

**Synthèse sonore d'instrument de type cymbale :  
Comparaison d'une approche modale et par différences finies**

Rapport de stage

David Raus

-

Master ATIAM

UPMC – IRCAM – Télécom ParisTech

Encadrants : Cyril Touzé et Michele Ducceschi

Unité de Mécanique de l'ENSTA



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
1.1	Contexte et objectifs . . . . .	4
1.2	Contexte théorique . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Méthode modale</b>	<b>8</b>
2.1	Analyse modale . . . . .	8
2.2	Projection modale . . . . .	11
2.3	Implémentation . . . . .	13
2.3.1	Schéma d'intégration temporelle . . . . .	13
2.3.2	Implémentation de la partie non linéaire . . . . .	14
2.3.3	Calcul des coefficients non linéaires $H$ . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Méthode par différences finies</b>	<b>18</b>
3.1	Bases théoriques . . . . .	18
3.2	Description du code . . . . .	19
3.2.1	Caractéristiques du code . . . . .	19
3.2.2	Convergence du code . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Synthèse sonore par la méthode modale</b>	<b>24</b>
4.1	Influence du nombre de modes transverses . . . . .	24
4.2	Influence de l'attaque et de l'amortissement . . . . .	28
4.2.1	Influence de la force . . . . .	28
4.2.2	Influence de l'amortissement . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Comparaison des méthodes modale et par différences finies</b>	<b>32</b>
5.1	Vitesse pour une frappe en quatre points . . . . .	33
5.2	Accélération pour une frappe en un point . . . . .	35
5.3	Conclusion sur la comparaison des deux méthodes . . . . .	38
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>40</b>
<b>A</b>	<b>Visualisation des déformées modales d'une plaque circulaire</b>	<b>44</b>
A.1	Visualisation des premiers modes propres d'une plaque circulaire . . . . .	44
A.2	Visualisation de la déformée de la plaque en fonction du temps pour une frappe en un point . . . . .	46
<b>B</b>	<b>Programme Matlab</b>	<b>47</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Contexte et objectifs

Les instruments de type cymbale possèdent une forte richesse spectrale et un timbre très caractéristique, ceux-ci sont dûs entre autres aux comportements non linéaires apparaissant pour les grandes amplitudes de vibrations des plaques minces. En effet, lorsque l'on excite une plaque en vibration avec une forte amplitude, il apparaît par exemple des phénomènes de cascade d'énergie et de couplages entre les différents modes de vibrations qui ont pour effet d'enrichir le spectre et ainsi de rendre le son de la cymbale plus brillant.

Ces dernières années, ce type de système non linéaire a été étudié, et des progrès ont ainsi été réalisés dans la simulation de ces dynamiques mais aussi dans la synthèse sonore. Michele Ducceschi effectue par exemple sa thèse à l'Unité de Mécanique de l'ENSTA dans laquelle il travaille entre autres sur la synthèse sonore de plaques rectangulaires en vibrations grâce à une approche modale. Il a donc mis au point un code permettant la synthèse sonore de plaques minces rectangulaires en vibrations. D'autre part, Cyril Touzé et Michele Ducceschi ont aussi travaillé ces dernières années en collaboration avec Stefan Bilbao et Alberto Torin de l'Université d'Edimbourg, qui ont développé un code de synthèse sonore de plaques circulaires par différences finies.

L'objectif de ce stage, réalisé à l'Unité de Mécanique de l'ENSTA et encadré par Cyril Touzé et Michele Ducceschi, était donc d'adapter le code de synthèse sonore de Michele Ducceschi à des plaques circulaires afin de se rapprocher de la géométrie réelle des cymbales. La particularité des plaques circulaires étant que l'on connaît la forme de leurs déformées modales de manière analytique, contrairement au cas rectangulaire où Michele Ducceschi a eu besoin d'utiliser des méthodes numériques pour obtenir les déformées modales.

On a ensuite comparé ce code à l'approche par différences finies utilisée par Stefan Bilbao et Alberto Torin grâce à des simulations et des écoutes perceptives des sons synthétisés, en faisant varier les différents paramètres d'amortissement et d'attaque afin de mettre en relief des phénomènes non linéaires responsables du son si particulier des cymbales.

## 1.2 Contexte théorique

### Modèle de Von Kármán (voir [4] et [11])

Pour décrire les vibrations de la plaque, on utilise le modèle de Von Kármán pour les plaques minces. Ce modèle permet de rendre compte de l'apparition de non linéarités géométriques lorsque l'amplitude de vibrations de la plaque est de l'ordre de grandeur de son épaisseur. Le déplacement en un point est donc décrit par le système d'équations :

$$D\Delta\Delta w + \rho h\ddot{w} = L(F, w) - \sigma\dot{w} + p(r, \theta, t) \quad (1.1a)$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2}L(w, w) \quad (1.1b)$$

où  $w(r, \theta, t)$  représente le déplacement transverse d'un point de la plaque de coordonnées  $(r, \theta)$  au temps  $t$  et  $F(r, \theta, t)$  est la fonction d'Airy, représentant le déplacement longitudinal en un point.  $\rho$ ,  $h$  et  $E$  représentent respectivement la masse volumique, l'épaisseur et le module d'Young de la plaque.  $D$  correspond à  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  avec  $\nu$  le coefficient de Poisson du matériau.  $p(r, \theta, t)$  représente l'effort extérieur appliqué sur la plaque et  $\sigma$  un coefficient d'amortissement.

L'opérateur  $L$ , responsable du couplage entre le déplacement transverse et celui dans le plan et donc des non linéarités dans les équations, correspond à :

$$L(w, F) = w_{,rr} \left( \frac{F_{,r}}{r} + \frac{F_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + F_{,rr} \left( \frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left( \frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2} \right) \left( \frac{F_{,r\theta}}{r} - \frac{F_{,\theta}}{r^2} \right) \quad (1.2)$$

avec

$$(\cdot)_{,x} = \frac{d}{dx}(\cdot) \quad \text{et} \quad (\cdot)_{,xy} = \frac{d^2}{dxdy}(\cdot) \quad (1.3)$$

### Conditions aux limites

Afin de pouvoir résoudre mathématiquement les équations, il convient de définir les conditions aux limites pour les déplacements transverses et longitudinaux de la plaques. Pour se rapprocher des conditions réelles de jeu des cymbales, on a considéré durant ce stage une plaque à bord libre. Les conditions sur  $w$  et  $F$  correspondantes s'écrivent :

$$F_{,r} + \frac{1}{a}F_{\theta\theta} = 0, \quad F_{r\theta} - \frac{1}{a}F_{,\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a, \quad (1.4a)$$

$$w_{,rr} + \frac{\nu}{a}w_{,r} + \frac{\nu}{a^2}w_{,\theta\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a, \quad (1.4b)$$

$$w_{,rrr} + \frac{1}{a}w_{,rr} - \frac{1}{a^2}w_{,r} + \frac{2-\nu}{a^2}w_{,r\theta\theta} - \frac{3-\nu}{a^3}w_{,\theta\theta} = 0 \quad \text{pour} \quad r = a. \quad (1.4c)$$

## Adimensionnement

On travaillera dans la suite avec des équations sans dimensions. Les variables sans dimensions étant notées avec des barres et définies tel que :

$$\begin{aligned} w &= h\bar{w}, & r &= a\bar{r}, & t &= a^2\sqrt{\frac{\rho h}{D}}\bar{t}, \\ F &= Eh^3\bar{F}, & p &= \frac{Eh^4}{a^4}\bar{p}, & \sigma &= \frac{Eh^3}{a^2}\sqrt{\frac{\rho h}{D}}\bar{\sigma} \end{aligned} \quad (1.5)$$

où  $a$  est le rayon de la plaque.

On peut ainsi réécrire le système d'équations de Von Kármán avec les variables adimensionnées :

$$\begin{cases} \Delta\Delta\bar{w} + \ddot{\bar{w}} = \epsilon [L(\bar{F}, \bar{w}) - \bar{\sigma}\dot{\bar{w}} + \bar{p}] \\ \Delta\Delta\bar{F} = -\frac{1}{2}L(\bar{w}, \bar{w}) \end{cases} \quad (1.6)$$

pour  $\bar{r} \in [0, 1]$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$  et avec  $\epsilon = 12(1 - \nu^2)$ . Les conditions aux limites précédentes étant toujours respectées, mais en  $\bar{r} = 1$ .

Afin d'alléger les équations, on notera dans la suite les variables adimensionnées sans la barre.

## Force d'excitation

On choisit d'exercer sur la plaque une force ponctuelle au point de coordonnées  $(r_0, \theta_0)$  dont l'amplitude varie en fonction du temps comme une demi-sinusoïde :

$$p(r, \theta, t) = \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)f(t) \quad (1.7)$$

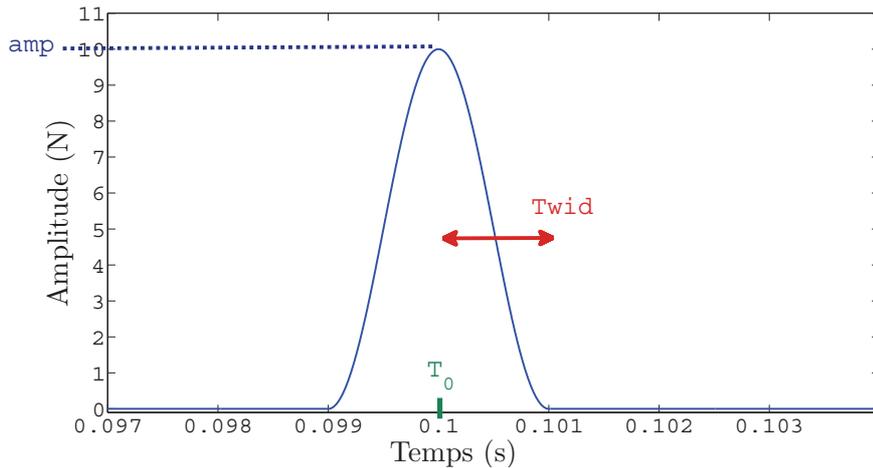


FIGURE 1.1 – Amplitude de la force d'excitation  $f(t)$  en fonction du temps

On peut par exemple définir sa partie temporelle telle que :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |t - T_0| > Twid \\ \frac{amp}{2} (1 + \cos(\pi \frac{t - T_0}{Twid})) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (1.8)$$

On la représente figure 1.1, pour  $T_0 = 0.1\text{s}$ ,  $Twid = 0.001\text{s}$  et  $amp = 10\text{ N}$ .

En jouant sur les différents paramètres de  $f(t)$ , ce modèle très simple de force nous permet de décrire facilement différentes techniques d'attaque utilisées sur les gongs et cymbales. En effet, on peut montrer expérimentalement que lorsqu'on fait varier la matière de l'élément exciteur, on fait varier le temps de contact entre l'élément exciteur et la cymbale, et donc  $Twid$ . Pour un  $Twid$  faible, on se rapprochera par exemple d'une baguette dure, et au contraire un  $Twid$  élevé pourra correspondre à une mailloche.

## Chapitre 2

# Méthode modale

Les calculs théoriques pour une plaque à bord libre présentés dans cette partie ont été réalisés dans [11] et [5]. L'objectif de ce stage était d'adapter des anciens programmes ayant servi pour résoudre les équations en utilisant moins de 20 modes de vibration, à de la synthèse sonore, où plus de 500 sont nécessaires pour obtenir un son réaliste de cymbale.

### 2.1 Analyse modale

L'approche modale consiste à projeter le déplacement transverse de la plaque  $w$  sur les modes propres linéaires transverses de la plaque  $\phi$ , et le déplacement longitudinal  $F$  sur les modes propres longitudinaux  $\psi$ . Les non linéarités se manifestent par un couplage entre les différents modes de vibration linéaires. L'avantage de travailler sur une plaque circulaire est que l'on connaît de façon analytique les modes de vibration linéaires de la plaque.

#### Modes transverses

Les fonctions  $\phi$  sont les modes propres linéaires d'une plaque en vibration à bord libre. Ils correspondent donc aux fonctions propres de la partie linéaire de l'équation (1.6) sur le déplacement transverse  $w$ , avec les conditions aux limites (1.4a), (1.4b) et (1.4c). Ils satisfont donc (voir [11]) :

$$(\Delta\Delta - \zeta^4)\phi = 0 \quad (2.1)$$

$$\phi_{,rr} + \nu\phi_{,r} + \nu\phi_{,\theta\theta} = 0 \quad \text{en } r = 1 \quad (2.2)$$

$$\phi_{,rrr} + \phi_{,rr} - \phi_{,r} + (2 - \nu)\phi_{,r\theta\theta} - (3 - \nu)\phi_{,\theta\theta} = 0 \quad \text{en } r = 1 \quad (2.3)$$

$$\phi(r = 0) \quad \text{est bornée} \quad (2.4)$$

avec  $\zeta^4 = \omega^2$ . En résolvant ce système d'équations, on peut obtenir une solution analytique pour  $\phi$ , à variables séparées en  $r$  et  $\theta$  :

$$\phi_{0n}(r, \theta) = R_{0n}(r) \quad \text{pour } k = 0, \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} \phi_{kn1}(r, \theta) \\ \phi_{kn2}(r, \theta) \end{cases} \Big| = R_{kn}(r) \begin{cases} \cos(k\theta) \\ \sin(k\theta) \end{cases} \quad \text{pour } k > 0. \quad (2.6)$$

avec

$$R_{kn}(r) = \kappa_{kn} \left[ J_k(\zeta_{kn}r) - \frac{\tilde{J}_k(\zeta_{kn})}{\tilde{I}_k(\zeta_{kn})} I_k(\zeta_{kn}r) \right] \quad (2.7)$$

où  $J_k$  est la fonction de Bessel d'ordre  $k$  de première espèce,  $I_k(x) = J_k(ix)$ .  $\tilde{J}_k$  et  $\tilde{I}_k$  sont définies tel que

$$\begin{cases} \tilde{J}_k(x) = x^2 J_{k-2}(x) + x(\nu - 2k + 1)J_{k-1}(x) + k(k+1)(1-\nu)J_k(x) \\ \tilde{I}_k(x) = x^2 I_{k-2}(x) + x(\nu - 2k + 1)I_{k-1}(x) + k(k+1)(1-\nu)I_k(x) \end{cases} \quad (2.8)$$

et  $\kappa_{kn}$  est une constante choisie tel que

$$\int \int_S \phi_{kn}^2 dS = 1. \quad (2.9)$$

$\zeta_{kn}$  est la  $\tilde{n}$ -ème solution de l'équation :

$$\begin{aligned} \tilde{I}_k(\zeta) [\zeta^3 J_{k-3}(\zeta) + \zeta^2(4-3k)J_{k-2}(\zeta) + \zeta k(k+1+\nu-2)J_{k-1}(\zeta) \\ + k^2(1-\nu)(1+k)J_k(\zeta)] - \tilde{J}_k(\zeta) [\zeta^3 I_{k-3}(\zeta) + \zeta^2(4-3k)I_{k-2}(\zeta) \\ + \zeta k(k+1+\nu-2)I_{k-1}(\zeta) + k^2(1-\nu)(1+k)I_k(\zeta)] = 0 \end{aligned}$$

$k$  s'avère être le nombre de rayons nodaux du mode  $\phi_{kn}$ , c'est à dire les rayons où le déplacement reste nul durant la vibration. De la même manière, le nombre de cercles nodaux  $n$  est lié à  $\tilde{n}$  : si  $k = 1$ ,  $n = \tilde{n}$  et si  $k \neq 1$ ,  $n = \tilde{n} - 1$ . On peut par exemple schématiser les cercles et rayons nodaux de différents modes sur la figure 2.1. Comme on le voit dans l'expression (2.6), chaque mode asymétrique est doublé pour les configurations *cosinus* et *sinus*, qu'on nommera respectivement configuration 1 et 2, les deux configurations ayant la même fréquence de vibration pour une plaque parfaite.

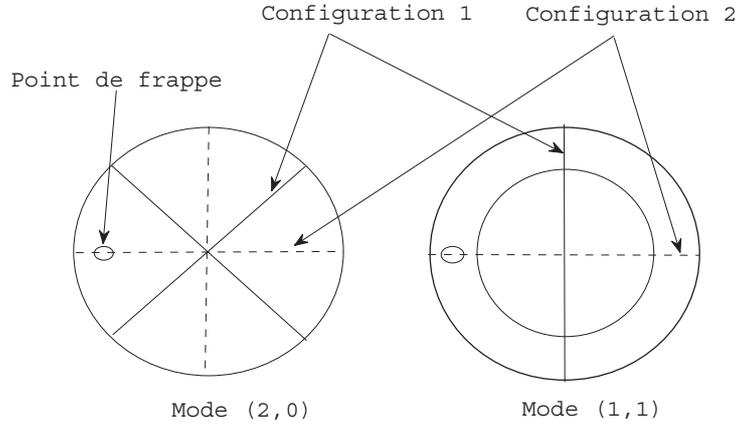


FIGURE 2.1 – Amplitude de la force d'excitation  $f(t)$  en fonction du temps

On peut aussi calculer les pulsations  $\omega_{kn} = \zeta_{kn}^2$  des modes propres de vibrations de la plaque. On les réunit dans le tableau 2.1. On représente les premiers modes propres transverses de la plaque en annexe A.1.

Mode (k,n)	$\omega_{kn}$
(2,0)	5.0933
(0,1)	9.1751
(3,0)	11.897
(1,1)	20.576
(4,0)	20.974
(5,0)	32.278
(2,1)	35.213
(0,2)	38.612
(6,0)	45.771
(3,1)	52.777

TABLE 2.1 – Pulsations adimensionnées des premiers modes de vibration d’une plaque circulaire

### Modes longitudinaux

De la même manière, les modes longitudinaux (ou modes de membrane)  $\psi$  doivent respecter :

$$(\Delta\Delta - \xi^4)\psi = 0 \quad (2.10)$$

$$\psi = \psi_{,r} = 0 \quad \text{en} \quad r = 1 \quad (2.11)$$

Et on obtient encore une fois une solution à variables séparées en  $r$  et  $\theta$  :

$$\begin{aligned} \psi_{lm1}(r, \theta) & \Big| = S_{lm}(r) \Big| \begin{matrix} \cos(l\theta) \\ \sin(l\theta) \end{matrix} \\ \psi_{lm2}(r, \theta) & \Big| \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec

$$S_{lm}(r) = \lambda_{lm} \left[ J_l(\xi_{lm}r) - \frac{J_l(\xi_{lm})}{I_l(\xi_{lm})} I_l(\xi_{lm}r) \right] \quad (2.13)$$

et  $\lambda_{lm}$  est une constante choisie tel que

$$\int \int_S \psi_{kn}^2 dS = 1. \quad (2.14)$$

Les  $\xi_{lm}$  sont eux solutions de l’équation :

$$J_{l-1}(\xi)I_l(\xi) - I_{l-1}(\xi)J_l(\xi) = 0 \quad (2.15)$$

On observe que  $\psi$  correspond aux modes propres d’une plaque à bord encastré.  $l$  et  $m$  correspondent respectivement aux nombres de rayons et cercles nodaux du mode longitudinal  $\psi_{lm}$ .

## 2.2 Projection modale

On peut donc à présent projeter les déplacements transverses et longitudinaux sur les modes propres de la plaque :

$$w(r, \theta, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \phi_k(r, \theta) q_k(t) \quad (2.16a)$$

$$F(r, \theta, t) = \sum_{s=1}^{+\infty} \psi_s(r, \theta) \eta_s(t) \quad (2.16b)$$

où  $q_k$  et  $\eta_s$  sont des fonctions inconnues du temps.

En injectant l'équation (2.16a) dans l'équation (1.1b), en multipliant le résultat par  $\psi_s$ , en intégrant sur la surface de la plaque et en utilisant l'orthogonalité des modes de vibration, on peut obtenir (voir [11] et [5]) l'expression de  $\eta_s$  :

$$\eta_s(t) = -\frac{1}{2\xi_s^4} \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} H_{pq}^s q_p(t) q_q(t) \quad (2.17)$$

où

$$H_{pq}^s = \frac{\int \int_S \psi_s L(\phi_p, \phi_q) dS}{\int \int_S \psi_s^2 dS} \quad (2.18)$$

En injectant l'équation (2.16) dans l'équation (1.1a), en multipliant le résultat par  $\phi_k$ , en intégrant sur la surface de la plaque, en utilisant l'orthogonalité des modes de vibration, et enfin en remplaçant  $\eta_s$  par son expression (2.17), on peut obtenir l'équation satisfaite par  $q_k(t)$  :

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \epsilon \left[ \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{+\infty} \left[ \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{H_{pq}^i E_{ri}^k}{2\xi_i^4} \right] q_p(t) q_q(t) q_r(t) - \sigma_k \dot{q}_k(t) + \langle \phi_k, p(r, \theta, t) \rangle_S \right]$$

où  $\sigma_k$  et  $\omega_k$  correspondent respectivement à l'amortissement modal et à la pulsation sans dimension du  $k$ -ème mode. Avec :

$$E_{pq}^s = \frac{\int \int_S \phi_s L(\phi_p, \psi_q) dS}{\int \int_S \phi_s^2 dS} \quad (2.19)$$

Et où on a défini le produit scalaire par :

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_S = \int \int_S \phi_i \phi_j dS \quad (2.20)$$

D'après [5], notre système possède les bonnes conditions aux limites pour pouvoir utiliser la propriété :

$$\iint_s f L(g, h) dS = \iint_s h L(f, g) dS \quad \text{et donc} \quad E_{ps}^q = H_{pq}^k \quad (2.21)$$

On peut ainsi simplifier l'équation satisfaite par  $q_k$  :

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = \epsilon \left[ \sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{r=1}^{+\infty} \left[ \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{H_{pq}^i H_{rk}^i}{2\xi_i^4} \right] q_p(t) q_q(t) q_r(t) - \sigma_k \dot{q}_k(t) + \langle \phi_k, p(r, \theta, t) \rangle_S \right] \quad (2.22)$$

En remplaçant  $p$  par son expression (1.7), on remarque que :

$$\langle \phi_k, p(r, \theta, t) \rangle_S = \frac{1}{a^2} \phi_k(r_0, \theta_0) f(t) \quad (2.23)$$

où le  $a^2$  provient de la dimension de la fonction de Dirac dans l'intégrale de surface.

On observe aussi que le coefficient  $H$  est responsable du couplage entre les différents modes et donc de l'apparition de non linéarités cubiques, il suffit donc de poser  $H = 0$  pour retrouver un problème linéaire.

On peut simplifier l'équation (2.22) en cachant la somme sur les modes longitudinaux  $\psi$ , il suffit pour cela de poser :

$$\Gamma_{pqr}^k = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{H_{pq}^i H_{rk}^i}{2\xi_i^4} \quad (2.24)$$

Le calcul de  $\phi(r, \theta)$  étant fait de manière analytique, déterminer  $q_k(t)$  pour tous les modes nous permettrait donc de reconstruire le déplacement  $w(r, \theta, t)$  de manière exacte. Naturellement, il nous sera impossible de prendre une infinité de modes de vibration pendant l'implémentation. Le choix du nombre de modes utilisés dans le calcul est donc un des point clé de ce stage (voir les parties 2.3.3 et 4.1). L'objectif du code sera donc d'intégrer en temps l'équation (2.22) et de reconstruire  $w$  afin d'obtenir le déplacement en tout point de la plaque.

## 2.3 Implémentation

Les études précédentes avaient pour objectif de résoudre les équations en utilisant d'abord deux modes [11], puis vingt modes de vibration transverses [10]. Un précédent stagiaire, Florent Jacquemin, avait étudié les plaques rectangulaires, dans le cadre de la thèse de Michele Ducceschi, et avait atteint les 150 modes de vibration. Il était arrivé à la conclusion qu'il fallait, pour la synthèse sonore de sons de cymbale, augmenter encore ce nombre de modes pour se rapprocher du son réel d'un instrument. Michele Ducceschi a depuis amélioré son code pour pouvoir utiliser plus de 500 modes pour une plaque rectangulaire, l'objectif de ce stage était donc d'adapter ce code pour une plaque circulaire.

La partie programmation de ce stage a donc consisté à implémenter les déformées modales de l'équation 2.6 d'une plaque circulaire de manière tout d'abord à pouvoir calculer les coefficients linéaires  $H$  (voir équation 2.18) de la plaque et à pouvoir dans un second temps injecter ces coefficients et les déformées modales dans le code d'intégration temporelle programmé par Michele Ducceschi. On donne la forme finale du code d'intégration temporelle pour une plaque circulaire en annexe B.

La clé a été d'implémenter le calcul directement en utilisant les coefficients  $H$  et plus les  $\Gamma$  comme dans les études précédentes.

### 2.3.1 Schéma d'intégration temporelle

Le schéma d'intégration temporelle utilisé par Michele Ducceschi est un schéma de Störmer-Verlet. Il consiste tout d'abord à discrétiser le temps. La variable continue  $t$  est donc approximée par  $nh_t$  où  $n$  est un indice entier et  $h_t$  est le pas de discrétisation temporelle. On discrétise de la même manière la fonction  $q_k(t)$  en l'approchant par sa valeur  $q_k^n$  au temps  $nh_t$ .

On peut définir les opérateurs :

$$e_{t+}q_k^n = q_k^{n+1} \quad \text{et} \quad e_{t-}q_k^n = q_k^{n-1} \quad (2.25)$$

et donc les opérateurs de dérivation temporelle :

$$\begin{cases} \delta_t = \frac{1}{2h_t}(e_{t+} - e_{t-}) & \text{tel que } \dot{q}_k \text{ s'écrit } \delta_t q_k^n \\ \delta_{tt} = \frac{1}{h_t^2}(e_{t+} - 2 + e_{t-}) & \text{tel que } \ddot{q}_k \text{ s'écrit } \delta_{tt} q_k^n \end{cases} \quad (2.26)$$

En posant :

$$C_{n+1}(k, k) = \frac{1}{h_t^2} - \frac{\sigma_k}{2h_t} \quad (2.27a)$$

$$C_n(k, k) = -\frac{2}{h_t^2} + \omega_k^2 \quad (2.27b)$$

$$C_{n-1}(k, k) = \frac{1}{h_t^2} - \frac{\sigma_k}{2h_t} \quad (2.27c)$$

L'équation (2.22) discrétisée en temps peut se réécrire, avec le schéma de Verlet :

$$C_{n+1}(k, k)q_k^{n+1} = -C_n(k, k)q_k^n - C_{n-1}(k, k)q_k^{n-1} - \epsilon \sum_{p,q,r} \Gamma_{pqr}^k q_p^n q_q^n q_r^n + \frac{\epsilon}{a^2} \phi_k(r_0, \theta_0) f^n \quad (2.28)$$

Si l'on a préalablement calculé la triple somme  $\sum_{p,q,r} \Gamma_{pqr}^k q_p^n q_q^n q_r^n$ , notée  $G$  dans Matlab, on peut obtenir facilement  $q_k^{n+1}$  en fonction de ses valeurs aux échantillons précédents en résolvant l'équation précédente grâce à :

$$q = C \setminus (-C1 * q1 - C2 * q2 - G + phi0 * f);$$

où  $q$ ,  $q1$  et  $q2$  correspondent respectivement à  $q^{n+1}$ ,  $q^n$  et  $q^{n-1}$ , et  $C$ ,  $C1$  et  $C2$  correspondent respectivement aux matrices diagonales  $C_{n+1}$ ,  $C_n$  et  $C_{n-1}$ .  $phi0$  est un vecteur contenant les déformées modales au point d'excitation  $(r_0, \theta_0)$ .

Michele Ducceschi a aussi travaillé sur d'autres schémas d'intégrations plus stables qu'on ne développera pas ici. Il a décidé d'utiliser ce schéma de Verlet pour sa rapidité d'implémentation et ces résultats corrects pour la synthèse sonore.

### 2.3.2 Implémentation de la partie non linéaire

La principale difficulté réside dans l'implémentation de la partie non linéaire de l'équation, et donc de  $\sum_{p,q,r} \Gamma_{pqr}^k q_p^n q_q^n q_r^n$ .

Tout d'abord, le calcul de  $\Gamma_{pqr}^k$  s'avère poser problème pour des raisons de mémoire et de dimension. Si l'on décide par exemple de travailler avec 500 modes de vibration transverses, le tenseur  $\underline{\Gamma}$  aura pour dimension  $(500 \times 500 \times 500 \times 500)$ , ce qui atteint les limites de mémoire de beaucoup d'ordinateurs, la fonction *sparse* de Matlab nous permettant de ne pas considérer les nombreux termes nuls de  $\Gamma$  et d'éviter des calculs inutiles mais seulement si ce tenseur a deux dimensions.

Durant les premiers mois de stage, nous avons donc travaillé avec ce tenseur  $\Gamma$ . Son implémentation ne posait pas seulement problème pour sa dimension mais aussi pour ces propriétés intrinsèques. En effet, selon [7], de nombreux coefficients  $\Gamma_{pqr}^k$  doivent être nuls. Par exemple, si on nomme  $k_n$  le nombre de rayons nodaux du mode  $n$ , le coefficient  $\Gamma_{pqr}^k$  est nul si  $\{k_p + k_q, |k_p - k_q|\} \cap \{k_k + k_r, |k_k - k_r|\} = \emptyset$ . Ces propriétés rendaient le calcul du tenseur  $\Gamma$  difficile à vectoriser et donc très long à se réaliser.

Nous avons donc décidé durant ce stage de ne plus utiliser les coefficients  $\Gamma$  dans le code, mais de directement travailler avec les coefficients  $H$ . Cela nous a permis de travailler avec beaucoup plus de modes de vibration, la mémoire n'étant plus une limite pour le nombre de modes considéré. De plus, le temps de calcul a considérablement diminué, nous permettant de réaliser un grand nombre de simulations avec beaucoup de modes.

La deuxième difficulté réside dans l'implémentation de la triple somme. On peut naturellement la coder à l'aide de plusieurs boucles imbriquées sur tous les modes (où  $lq$  et  $A$  correspondent respectivement aux nombres de modes de vibration transverses et longitudinaux pris en compte de le calcul) :

```

for k = 1:lq
    for p = 1:lq
        for q = 1:lq
            for r = 1:lq

                for i = 1:A % Calcul du tenseur Gamma
                    Gamma(k,p,q,r) = Gamma(k,p,q,r)+0.5/zeta^4*H(i,p,q)*H(i,k,r);
                end

                G(k) = G(k) + Gamma(k,p,q,r)*q1(p)*q1(q)*q1(r)
            end
        end
    end
end

```

Matlab étant n'étant pas optimisé pour les calculs utilisant des boucles, ce calcul s'avère être extrêmement long dès lors que l'on veut utiliser beaucoup de modes. Michele Ducceschi a donc dû vectoriser son code afin d'améliorer le temps de calcul. Pour cela, il nous faut tout d'abord redimensionner le tenseur  $H$  de dimension  $(A, lq, lq)$  en deux matrices, H1 de dimension  $(A, lq^2)$  et H2 de dimension  $(A \times lq, lq)$ . En créant des matrices contenant les valeurs de  $q$  et en utilisant des permutations, on peut finalement obtenir  $G$  par simple multiplication matricielle.

La portion de code précédente se réécrit donc :

```

H1 = reshape(H,A,lq^2); % Redimensionnement de H
H2 = reshape(H,[A*lq,lq]);

rpq1 = repmat(q1,[1 lq]);
rpq2 = permute(rpq1,[2 1]);

t1 = rpq1.*rpq2;
t1 = reshape(t1,[lq^2,1]);
t1 = H1*t1;
t2 = H2*q1;
t2 = reshape(t2,[A lq]);

G = t2.'*t1;

```

### 2.3.3 Calcul des coefficients non linéaires $H$

On remarque dans l'équation (2.18) que les tenseurs  $\underline{H}$  et  $\underline{\Gamma}$ , si ils sont bien adimensionnés, ne dépendent plus d'aucun paramètre de la plaque. On peut donc calculer un tenseur  $\underline{H}$  pour un grand nombre de modes dans un pré-programme, que l'on pourra injecter dans notre intégration temporelle.

Une intégrale de surface étant présente dans le calcul de  $H_{pq}^i$ , il nous faut tout de même étudier la convergence de notre calcul en fonction du pas d'intégration spatiale  $dr$  adimensionné. On trace par exemple sur la figure 2.2, la valeur de de  $\Gamma_{pqr}^k$  pour quatre modes 200 (le 200<sup>eme</sup> mode correspondant au mode (1,8)) en fonction de  $dr$ . On observe

que dans ce cas, prendre un pas inférieur à  $dr = 10^{-3}$  ne fait plus gagner en précision et fait rapidement augmenter le temps de calcul.

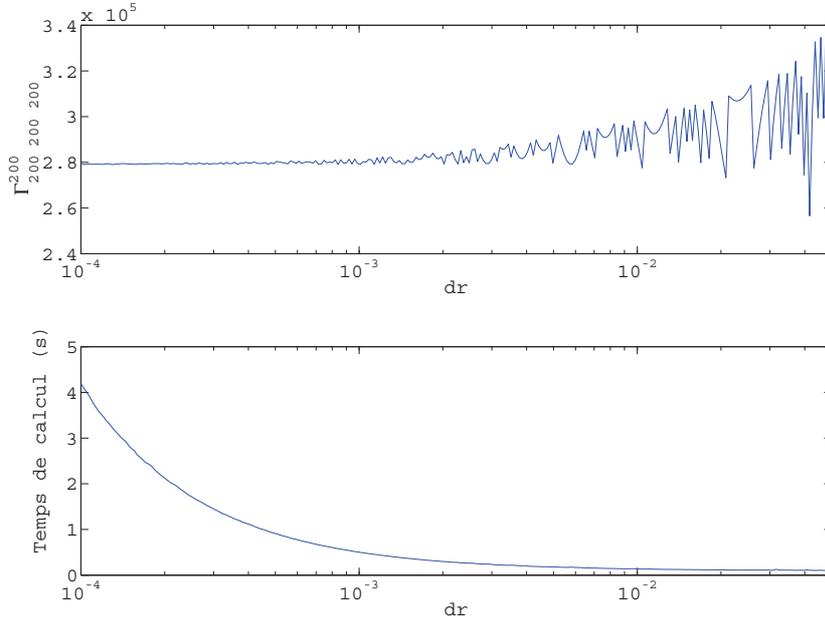


FIGURE 2.2 – Convergence du calcul de  $\Gamma_{200\ 200\ 200}^{200}$  et temps de calcul en fonction du pas d'intégration temporelle

De la même manière, on observe une convergence dans le calcul de  $\Gamma_{pqr}^k$  en fonction du nombre  $A$  de modes longitudinaux pris en compte dans le calcul. La figure 2.3 représente par exemple la convergence de  $\Gamma$  pour quatre modes axisymétriques (0,16). On voit que même pour un pas d'intégration spatial  $dr$  de  $10^{-2}$ , l'utilisation de plus de 40 modes longitudinaux s'avère inutile.

Tous les résultats de la méthode modale présentés dans la suite ont été réalisés en prenant 40 modes longitudinaux et avec  $dr = 10^{-3}$ . La vectorisation du calcul et l'utilisation directe des coefficients  $H$  nous ont donc permis de passer de l'utilisation de seulement 150 modes de vibration transverses à plus de 800 modes, le pré-calcul du tenseur  $\underline{H}$  restant assez long (environ deux jours de calculs pour  $A = 40$ ,  $lq = 800$  et  $dr = 10^{-3}$ ) mais à réaliser une unique fois.

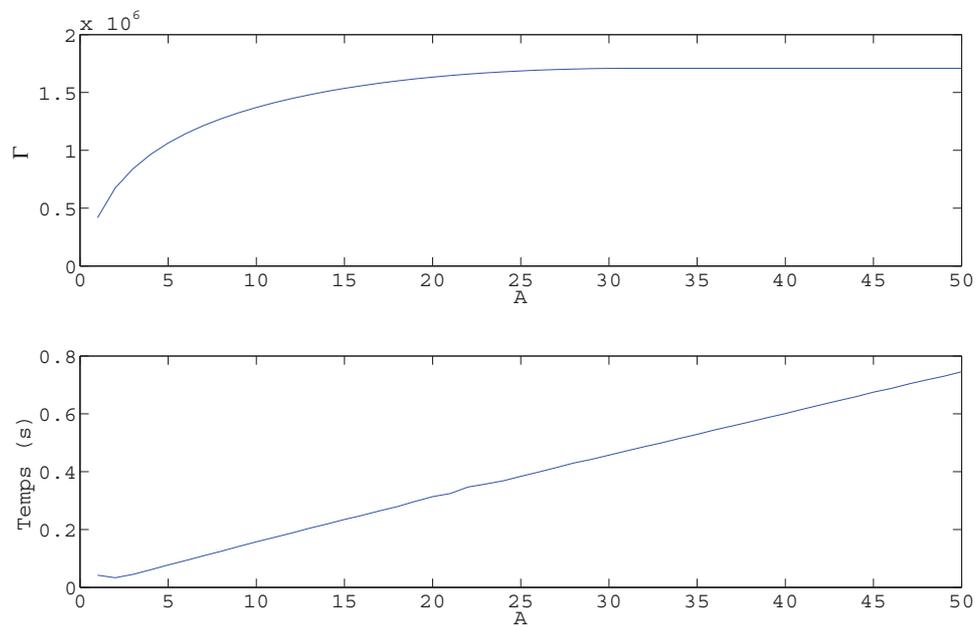


FIGURE 2.3 – Convergence du calcul de  $\Gamma_{678\ 678\ 678}^{678}$  et temps de calcul en fonction du nombre  $A$  de modes longitudinaux utilisés dans le calcul.  $dr = 10^{-2}$

## Chapitre 3

# Méthode par différences finies

### 3.1 Bases théoriques

La méthode par différences finies (voir [1]) consiste cette fois-ci à discrétiser l'espace et le temps. En coordonnées cartésiennes, les variables continues d'espace et de temps  $(x, y, t)$  sont donc approximées par leurs valeurs discrétisées  $(lh, mh, nh_t)$  où  $l, m$  et  $n$  sont des entiers positifs et  $h$  le pas de discrétisation spatiale, que l'on choisit égal selon  $x$  et  $y$  pour une plaque circulaire.  $h_t$  est le pas de discrétisation temporelle. Les opérateurs temporels sont semblables à ceux utilisés en méthode modale.

On peut définir les opérateurs spatiaux :

$$e_{x+}w_n^{l,m} = w_n^{l+1,m} \quad e_{x-}w_n^{l,m} = w_n^{l-1,m} \quad e_{y+}w_n^{l,m} = w_n^{l,m+1} \quad e_{y-}w_n^{l,m} = w_n^{l,m-1} \quad (3.1a)$$

$$\mu_{x-} = \frac{1}{2}(e_{x-} + 1) \quad \mu_{y-} = \frac{1}{2}(e_{y-} + 1) \quad (3.1b)$$

et donc les opérateurs de dérivation spatiale première et seconde :

$$\begin{cases} \delta_{x+} = \frac{1}{h}(e_{x+} - 1), & \delta_{x-} = \frac{1}{h}(1 - e_{x-}), & \delta_{xx} = \delta_{x+}\delta_{x-} \\ \delta_{y+} = \frac{1}{h}(e_{y+} - 1), & \delta_{y-} = \frac{1}{h}(1 - e_{y-}), & \delta_{yy} = \delta_{y+}\delta_{y-} \end{cases} \quad (3.2)$$

Et finalement les opérateurs laplacien et bi-laplacien :

$$\delta_{\Delta} = \delta_{xx} + \delta_{yy} \quad \delta_{\Delta\Delta} = \delta_{\Delta}\delta_{\Delta} \quad (3.3)$$

L'opérateur non linéaire  $L(w, F)$  se discrétise lui comme :

$$l(w, F) = \delta_{xx}w\delta_F + \delta_{yy}w\delta_{xx}F - 2\mu_{x-}\mu_{y-}(\delta_{x+y+}w\delta_{x+y+}F) \quad (3.4)$$

On peut donc réécrire le système d'équations de Von Kármán discrétisé et dimensionné :

$$D\delta_{\Delta\Delta}w + \rho h\delta_{tt}w = l(w, F) - 2\sigma\delta_t w \quad (3.5a)$$

$$D\delta_{\Delta\Delta}F = -\frac{Eh}{2}l(w, w) \quad (3.5b)$$

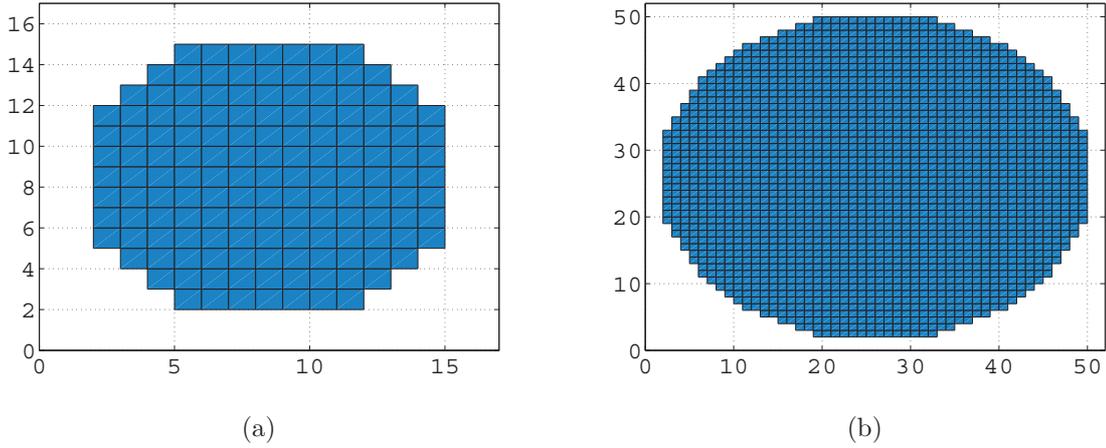


FIGURE 3.1 – Grille cartésienne pour (a)  $f_s = 10$  kHz (b)  $f_s = 100$  kHz

## 3.2 Description du code

Le code de différences finies utilisé durant ce stage a été entièrement réalisé sous Matlab par Alberto Torin, de l'Université d'Edimbourg. Le code nous a demandé très peu de modifications, quelques changements étaient cependant nécessaires pour pouvoir utiliser les mêmes paramètres (amortissement, paramètres de la force d'attaque...) que dans le programme modal.

### 3.2.1 Caractéristiques du code

Alberto Torin a travaillé de son côté avec des équations dimensionnées et il a utilisé lui aussi un schéma de Störmer-Verlet en temps.

Le code utilise une grille cartésienne pour décrire la plaque circulaire. Cela entraîne que la courbure continue théorique du bord de la plaque circulaire est décrite ici par des segments de droite discontinus et donc par une configuration "en escalier" sur les cotés de la plaque. Cette description de la plaque entraîne une erreur dans le calcul des modes de vibration et de leurs fréquences propres, en influant par exemple peut être sur le placement des rayons nodaux. Le pas de discrétisation spatial étant fixé par la fréquence d'échantillonnage  $f_s$ , on observe ainsi figure 3.1 que plus la fréquence d'échantillonnage est basse, plus la configuration "en escalier" sera marquée. Une fréquence d'échantillonnage infinie permettrait de retrouver une courbure continue réelle.

Le nombre de points  $S$  de la grille est fixé par :

$$S = \left( E \left( R \sqrt{f_s \sqrt{\frac{\rho h}{D}}} \right) + 1 \right)^2 \quad (3.6)$$

### 3.2.2 Convergence du code

Une étude de convergence s'impose donc. En effet, il faudrait dans le meilleur des cas utiliser une fréquence d'échantillonnage la plus élevée possible afin de décrire la plaque circulaire. Mais augmenter la fréquence d'échantillonnage a aussi pour effet d'augmenter de manière très importante le temps de calcul. Il nous faut donc trouver quelle fréquence

d'échantillonnage minimale permet de décrire de manière raisonnable la dynamique de la plaque.

Pour cela, on calcule les valeurs des fréquences des modes de vibration de la plaque avec le code en différences finies pour plusieurs fréquences d'échantillonnage, et on les compare aux fréquences analytiques calculées dans la partie 2.1. On vérifie bien dans le tableau 3.1 que les pulsations calculées pour une fréquence d'échantillonnage de  $f_s = 200\text{kHz}$  sont plus proches des valeurs analytiques que celles calculées avec  $f_s = 12.5\text{ kHz}$ .

On définit la différence relative entre la pulsation adimensionnée du  $i$ -ème mode calculée par différences finies et analytiquement par :

$$\Delta\omega_i = \frac{|\omega_i^{\text{différence finie}} - \omega_i^{\text{analytique}}|}{\omega_i^{\text{analytique}}} \quad (3.7)$$

Et on trace sa valeur pour les 200 premiers modes figure 3.2 et pour les 800 premiers modes figure 3.3. On observe nettement que lorsque l'on augmente la fréquence d'échantillonnage, on converge vers la solution analytique. Mais pour une même fréquence d'échantillonnage, plus le mode est élevée, plus la différence relative entre pulsation analytique et calculée par différences finies est élevée.

Mode (k,n)	$\omega_{kn}^a$ analytique	$\omega_{kn}^d$ $f_s = 12.5\text{kHz}$	$\omega_{kn}^d$ $f_s = 100\text{kHz}$	$\omega_{kn}^d$ $f_s = 200\text{kHz}$
(2,0) config 1	5.0933	4.9702	4.9696	5.0235
(2,0) config 2	5.0933	5.2225	5.0991	5.1009
(0,1)	9.1751	9.4896	9.1699	9.1934
(3,0) config 1	11.897	11.3561	11.5972	11.7146
(3,0) config 2	11.897	11.3564	11.6006	11.7147
(1,1) config 1	20.576	17.8120	20.1041	20.4092
(1,1) config 2	20.576	20.9388	20.3080	20.5633
(4,0) config 1	20.974	21.0379	20.5425	20.6135
(4,0) config 2	20.974	21.0395	20.5580	20.6172
(5,0) config 1	32.278	28.4950	30.7365	31.2768
(5,0) config 2	32.278	28.5222	30.7398	31.2804
(2,1) config 1	35.213	33.5449	34.7646	35.0613
(2,1) config 2	35.213	34.3088	35.2678	35.7189

TABLE 3.1 – Comparaison des pulsations adimensionnées des premiers modes de vibration, calculées de manière analytique  $\omega_{kn}^a$  et par différence finie  $\omega_{kn}^d$  pour différentes fréquences d'échantillonnage.

On vérifie bien que le calcul diverge plus rapidement si la fréquence d'échantillonnage est basse. Pour des fréquences d'échantillonnage de 12.5 kHz et 25 kHz, on atteint ainsi respectivement 27% d'erreur et 20% dans le calcul de  $\omega_{kn}$  dès le 100ème mode de vibration.

Alors que pour une plaque rectangulaire,  $\Delta\omega$  est très faible pour les premiers modes de vibration (voir [8]), il est intéressant de remarquer figure 3.2 que la précision est déjà peu élevée pour les tout premiers modes de vibration. Ceci étant sûrement dû à la grille cartésienne décrivant mal le bord de la plaque.

On observe aussi que pour des fréquence d'échantillonnage de 100 kHz et 200 kHz, on demeure inférieure à 10% d'erreur au moins pour les 150 premiers modes de vibration. Le

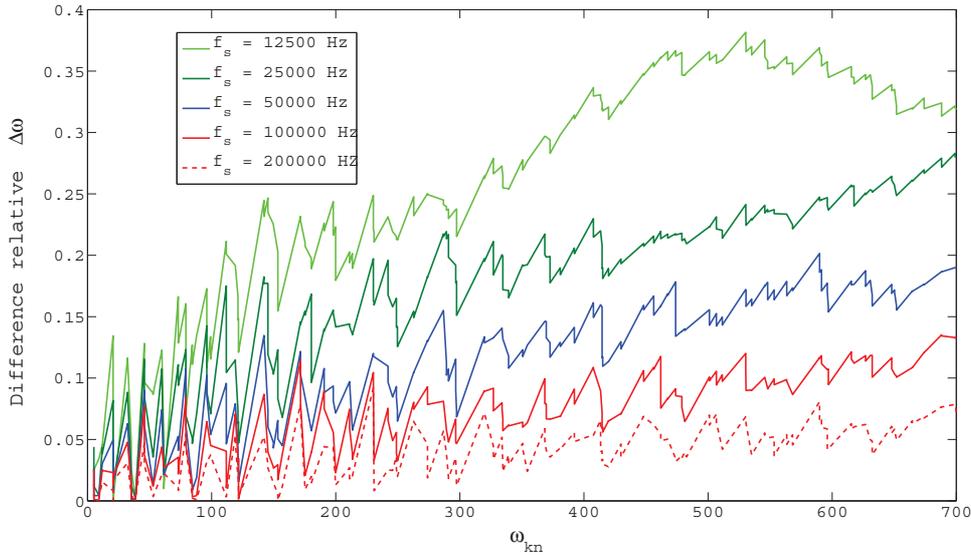


FIGURE 3.2 – Différence relative  $\Delta\omega$  pour les 200 premiers modes et pour différentes fréquences d'échantillonnage

$f_s$	S	Temps de calcul pour 1s de simulation	$\Delta\omega$ 100ème mode	$\Delta\omega$ 200ème mode	$\Delta\omega$ 800ème mode
12.5kHz	216	40 s	27%	30%	-
50kHz	952	8 min	12%	19%	39%
100kHz	1957	1h	6.2%	13%	29%
200kHz	3940	8 h	3.7%	6.4%	17%
300kHz	5924	-	1.7%	4.3%	13%

TABLE 3.2 – Différence relative  $\Delta\omega$  et temps de calcul pour différents modes de vibration et pour différentes fréquences d'échantillonnage. Les pulsations correspondantes valent :  $\omega_{100} = 339$ ,  $\omega_{200} = 711$  et  $\omega_{800} = 3011$

tableau 3.2, où  $S$  correspond au nombre de point dans la grille, montre qu'il nous faut rapidement utiliser un nombre de points très important si l'on souhaite garder une bonne précision jusqu'à des modes très élevés. Il apparaît aussi que le temps de calcul augmente très rapidement avec la fréquence d'échantillonnage. Pour  $f_s = 200$  kHz, 6 heures de calcul sont ainsi nécessaires pour seulement 1 seconde de simulation.

On décide donc dans la suite de travailler avec une fréquence d'échantillonnage  $f_s$  de 100 kHz. Celle ci nous permet de garder une bonne précision pour les premiers modes de vibration et de ne pas trop diverger même pour les modes de fréquence très élevés ayant moins de poids au niveau perceptif.

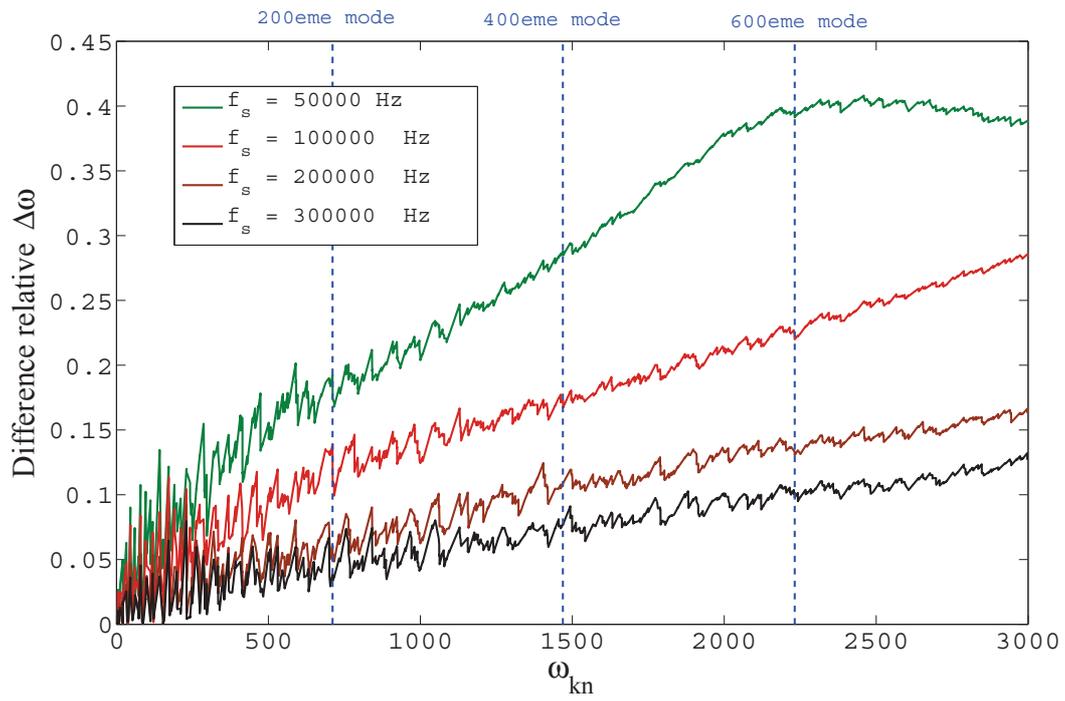


FIGURE 3.3 – Différence relative  $\Delta\omega$  pour les 800 premiers modes et pour différentes fréquences d'échantillonnage



## Chapitre 4

# Synthèse sonore par la méthode modale

On peut donc maintenant réaliser un grand nombre de simulations avec notre code en modal et faire varier les différents paramètres d'attaque et de la plaque. Le signal de sortie qu'on étudie ici et qu'on utilise pour créer un son de synthèse est la vitesse en un point de la plaque en fonction du temps. La justification physique de ce choix étant la continuité de la vitesse entre la plaque et l'air proche de la surface lorsque la plaque est en vibration et émet une onde acoustique.

Les simulations ont été réalisées avec une fréquence d'échantillonnage  $f_s$  de 100 kHz, le choix de la fréquence d'échantillonnage avec la méthode modale ayant simplement pour effet de ne pas décrire les phénomènes de fréquences plus élevées que  $f_s$ . Les paramètres de la plaque choisis pour ces simulations ont été réunis dans le tableau 4.1.

### 4.1 Influence du nombre de modes transverses

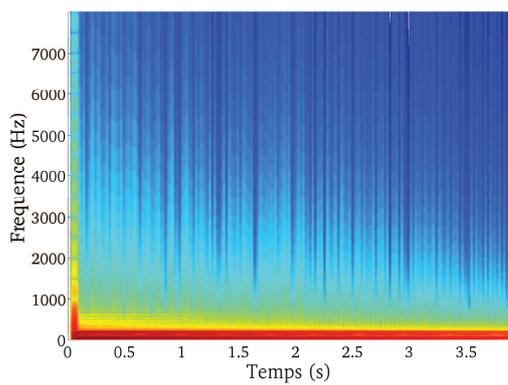
On se place tout d'abord en régime linéaire (ou très faiblement non linéaire), par exemple pour une frappe d'amplitude  $amp = 10$  N. Une des propriétés d'un système linéaire est qu'il doit répondre seulement aux fréquences auxquelles il a été excité, et ne pas créer de hautes fréquences supplémentaires. Si l'on prend un nombre de modes transverses donné, seuls les modes dont les fréquences propres sont incluses dans le support fréquentiel de l'excitation sont excités. On trace donc figure 4.1 les spectrogrammes du signal de sortie en ayant utilisé un nombre de modes de vibration transverses croissant dans le calcul.

Lorsque l'on augmente le nombre de modes transverses du système, on voit apparaître des modes de fréquences plus élevées dans les spectrogrammes, le système est donc libre de vibrer à des plus hautes fréquences transmises durant l'excitation. Si on observe plus précisément les spectrogrammes dans les premiers instants des simulations, on peut remarquer le riche contenu fréquentiel fourni par l'excitation impulsionnelle. Le système rentre ensuite en vibrations libres seulement avec les modes que l'on a décidés d'utiliser.

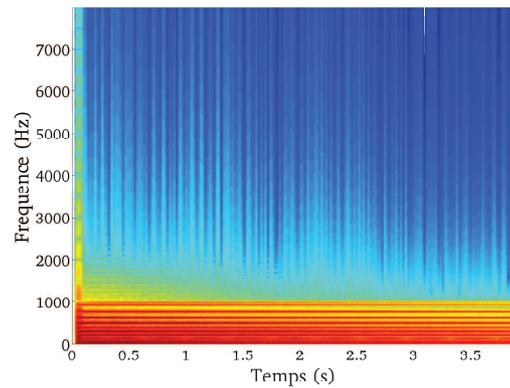
Notre système étant linéaire, on vérifie aussi que la plaque ne vibre pas à des fréquences

Rayon	Epaisseur	Masse volumique	Module d'Young	Coefficient de Poisson
$a = 0.2$ m	$h = 0.001$ m	$\rho = 7800$ kg/m <sup>3</sup>	$E = 200$ GPa	$\nu = 0.38$

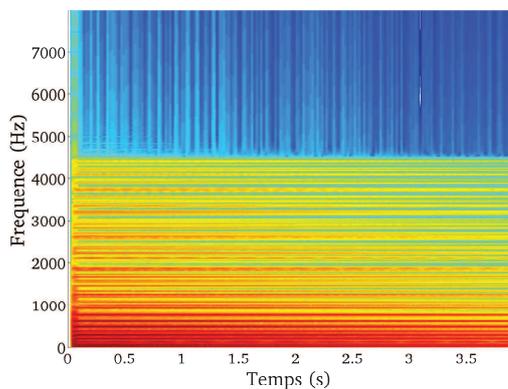
TABLE 4.1 – Paramètres de la plaque utilisés pour les simulations



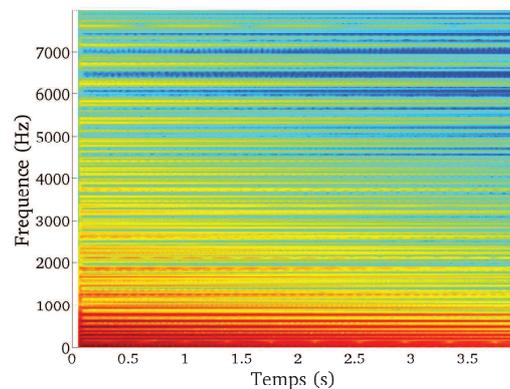
(a) 10 modes



(b) 50 modes



(c) 200 modes



(d) 400 modes

FIGURE 4.1 – Spectrogramme du signal pour  $amp = 10$  N,  $Twid = 0.001$ s et en faisant varier le nombre de modes transverses

plus élevées que celle du dernier mode choisi. Pour 200 modes de vibration, on voit sur la figure 4.1c que la plus haute fréquence de vibration est de 4472 Hz, ce qui correspond bien à la fréquence propre du 200-ème mode de vibration d'une plaque circulaire avec les paramètres choisis.

L'écoute du son synthétisé correspondant est en accord avec les spectrogrammes : lorsque l'on utilise très peu de mode de vibration, le son paraît très pauvre, proche d'un son de cloche, et celui-ci s'enrichit dès lors que l'on augmente le nombre de modes. Bien que le spectre du signal continue à s'enrichir légèrement lorsqu'on dépasse les 400 modes de vibration, d'un point de vue perceptif, notre son de synthèse semble avoir convergé dès les 300 modes de vibration pour cette frappe à 10 N.

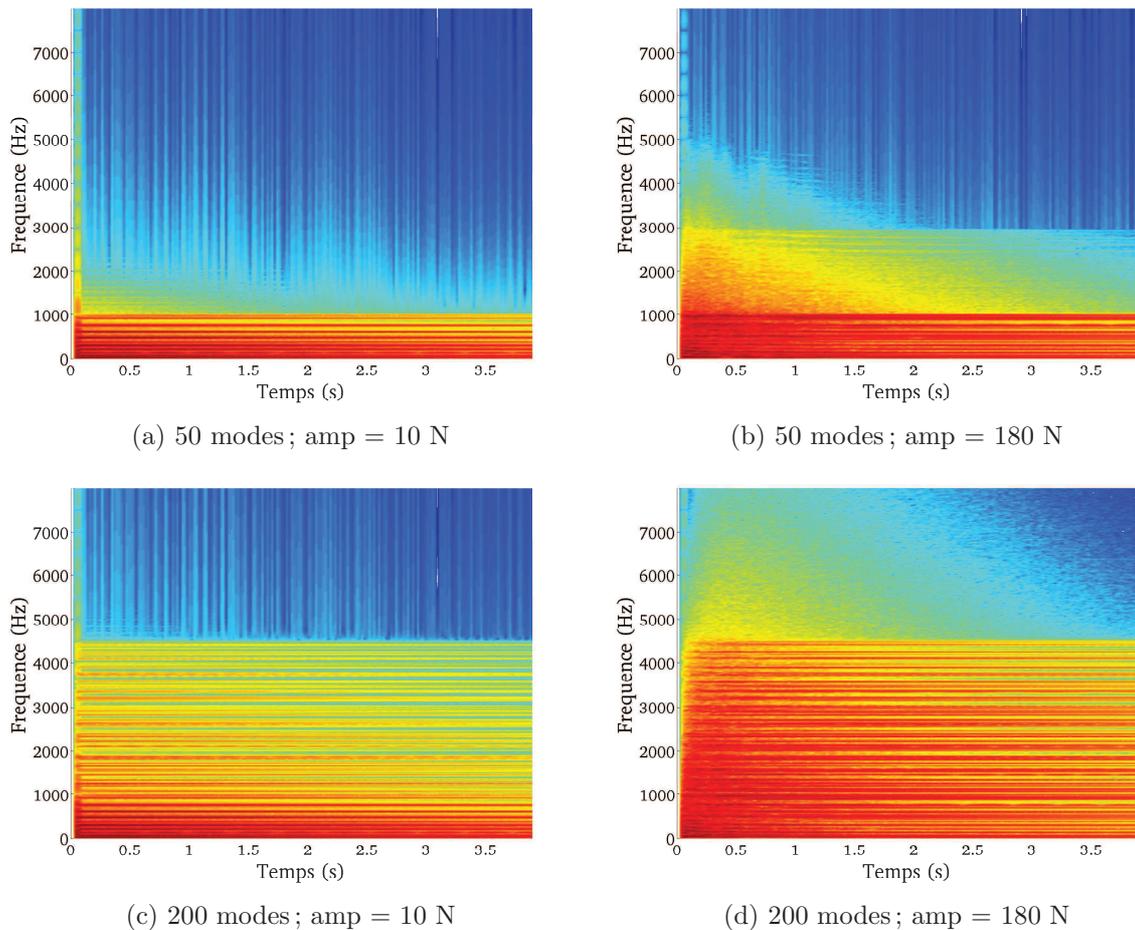


FIGURE 4.2 – Spectrogramme du signal pour  $T_{wid} = 0.001s$  et des amplitude  $amp = 10$  N et  $amp = 180$  N en faisant varier le nombre de modes transverses

Il est intéressant de comparer maintenant le cas linéaire précédent avec un cas fortement non linéaire. Pour cela, on lance des simulations avec une force d'excitation d'amplitude  $amp = 180$  N, qui nous permet de faire vibrer la plaque avec une amplitude supérieure à son épaisseur pour faire apparaître les non linéarités. On compare sur la figure 4.2 les spectrogrammes pour les deux frappes.

Pour 50 modes de vibration transverses, il apparaît clairement un enrichissement du spectre dans les hautes fréquences dans le cas non linéaire et l'apparition de fréquences de vibrations plus élevées que celle du 50-ème mode (987 Hz). En utilisant 200 modes de vibration, même si le spectre gagne peu de nouvelles hautes fréquences, on observe un fort enrichissement dans les fréquences faiblement présentes en linéaire. On observe sur la figure 4.3 que, non seulement le spectre s'enrichit dans les hautes fréquences, mais beaucoup d'énergie est aussi présente entre les fréquences propres de la plaque, la différence entre maximums et minimums du spectre diminue, les non linéarités entraîne donc aussi une diffusion de l'énergie dans les moins hautes fréquences.

Sur le plan perceptif, le système fortement non linéaire a besoin de beaucoup plus de modes pour que le son de synthèse converge. Il faut maintenant utiliser entre 500 et 600 modes de vibration pour que les différences audibles soient minimales lorsqu'on ajoute des modes.

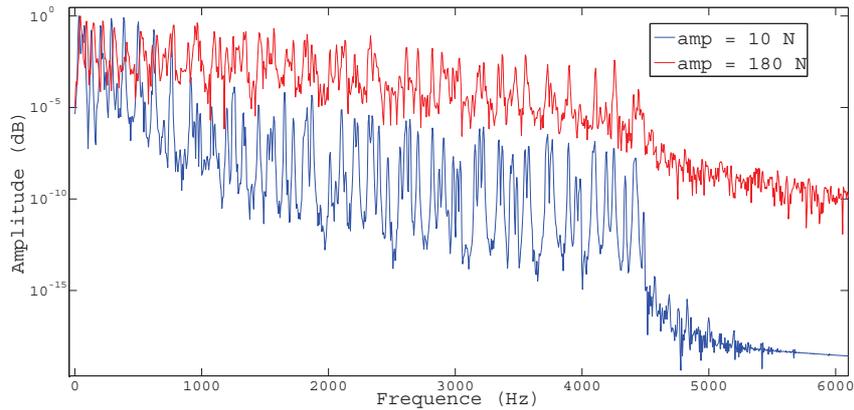


FIGURE 4.3 – Spectre du signal pour  $amp = 10$  N et  $amp = 180$  N

Dans la suite, toutes les simulations avec la méthode modale seront réalisées en utilisant 500 modes de vibration transverses, de manière à obtenir un spectre riche en hautes fréquences sans que la simulation ne soit trop longue à être calculée. Il est intéressant d'observer figure 4.4 comment varie le temps de calcul en fonction du nombre de modes utilisés ainsi que de la fréquence d'échantillonnage choisie. On observe par exemple qu'il faut seulement 15 minutes pour réaliser une seconde de simulation avec 500 modes transverses et  $f_s = 50$  kHz.

Cette rapidité de calcul nous est possible grâce au fait que l'on travaille sur une géométrie très particulière, une plaque parfaitement circulaire, qui nous permet de connaître les déformées de la plaque de manière analytique. Michele Ducceschi travaille lui sur des plaques rectangulaires et doit ainsi utiliser des méthodes numériques afin de calculer les déformées modales [2]. Alors que nous pouvons utiliser seulement 40 modes longitudinaux dans nos simulations (voir 2.3.3), il lui est nécessaire de prendre une base de 400 modes longitudinaux dans son calcul, ce qui a pour effet d'augmenter le temps de calcul de manière importante.

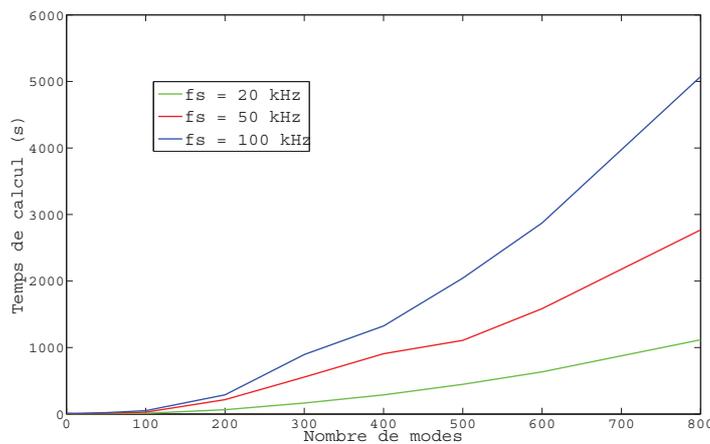


FIGURE 4.4 – Temps de calcul de la méthode modale pour une seconde de simulation lorsqu'on fait varier le nombre de modes transverses et la fréquence d'échantillonnage

## 4.2 Influence de l'attaque et de l'amortissement

### 4.2.1 Influence de la force

On se propose dans cette partie d'étudier plus précisément les phénomènes apparaissant lorsque l'on fait varier la force d'excitation, et plus particulièrement le passage du linéaire au fortement non linéaire.

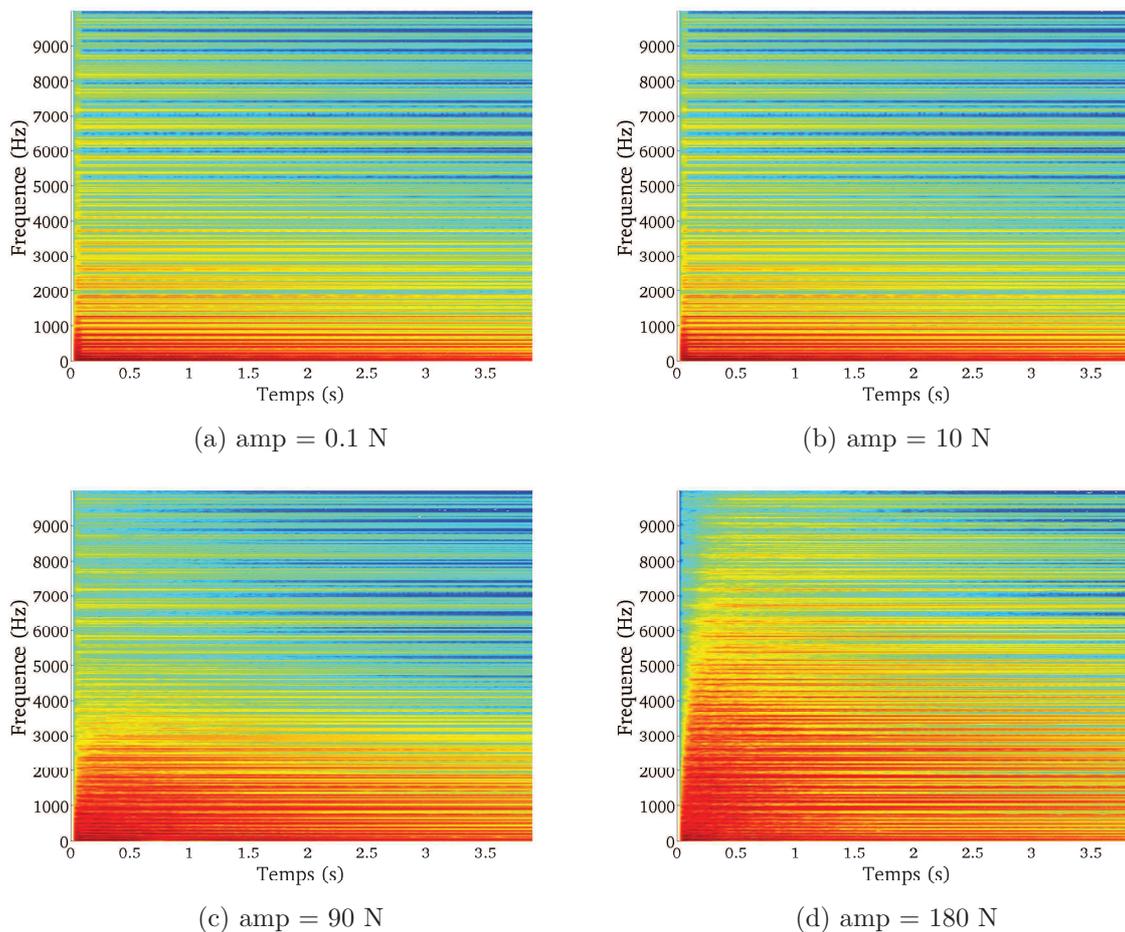


FIGURE 4.5 – Spectrogramme du signal pour  $T_{wid} = 0.001s$  en faisant varier l'amplitude  $amp$

#### Amplitude de la force

On fait tout d'abord varier l'amplitude de la force d'excitation en maintenant  $T_{wid}$  constant. On remarque sur la figure 4.5 qu'entre  $amp = 0.1$  N et  $amp = 10$  N, le système est linéaire. Cela a pour conséquence qu'une augmentation de l'amplitude de la force d'excitation entraîne seulement une augmentation de l'amplitude des vibrations de la plaque sans changer le contenu fréquentiel du signal.

Lorsque l'on augmente encore l'amplitude de la force, le système devient non linéaire, des pics en fréquence qui avait jusqu'à maintenant une très faible énergie en acquièrent. On observe que plus la frappe est de forte amplitude plus le système est non linéaire donc plus le spectre du signal est riche.

On peut expliquer ces phénomènes grâce à la théorie de la turbulence d'ondes [6] [9]. Cette théorie repose sur le même principe que la turbulence dans les fluides. En effet, dans un écoulement turbulent, on voit apparaître d'abord de grands tourbillons créés par les forces externes agissant sur le fluide, ces grands tourbillons transmettent ensuite leur énergie à des tourbillons de taille plus petite, et ainsi de suite, c'est ce qu'on appelle le phénomène de *cascade d'énergie*. C'est ce même phénomène de cascade que l'on retrouve dans les plaque mince en vibration de grande amplitude : lorsqu'on excite avec une grande amplitude une plaque à une très basse fréquence, on observe un transfert d'énergie vers des fréquences plus élevées qui elles même transfèrent leur énergie à des plus hautes fréquences.

Cette théorie prédit aussi ce qu'on observe en faisant varier l'amplitude : plus le forçage est de grande amplitude, plus le phénomène de cascade est important et plus le spectre sera riche en hautes fréquences.

### Largueur temporelle de la force

On fait maintenant varier la largeur temporelle  $T_{wid}$  de l'excitation. A la première écoute, on retrouve tout d'abord les résultats perceptifs attendus avec ce modèle de force : lorsque  $T_{wid}$  est faible, on représente une interaction très courte entre le matériau excitateur et la cymbale, et donc un matériau excitateur rigide comme une baguette en bois. Au contraire, lorsque  $T_{wid}$  est élevé, ce temps de contact est grand et peut donc représenter un matériaux mou tel une mailloche recouverte de feutre.

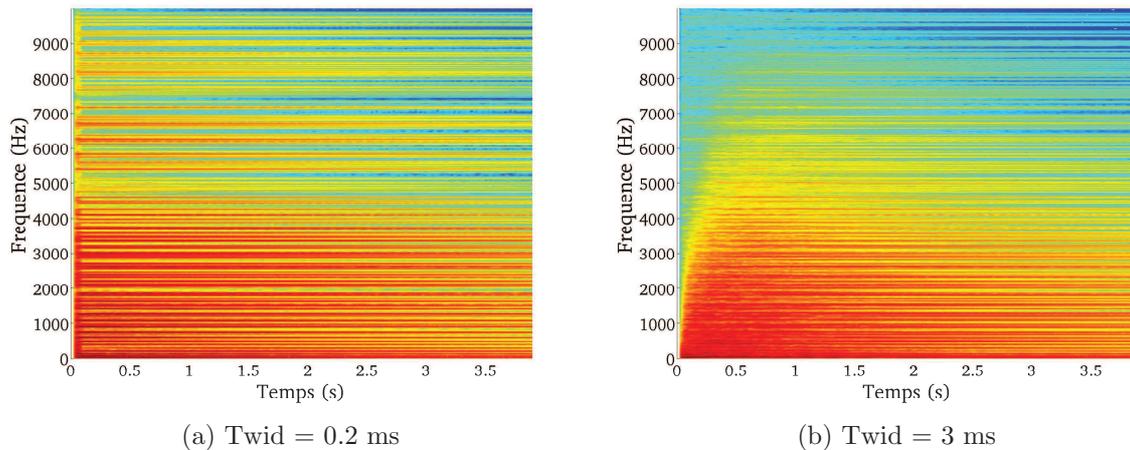


FIGURE 4.6 – Spectrogramme du signal pour  $amp = 90$  N et en faisant varier  $T_{wid}$ .

On vérifie figure 4.6a que lorsque  $T_{wid} = 0.2$  ms et donc que l'interaction est très courte, le contenu spectral transmis à la plaque lors de l'excitation est très riche. Cette richesse spectrale dès l'attaque ne nous permet donc pas de mettre en relief le phénomène de cascade décrit précédemment.

Au contraire, en observant la figure 4.6b au moment de l'impact, on observe qu'un matériau mou et donc un temps de contact long a pour effet de transmettre à la plaque un contenu fréquentiel pauvre en hautes fréquences. Il apparaît ensuite clairement le phénomène de cascade sur une échelle de temps d'environ 0.5s : les vibrations de basses fréquences transmettent leur énergie à des modes de vibrations de fréquences plus élevées et ainsi de suite jusqu'à obtenir un spectre très riche au bout d'une demi-seconde. Cet enrichissement spectral se remarque aussi à l'écoute du son synthétisé.

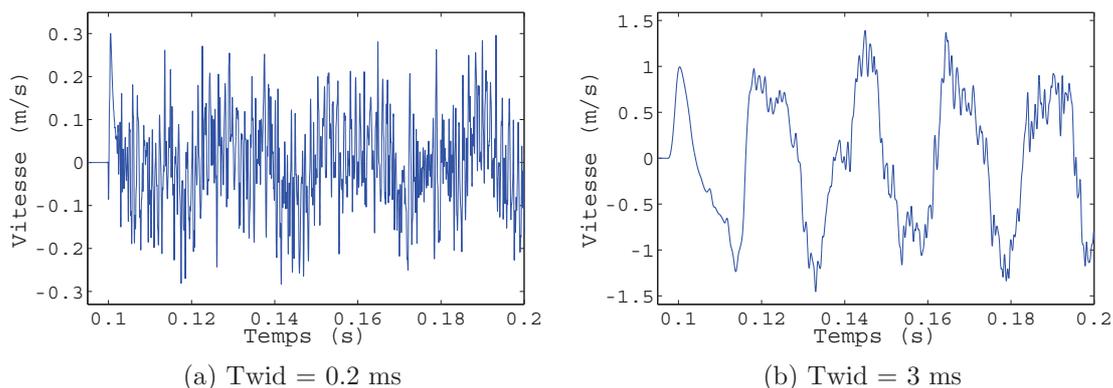


FIGURE 4.7 – Vitesse en un point en fonction du temps pour deux frappes de largeurs temporelles différentes et d’amplitude 90 N.

On peut aussi remarquer ce phénomène en observant directement le signal temporel de vitesse sur la figure 4.7 : pour un  $Twid$  faible, le signal est très chaotique dès l’excitation alors que pour un  $Twid$  plus élevé, on voit que les hautes fréquences mettent du temps à se mettre en places.

On a donc observé que le choix de la force exercée sur la plaque était extrêmement important, celle ci n’a pas seulement pour effet de modifier l’amplitude des vibrations mais a aussi pour effet de changer les phénomènes physiques prenant place dans la plaque et donc le timbre de l’instrument.

Tout d’abord, l’intensité de la frappe nous permet de passer d’un régime faiblement non linéaire, où seuls les modes propres de la plaque excités sont en vibrations, à un régime fortement non linéaire, où le spectre du signal s’enrichit dans les hautes fréquences mais aussi entre les modes propres de vibration. Cet enrichissement spectral est d’autant plus important que la frappe est forte et permet d’obtenir un son synthétisé plus brillant.

De plus on a aussi observé que changer la largeur temporelle de la force nous permet de modifier le contenu spectral transmis à la plaque et donc de synthétiser des matériaux excitateurs différents.

#### 4.2.2 Influence de l’amortissement

L’amortissement des vibrations joue un rôle perceptif majeur lorsqu’on veut rendre compte du son réel des instruments, et en particulier des cymbales. En effet, on avait dans les simulations précédentes choisit un amortissement constant ( $\sigma = 0.019$  adimensionné) par rapport à la fréquence, mais le son s’était avéré être peu naturel, les hautes fréquences semblaient par exemple s’atténuer trop lentement.

Contrairement à la méthode utilisant les différences finies, la méthode modale permet l’implémentation d’un amortissement plus réaliste, où chaque mode de vibration de la plaque a son propre facteur d’amortissement (voir l’équation (2.22)). Cet amortissement variable en fonction des modes peut être déterminé de manière expérimentale et réinjecté dans le code d’intégration temporelle. Christophe Lambourg a par exemple mesuré durant sa thèse [3] le facteur d’amortissement de différentes plaques rectangulaires en fonction des fréquences de leurs modes propres de vibrations. Il a ainsi observé que, pour les gammes de fréquences qui nous intéresse ici, un amortissement variant de manière linéaire avec la

fréquence et précédé d'un palier, comme représenté figure 4.8, décrit assez bien la réalité.

On décide donc de réaliser un grand nombre de simulations en faisant varier la longueur et la hauteur du palier ainsi que la pente de la droite, afin d'observer pour quel forme d'amortissement on s'approche du son réel d'une cymbale.

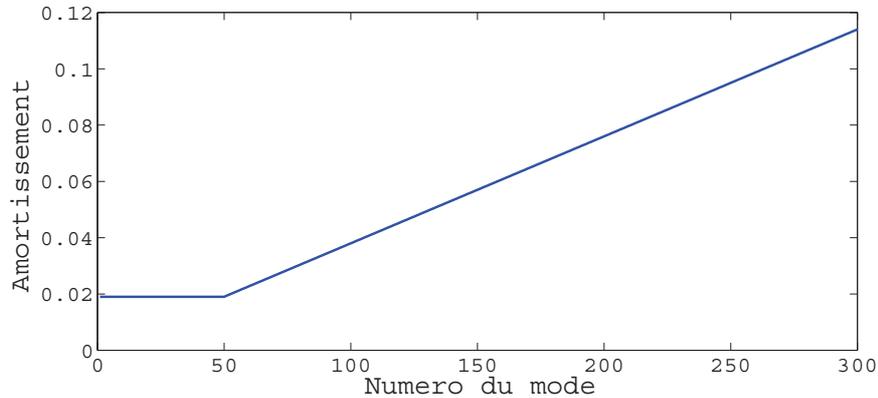


FIGURE 4.8 – Amortissement adimensionné en fonction des modes de vibration

Après écoute des sons synthétisés, il apparaît que pour avoir un amortissement proche d'un son réel de cymbale, il est judicieux que l'amortissement soit constant jusqu'au 100-ème mode de vibration. Lorsque la palier va jusqu'au 50-ème mode, les hautes fréquences semblent trop amorties, au contraire quand le palier atteint le 200-ème mode, des hautes fréquences ne sont pas assez atténuées.

De plus, on constate que la hauteur idéale du palier est lorsqu'il est compris entre  $\sigma = 0.005$  et  $\sigma = 0.01$ . En dessous de  $\sigma = 0.005$ , les basses fréquences sont trop peu amorties et se maintiennent trop dans le son. Au dessus de  $\sigma = 0.01$ , les basses fréquences sont en revanche trop atténuées.

Pour ce qui est de la pente de la droite, un coefficient directeur compris entre 0.0001 et 0.0004 semble bien décrire l'augmentation de l'amortissement dans les hautes fréquences que l'on observe à l'écoute de véritables cymbales.

Dans la suite les simulations en modal seront néanmoins réalisées avec un amortissement constant, de manière à pouvoir comparer les deux méthodes numériques en utilisant les mêmes paramètres.

## Chapitre 5

# Comparaison des méthodes modale et par différences finies

On se propose maintenant dans cette partie de comparer les approches modale et par différences finies pour des paramètres de simulations identiques.

Contrairement à la méthode modale où ignorer les modes de fréquences nulles permet d'éliminer facilement les modes de corps rigide (modes de rotation ou translation où la plaque ne subit pas de déformations), la méthode par différences finies en conditions de bords libres calcule tous les modes de vibration de manière approchée, y compris les modes de corps rigide.

Deux méthodes ont donc été utilisées durant ce stage pour éliminer ces modes. La première méthode a consisté à frapper sur la plaque en quatre points de manière symétrique et opposée, comme schématisé figure 5.1, pour empêcher les modes de corps rigide de se mettre en place.

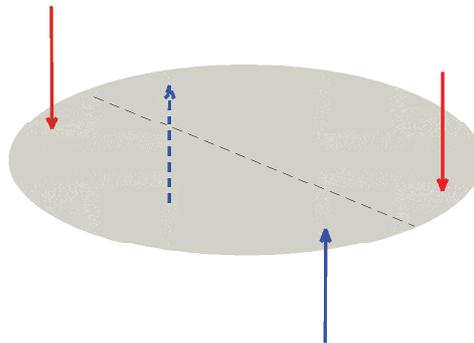


FIGURE 5.1 – Schématisation de la frappe en quatre points

La seconde méthode utilisée consiste à ne plus étudier la vitesse en un point de la plaque, mais l'accélération en ce point en fonction du temps. En effet, les modes de corps rigides ayant une vitesse constante, étudier le spectre de l'accélération permet d'éliminer ces modes.

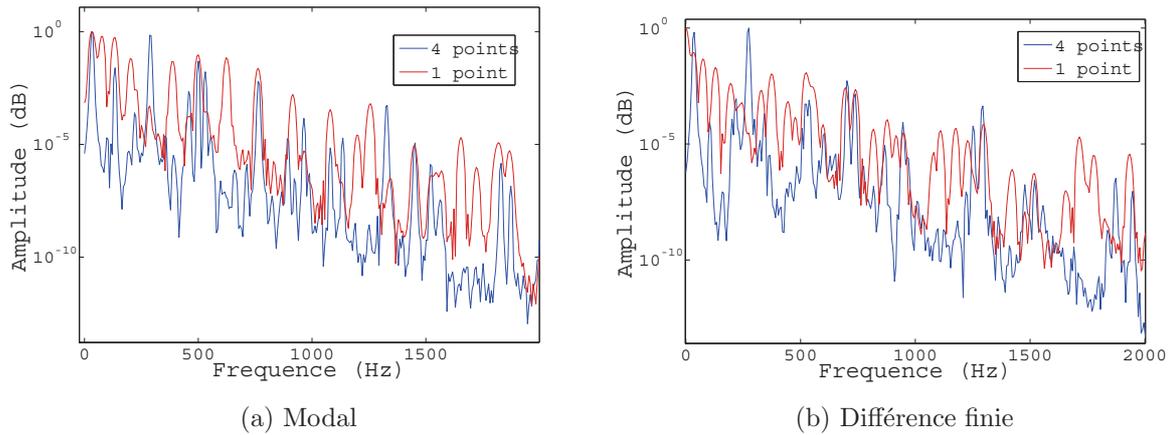
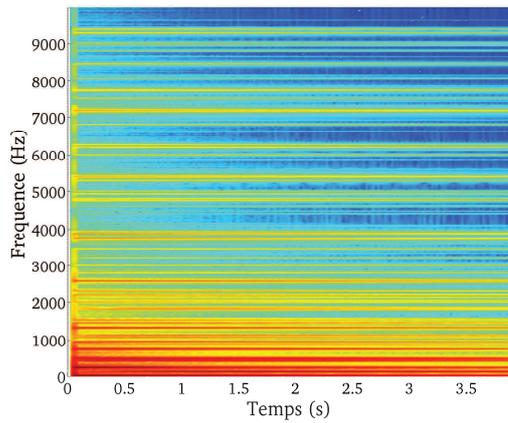


FIGURE 5.2 – Comparaison des spectres des signaux pour des frappes en 1 point ou en 4 points pour les deux méthodes.  $amp = 10$  N,  $Twid = 1$  ms

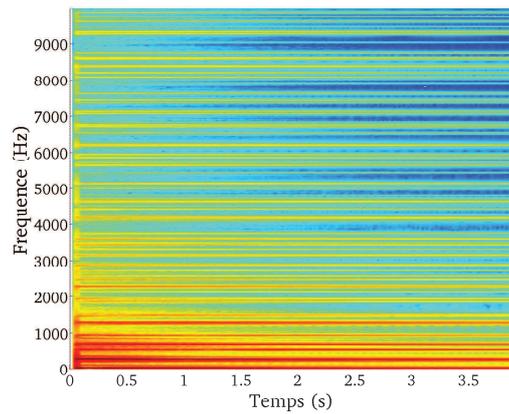
## 5.1 Vitesse pour une frappe en quatre points

On commence donc par exciter la plaque en quatre points de manière symétrique, et on récupère comme signal de sortie la vitesse en un autre point.

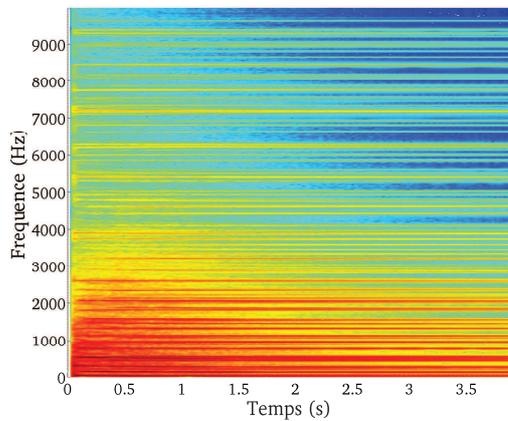
On observe tout d'abord figure 5.2 que le fait d'exciter la plaque en quatre points a pour effet secondaire d'atténuer et même de faire disparaître certains modes de vibration, notre hypothèse étant qu'il y ait des interférences destructives entre les ondes créées en chaque point de frappe et se réfléchissant sur les bords de la plaque. On peut citer comme modes fortement atténués les modes  $(3,0)$ ,  $(5,0)$ ,  $(7,0)$  ou encore  $(9,0)$ , les modes ayant un nombre impair de de rayons nodaux semblent donc spécialement atténués par cette forme d'excitation.



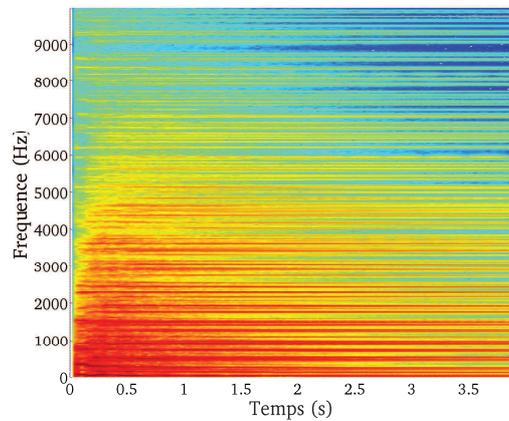
(a) Modal ; amp = 10 N



(b) Difference finie ; amp = 10 N



(c) Modal ; amp = 50 N



(d) Difference finie ; amp = 50 N

FIGURE 5.3 – Spectrogramme du signal pour  $T_{wid} = 1\text{ms}$  en faisant varier l'amplitude  $amp$

On compare donc figure 5.3 les spectrogrammes des signaux obtenus avec les deux méthodes. On observe qu'en régime linéaire et donc pour une faible amplitude de frappe, les deux méthodes obtiennent des résultats sensiblement identiques. Lorsqu'on augmente l'amplitude de l'excitation on voit en revanche que les méthodes modale et par différences finies commencent à diverger. Le spectre obtenu par la méthode par différences finies étant beaucoup plus riche en hautes fréquences. Nous n'avons pas trouver d'explications à cette différence, on peut par exemple imaginer que la grille cartésienne utilisée dans les différences finies modifie les ondes réfléchies sur les bords de la plaque et les interférences destructives entre les ondes créées.

Cette méthode d'excitation en quatre points, qui s'avérait être efficace pour éliminer les modes de corps rigide sur une plaque rectangulaire voit donc l'apparition de problèmes pour une plaque circulaire. On utilisera donc dans la suite la seconde méthode utilisant l'accélération d'un point de la plaque.

## 5.2 Accélération pour une frappe en un point

On frappe donc en un même point avec les deux méthodes, et on étudie comme signal de sortie l'accélération en un point en fonction du temps. On sait que dériver un signal a pour effet de multiplier son spectre par la pulsation  $\omega$ , le signal de sortie sera donc amplifié dans les hautes fréquences, le rendant moins réaliste pour la synthèse sonore.

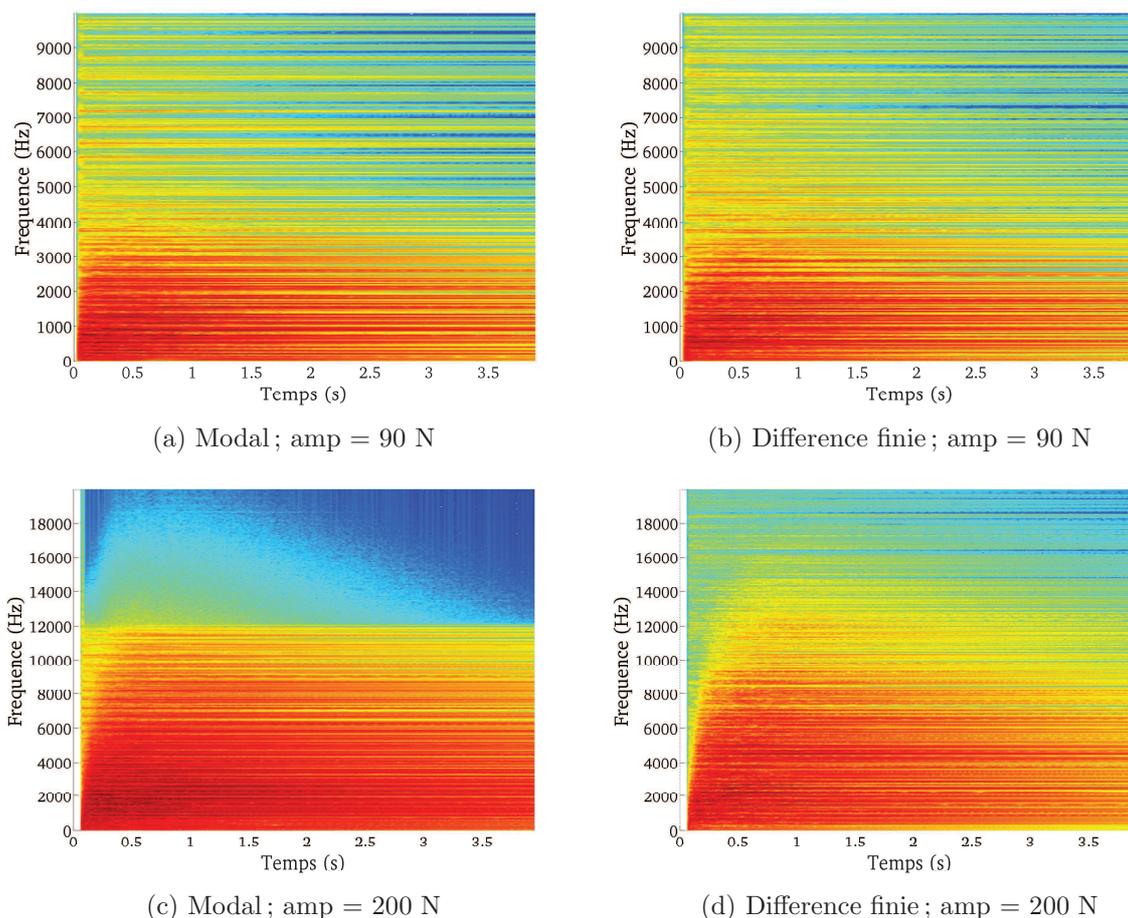


FIGURE 5.4 – Spectrogramme du signal pour  $Twid = 1\text{ms}$  en faisant varier l'amplitude  $amp$

On compare tout d'abord figure 5.4 les spectrogrammes des signaux en modal et en différences finies. On choisit tout d'abord une excitation de largeur temporelle  $Twid = 1\text{ms}$  et on augmente l'amplitude de la force. On observe que jusqu'à  $amp = 90\text{ N}$ , les deux méthodes obtiennent des contenus spectraux très proches.

Lorsque l'on augmente encore l'amplitude de la frappe, il apparaît que 500 modes de vibrations avec la méthode modale ne suffisent plus à décrire toute la dynamique du système en haute fréquence. On voit qu'en différences finies, des pics sont présents jusqu'à environ 14 kHz alors que les 500 modes de vibrations limitent la dynamique à 12 kHz.

On fait maintenant varier la largeur temporelle de l'excitation  $Twid$ . On observe figure 5.5 que lorsque  $Twid = 3\text{ms}$ , les deux méthodes décrivent de manière assez proche le mécanisme de cascade d'énergie. Pour un  $Twid$  plus faible, on observe en revanche

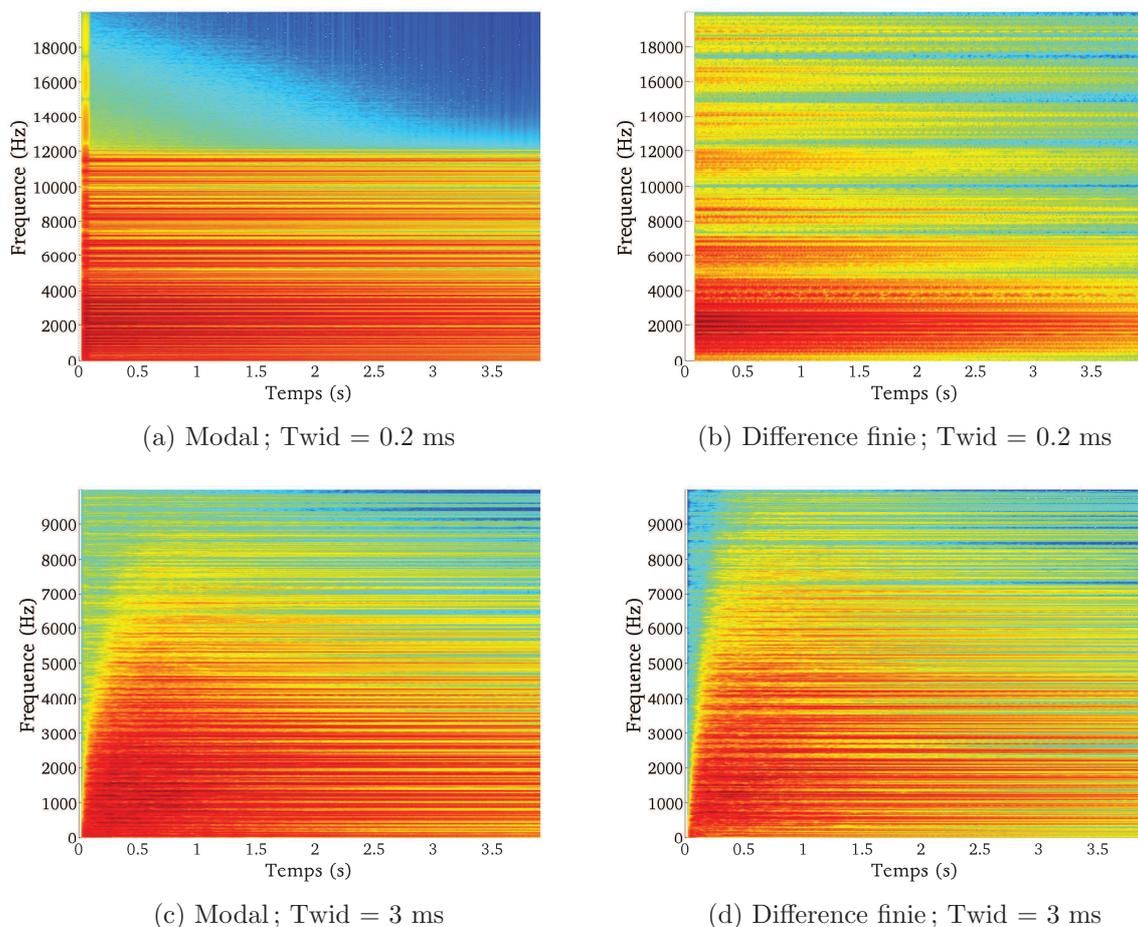


FIGURE 5.5 – Comparaison des spectrogrammes en modale et différence finie. amp = 90 N

que l'utilisation de 500 modes de vibration avec la méthode modale ne nous permet pas de décrire les très hautes fréquences présentes dans le début du spectre en différences finies.

On peut remarquer sur les figures 5.5a et 5.5b que, pour les deux méthodes, même lorsque le contenu spectral transmis à la plaque est très riche, on voit apparaître des bandes de fréquences non excitées par l'impulsion, par exemple autour de 5000 Hz, 7500 Hz ou 10 kHz. Ce phénomène peut s'expliquer en observant le spectre de l'excitation  $f(t)$  figure 5.6 et en le comparant au spectre du signal. En effet, la transformée de Fourier d'une demi sinusoïde fait apparaître des lobes régulièrement espacés, les minimums du spectre de l'excitation correspondent bien aux minimums du spectre du signal de sortie. On remarque que le premier minimum du spectre d'excitation est bien positionné en  $f = 1/Twid$ .

Si on compare figure 5.7b de manière plus précise les spectres avec les deux méthodes, on retrouve ce que l'on avait prédit lors de l'étude de convergence de la méthode par différences finies : pour une fréquence d'échantillonnage  $f_s$  de 100 kHz, la grille cartésienne décrit de manière trop approchée la plaque circulaire, et donc les fréquences des modes propres de vibrations sont calculées peu précisément. Ce manque de précision se ressent beaucoup à l'écoute du son synthétisé, même si la cymbale n'a pas de hauteur tonale précise, un décalage de tous les pics en fréquences a pour effet de changer le timbre final du son.

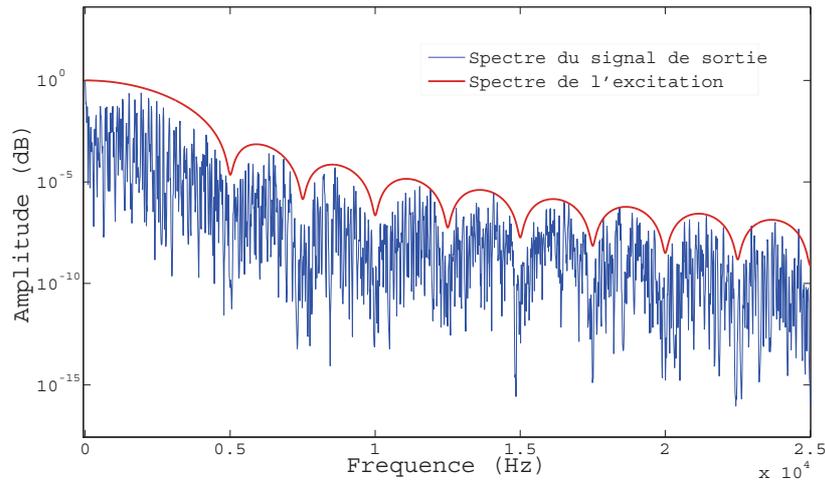
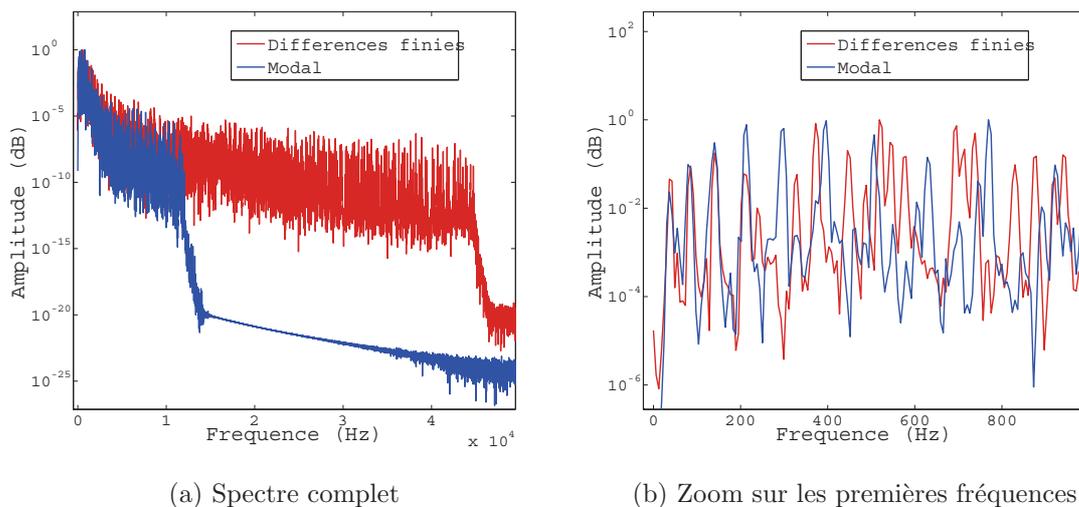


FIGURE 5.6 – Comparaison du contenu spectral de l'excitation et du signal de sortie.  $amp = 50$  N et  $T_{wid} = 0.2$  ms

On vérifie aussi figure 5.7a que la méthode par différences finies calcule des modes de vibrations jusqu'à  $f_s/2$  alors qu'avec la méthode modale, même si elle est censée pouvoir décrire ici des phénomènes jusqu'à  $f_s$ , c'est le nombre de modes choisis qui fixe finalement la plus haute fréquence simulée.

Si l'on souhaite gagner en précision avec la méthode par différences finies, on doit donc augmenter la fréquence d'échantillonnage. Mais cela a pour effet d'augmenter très rapidement le temps de calcul. La méthode par différences finies à  $f_s = 200$  kHz met par exemple 8 heures pour simuler une seconde de son alors que la méthode modale nous permet facilement de ne pas dépasser l'heure de calcul.



(a) Spectre complet

(b) Zoom sur les premières fréquences

FIGURE 5.7 – Comparaison des spectres en modale et différences finies pour  $amp = 50$  N et  $T_{wid} = 1$ ms

### 5.3 Conclusion sur la comparaison des deux méthodes

La méthode modale développée par Cyril Touzé et Michele Ducceschi possède donc plusieurs avantages intéressants par rapport à une méthode par différences finies : Tout d'abord elle permet de calculer de manière analytique et donc exacte les fréquences et déformées modales de la plaque pour un nombre de modes choisi. La méthode par différences finies calcule elle toutes les déformées modales de la plaque mais de manière approchée, le calcul étant de moins en moins précis pour des modes de fréquences élevées. De plus, même si cela est difficile à quantifier et à observer sur une figure, on sait que les différences finies calculent aussi de manière approchée les coefficients non linéaires du problème, cela a pour effet de rendre compte de manière peu précise de la dynamique fortement non linéaire et en particulier de la cascade d'énergie.

En revanche, la méthode par différences finies à l'avantage de rendre compte de la dynamique jusqu'à des phénomènes de fréquences très élevées, proches de  $f_s/2$ , alors que la méthode modale ne simule elle que des fréquences inférieures ou égales à celle du dernier mode que l'on a choisi de simuler.

Une caractéristique intéressante de la méthode modale est qu'elle nous permet une grande flexibilité dans le choix de la loi d'amortissement des vibrations. Il est ainsi impossible en différences finies de choisir aussi précisément un amortissement variable selon les modes de vibrations.

Mais le principal avantage de la méthode modale apparu durant ce stage est le très faible temps de calcul. Pour une plaque rectangulaire, les deux méthodes demandent toutes deux des temps de calcul élevés, la méthode par différences finies étant même à priori plus rapide car la fréquence d'échantillonnage peut être choisie plus faible.

Au contraire, avec une plaque circulaire, la méthode par différences finies voit son temps de calcul sensiblement augmenter (car on doit augmenter  $f_s$  pour garder une bonne précision) et la méthode modale devient elle plus rapide grâce au calcul analytique des déformées modales et l'utilisation de peu de modes de membrane.



## Chapitre 6

# Conclusion

Ce stage a donc tout d'abord permis de mettre en relief et d'étudier de manière plus approfondie des phénomènes non linéaires apparaissant dans les plaques minces en vibrations de grandes amplitudes, comme la turbulence d'onde ou encore le couplage entre les différents modes de vibration. L'application de ces phénomènes à la synthèse sonore permet de comprendre à quel point cette physique non linéaire est essentielle pour l'enrichissement fréquentiel d'un signal de plaque en vibration et donc pour la création du son extrêmement riche des cymbales.

Afin d'adapter les codes existants à des plaques circulaires, il nous a donc fallu implémenter les déformées modales et les coefficients non linéaires analytiques d'une plaque circulaire pour les injecter dans le schéma d'intégration temporelle existant. Le pré-calcul des coefficients non linéaires  $H$  (rendu possible par leurs expressions analytiques) ainsi que leur utilisation directe dans l'intégration a permis de diminuer grandement le temps de calcul.

Les résultats assez proches obtenus avec notre méthode modale et la méthode par différences finies nous permettent de réaliser une première validation de nos codes Matlab. Il serait intéressant de mettre en place un dispositif expérimental qui pourrait permettre de comparer les simulations numériques réalisées pendant ce stage à des sons réels de plaques circulaires en vibration, afin de valider nos codes définitivement.

Maintenant que le programme de simulation de plaques circulaires en vibration fonctionne, il serait intéressant dans la suite de se rapprocher d'une géométrie réelle de cymbale, en ajoutant un défaut sur la plaque circulaire afin d'obtenir une coque sphérique faiblement courbée. Cela aura pour conséquence d'ajouter de nouvelles non linéarités (cette fois ci quadratiques) dans la dynamique et pourrait permettre d'évaluer l'effet de ce défaut sur le son synthétisé et d'observer si l'on se rapproche du son réel si particulier d'une cymbale.



# Bibliographie

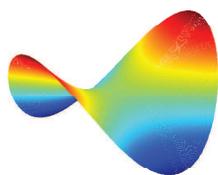
- [1] S. Bilbao. *Numerical sound synthesis : finite difference schemes and simulation in musical acoustics*. Wiley, 2009.
- [2] M. Ducceschi, C. Touzé, and S. Bilbao. Nonlinear dynamics of rectangular plates : investigation of modal interaction in free and forced vibrations. *Acta Mechanica*, 2013.
- [3] C. Lambourg. *Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes - Application à la synthèse sonore*. PhD thesis, Université du Maine, 1997.
- [4] A.H. Nayfeh and D.T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons Inc, New York, 1979.
- [5] O. Thomas and S. Bilbao. Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and some symmetry properties. *Journal of Sound and Vibration*, 2008.
- [6] O. Thomas, M. Monteil, and C. Touzé. Idiophones à plaque et à coque (partie i) - instruments linéaires et faiblement non linéaires : des cloches aux steelpans, acoustique des instruments à percussion, musique et technique, n6, éditions itemm - issn : 1771-3641, le mans. 2011.
- [7] C. Touzé, S. Bilbao, and O. Cadot. Transition scenario to turbulence in thin vibrating plates. *Journal of Sound and Vibration*, 2011.
- [8] C. Touzé and O. Thomas. Idiophones à plaque et à coque (partie ii) - instruments fortement non linéaires : des cymbales, tam-tams aux plaques tonnerre, acoustique des instruments à percussion, musique et technique, n6, éditions itemm - issn : 1771-3641, le mans. 2011.
- [9] C. Touzé, O. Thomas, and M. Amabili. Transition to chaotic vibrations for harmonically forced perfect and imperfect circular plates. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2010.
- [10] C. Touzé, O. Thomas, and A. Chaigne. Asymmetric nonlinear forced vibrations of free-edge circular plates. part 1 : Theory. *Journal of Sound and Vibration*, 2002.



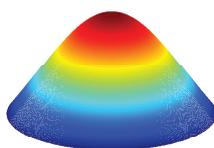
## Annexe A

# Visualisation des déformées modales d'une plaque circulaire

### A.1 Visualisation des premiers modes propres d'une plaque circulaire



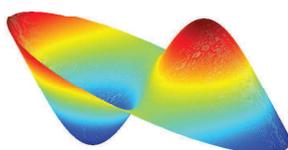
(a) Mode (2,0),  $\omega = 5.093$



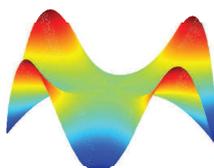
(b) Mode (0,1),  $\omega = 9.175$



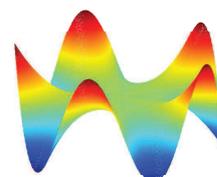
(c) Mode (3,0),  $\omega = 11.90$



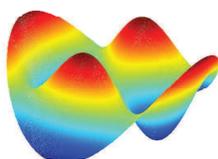
(d) Mode (1,1),  $\omega = 20.58$



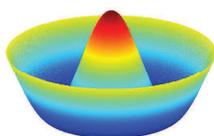
(e) Mode (4,0),  $\omega = 20.97$



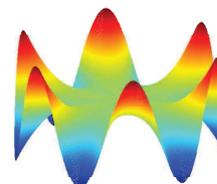
(f) Mode (5,0),  $\omega = 32.28$



(g) Mode (2,1),  $\omega = 35.21$



(h) Mode (0,2),  $\omega = 38.61$



(i) Mode (6,0),  $\omega = 45.77$

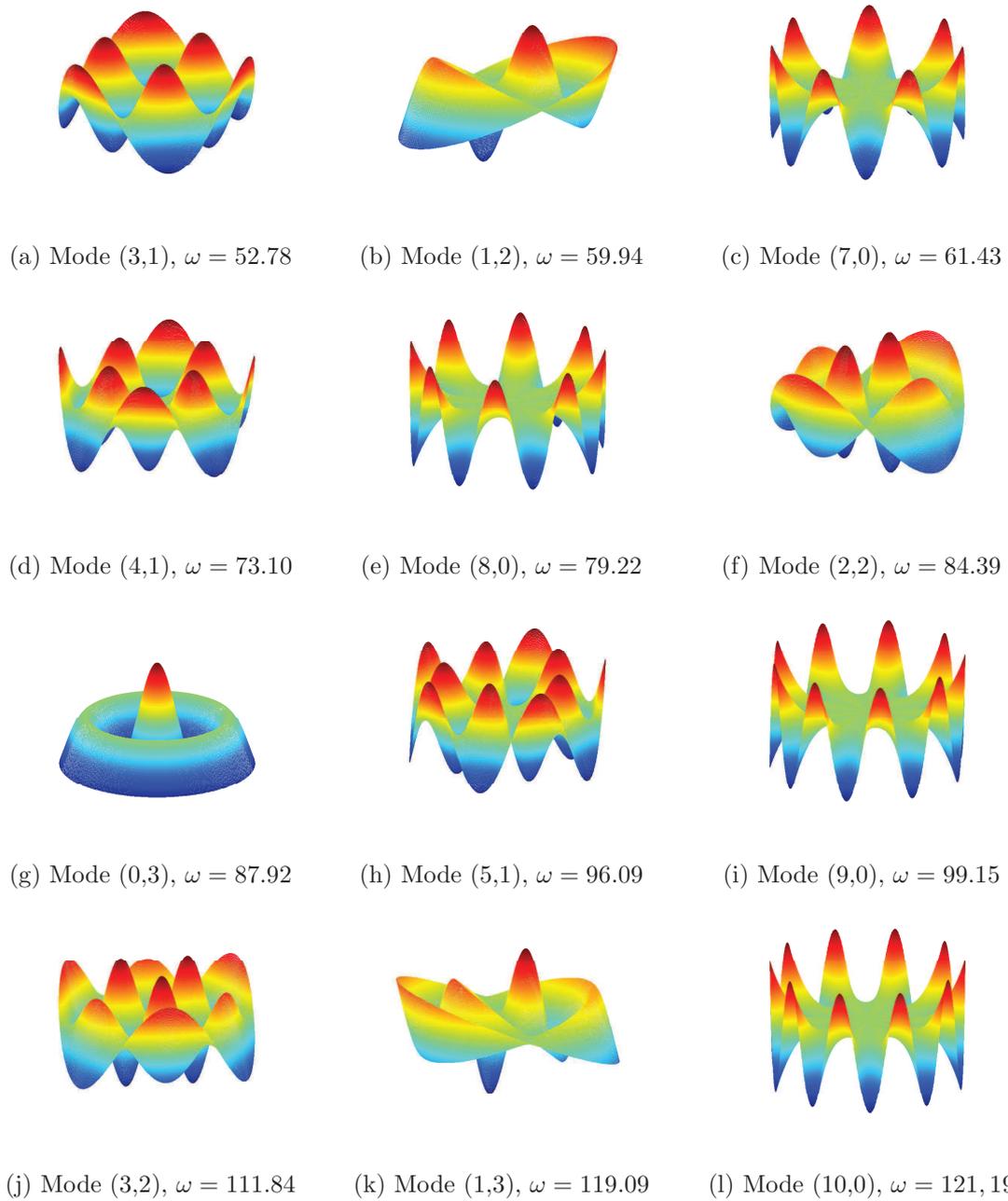


FIGURE A.2 – Représentation des 21 premiers modes propres (sans compter les deux configurations pour chaque mode axisymétrique) de vibration d’une plaque circulaire au bord libre, avec  $\omega$  la pulsation adimensionnée

## A.2 Visualisation de la déformée de la plaque en fonction du temps pour une frappe en un point

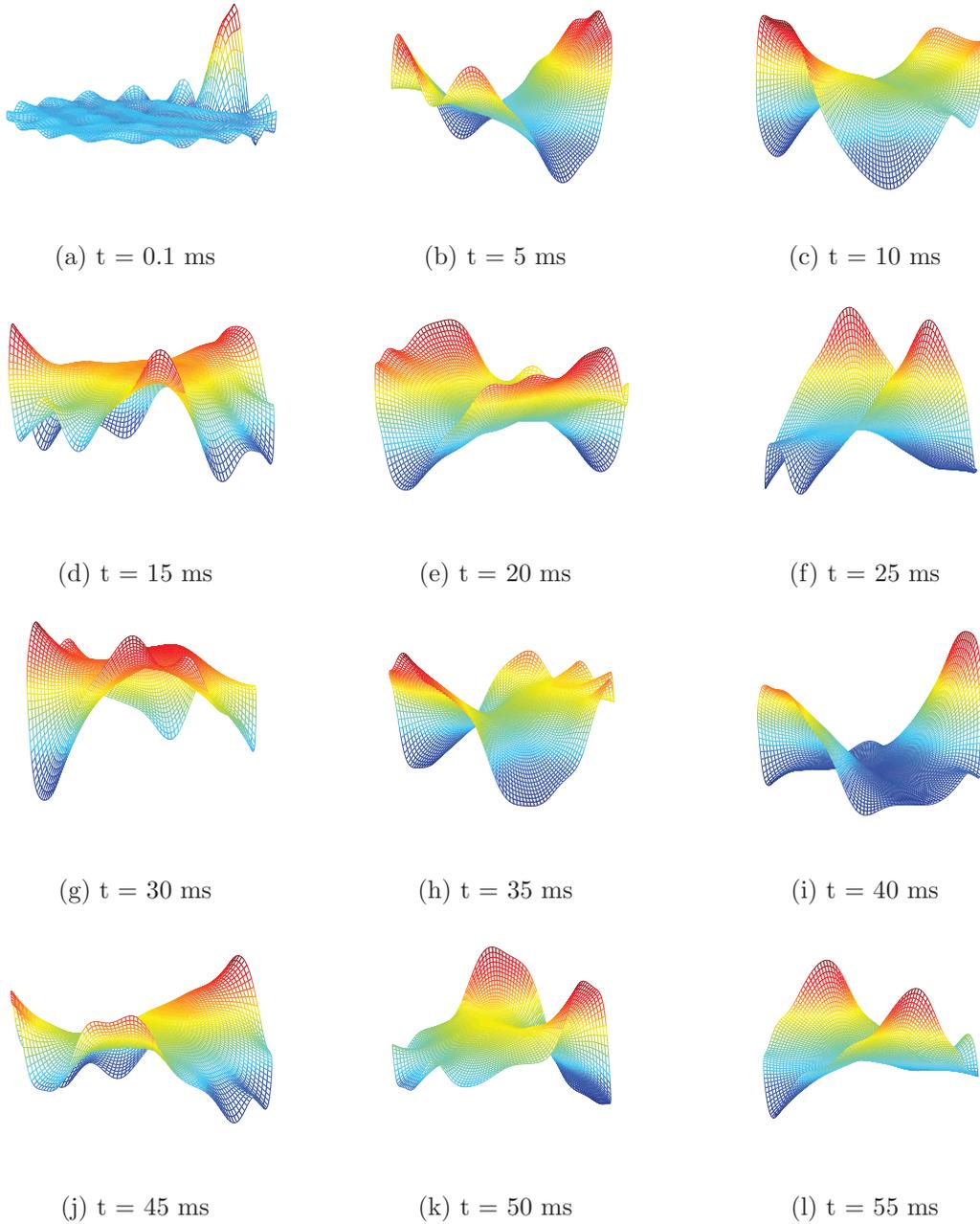


FIGURE A.3 – Visualisation de la plaque après un temps  $t$  pour une frappe en un point

## Annexe B

# Programme Matlab

### Code d'intégration temporelle de Michele Ducceschi adapté à une plaque circulaire

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Initialisation %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

lq = 10; % Nombre de modes transverses
Rd = 0.2; % Rayon dimensionné
nu = 0.38; E = 2e11; rho = 7800;
hd = 0.001; % Epaisseur dimensionnée
fsd = 50000; % Frequence d'echantillonnage dimensionnée
Tsd = 1; % Longueur de la simulatio en seconde
dr = 0.0001;

T0 = 0.1; amp = 10; Twid = 0.001; % Parametres de la force

sig0 = 0.75; % Amortissement dimensionné

load H % Chargement des coefficients non linéaires

H1 = H(:,1:lq,1:lq);
H1 = reshape(H1, size(H1,1), size(H1,2)^2);
A = size(H1,1);

D = E*hd^3/(12*(1-nu^2));
e = 12*(1-nu^2);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Adimensionnements %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

R = Rd/Rd; % Rayon adim
dr = dr/Rd; % Pas d'intégration adim

Ts = Tsd/(Rd^2*sqrt(rho*hd/D)); % Durée de la simulation adim
fs = fsd*Rd^2*sqrt(rho*hd/D); % Fréquence d'échantillonnage adim

amp = amp*Rd^4/(E*hd^4); % Force adimenssionnée
Twid = Twid/tad;
T0 = T0/tad;

% Amortissement adimensionné
sig0 = sig0*sqrt(D/(rho*hd))*Rd^2/(E*hd^3) * e * rho*hd;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```

H1 = H1*sqrt(e);
H2 = reshape(H1, [A*lq, lq]);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

load mode % mode(n,3) : Nombre de rayons nodaux du mode n
          % mode(n,4) : Nombre de cercles nodaux du mode n
          % mode(n,5) = 1 si configuration 1 et 2 si configuration 2
          % mode(n,6) : Pulsation adimensionnée du mode n

op = [0.5192 0.8462*R]; % Point d'écoute
fp = [pi/4 0.9*R]; % Point d'excitation

k = zeros(1, lq);
rp = zeros(1, lq);
P = zeros(lq, 1);

for ii = 1 : lq
    dzeta(ii) = sqrt(mode(ii, 6));
    k(ii) = mode(ii, 3);

    J0(ii)=besselj(k(ii), dzeta(ii));
    J1(ii)=besselj(k(ii)-1, dzeta(ii));
    J2(ii)=besselj(k(ii)-2, dzeta(ii));

    I0(ii)=besseli(k(ii), dzeta(ii));
    I1(ii)=besseli(k(ii)-1, dzeta(ii));
    I2(ii)=besseli(k(ii)-2, dzeta(ii));

    Jtild(ii)=dzeta(ii)^2*J2(ii)+(nu-2*k(ii)+1)*dzeta(ii)*J1(ii)+k(ii)*(k(ii)+1)*(1-nu)*J0(ii);
    Itild(ii)=dzeta(ii)^2*I2(ii)+(nu-2*k(ii)+1)*dzeta(ii)*I1(ii)+k(ii)*(k(ii)+1)*(1-nu)*I0(ii);

    JJ0(ii) = besselj(k(ii), dzeta(ii)*op(2));
    II0(ii) = besseli(k(ii), dzeta(ii)*op(2));

    JJ0p(ii) = besselj(k(ii), dzeta(ii)*fp(2));
    II0p(ii) = besseli(k(ii), dzeta(ii)*fp(2));

    if mode(ii, 5) == 1
        % Déformée modale de la plaque circulaire au point d'écoute pour chaque mode
        rp(ii) = (JJ0(ii) - (Jtild(ii)*II0(ii)/(Itild(ii))))*cos(k(ii)*op(1));
        % Déformée modale au point de frappe pour chaque mode
        P(ii) = (JJ0p(ii) - (Jtild(ii)*II0p(ii)/(Itild(ii))))*cos(k(ii)*fp(1)); % phi0
    else
        rp(ii) = (JJ0(ii) - (Jtild(ii)*II0(ii)/(Itild(ii))))*sin(k(ii)*op(1));
        P(ii) = (JJ0p(ii) - (Jtild(ii)*II0p(ii)/(Itild(ii))))*sin(k(ii)*fp(1));
    end

    % Normalisation
    [norm(ii) Kkn(ii)] = norm_modes(k(ii), dzeta(ii), R, dr, nu);

    rp(ii) = rp(ii) * Kkn(ii);
    P(ii) = P(ii) * Kkn(ii);
end

P = e*P;
P = P/Rd^2; % Dimension du dirac dans l'intégrale de surface

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
k = 1/fs; % Pas d'intégration temporelle
Tn = round(Ts*fs); % Longueur de la simulation en échantillons

q1 = zeros(lq,1); %q at timestep a - 1 % Initialisation
q2 = zeros(lq,1); %q at timestep a - 2

c = zeros(lq,1);
for i = 1 : lq
    c(i) = sig0; % Création du vecteur amortissement modal
end

%create constant matrices for main loop
C = zeros(lq,lq);
C1 = zeros(lq,lq);
C2 = zeros(lq,lq);
for m = 1 : lq
    C(m,m) = (1/k^2 + c(m)/k/(1));
    C1(m,m) = (-2/k^2 + (om(m)/(1))^2);
    C2(m,m) = (1/k^2 - c(m)/k/(1));
end
C = sparse(C);
C1 = sparse(C1);
C2 = sparse(C2);

% Forme temporelle de la force
T0 = T0 - Twid;
T0n = round(T0*fs); %samples

Trn = round(Twid*fs); %samples
Th = 2*round(Trn);

fvec = zeros(Tn,1);
for i = 2 + T0n : Th + T0n
    fvec(i) = amp/2*(1 + cos(pi*((i - 1 - (Trn+T0n))/Trn)));
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Intégration temporelle %%%%%%%%%
w = zeros(Tn,1);
for i = 1 : Tn

    rpq1 = repmat(q1,[1 lq]);
    rpq2 = permute(rpq1,[2 1]);
    t1 = rpq1.*rpq2;
    t1 = reshape(t1,[lq^2,1]);
    t1 = H1*t1;
    t2 = H2*q1;
    t2 = reshape(t2,[A lq]);
    G = t2.'*t1;

    q = C\(- C1*q1 - C2*q2 - G + P*fvec(i));

    % Construction du déplacement en un point
    w(i) = rp*q;

    q2 = q1; % Mise à jour des variables
    q1 = q;

end

```