentale, et de proposer une démarche qui se visualise correctement : on peut en effet observer les fonctions partielles successives, qui ne dépendent que de deux variables.

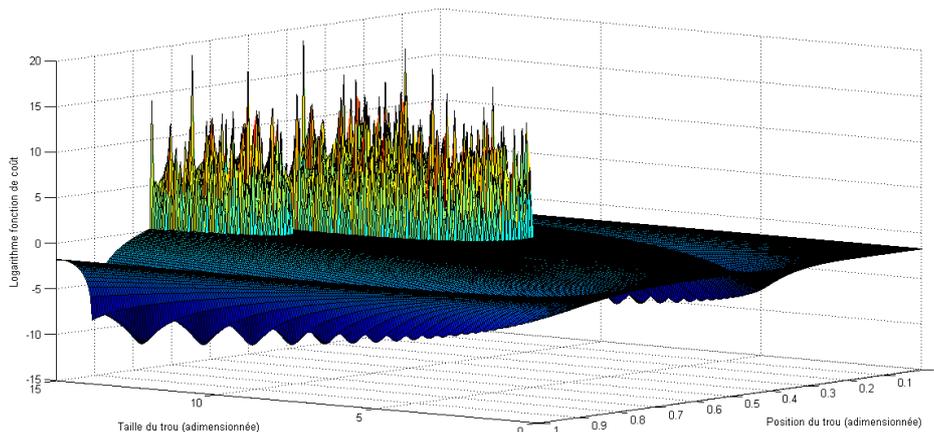


FIGURE 7 – Logarithme d'une fonction de coût avec un seul trou : présence d'instabilités

Ainsi, la figure 7 montre la visualisation d'une fonction de coût, où toutes les grandeurs sont adimensionnées :

- la «taille du trou» est le paramètre $\alpha\delta$ intervenant dans le modèle décrit ci-dessus
- la «position du trou» est le paramètre a , position rapportée à la longueur de l'instrument
- on observe ici le cas où un seul trou est présent (ou encore, tous les autres trous sont de taille $\alpha\delta = 0$, ce qui est équivalent)
- les fréquences cibles sont π et 2π pour le cas où le trou est fermé, $2^{1/12}\pi$ et $2^{13/12}\pi$ pour le cas où le trou est ouvert

On note néanmoins la présence d'anomalies avec des valeurs extrêmes où $\log J \approx 20$: il s'agit en réalité d'instabilités numériques liées à la méthode de Newton utilisée pour l'extraction des fréquences propres, qui donne des résultats aberrants. En multipliant la pente par un coefficient bien choisi (ici 0.5), on arrive toutefois à supprimer ces anomalies, et obtenir ainsi une visualisation correcte de la fonction de coût, telle que présentée à la figure 8.

On constate alors l'existence d'une région de valeurs minimales. L'apparence de minimas sous la forme de pics est ici liée à un échantillonnage trop faible des valeurs pour a et $\alpha\delta$, et doit plutôt être comprise comme la présence d'une courbe $\alpha\delta = g(a)$ concentrant les valeurs les plus faibles de la fonction de coût. Physiquement, on a donc que la justesse est assurée par l'augmentation de la taille du trou, à mesure que l'on s'éloigne du milieu du tube. Cette loi n'est évidemment que qualitative, et l'apparence

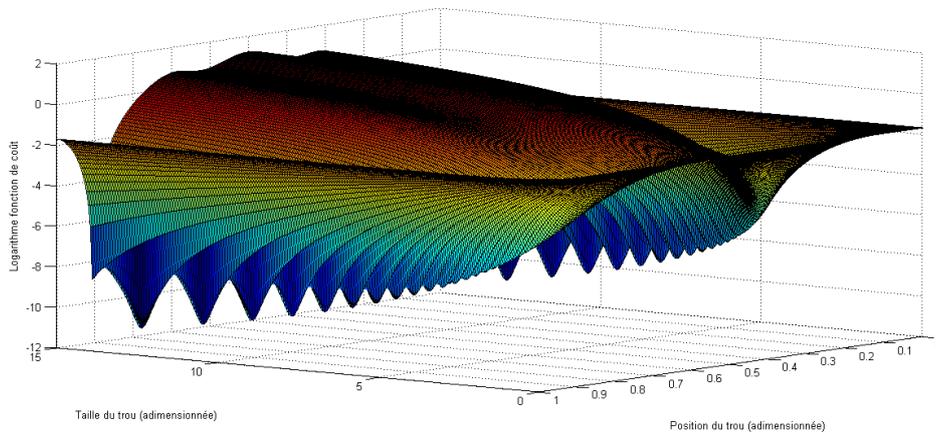


FIGURE 8 – Logarithme d’une fonction de coût avec un seul trou

de cette «courbe minimisante» mériterait une étude mathématique plus approfondie. Elle se constate également avec d’autres jeux de paramètres. Il convient en outre de noter la présence d’une symétrie autour de la valeur $a = 0.5$, due au fait de négliger l’interaction avec le musicien et de rayonnement dans notre modèle : les deux extrémités sont ici passives.

Continuons l’exploration en décidant de placer un trou à $a = 0.88$, $\alpha\delta = 8.05$, ce qui correspond au cinquième «pic» de la figure 8 en partant de la gauche : on obtient alors la figure 9 :

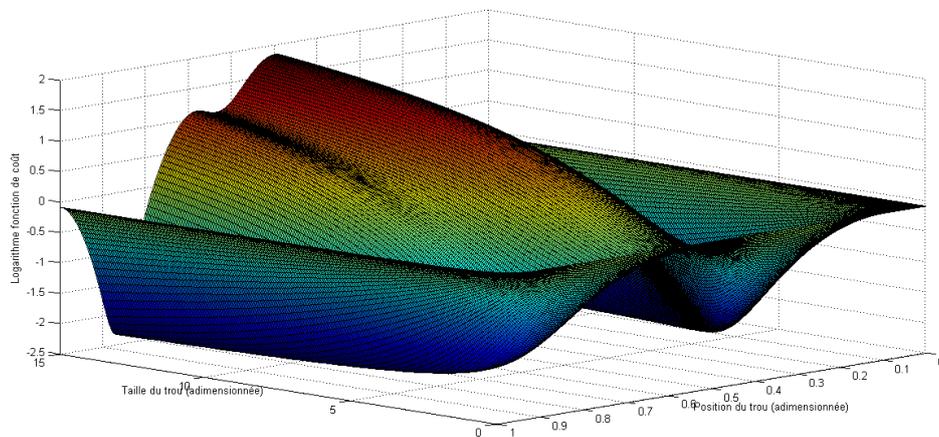


FIGURE 9 – Logarithme de la fonction de coût en présence d’un trou à $a = 0.88$, $\alpha\delta = 8.05$

L’observation est réalisée avec des valeurs «cohérentes» pour les fréquences cibles,

avec trois doigtés :

- un doigté où les deux trous sont fermés, où les fréquences cibles sont π et 2π
- un doigté où un trou est ouvert (celui fixé à l'étape précédente) et un autre fermé (celui dont la position et le diamètre «varient»), où les fréquences cibles sont $2^{1/12}\pi$ et $2^{13/12}\pi$ (ce qui correspond au doigté trou ouvert de la fonction de coût précédente!)
- un doigté où tous les trous sont ouverts, où les fréquences cibles sont $2^{1/6}\pi$ et $2^{7/6}\pi$

La progression étant ici effectuée pour correspondre à l'échelle chromatique de la musique, avec adimensionnement des grandeurs. On observe à nouveau la présence d'une zone minimisante pour la fonction de coût, et des valeurs maximales atteintes au milieu du tube, ce qui confirme l'intuition physique.

En complément, observons à présent le comportement pour des fréquences cibles ne respectant pas la règle de passage à l'octave pour le second registre : on observe la fonction de coût associée à un unique trou, avec deux doigtés :

- un doigté trou fermé où les fréquences cibles sont π et 2π
- un doigté trou ouvert où les fréquences cibles sont $2^{1/12}\pi$ et $2^{7/6}\pi$

Le résultat est présenté à la figure 10 :

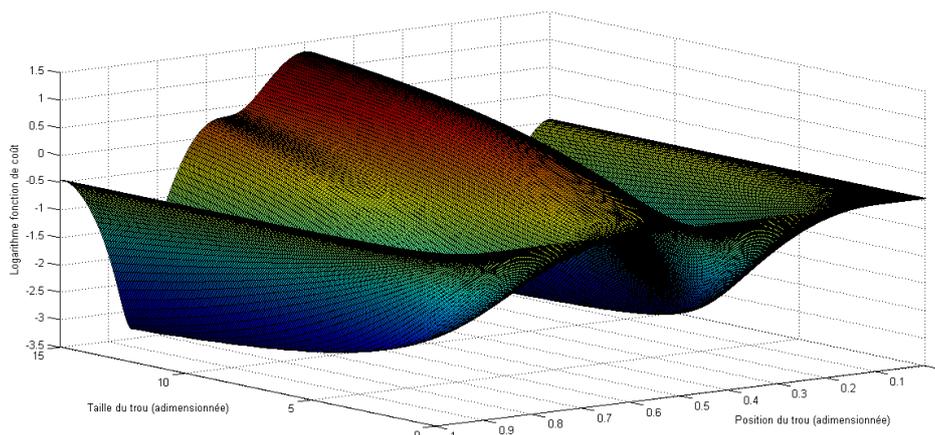


FIGURE 10 – Logarithme de la fonction de coût pour un second registre à un octave et un demi-ton du premier

On observe un comportement similaire à celui de la figure 9, avec la présence d'un pic central autour de $a = 0.5$, la présence de pics secondaires, puis une décroissance vers des valeurs minimales. On identifie à nouveau une région minimale, néanmoins moins prononcée que pour l'échelle chromatique - ce qui semble cohérent avec l'intuition physique.

Sur le plan mathématique, on peut conjecturer, à partir de ces visualisations, qu'il n'y a pas *a priori* de minimum global pour une fonction de coût dans le cas d'un instrument parfaitement cylindrique, mais qu'il existe en revanche des régions optimales pour les

trous, où un lien entre position et dimension s'établit - région qui pourrait être étudié mathématiquement à l'aide des zéros de $\frac{\partial J}{\partial a_i}$ à $\alpha\delta$ constant.

Pour terminer, montrons par un exemple les difficultés rencontrées pour l'optimisation par descente de gradient : nous traitons ici un cas artificiel (dans le sens où l'instrument résultant ne serait pas réellement intéressant musicalement), celui d'une flûte à un trou. Pour l'expérimentation, nous calculons tout d'abord les deux premières fréquences propres données par le modèle de Romain Joly pour un instrument percé en $a = 0.4$, avec $\alpha\delta = 4$. Ces fréquences étant obtenues, nous lançons alors la procédure de descente de gradient avec pour valeurs initiales $a = 0.5$ et $\alpha\delta = 5$: les résultats sont présentés aux figures 11, 12 et 13.

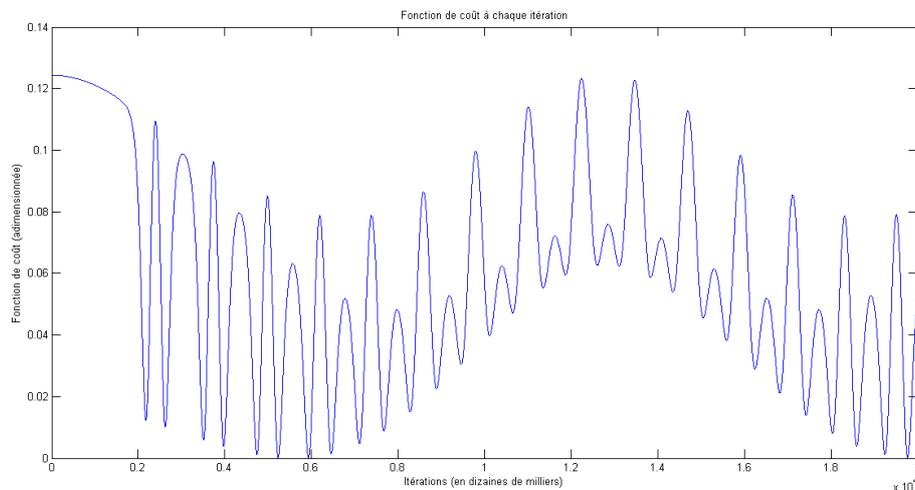


FIGURE 11 – Descente de gradient : fonction de coût à chaque itération

On observe ici une évolution peu lisible de la descente de gradient, avec une fonction de coût qui peut augmenter (en raison d'un pas d'apprentissage trop élevé sans doute, celui-ci étant fixé à 10^{-6} sur l'exemple traité). En outre, la condition d'arrêt (norme du gradient de la fonction de coût plus petite que 10^{-3}) n'est jamais remplie (la procédure s'arrête en raison d'une limite fixée dans le nombre d'itérations) : les visualisations précédentes permettent de comprendre que dans les régions optimisantes, la norme du gradient n'est pas nécessairement faible.

Ceci vient conclure cette section sur le modèle proposé par Romain Joly : il serait, selon l'auteur, intéressant d'en développer l'étude, notamment en analysant plus précisément la région optimisante présente dans les fonctions de coût affichées. D'autres travaux, notamment sur l'optimisation de la fonction de coût, notamment la définition d'un critère d'arrêt pertinent musicalement (en termes de décalage de justesse, par exemple : à partir de quelle valeur de la fonction de coût peut-on considérer qu'une flûte est juste?), pourraient être autant de perspectives intéressantes pour la suite. Voyons à présent de quelle manière on peut envisager l'amélioration du modèle proposé, en y intégrant les

variations de section droite de l'instrument.

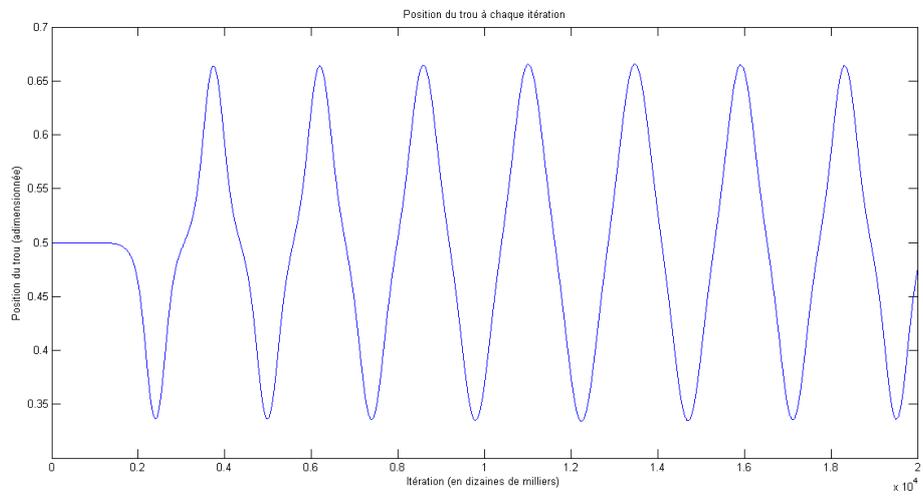


FIGURE 12 – Descente de gradient : position du trou à chaque itération

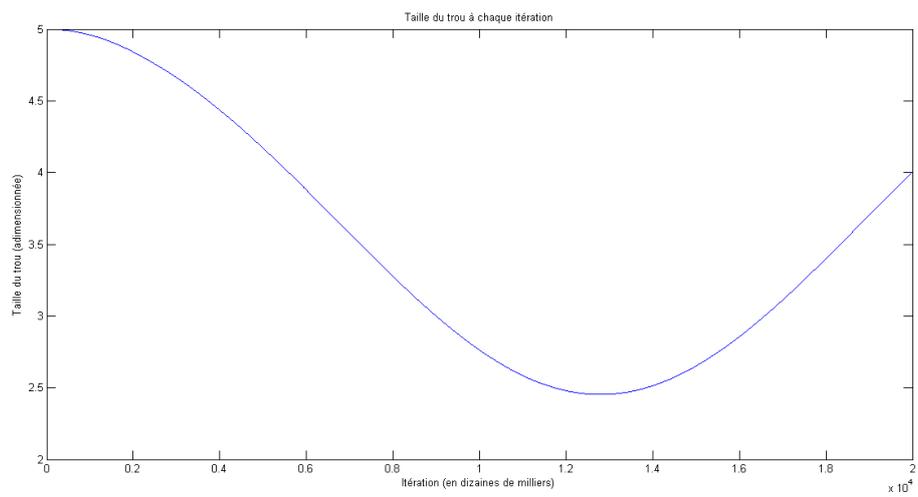


FIGURE 13 – Descente de gradient : taille du trou à chaque itération

5 Flûte tubulaire : vers un modèle amélioré

Nous avons vu, dans la section précédente, comment tirer profit du modèle proposé par Romain Joly dans [11] pour proposer des premiers éléments de simulation, en ce qui concerne le dimensionnement et le positionnement des trous latéraux. Toutefois, nous avons, dès la présentation du modèle, mentionné sa limite principale : elle ne permet pas de prendre en compte les variations de la perce interne, celle-ci étant assimilée à un cylindre.

Dans la section présente, nous esquissons comme annoncé des éléments de preuve pour la dérivation d'un modèle amélioré par rapport à celui proposé dans [11]. Nous reprenons pour cela le schéma de la preuve proposée par Romain Joly, en l'adaptant aux difficultés propres à la prise en compte d'une section droite de diamètre variable - ce que nous appelons domaine tubulaire.

La structure de ce paragraphe est la suivante : nous commençons par décrire ce qui est nommé domaine tubulaire, et qui modélise ici la géométrie de la partie résonante d'un instrument à vent de la famille des flûtes - excluant en outre le cas des flûtes dites globulaires, telles les xuns et ocarinas, dont les géométries plus complexes mériteraient une attention particulière. Nous décrivons ensuite les grandes lignes de la dérivation mathématique du modèle voulu - un modèle 1D différentiel décrivant les modes et fréquences propres du résonateur, et expliquerons les problématiques encore soulevées

5.1 Description mathématique du résonateur, notion de domaine mince

Nous commençons donc le travail par décrire géométriquement le résonateur que nous souhaitons optimiser. Nous devons pour cela commencer par définir ce que nous entendons lorsque nous parlons de domaine tubulaire. Nous en proposons ici la définition suivante :

Définition 5.1. Soit $L > 0$, $r : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$. On appelle domaine tubulaire de longueur L et de rayon de section droite r la partie de l'espace définie par :

$$\Omega(L; R) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in (0, L), \|y\|_2 < R(x) \right\} \quad (16)$$

Dans notre contexte, L correspond à la longueur totale de notre flûte, là où R correspond à la fonction donnant le rayon de perce interne. Physiquement, on fait alors l'hypothèse que le rayon de perce interne est négligeable devant la longueur de l'instrument ($R \ll L$). Il est néanmoins peu sensé, mathématiquement, de comparer une fonction à une quantité scalaire : on ajoute sur R l'hypothèse raisonnable qu'il s'agit d'une fonction bornée ($R \in L^\infty([0, L])$), et on introduit alors les quantité :

$$R_\infty = \|R\|_\infty = \sup_{x \in [0, L]} r(x), \quad \epsilon = \frac{R_\infty}{L}, \quad r(x) = \frac{R(Lx)}{R_\infty} \quad (x \in (0, 1))$$

Ceci nous permet de comprendre la notion mathématique de domaine mince dans notre contexte : faisant l'hypothèse que la propagation d'ondes dans le résonateur $\Omega(L; R)$

est régie par l'équation d'ondes (ce qui néglige la présence de pertes), on peut alors décrire les fréquences et modes propres du résonateur à l'aide du spectre du laplacien sur $\Omega(L; R)$, ainsi qu'introduits en section 3 - nous omettons pour le moment volontairement la description des conditions aux bords. On se ramène alors à l'équation d'onde sur un domaine adimensionné, paramétré cette fois-ci par ϵ , en effectuant le changement de variables $x' = x/L$, $y' = y/L$:

$$\Omega_\epsilon := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in (0, 1), \|y\|_2 < \epsilon r(x) \right\} \quad (17)$$

Ce qui nous intéresse désormais est le comportement de l'opérateur laplacien, avec conditions aux bords correctement définies, dans la limite où $\epsilon \rightarrow 0$ (c'est-à-dire $R_\infty \ll L$ physiquement) : l'objet de la sous-section suivante est de montrer que le spectre de l'opérateur laplacien, défini ici sur les domaines 3D Ω_ϵ , converge vers le spectre d'un opérateur 1D défini sur un espace fonctionnel donné.

Précisons à ce stade les conditions limites avec lesquelles nous souhaitons travailler - autrement dit, quelles hypothèses nous faisons sur l'instrument et ses interactions avec le milieu extérieur. Nous nous en tenons à des hypothèses minimales, faisant du corps de l'instrument un simple résonateur isolé :

- nous ne prenons pas en compte l'interaction entre le musicien et son instrument. Autrement dit, à l'extrémité dite active, $x = 0$, nous supposons que la pression acoustique est nulle : $p = 0$
- nous négligeons également les pertes dues aux rayonnements aux ouvertures du résonateur : cela correspond à l'extrémité passive $x = 1$, mais également aux trous latéraux, où l'on suppose donc également la pression acoustique nulle
- finalement, nous supposons que la paroi interne de l'instrument n'est le lieu d'aucune perte, c'est-à-dire : $\partial_\nu p = 0$ au niveau de la paroi

Les conditions aux bords sont donc un mélange entre conditions de Dirichlet et de Neumann. Nous devons au demeurant préciser les lieux géométriques où ces conditions ont lieu : si c'est à peu près clair en ce qui concerne les extrémités passive et active de l'instrument, la description des trous latéraux semble plus délicate.

Nous prenons ici le parti de modéliser un instrument ne comportant qu'un seul trou ouvert, le cas de plusieurs trous se traitant de manière similaire - selon une remarque effectuée dans [11], les raisonnements présentés ci-dessous étant en fait au voisinage d'un trou. Nous ne retenons à ce stade que deux grandeurs pour décrire un trou : l'abscisse de son centre a et son diamètre d - négligeant ainsi la hauteur de cheminée. Revenant au domaine tubulaire défini par (16), le trou est alors une partie du bord $\partial\Omega(L; R)$ définie par :

$$(x, y) \in \partial_{hole}\Omega(L; R) \text{ ssi } (x, y) \in \partial\Omega(L; R) \text{ et } \|(x, y_1) - (a, 0)\|_2 < \frac{d}{2} \quad (18)$$

On pose alors $\delta = \frac{dL}{R_\infty^2}$. Si cette définition peut sembler arbitraire, elle permet en fait de réécrire confortablement, dans les domaines adimensionnés Ω_ϵ , le lieu géométrique des trous :

$$\partial\Omega_\epsilon(\text{hole}) := \left\{ (x, y) \in \partial\Omega_\epsilon \mid \|(x, y) - (a/L, 0)\|_2 < \frac{\delta\epsilon^2}{2} \right\} \quad (19)$$

Cette description nous permet alors de partitionner la frontière $\partial\Omega_\epsilon$ en deux lieux disjoints, $\partial\Omega_\epsilon^D$ et $\partial\Omega_\epsilon^N$, où l'on a respectivement condition de Dirichlet ($p = 0$) et de Neumann ($\partial_\nu p = 0$). On définit en effet $\partial\Omega_\epsilon^D$ comme la réunion des extrémités active et passive et du trou latéral envisagé :

$$\partial\Omega_\epsilon^D = \{(0, y), \|y\|_2 \leq \epsilon r(0)\} \cup \{(1, y), \|y\|_2 \leq \epsilon r(1)\} \cup \partial\Omega_\epsilon(\text{hole})$$

On a alors immédiatement $\partial\Omega_\epsilon^N = \partial\Omega_\epsilon \setminus \partial\Omega_\epsilon^D$. On définit alors l'espace de Sobolev correspondant à nos conditions aux limites par :

$$H_F^2(\Omega_\epsilon) := \left\{ p \in H^2(\Omega_\epsilon) \mid p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon^D \text{ et } \partial_\nu p = 0 \text{ sur } \partial\Omega_\epsilon^N \right\}$$

Cet espace est raisonnable : il signifie que nous cherchons des pressions qui soient doublement dérivables par rapport aux coordonnées spatiales (ce qui est nécessaire pour l'équation d'onde) et qui vérifient les conditions aux bords du domaine imposées par notre modèle. Les fréquences propres que nous cherchons sont alors les carrés des valeurs propres de l'opérateur laplacien correspondant à cet espace, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \Delta_\epsilon : H_F^2(\Omega_\epsilon) &\rightarrow L^2(\Omega_\epsilon) \\ p &\longmapsto -\Delta p = \partial_{xx}^2 p + \partial_{yy}^2 p \end{aligned} \quad (20)$$

À ce stade, nous avons donc décrit mathématiquement l'ensemble d'hypothèses que nous avons fixées. Reste donc à étudier le comportement des valeurs propres des opérateurs Δ_ϵ , dans la limite où $\epsilon \rightarrow 0$, espérant obtenir ainsi un modèle 1D différentiel pour un résonateur tubulaire.

5.2 Dérivation du modèle d'instrument tubulaire percé : plan de démonstration

Nous entendons donc, dans cette ultime sous-section, proposer un plan de preuve pour l'asymptotique $\epsilon \rightarrow 0$ - il s'agit à l'heure actuelle d'un travail inachevé. Notons que ceci fait l'objet d'une remarque dans l'article de Romain Joly [11], que l'auteur de ces lignes a voulu vérifier - à cette heure, la démonstration complète de la remarque en question reste inachevée.

Dans ce but, nous suivons le schéma de la preuve du modèle de résonateur cylindrique étudié précédemment, exposé dans [11] : il s'agit de montrer dans un premier temps une propriété de semi-continuité inférieure des valeurs propres de Δ_ϵ comme fonction de ϵ , en $\epsilon = 0$; puis, dans un second temps, de prouver la semi-continuité supérieure des mêmes valeurs propres, toujours en $\epsilon = 0$. L'assemblage de ces deux propositions permet de conclure sur la continuité des valeurs propres en $\epsilon = 0$, et donc de conclure à l'existence d'une limite, que l'on peut normalement donner comme valeur propre d'un opérateur - ledit opérateur étant le modèle limite cherché.

Nous commençons par rappeler les notions de semi-continuité :

Définition 5.2 (Semi-continuité). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. On dit que f est semi-continue supérieurement en $x_0 \in I$ si et seulement si on a :

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq f(x_0)$$

On dit que f est semi-continue inférieurement en $x_0 \in I$ si et seulement si on a :

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

Notre objectif est donc de trouver un opérateur Δ_0 agissant sur un sous-espace de $H^2(0, 1)$ - ce sous-espace permettant de modéliser à la fois les conditions aux limites en 0 et en 1 et une condition de passage au niveau du trou.

Les travaux de Jack Hale et Geneviève Raugel [31] ou encore Martino Prizzi et Krzysztof Rybakowski [32] permettent de prouver qu'en l'absence de trou ($\partial_{hole}\Omega(L; R) = \emptyset$), on a convergence des valeurs propres de Δ_ϵ vers les valeurs propres de l'opérateur de Webster, défini par :

$$\begin{aligned} \Delta_W : H_0^2(0, 1) &\rightarrow L^2(0, 1) \\ p &\longmapsto -\frac{1}{r^2} (r^2 p')' \end{aligned} \quad (21)$$

Sur cette base, on peut conjecturer que l'opérateur limite que nous cherchons est un opérateur de Webster, avec conditions de passage similaires à celles données par l'opérateur (9), ceci étant modélisé par un espace $H_{lim}^2(0, 1)$ à définir - ce que l'auteur n'a pas encore acquis.

Pour montrer la semi-continuité supérieure, on peut alors construire une inclusion $I_\epsilon : H_{lim}^2(0, 1) \rightarrow H_F^2(\Omega_\epsilon)$ séparant toute fonction $p \in H_{lim}^2(0, 1)$ de part et d'autre du trou, et en effectuant une remise à l'échelle : d'une part, la restriction $p|_{(0, a)}$ de p à l'intervalle $(0, a)$ est changée d'échelle pour être définie sur $(\epsilon, a - \epsilon/2)$, et d'autre part la restriction $p|_{(a, 1)}$ de p à $(a, 1)$ est redéfinie sur l'intervalle $(a + \epsilon/2, 1)$, ceci étant fait par un changement de variable :

$$\phi_\epsilon(x) = p \left(\frac{a}{a - 3\epsilon/2} (x_1 - \epsilon) \right) \text{ et } \psi_\epsilon(x) = p \left(a + \frac{1 - a}{1 - a - \epsilon/2} (x_1 - a - \epsilon/2) \right) \quad (22)$$

Les fonctions ϕ_ϵ et ψ_ϵ ainsi définies sont définies respectivement à gauche et à droite du trou, sur Ω_ϵ . Reste alors à traiter le comportement au voisinage du trou : ceci est encore inachevé à l'heure actuelle par l'auteur de ces lignes. L'idée proposée ici serait d'adapter la preuve de Romain Joly, en exploitant la fonction ζ définie précédemment : par un changement de variable, on arrive à une fonction $\tilde{\zeta}_\epsilon$ définie sur la section de Ω_ϵ d'abscisse comprise dans l'intervalle $(a - \epsilon/2, a + \epsilon/2)$. Ceci achève de construire l'inclusion en posant :

$$\begin{aligned} \forall x \in \Omega_\epsilon, I_\epsilon p(x) &= \phi_\epsilon(x) \text{ si } x_1 \in (\epsilon, a - \epsilon/2) \\ &= p(a) \tilde{\zeta}_\epsilon(x) \text{ si } x_1 \in (a - \epsilon/2, a + \epsilon/2) \\ &= \psi_\epsilon(x) \text{ si } x_1 \in (a + \epsilon/2, 1) \\ &= 0 \text{ si } x \in (0, \epsilon) \end{aligned}$$

Ceci étant fait, on peut alors transporter les vecteurs propres de l'opérateur limite Δ_0 sur Ω_ϵ , et obtenir ainsi des fonctions que l'on peut utiliser dans le quotient de Rayleigh de l'opérateur Δ_ϵ apparaissant dans le théorème 3.3 du min-max : ceci permettrait d'obtenir une majoration des valeurs propres de Δ_ϵ (ou plus précisément de leur limite supérieure) par les valeurs propres de Δ_0 , montrant ainsi la semi-continuité supérieure.

La semi-continuité inférieure, elle, se prouverait en montrant que les vecteurs propres p_ϵ^n de Δ_ϵ tendent, lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, vers des vecteurs propres de l'opérateur limite Δ_0 , dans un sens à définir. Les lemmes utilisés par Romain Joly dans cette partie de la preuve se transposent *a priori* correctement au cas Ω_ϵ ; les vérifications n'ayant pas encore été menées par l'auteur de ces lignes, nous ne nous étendrons pas plus avant sur cette partie du travail, qui reste donc ouverte pour l'heure.

Le travail qui précède est le fruit de plusieurs semaines de réflexion sur la remarque faite par Romain Joly en introduction de son article : elle avait pour but initial d'amener l'auteur à comprendre précisément la dérivation asymptotique d'un modèle différentiel de résonateur tubulaire. La réflexion a finalement tourné au problème mathématique un peu plus long que prévu, aussi nous excusons-nous de cette présentation quelque peu fruste du travail réalisé. Nous espérons avoir pu donner quelques éléments de preuve, et avoir pu montrer certaines des difficultés cachées derrière un simple énoncé théorique. Finalement, nous souhaitons être en mesure de livrer sous peu une preuve aussi complète et détaillée que compréhensible du résultat attendu : ceci permettrait notamment de reprendre les travaux effectués par Georges Le Vey [23] mentionnés en introduction, sur le traitement du problème de Webster par la théorie du contrôle, et d'envisager l'optimisation d'une perce analytique de flûte incluant la présence de trous latéraux.

Pour l'heure, il nous reste à conclure le travail présenté ici.

6 De l'évaluation aux améliorations : mise en perspective

À ce stade, le travail exposé ci-dessus n'a pas encore atteint la visée applicative qu'il se fixe : nous ne sommes à l'heure actuelle pas en mesure d'interpréter les évolutions historiques des perces internes d'instruments à vent, ni de proposer des perces innovantes. En outre, si les modèles proposés permettent effectivement, dans la théorie, de réaliser l'optimisation de la perce du résonateur d'un instrument de la famille des flûtes, ainsi que de la position et du dimensionnement des trous, nous avons en revanche négligé un certain nombre de phénomènes :

- la présence, au sein du résonateur, de pertes visco-thermiques, qui influent sur les facteurs de qualité des différents modes de résonance de l'instrument
- de même, il n'y a pas de prise en compte du rayonnement de l'instrument : pour un système dont l'objectif est de produire du son, c'est évidemment une lacune
- il n'y a en outre aucune prise en compte de l'interaction entre le musicien et l'instrument
- finalement, les optimisations réalisées à l'heure actuelle se fondent sur le seul critère de justesse des notes, là où les critères retenus par les musicien-ne-s pour une bonne flûte sont beaucoup plus nombreux (voir à ce sujet [12])

Tout ceci doit permettre de relativiser l'importance du travail effectué : si nous avons effectivement développé, à ce stade, un modèle intéressant mêlant variations analytiques de perce de l'instrument et prise en compte analytique des trous latéraux, sous la forme d'un ensemble d'équations différentielles avec raccord, et si nous disposons d'idées quant au cadre théorique à exploiter pour traiter un tel problème - en l'occurrence, la théorie du contrôle optimal -, il est néanmoins probable que les instruments obtenus par de tels modèles soient assez peu satisfaisants. Plus qu'une démarche aboutissant à un résultat réel, les travaux précédents doivent donc plutôt être vus comme une tentative de tracer des perspectives pour des travaux ultérieurs.

En outre, à l'heure actuelle, aucune démarche de validation des résultats intermédiaires n'a été entreprise. Une telle démarche pourrait prendre deux formes :

- d'une part, la réalisation d'un instrument, selon les caractéristiques prévues par un algorithme d'optimisation sur les modèles envisagés : ceci permettrait d'une part d'évaluer expérimentalement la fonction de coût choisie, et donc d'observer le décalage entre théorie et expérience ; d'autre part, de constater les défauts de l'instrument du point de vue musical, et ainsi d'enrichir le modèle d'optimisation
- d'autre part, l'évaluation d'un instrument selon les caractéristiques prévues, à l'aide de modèles déjà existant d'instruments à vent (par exemple en ligne de transmission), selon les fonctions de coût trouvées dans la littérature : ceci permettrait notamment de mesurer les apports des modèles présentés ci-dessus

En outre, la méthode choisie permet également de constater que les modèles 1D utilisés proviennent en réalité de descriptions tridimensionnelles des phénomènes physiques mis en jeu. Là-dessus, le domaine de l'optimisation de formes, développement récent de l'analyse mathématique (voir à ce sujet [16], [33], [17] par exemple), pourrait constituer une base d'outils théoriques et numériques intéressants pour explorer des modélisations

3D de l'instrument, potentiellement plus adaptés pour la prise en compte des phénomènes négligés ici. Loin d'être décourageantes, les remarques faites pour terminer ce travail de fin de master sont l'ouverture vers des recherches qui se poursuivront dans une thèse réalisée sous la direction de M. François Jouve et M. Benoît Fabre à partir du mois de septembre 2017.

Références

- [1] Neville H. Fletcher ; Thomas Rossing. *The physics of musical instruments*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] Antoine Chaigne ; Jean Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [3] Richard Shepherd Rockstro. *A Treatise on the Flute*. Musica Rara, 1928.
- [4] Philip Bate. *The flute : a study of its history, development and construction*. Benn, 1969.
- [5] Nancy Toff. *The development of the modern flute*. Taplinger Publishing Company, 1979.
- [6] Michael E McIntyre, Robert T Schumacher, and James Woodhouse. On the oscillations of musical instruments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 74(5) :1325–1345, 1983.
- [7] Claire Ségoufin. *Production du son par interaction écoulement/résonateur acoustique : influence du système amont : application à la flûte à bec*. PhD thesis, Paris 6, 2000.
- [8] Pauline Eveno. *L'impédance d'entrée pour l'aide à la facture des instruments de musique à vent : mesures, modèles et lien avec les fréquences de jeu*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, 2012.
- [9] Sjoerd W Rienstra. Webster's horn equation revisited. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(6) :1981–2004, 2005.
- [10] Edward Eisner. Complete solutions of the "webster" horn equation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 41(4B) :1126–1146, 1967.
- [11] Romain Joly. How opening a hole affects the sound of a flute. *arXiv preprint arXiv :1106.0655*, 2011.
- [12] Arthur H Benade. Woodwinds : the evolutionary path since 1700. *The Galpin Society Journal*, 47 :63–110, 1994.
- [13] Joe Wolfe and John Smith. Cutoff frequencies and cross fingerings in baroque, classical, and modern flutes. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 114(4) :2263–2272, 2003.
- [14] Erik Bångtsson, Daniel Noreland, and Martin Berggren. Shape optimization of an acoustic horn. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(11) :1533–1571, 2003.
- [15] Robin Tournemenne, Jean-François Petiot, Bastien Talgorn, Michael Kokkolaras, and Joël Gilbert. Brass instruments design using physics-based sound simulation models and surrogate-assisted derivative-free optimization. *Journal of Mechanical Design*, 139(4) :041401, 2017.
- [16] Grégoire Allaire and Marc Schoenauer. *Conception optimale de structures*, volume 58. Springer, 2007.

- [17] Antoine Henrot and Michel Pierre. *Variation et optimisation de formes : une analyse géométrique*, volume 48. Springer Science & Business Media, 2006.
- [18] Daniel Noreland, Jean Kergomard, Franck Laloë, Christophe Vergez, Philippe Guillemain, and Alexis Guilloteau. The logical clarinet : numerical optimization of the geometry of woodwind instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 99(4) :615–628, 2013.
- [19] Alexis Guilloteau. *Conception d'une clarinette logique*. PhD thesis, Aix-Marseille, 2015.
- [20] Charles Audet and John E Dennis Jr. Mesh adaptive direct search algorithms for constrained optimization. *SIAM Journal on optimization*, 17(1) :188–217, 2006.
- [21] Charles Audet, Andrea Ianni, Sébastien Le Digabel, and Christophe Tribes. Reducing the number of function evaluations in mesh adaptive direct search algorithms. *SIAM Journal on Optimization*, 24(2) :621–642, 2014.
- [22] Sébastien Le Digabel. Algorithm 909 : Nomad : Nonlinear optimization with the mads algorithm. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, 37(4) :44, 2011.
- [23] Georges Le Vey. Optimal control theory : a method for the design of wind instruments. *Acta Acustica united with Acustica*, 96(4) :722–732, 2010.
- [24] Emmanuel Trélat. *Contrôle optimal : théorie & applications*. Vuibert, 2008.
- [25] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [26] Bernard Helffer. *Spectral theory and its applications*, volume 139. Cambridge University Press, 2013.
- [27] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Tata McGraw-Hill Education, 1987.
- [28] Laurent Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann Paris, 1959.
- [29] Pierre Lévy-Bruhl. *Introduction à la théorie spectrale*. Dunod, 2003.
- [30] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of modern mathematical physics*. Academic Press Incorporated, 1975.
- [31] Jack K Hale and Geneviève Raugel. Reaction-diffusion equation on thin domains. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 71(1) :33–95, 1992.
- [32] Martino Prizzi and Krzysztof P Rybakowski. The effect of domain squeezing upon the dynamics of reaction-diffusion equations. *Journal of Differential Equations*, 173(2) :271–320, 2001.
- [33] Antoine Henrot. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*. Springer Science & Business Media, 2006.