



Outils algébriques pour l'étude  
des canons rythmiques mosaïques  
et du pavage modulo  $p$



Hélianthe Caure  
juillet 2013



Mémoire de M2 recherche  
Stage de M2 ATIAM  
sous la direction de Moreno Andreatta et Emmanuel Amiot

# 1 Résumé - Abstract

Ce mémoire est une étude allant des canons rythmiques mosaïques (CRM) au cas très particulier du pavage modulo 2 de motif de la forme  $\{0, 1, 2^k\}$ . Après une introduction aux définitions et notions de bases des CRM, une seconde partie donne toutes les propriétés sur les polynômes cyclotomiques qui serviront à étudier les conditions techniques introduites par Coven-Meyerowitz, qui sont ensuite présentées. À la fin de ces deux premières parties, la notion d'apériodicité, et donc de canon de Vuza, est abordée et reliée aux théorèmes déjà énoncés. Le cas particulier des canons ayant exactement deux facteurs cyclotomiques de puissances premières est ensuite abordé. La dernière partie se concentre sur les pavages avec superpositions qui en plus d'enrichir les CRM par de la polyphonie, apportent une nouvelle compréhension mathématique des canons. Ce rapport en donne d'abord les définitions et notations complètes, puis démontre les propriétés fondamentales. Il s'attache enfin à l'étude complète des motifs de la forme  $\{0, 1, 2^k\}$  dont on donne une démonstration constructive de la forme de ses entrées.

Mots clés : canons rythmiques, mosaïque, modulo, canons de Vuza, polynômes cyclotomiques, conditions Coven-Meyerowitz.

This dissertation is a full study of rhythmic tiling canons (RTC), from basic tiling to the special case of tiling modulo 2 of patterns of the type  $\{0, 1, 2^k\}$ . After providing basic definitions and notations needed to understand RTC, we then introduce all the different ways of representing RTC. One chapter describes all the properties of cyclotomic polynomials one would need to study two technical conditions introduced by Coven and Meyerowitz, which are displayed later on. After this section, the subject of aperiodic tiling canons (Vuza canons) is broached and linked to previous theorems. The special case of RTC having exactly two prime-powered cyclotomic factors, is then discussed. The last chapter focuses on tiling with superpositions, which enhances RTC with harmony and gives a new perspective on them. This dissertation provides a presentation of a full set of definitions and notations and demonstrates some fundamental properties. Then it endeavors to do a complete study of tiling patterns of the form  $\{0, 1, 2^k\}$ . Finally, it gives a constructive demonstration of what the pattern of entries looks like.

Keywords : rhythmic canons, tiling, modulo, Vuza canons, cyclotomic polynomials, Coven-Meyerowitz conditions.

## 2 Notations

Symbole	signification
$\mathbb{Z}$	anneau des entiers relatifs
$\mathbb{N}$	anneau des entiers naturels
$\mathbb{N}^*$	anneau des entiers naturels non nuls
$\mathbb{Z}_N$	anneau des entiers modulo $N$
$\mathbb{Q}$	corps des rationnels
$\mathbb{C}$	corps des complexes
$\mathbb{F}_p$	corps fini à $p$ éléments
$K$	corps quelconque
$A, B, C, D$	ensembles d'entiers
$A[X]$	ensemble des polynômes à coefficients dans $A$
$A[X]/P$	ensemble des polynômes à coefficients dans $A$ anneau quotienté par l'idéal engendré par le polynôme $P$
$\mathcal{P}(A)$	ensemble des parties de $A$
$\tilde{A}, A'$	transformés de $A$
$\overline{A}^k$	concaténé $k$ fois de $A$
$R_A$	ensemble des $d$ tel que le $d$ -ième polynôme cyclotomique divise $A$
$S_A$	ensemble des puissances premières de $R_A$
$A_{0-1}$	notation de $A$ par une suite de 0,1
$A[i]$	$i$ -ième élément de $A$
$\sharp A$	cardinal de $A$
$\mathbb{1}_A(n)$	fonction indicatrice de $A$
$A(X), B(X)$	polynômes associés au motif $A, B$
$F, G, H, R, Q(X)$	polynômes à coefficients entiers
$\deg F(X)$	degré de $F(X)$
$F_{\mathbb{F}_p}(X)$	projection de $F(X)$ dans $\mathbb{F}_p[X]$
$\Phi_d(X)$	$d$ -ième polynôme cyclotomique
$\phi$	fonction indicatrice d'Euler
$N, k, n, m, M, a, b$	entiers naturels
$p, q, r, s$	entiers premiers
$\xi$	complexe
$\overline{a}^k$	symbole $a$ concaténé $k$ fois
$T, V$	tableaux
$I_{d,p}$	ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré $d$ dans $\mathbb{F}_p[X]$
$\oplus$	opération de somme directe
$ $	relation d'ordre de divisibilité entre entiers ou polynômes
$\llbracket a, b \rrbracket$	ensemble des entiers entre $a$ et $b$

### 3 Introduction

Les propriétés qui font qu'un dessin pave le plan, et la construction de canons musicaux sont deux notions qui semblent fort éloignées, pourtant déjà Douglas Hofstadter dans [14] liait la notion de pavage graphique, avec les lithographies de M. C. Escher (figure 1), à celle de canon musical, en s'intéressant à l'Offrande Musicale de J. S. Bach (figure 2).

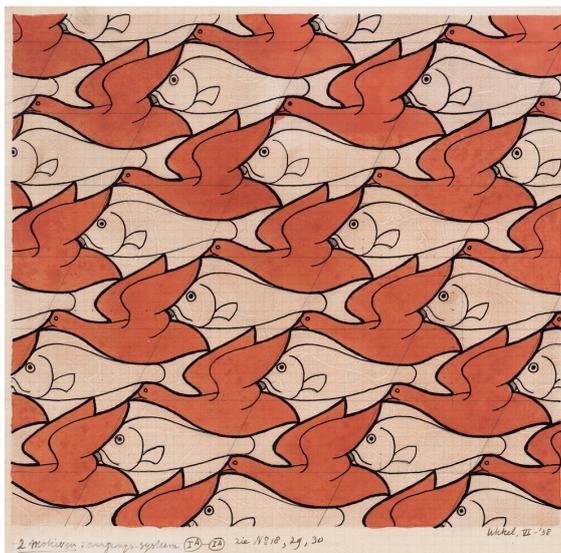


Figure 1 : Un pavage fond/forme de Escher.



Figure 2 : Canon "en crabe" de l'offrande musicale de Bach.

Ces deux artistes ont une approche mathématique de leur œuvre, qui permet une grande complexité d'un pavage 2D ou des constructions musicales riches en symétrie. La scientificité nécessaire à l'exploration toujours plus complexe des motifs ayant la propriété de remplissage de l'espace n'est cependant que superficielle dans ces cas, et l'art prime sur la rigueur.

Un canon rythmique mosaïque est un pavage par translation de l'espace du temps. La notion générale de canon musicale est très vaste, et on réduit notre modèle aux points d'attaque (*onsets*), et à leur translatées.

Ce modèle de canons rythmiques mosaïques a occupé la recherche "mathémusicale" depuis une quinzaine d'années ([5]) tandis que les constructions mathématiques sous-jacentes, comme la factorisation de groupes, étaient déjà

étudiées depuis les années 50 par toute une communauté de mathématiciens ([6]). Tout comme il est difficile de savoir quel dessin pavera l'espace 2D, comme sur la figure 1, savoir quel rythme par ses translatés remplira l'espace de temps par translation est toujours un problème ouvert. Le meilleur candidat à une CNS pour dire si un motif rythmique pave le temps est donné par les conditions de Coven et Meyerowitz dans [8].

C'est le mathématicien hongrois György Hajós qui le premier en 1949, en résolvant la conjecture de Minkowski dans [12], aborde la notion de factorisation de groupe cycliques fini. On le verra, ce problème est équivalent à celui de trouver les canons rythmiques mosaïques.

DeBruijn conjecture un an plus tard ([9]) que toutes les factorisations sont périodiques. Mais ceci est rapidement démontré comme faux ([13]). On parle alors de "bon groupe" (*good group* ou groupe de Hajós) lorsque toute factorisation est périodique, et de "mauvais groupe" (*bad group* ou groupe de non-Hajós) autrement. En quelques décennies les bons groupes sont tous trouvés.

Si  $p, q, r, s$  sont des premiers distincts, et  $a \in \mathbb{N}^*$ , on a montré dans les références précisées que les bons groupes sont les groupes cycliques finis de cardinal  $p^a$  ([12]),  $pq$ ,  $pqr$  ([19]),  $p^a q$  ([10]),  $p^2 q^2$ ,  $p^2 qr$  et  $pqrs$  ([20]), et seulement ceux là.

Depuis la recherche se concentre sur les canons non périodiques, dits *de Vuza* en l'honneur de Dan Tudor Vuza, mathématicien qui les a beaucoup étudiés ([22]). En effet, ils sont à la base de la compréhension des canons rythmiques mosaïques. Cependant leur grand nombre, et l'état actuel de notre capacité à créer des algorithmes pour leur exploration, font qu'ils sont très mal connus. L'algorithme actuellement le plus rapide ([16]) qui donne tous les canons de Vuza, à une période donnée et modulo certaines transformations, est exponentiel. Ceci est dû au fait que l'algorithme utilise la complétion d'un canon, et qu'il existe un nombre exponentiel de possibilités pour compléter un motif non périodique de façon non périodique. De nombreux efforts sont encore à faire dans ce domaine.

Il existe d'autres notions de pavages qui enrichissent le modèle de canons rythmiques mosaïques. Par exemple le pavage par rétrogradation ou augmentation. On voit dans l'Offrande Musicale que Bach ne se contente pas de traduire son thème, et, pour le canon en crabe par exemple, le fait parfois lire à l'envers, c'est à dire en utilisant une rétrogradation du motif de base. Tom Johnson bien plus tard a cherché à paver par augmentations et translations ([15]), mais une théorie mathématique des canons rythmiques mosaïques obtenus par augmentations d'un motif reste à établir.

Une dernière manière de remplir le temps est le pavage modulo  $p$  où  $p$  est premier, où l'on considère que le nombre de superpositions est calculé

modulo  $p$ . Ce modèle a été introduit très récemment par Amiot ([2]), et en plus d'enrichir les canons rythmiques par de la polyphonie, il apporte une nouvelle compréhension mathématique des canons.

Cependant, seules de rares pistes ont été explorées sur les canons modulo  $p$ , et on ne sait que trop peu comment ils fonctionnent. Je me suis penchée sur ce cas, en m'intéressant aux doublons, et suis arrivée à un nouveau résultat de cardinalité dans un cas particulier. L'exploration de ces canons modulo  $p$ , et le lien qu'ils ont avec les canons rythmiques mosaïques, ouvriront peut-être une voie pour explorer plus rapidement les canons de Vuza.

Ce mémoire commence par une présentation des définitions et notations utiles pour l'étude des canons rythmiques mosaïques. Un premier travail a été de faire une mise à jour des démonstrations, souvent absentes ou incomplètes, de nombreuses propriétés fondamentales pour leur compréhension. Elles sont souvent écrites dans ce rapport, afin qu'il devienne un outil pratique si quelqu'un souhaite reprendre mon travail.

Ensuite, ce rapport s'intéresse à la notion de canons non périodiques, puisqu'ils sont le fer de lance de la recherche sur le pavage temporel. Ils sont la solution d'une CNS sur la propriété de pavage d'un motif, et le rapport aborde ensuite ces conditions dites de Coven-Meyerowitz et l'état de démonstration de la conjecture.

Après un passage sur un cas particulier de canons contenant exactement deux facteurs cyclotomiques, le rapport se concentre sur le pavage modulo  $p$ . On a notamment un lien entre pavage modulo 2 et les canons de Vuza.

Ce mémoire se termine sur la démonstration d'un résultat nouveau sur les cardinalités de pavage modulo 2 d'un cas particulier, qui est pour le moment le seul résultat de dénombrement et qui promet de nombreuses ouvertures de recherche. Ces nouvelles perspectives, qui seront le point de départ d'un futur travail de thèse, seront détaillées dans la section de conclusion du mémoire.

## 4 Canons rythmiques mosaïques

### 4.1 Définition

Musicalement, un canon rythmique est un canon traditionnel où seul comptent les moments, qu'on appelle "points d'attaque" (*onsets*), où sont jouées les notes, et pas la hauteur. Nous parlerons alors indifféremment d'attaques, ou de notes. Nous nous limiterons non seulement aux canons rythmiques, mais aussi aux canons qui vérifient cette condition - assez forte - qui est mathématique et musicale : sur chaque temps on doit entendre une et une seule attaque. C'est la notion de *canon rythmique mosaïque*.

Pour formaliser la notion de rythme, nous supposerons que nous découpons le temps de la plus petite façon possible. Ainsi, une note ne peut être jouée que sur une pulsation, cette dernière sera modélisée par  $\mathbb{Z}$ , en suivant le modèle du rythme périodique introduit par Vuza dans [22]. On peut aussi supposer sans perte de généralité qu'un rythme fini commence toujours à être joué au temps 0.

**Définition 1.** Un motif rythmique  $A$  est une partie finie de  $\mathbb{N}$ , contenant 0.

**Exemple 1.** Si on suppose que notre pulsation est celle des noires, le motif  $A = \{0, 1, 4\}$  représentera le rythme :



Un canon rythmique sera obtenu si un motif rythmique et certaines de ses translatées  $A+t$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  pavent l'espace de temps. Si on note  $C$  l'ensemble des temps  $t$  sur lequel on commence à jouer le motif, la définition de canon rythmique mosaïque vient naturellement.

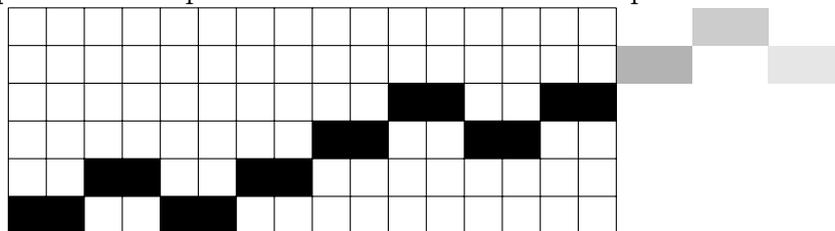
**Définition 2.** Un canon rythmique est un couple  $(A, C) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Z})$  tel que  $A \oplus C = \mathbb{Z}$ , où  $\oplus$  est la somme directe, et on peut supposer sans perte de généralité que  $0 \in A \cap C$ .

On dira que  $A$  est la voix principale,  $C$  celle des entrées.

**Exemple 2.**  $(A, C) = (\{0, 1, 4, 5\}, \{0, 2\} \oplus 8\mathbb{Z})$  est un canon rythmique.

Une façon simple de les représenter est sur une grille dont l'axe des abscisses représente le temps, celui des ordonnées l'ajout de voix. Une note  $a+c \in A \oplus C$  sera représentée par un carré en position  $(a+c, \text{indice de } c \text{ dans } C)$ . On voit que cela justifie l'appellation canon rythmique *mosaïque*.

**Exemple 3.** Une représentation du canon de l'exemple 2 sera :



(0, 0)

Le théorème suivant de périodicité permet de se limiter à une partie finie du canon, dont la suite infinie n'est qu'une répétition. On le voit sur le dessin précédent, et on comprend bien que la représentation sur la grille sera la répétition plus haut dans les ordonnées de la partie non grisée.

**Théorème 1** (de DeBruijn). *Si  $A$  est une partie finie de  $\mathbb{N}$  et s'il existe  $C \subset \mathbb{Z}$  tels que  $A \oplus C = \mathbb{Z}$ , alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  et  $B$  une partie finie (qu'on peut supposer être dans  $\mathbb{N}$  et qui contient 0) tels que  $C = B \oplus N\mathbb{Z}$ , et donc, en identifiant  $A, B$  par leur projection dans  $\mathbb{Z}_N$ , on a  $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$ . On dira alors que  $A$  pave  $\mathbb{Z}_N$  avec  $B$ .*

Les démonstrations proposées par Hajós et deBruijn étant insuffisantes, et celle de Lagarias et Wang trop générale, je propose ici une nouvelle preuve de ce résultat.

*Démonstration.*  $A$  étant fini, il existe  $d$  tel que  $A \subseteq \llbracket 0, d \rrbracket$  et  $A \not\subseteq \llbracket 0, d-1 \rrbracket$ . On note  $C_k = C \cap ]-\infty, k]$ .

On a alors que pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $A$  et  $C_k$  sont en somme directe et

$$\mathbb{Z} \cap ]-\infty, k] \subset A \oplus C_k \subset \mathbb{Z} \cap ]-\infty, k+d].$$

En effet, tout élément de  $\mathbb{Z} \cap ]-\infty, k]$  s'écrit comme la somme d'un élément  $a$  de  $A$  et d'un élément de  $C_k$ , car  $A \oplus C = \mathbb{Z}$ , et s'écrit de la forme  $a + b \leq k$  avec  $0 \leq a \leq d$ .

On note maintenant

$$D_k = ((A \oplus C_k) \cap \llbracket k, k+d \rrbracket) - k.$$

Bien sûr,  $D_k \in \mathcal{P}(\llbracket 0, d \rrbracket)$ , et on sait que  $\text{Card}(\mathcal{P}(\llbracket 0, d \rrbracket)) = 2^{d+1}$ , donc  $D_k$  est fini.

Or,  $D_k$  permet de reconstituer  $C_k$  :

En effet, on a

$$A \oplus C_k = (\mathbb{Z} \cap ]-\infty, k-d]) \cup (D_k + k).$$

Puis on peut déduire  $C_{k-1}$ , en notant  $m_k$  le plus grand élément de  $D_k$ , qui vaut

$$m_k = \max(A \oplus C_k) - \max(A) = \max(A \oplus C_k) - d.$$

On voit que  $C_{k-1}$  vaut  $C_k$  si  $m_k < k$ , ou vaut  $C_k \setminus \{k\}$  sinon. En itérant, on connaît la suite  $\dots, C_{k-2}, C_{k-1}, C_k$ . De même, en considérant le plus petit entier  $g_k$  qui n'est pas dans  $A \oplus C_k$ , on détermine  $C_{k+1}$  (qui vaut  $C_k \cup \{g_k\}$  si  $g_k = k + 1$ , ou  $C_k$  sinon).

On a donc qu'avoir  $C_k$  est équivalent à avoir  $D_k$ , et qu'avoir  $C_k$  permet d'obtenir  $C_{k-1}$  et  $C_{k+1}$ . Il existe donc une bijection  $\psi$  entre l'ensemble des valeurs prises par  $D_k$  et  $D_{k+1} = \psi(D_k)$ .

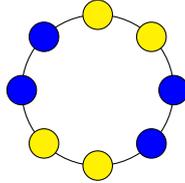
Comme la suite  $(D_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est récursive, et qu'elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, alors elle est périodique par le principe des tiroirs.

Ainsi, la suite  $C_k$ , qui lui est associée, est aussi périodique et de même période. Si on note  $N$  cette période, et qu'on note  $B = \llbracket 0, N - 1 \rrbracket \cap C$ , on a bien le résultat voulu.  $\square$

**Remarque 1.** Cette somme directe de groupes cycliques finis est la factorisation étudiée par Hajós qui a lancé l'étude des canons rythmiques mosaïques.

Ce théorème nous garantit que tout pavage des entiers avec un motif fini est périodique, ce qui permet aussi de représenter de façon circulaire les canons :

**Exemple 4.** Le canon  $(A, B) = (\{0, 1, 4, 5\}, \{0, 2\})$  peut se représenter ainsi :



**Remarque 2.** Si  $A \oplus B = \mathbb{Z}_N$ , alors  $B \oplus A = \mathbb{Z}_N$  et cela donne un nouveau canon. On appelle cette opération la *dualité*.

**Définition 3.** Un pavage est dit *compact* si  $(A, B)$  pavent exactement  $\llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ , c'est à dire si les projections dans  $\mathbb{Z}_N$  de  $A, B$  donnent

$$A \oplus B = \llbracket 0, N - 1 \rrbracket.$$

**Définition 4.** On note  $A(X)$  le polynôme associé à  $A \subset \mathbb{N}$  fini, défini par  $A(X) = \sum_{a \in A} X^a$ .

**Propriété 1.**  $(A, B)$  pavent  $\mathbb{Z}_N$  ssi

$$A(X) \times B(X) = 1 + X + \dots + X^{N-1} \text{ mod } (X^N - 1).$$

**Définition 5.** Soit  $A \subset \mathbb{N}$  fini. On peut noter ce motif de façon équivalente par une suite presque nulle  $A_{0-1}$  de  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{0-1}[n] = \mathbb{1}_A(n)$ , où  $\mathbb{1}_A$  est la fonction indicatrice de  $A$ . On notera de la même façon  $A_{0-1}$  toute suite finie de  $\{0, 1\}$  tronquée strictement après  $\max(A) + 1$ . Réciproquement, on dira que toute suite  $s$  finie, ou infinie presque nulle de  $0 - 1$  est associée à un motif  $A$  tel que  $A_{0-1} = s$ .

**Exemple 5.** Si  $A = \{0, 1, 4\}$  est un motif, on notera indifféremment  $A_{0-1} = 1100100000\dots$  et  $A_{0-1} = 11001$ .

**Remarque 3.** Si on doit écrire  $k$  fois le même chiffre dans une suite de  $0 - 1$  comme précédemment, on pourra noter  $\overline{0}^k$  plutôt que  $\underbrace{00\dots0}_{k \text{ fois}}$ .

**Définition 6.** Soit un motif  $A \subset \mathbb{N}$  fini et une suite quelconque finie, ou infinie presque nulle, de  $0 - 1$  qu'on associe à un  $B \subset \mathbb{N}$  fini tels que la somme  $A + B$  soit directe et  $0 \in A \cap B$ . Soit alors  $m$  l'indice du premier 0 (premier indice tel que  $(A + B)_{0-1}[m] \neq 1$ ) et  $M$  l'indice du dernier 1 (premier indice tel que  $(A + B)_{0-1}[M] \neq 0$ ). (Ces indices existent bien car  $A$  et  $B$  sont finis). On appelle *sous-pavage* la suite  $(A + B)_{0-1}[m, \dots, M]$  ou indifféremment cette suite à laquelle on a concaténé un nombre fini de 0 ou qu'on fait précéder d'un nombre strictement inférieur à  $m$  de 1.

**Exemple 6.** Si  $A = \{0, 1, 4\}$  et  $B = \{0, 5\}$ , alors on a  $A + B = \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$ , c'est à dire que  $(A + B)_{0-1} = 1100111001$  et on aura un sous-pavage qui sera  $00111001$ , ou avec une autre écriture on aura  $001110010000$ .

On peut comprendre cette notion de sous-pavage comme : que reste-il à paver, où dois-je ajouter le motif  $A$  pour "boucher" les trous = les 0? Cet outil technique introduit pour les besoins de ce mémoire permet de se concentrer sur les constructions restant à faire pour compléter un pavage.

**Définition 7.** Un canon  $(A, B)$  de  $\mathbb{Z}_N$  est dit périodique s'il existe  $0 < k < N$  tel que  $A + k = A$  ou  $B + k = B$ . Un canon est dit de Vuza s'il n'est pas périodique.

## 4.2 Périodicité

**Théorème 2.** *Il existe des canons de Vuza de  $\mathbb{Z}_N$  pour les  $N$  qui ne sont pas de la forme*

$$N = p^\alpha, N = p^\alpha q, N = p^2 q^2, N = pqr, N = p^2 qr, N = pqrs$$

où  $p, q, r, s$  sont des premiers distincts, et seulement pour ces  $N$ . Ces groupes  $\mathbb{Z}_N$  dans lesquels on ne peut pas trouver de canon de Vuza s'appellent groupes de Hajós ou bons groupes.

*Démonstration.* Montré dans [12], [19], [10], [20] et [22]. □

**Exemple 7.** Le plus petit mauvais groupe est  $\mathbb{Z}_{72}$  où on trouve ce canon de Vuza :  $A = \{0, 3, 6, 12, 23, 27, 36, 42, 47, 48, 51, 71\}$  qui pave avec  $B = \{0, 8, 10, 18, 26, 64\}$ .

**Définition 8.** Si  $A \subset \mathbb{N}$  pave  $\mathbb{Z}_N$ , on note  $\overline{A}^k = A \oplus \{0, N, 2N, \dots, (k-1)N\}$  son rythme concaténé  $k$  fois.

**Théorème 3** ([2]).  *$A$  pave  $\mathbb{Z}_N$  avec  $B$  ssi  $\overline{A}^k$  pave  $\mathbb{Z}_{kN}$  avec  $B$ .*

*Démonstration.*

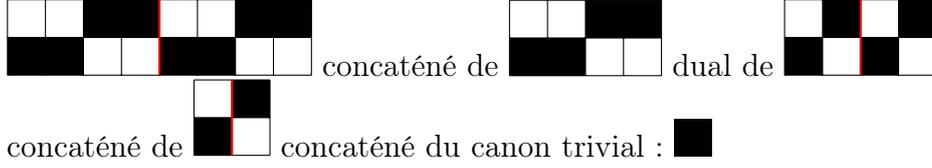
$$\begin{aligned} A \text{ pave } \mathbb{Z}_N \text{ avec } B &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_N, \exists!(a, b) \in A \times B \text{ tels que } n = a + b \\ &\Leftrightarrow \forall n_k \in \mathbb{Z}_{kN}, \exists!n, l \in \mathbb{Z}_N \times \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \text{ et} \\ &\quad \exists!(a, b) \in A \times B \\ &\quad \text{tels que } n_k = n + l * N \text{ et } n = a + b \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_{kN}, \exists!l \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket, \text{ et} \\ &\quad \exists!(a, b) \in (A + l * N) \times B \text{ tels que } n = a + b \\ &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{Z}_{kN}, \\ &\quad \exists!(a, b) \in (A \oplus \{0, N, 2N, \dots, (k-1)N\}) \times B \\ &\quad \text{tels que } n = a + b \\ &\Leftrightarrow \overline{A}^k \text{ pave } \mathbb{Z}_{kN} \text{ avec } B \end{aligned}$$

□

**Propriété 2.** *Tout canon peut être déduit par concaténation et dualité du canon trivial  $\{0\} \oplus \{0\}$  ou de canons de Vuza.*

*Démonstration.* Montré dans [3]. □

**Exemple 8.**  $\{0, 1, 4, 5\} \oplus \{0, 2\} = \mathbb{Z}_8$  est concaténé de  $\{0, 1\} \oplus \{0, 2\} = \mathbb{Z}_4$ , lui même concaténé de  $\{0, 1\} \oplus \{0\} = \mathbb{Z}_2$  concaténé du canon trivial.



**Remarque 4.** Cela donne une notion de minimalité par concaténation. Les canons de Vuza et le canon trivial sont irréductibles par concaténation, et représentent une "base" pour cette opération. Ils suffisent à comprendre les propriétés liées aux canons, comme nous le verrons plus tard.

Un outil utilisé pour l'étude des canons rythmiques est la transformée de Fourier discrète. La section ci-dessous vient de [4], où sont montrés les résultats, qui permettent d'obtenir une CNS de périodicité non triviale. Cette CNS est utilisée dans les algorithmes les plus rapides actuellement pour énumérer les canons de Vuza à une période donnée.

**Propriété 3.**

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_N \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \star \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{\mathbb{Z}_N},$$

où  $\mathbb{1}_A$  est la fonction caractéristique de l'ensemble  $A$ , et  $\star$  est le produit de convolution défini par  $(f \star g)(n) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} f(k)g(n-k)$ .

**Propriété 4.** En notant  $\hat{f} : x \mapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}_N} f(k)e^{-2i\pi k/N}$  la transformée de Fourier discrète de  $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_N}$ , alors on a  $f \star g = \hat{f} \times \hat{g}$ .

Le produit de convolution étant long à calculer, l'outil de la transformée de Fourier discrète semble toute indiqué pour l'étude des canons rythmiques.

**Définition 9.** Si  $A \subset \mathbb{N}$  fini, on note  $Z_A = \left\{ k \in \mathbb{Z}_N, \widehat{\mathbb{1}_A}(k) = 0 \right\}$ , l'ensemble des zéros de la transformée de Fourier de la fonction caractéristique de  $A$ .

**Propriété 5.**  $A \oplus B = \mathbb{Z}_N \Leftrightarrow Z_A \cup Z_B = \mathbb{Z}_N \setminus \{0\}$  et  $\#A \times \#B = N$ .

**Propriété 6.** Si  $A \subset \mathbb{N}$  fini, si  $x \in Z_A$ , alors  $Z_A$  contient tous les éléments du groupe  $(\mathbb{Z}_N, +)$  du même ordre que  $x$ , c'est à dire les  $kx$  avec  $k \wedge N = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}_N$ .

On obtient alors la CNS sur la caractérisation de périodicité :

**Propriété 7.**  $A$  est périodique dans  $\mathbb{Z}_N$  ssi le complémentaire de  $Z_A$  est inclus dans un sous-groupe de  $\mathbb{Z}_N$ .

**Remarque 5.** Cette propriété est utilisée en pratique dans les algorithmes pour trouver tous les canons de Vuza de  $\mathbb{Z}_N$  pour un  $N$  donné, comme par exemple l'algorithme de Kolountzakis et Matolcsi ([16]), qui leur permet de trier et d'éliminer rapidement des motifs qui seront périodiques.

## 5 Conditions de Coven-Meyerowitz

Par la propriété 1, on sait que lancer les attaques du motif  $A$  aux entrées  $B$  revient à faire une multiplication polynômiale :  $P_{A \oplus B} = P_A \cdot P_B$ , et que la notion de pavage de  $\mathbb{Z}_N$  revient à obtenir

$$P_A \cdot P_B = 1 + X + X^2 + \dots + X^{N-1} = \frac{X^N - 1}{X - 1} \pmod{(X^N - 1)}.$$

L'anneau  $\mathbb{Z}[X]/(X^N - 1)$  est donc un lieu privilégié où étudier les canons rythmiques mosaïques.

### 5.1 Polynômes cyclotomiques

Ces polynômes, qui ont pour racines les racines primitives de l'unité, comme  $X^N - 1$ , sont en lien direct avec notre problème.

**Définition 10.** Soit  $d$  entier non nul, le  $d$ -ième polynôme cyclotomique  $\Phi_d$  est le polynôme unitaire dont les racines sont exactement les racines primitives  $d$ -ièmes de l'unité, i.e. :

$$\Phi_d = \prod_{\substack{k \leq d \\ k \wedge d = 1}} \left( X - e^{2i\pi \frac{k}{d}} \right).$$

**Propriété 8.**  $X^N - 1 = \prod_{d|N} \Phi_d(X)$

*Démonstration.* Cela repose sur le fait que les racines de  $X^N - 1$  sont les racines  $N$ -ièmes de l'unité et que

$$\left\{ \frac{k}{d}, k \leq d, k \wedge d = 1, d|N \right\} = \left\{ \frac{k}{N}, k \leq N \right\}$$

□

**Propriété 9.**  $\Phi_d$  est à coefficients entiers et de degré  $\phi(d)$  où  $\phi$  est la fonction indicatrice d'Euler.

*Démonstration.* Par définition de l'indicatrice d'Euler, il y a exactement  $\phi(d)$  racines primitives  $d$ -ième de l'unité.

**Lemme 1.** Soit  $A$  anneau commutatif unitaire intègre et  $K$  un corps contenant  $A$ . Soit  $F, G \in A[X]$  tel que  $G$  soit unitaire, et qu'il existe un  $H \in K[X]$  vérifiant  $GH = F$ . Alors  $H \in A[X]$

*Démonstration.* Comme  $G$  est unitaire, on peut faire la division euclidienne de  $F$  par  $G$  dans  $A[X]$ . On a  $F = GQ + R$  avec  $Q, R \in A[X]$  et  $\deg R < \deg G$ . Cette division euclidienne est bien entendu celle dans  $K[X]$ . Or dans un anneau, la division euclidienne est unique donc  $R = 0$  et  $Q = H \in A[X]$   $\square$

Montrons le résultat par récurrence sur  $d$ .  $\Phi_1(X) = X - 1$  est à coefficients entiers, et on peut écrire

$$\Phi_d(X) \prod_{k|d, k \neq d} \Phi_k(X) = X^d - 1.$$

Par hypothèse de récurrence sur les  $k < d$ ,  $\prod_{k|d, k \neq d} \Phi_k(X) \in \mathbb{Z}[X]$ , ainsi que  $X^d - 1$ . Par le lemme 1 avec  $A = \mathbb{Z}$  et comme  $\prod_{k|d, k \neq d} \Phi_k(X)$  est bien unitaire, alors  $\Phi_d$  est à coefficients entiers.  $\square$

**Remarque 6.** Cette propriété et la précédente permettent d'avoir aussi ce résultat classique  $N = \sum_{d|N} \phi(d)$ .

**Propriété 10.**  $\Phi_d(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } d = 1 \\ p & \text{si } d = p^a, p \text{ premier}, a \in \mathbb{N}^* \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

*Démonstration.* Pour  $d = 1$ , on a  $\Phi_1(X) = X - 1$ .

Pour les autres cas, montrons le de manière récursive sur le nombre de facteurs premiers de  $d$ .

Si  $d = p$  premier, on a

$$\Phi_p(X) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = 1 + X + \dots + X^{p-1}$$

soit  $\Phi_p(1) = p$ .

Si  $d = p^a$ ,  $a \geq 2$  on peut écrire  $\Phi_{p^a}(X) = 1 + X^{p^{a-1}} + X^{2p^{a-1}} + \dots + X^{p^a}$  et donc  $\Phi_{p^a}(1) = p$ .

Dans le cas général, si  $N = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ , on a

$$1 + X + \dots + X^{N-1} = \prod_{d|N, d>1} \Phi_d(X),$$

soit si on évalue en 1,  $N = \prod_{d|N, d>1} \Phi_d(1)$ . Les termes  $d$  étant une puissance première font apparaître dans la décomposition de  $N$  les  $p_i^{a_i}$ , donc les autres termes sont nécessairement égaux à 1.  $\square$

**Propriété 11.** *Tout polynôme cyclotomique est irréductible sur  $\mathbb{Z}[X]$ .*

*Démonstration.* Commençons par rappeler que dans  $\mathbb{F}_p[X]$ , on a le morphisme de Frobenius qui permet d'écrire  $P(X^p) = (P(X))^p$ , car les coefficients binomiaux " $k$  parmi  $p$ " provenant de la formule de Newton sont divisibles par  $p$ .

Si  $\xi$  est une racine primitive  $d$ -ième de l'unité dans  $\mathbb{C}$  montrons que le degré de l'extension  $\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q}$  est exactement  $\phi(d)$ . Il s'agit de montrer que pour toute autre racine primitive  $d$ -ième de l'unité  $\xi'$ , le polynôme minimal de  $\xi'$  sur  $\mathbb{Q}$  coïncide avec celui de  $\xi$ .

Comme  $\xi'$  est de la forme  $\xi^n$  avec  $n$  produit de facteurs premiers ne divisant pas  $d$ , on peut se ramener au cas  $\xi' = \xi^p$  où  $p$  premier ne divise pas  $d$ . Soit  $f, g$  les polynômes minimaux de  $\xi$  et  $\xi'$  sur  $\mathbb{Q}$ .

Supposons par l'absurde qu'ils sont différents. Ils sont alors deux facteurs irréductibles distincts de  $\Phi_d$ , et donc il existe un polynôme  $h$  tel que  $\Phi_d(X) = f(X)g(X)h(X)$ . Par le lemme 1 et les résultats déjà obtenu sur  $\Phi$ ,  $f, g, h$  sont à coefficients entiers et unitaires. Comme  $g(\xi') = g(\xi^p) = 0$ , il existe un polynôme  $k$  (aussi unitaire et à coefficients entiers) tel que  $g(X^p) = f(X)k(X)$ .

Si on regarde ces résultats dans  $\mathbb{F}_p[X]$ , et en notant  $P_{\mathbb{F}_p}$  l'image du polynôme  $P \in \mathbb{Z}[X]$  projeté dans  $\mathbb{F}_p[X]$ , on a

$$f_{\mathbb{F}_p}(X)g_{\mathbb{F}_p}(X)|\Phi_{d,\mathbb{F}_p}(X) \text{ et } f_{\mathbb{F}_p}(X)|g_{\mathbb{F}_p}(X^p) = (g_{\mathbb{F}_p}(X))^p.$$

Tout facteur irréductible de  $f_{\mathbb{F}_p}(X)$  divise donc  $(g_{\mathbb{F}_p}(X))^p$  et donc aussi  $g_{\mathbb{F}_p}(X)$ , et alors son carré divise  $\Phi_{d,\mathbb{F}_p}(X)$ , ce qui contredit le fait que ce polynôme est à racines simples.

Ainsi, on a  $[\mathbb{Q}(\xi) : \mathbb{Q}] = \phi(d) = \deg(\Phi_d)$ , et  $\Phi_d$  est bien irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$ , et donc dans  $\mathbb{Z}[X]$  car à coefficients entiers, comme tout polynôme à coefficients entiers et irréductible dans  $\mathbb{Q}[X]$  est aussi irréductible dans  $\mathbb{Z}[X]$ .  $\square$

## 5.2 Facteurs cyclotomiques d'un motif $A$

Comme  $A$  pave ssi  $P_A \cdot P_B = \frac{X^N - 1}{X - 1} \pmod{(X^N - 1)}$  et que les diviseurs à coefficients entiers de  $X^N - 1$  sont des polynômes cyclotomiques, intéressons nous aux diviseurs cyclotomiques de  $A$ .

**Définition 11.** Soit  $A \subset \mathbb{N}$  un motif rythmique, on note  $R_A = \{d \in \mathbb{N}, \Phi_d | P_A\}$ , et  $S_A = \{p^a \in R_A, p \text{ premier}\}$ .

**Propriété 12.** Soit  $A, A'$  deux motifs qui pavent  $\mathbb{Z}_N$  avec  $B$ . Alors

1.  $R_A \cup R_B = R_{\mathbb{Z}_N}$
2.  $S_A \cup S_B = S_{\mathbb{Z}_N}$

$$3. S_A \cap S_B = \emptyset$$

$$4. S_A = S_{A'}$$

*Démonstration.* Par définition du pavage, il existe un polynôme  $Q \in \mathbb{Z}[X]$  tel que  $P_A \cdot P_B = 1 + X + \dots + X^{N-1} + Q \cdot (X^N - 1)$ . Donc si un facteur cyclotomique  $\Phi_p$  divise  $1 + X + \dots + X^{N-1}$ , alors il divise  $X^N - 1 = (1 + X + \dots + X^{N-1})(X - 1)$  et donc  $P_A \cdot P_B$ , et réciproquement. Ainsi  $R_{A \oplus B} = R_{\mathbb{Z}_N}$ , et on a de même  $S_{A \oplus B} = S_{\mathbb{Z}_N}$ .

Remarquons également que  $X - 1 \notin R_A$  car  $0 \in A$  et donc  $A(X)$  a un terme constant non nul.

1. Soit  $\Phi_d$  un facteur cyclotomique de  $P_{\mathbb{Z}_N}$ , comme il est irréductible, il divise soit  $P_A$  soit  $P_B$ , et appartient donc à  $R_A \cup R_B$ . Réciproquement, tout facteur de  $P_A$  ou de  $P_B$  est facteur de  $P_A \cdot P_B$ , et donc  $R_A \cup R_B \subset R_{A \oplus B} = R_{\mathbb{Z}_N}$ .
2. De même en se limitant aux facteurs cyclotomiques de puissance première.
3. On a  $\mathbb{Z}_N(X) = \prod_{d \in R_{\mathbb{Z}_N}} \Phi_d$ . Si on note

$$P_A = Q_A \cdot \prod_{d \in R_A} \Phi_d \text{ et } P_B = Q_B \cdot \prod_{d \in R_B} \Phi_d$$

alors on a, évalué en 1, les égalités :

$$\begin{aligned} \prod_{q^k \in S_{\mathbb{Z}_N}} q &= P_A(1) \cdot P_B(1) \\ &= \left( \prod_{q^k \in S_A} q \right) \left( \prod_{q^k \in S_B} q \right) Q_A(1) Q_B(1) \\ &= \left( \prod_{q^k \in S_A \cup S_B} q \right) \left( \prod_{q^k \in S_A \cap S_B} q \right) Q_A(1) Q_B(1) \\ &= \left( \prod_{q^k \in S_{\mathbb{Z}_N}} q \right) \left( \prod_{q^k \in S_A \cap S_B} q \right) Q_A(1) Q_B(1) \end{aligned}$$

Donc  $\prod_{q^k \in S_A \cap S_B} q = 1$ , c'est à dire  $S_A \cap S_B = \emptyset$

4. On a alors facilement

$$\begin{aligned}
S_A &= (S_{\mathbb{Z}_N} \setminus S_B) \cup (S_A \cap S_B) \\
&= S_{\mathbb{Z}_N} \setminus S_B \\
&= (S_{\mathbb{Z}_N} \setminus S_B) \cup (S_{A'} \cap S_B) \\
&= S_{A'}
\end{aligned}$$

□

On utilise ce dernier point pour les algorithmes d'exploration de Canon de Vuza, en travaillant avec des  $S_A$  et  $S_B$  donnés, et en prenant toutes les partitions de deux parties de  $S_{\mathbb{Z}_N}$

### 5.3 Conditions de Coven Meyerowitz

Ce lien entre canons rythmiques et polynômes cyclotomiques donne des conditions pour savoir si un motif pavera ou pas.

**Définition 12.** Soit  $A \subset \mathbb{N}$ , on appelle conditions de Coven-Meyerowitz les trois conditions suivantes :

- ( $T_0$ ) :  $A$  pave
- ( $T_1$ ) :  $A(1) = \prod_{p^\alpha \in S_A} p$
- ( $T_2$ ) : Si  $p_1^\alpha, p_2^\beta, \dots, p_r^\gamma \in S_A$  alors  $p_1^\alpha \cdot p_2^\beta \cdot \dots \cdot p_r^\gamma \in R_A$  où  $p_i$  premiers distincts.

**Théorème 4** (Coven-Meyerowitz [8]).

1. ( $T_0$ )  $\Rightarrow$  ( $T_1$ )
2. ( $T_1$ )  $\wedge$  ( $T_2$ )  $\Rightarrow$  ( $T_0$ )
3. Si  $\#A$  a au plus deux facteurs premiers, alors ( $T_0$ )  $\Rightarrow$  ( $T_1$ )  $\wedge$  ( $T_2$ )

Ce théorème donne de gros espoirs d'obtenir une CNS sur un motif pour savoir s'il pave. Néanmoins, dans certains cas particuliers – comme le troisième point du théorème de Coven-Meyerowitz ([8]) – on a cette CNS. Par exemple lorsque  $A$  pave un groupe de Hajós, ou admet un pavage compact, c'est à dire de  $\llbracket 0, N - 1 \rrbracket$ .

### 5.4 Retour à la périodicité

Il existe un lien fort entre canon de Vuza et les concepts utilisés par Coven et Meyerowitz.

**Définition 13.** Soit  $k|N \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $M_{N,k}(X)$  le  $(N, k)$ -ième polynôme métronomique par

$$M_{N,k}(X) = 1 + X^k + X^{2k} + \dots + X^{N-k} = \frac{X^N - 1}{X^k - 1} = \prod_{d|N, d \nmid k} \Phi_d$$

**Lemme 2.**  $A \in \mathbb{N}$  pavanant  $\mathbb{Z}_N$  est périodique de période  $k | N$  ssi  $A(X)$  est divisible par  $M_{N,k}(X)$ .

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} A + k = A &\Leftrightarrow X^k A(X) = A(X) \pmod{X^N - 1} \\ &\Leftrightarrow X^N - 1 \mid (X^k - 1)A(X) \\ &\Leftrightarrow M_{N,k}(X) \mid A(X). \end{aligned}$$

□

**Propriété 13.**  $A$  est apériodique ssi pour tout diviseur propre  $k$  de  $N$ , il manque dans  $R_A$  un des diviseurs de  $N$  qui ne divise pas  $k$ .

Réciproquement,  $A$  est périodique de période  $k$  ssi  $R_A$  contient tous les diviseurs de  $N$  qui ne sont pas diviseurs de  $k$ .

*Démonstration.*  $A$  est apériodique ssi il n'est pas périodique de période  $k$  pour tout diviseur propre  $k$  de  $N$  ssi  $M_{N,k}$  est absent de la factorisation de  $A(X)$  pour tout  $k$  ssi il manque dans  $R_A$  un des diviseurs de  $N$  qui ne divise pas  $k$  pour tout  $k$ . □

**Propriété 14.** [3] Les transformations de concaténation et de dualité conservent la condition  $(T_2)$ .

*Démonstration.* C'est évident pour la dualité, montrons le pour la concaténation.

Si  $A$  pave  $\mathbb{Z}_N$  et vérifie  $(T_2)$ , on note  $\overline{A}^k = A \oplus \{0, N, \dots, (k-1)N\}$  son concaténé.

On a alors

$$\begin{aligned} \overline{A}^k(X) &= A(X) + X^N A(X) + \dots + X^{(k-1)N} \\ &= A(X) \frac{X^{kN} - 1}{X^N - 1} \\ &= A(X) M_{kN, N}(X) \end{aligned}$$

Donc les facteurs cyclotomiques de  $\overline{A}^k(X)$  sont ceux de  $A(x)$  et les  $\Phi_d$ , tels que  $d | kN$  et  $d \nmid N$ .

Le seul problème reste de savoir si  $(p^a \in S_A \text{ et } q^b \in S_{M_{kN,N}}) \Rightarrow p^a q^b \in R_{\overline{A}^k}$  car on sait déjà que les deux facteurs vérifient  $(T_2)$ .

Or comme  $A$  pave  $\mathbb{Z}_N$ ,  $\forall p^a \in S_A$ ,  $p \mid N$ , donc  $p^a q^b \mid kN$ , donc

$$\Phi_{p^a q^b} \mid M_{kN,N}(X) \mid \overline{A}^k(X)$$

□

**Théorème 5.** [2]  $(T_0) \Rightarrow (T_2)$  pour tous les canons ssi  $(T_0) \Rightarrow (T_2)$  pour les canons de Vuza.

Ce qui implique qu'on a une CNS de pavage des motifs rythmiques ssi on l'a pour les canons de Vuza.

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate des propriétés 2 et 14. □

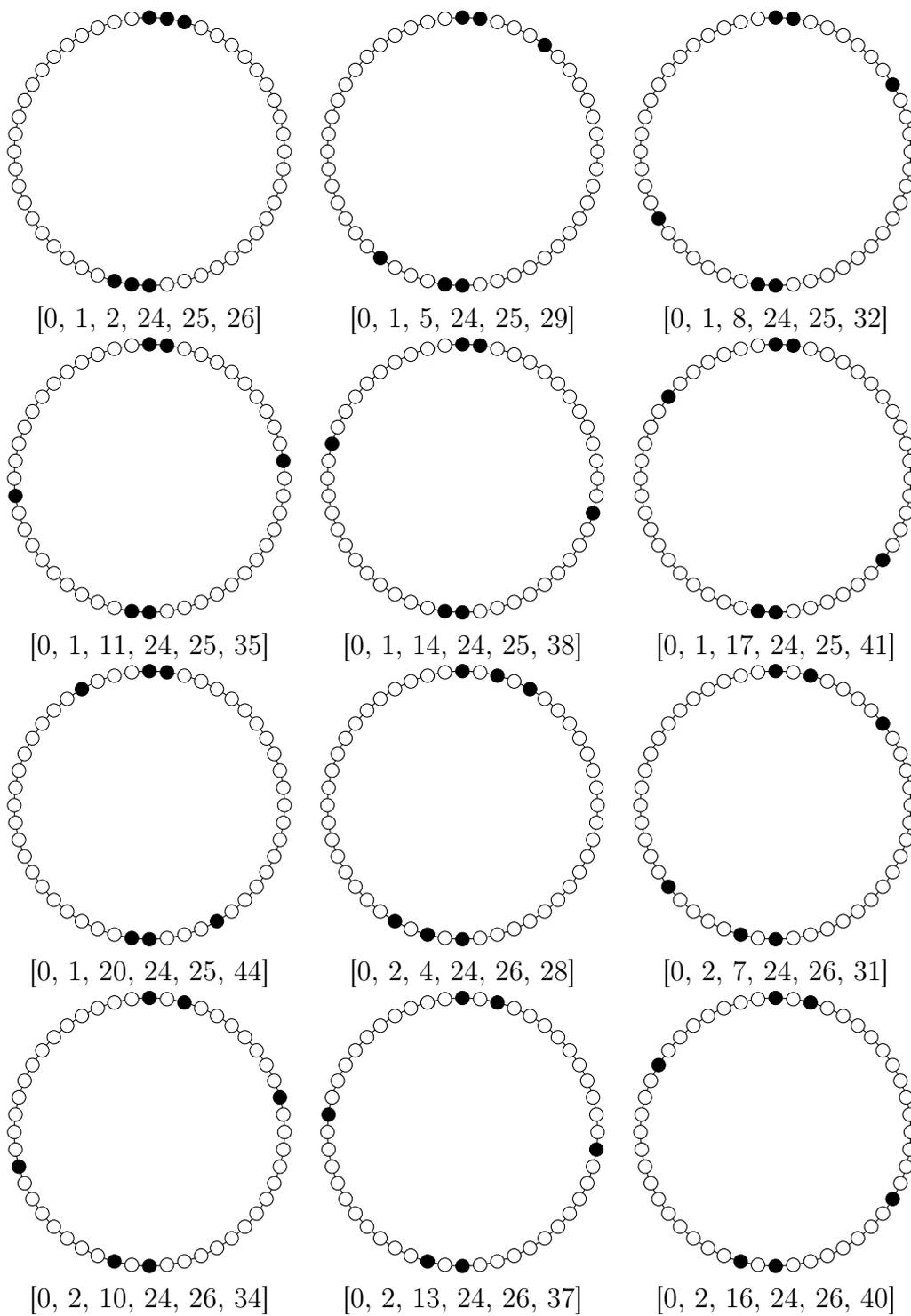
## 5.5 Le cas particulier $S_A = \{p^a, q^b\}$

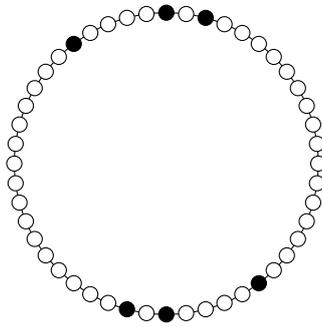
Je me suis intéressée, avant de trouver leur résolution dans [8], au cas particulier des motifs  $A$  tels que  $S_A = \{p^a, q^b\}$ .

Ils sont mathématiquement intéressants car on sait qu'ils pavent ssi ils vérifient  $(T_1) \wedge (T_2)$ , et on peut implémenter (cf annexe 1) l'obtention de tous ces canons en utilisant cette CNS.

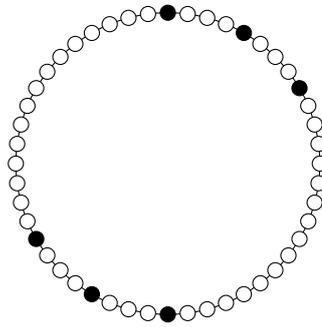
Musicalement aussi : obtenir tous ces canons donne des pavages, à une période  $N$  donnée, qui s'étendent du motif le plus compact possible, au plus étendu possible.

Par exemple, dans le cas  $N = 2^4 \times 3$ , l'ensemble des motifs  $A$  qui pavent  $\mathbb{Z}_N$  tels que  $S_A = \{2^4, 3\}$  sont dessinés en représentation circulaire ci-dessous :

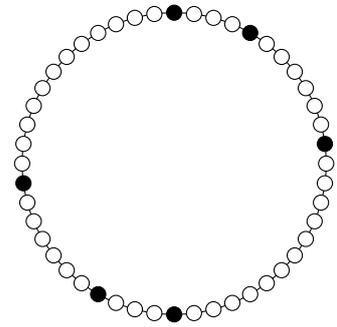




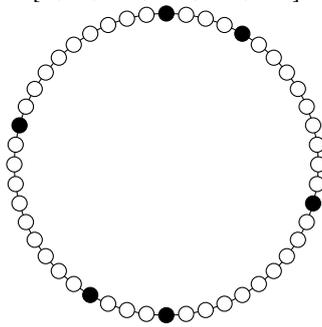
[0, 2, 19, 24, 26, 43]



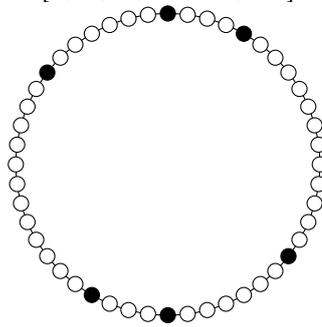
[0, 4, 8, 24, 28, 32]



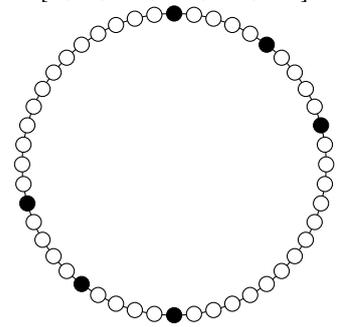
[0, 4, 11, 24, 28, 35]



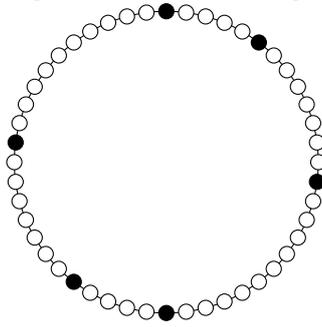
[0, 4, 14, 24, 28, 38]



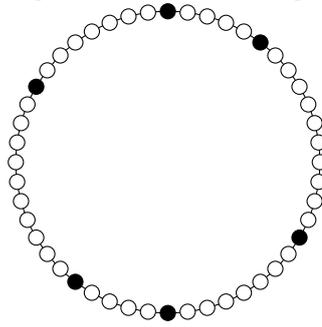
[0, 4, 17, 24, 28, 41]



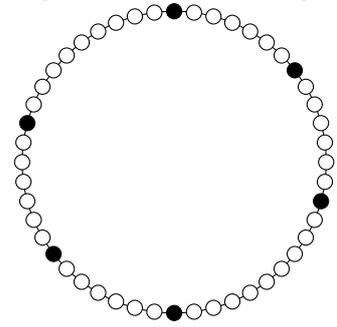
[0, 5, 10, 24, 29, 34]



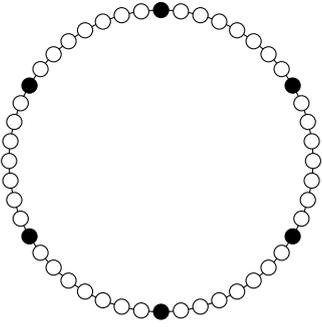
[0, 5, 13, 24, 29, 37]



[0, 5, 16, 24, 29, 40]



[0, 7, 14, 24, 31, 38]



[0, 8, 16, 24, 32, 40]

Mais à la fin de [8], on a la

**Propriété 15.** *L'ensemble des motifs  $A$  qui paivent et tels que  $S_A = \{p^a, q^b\}$  sont ceux de cette forme :*

$$A = p^{a-1} \left( \tilde{A} \oplus pq^{b-1} \{0, 1, \dots, q-1\} \right)$$

où  $\tilde{A} \subseteq \{0, \dots, pq^{b-1} - 1\}$  est un ensemble complet des résidus modulo  $p$  contenant 0, c'est à dire que  $\tilde{A}$  projeté dans  $\mathbb{Z}_p$  vaut  $\{0, 1, \dots, p-1\}$ ; ou de la forme d'un ensemble analogue en inversant les rôles de  $p$  et  $q$ , c'est à dire

$$A = q^{b-1} \left( \tilde{A} \oplus qp^{a-1} \{0, 1, \dots, p-1\} \right)$$

avec  $\tilde{A} \subseteq \{0, \dots, qp^{a-1} - 1\}$  qui soit un ensemble complet des résidus modulo  $q$  contenant 0.

J'avais quant à moi remarqué des petites propriétés qui étaient des sous-cas de celle-ci.

Par exemple, et on le voit bien sur les exemples dessinés ci-dessus, que dans le cas  $S_A = \{p^a, q\}$ , on avait des sous motifs de  $q$  notes répétés  $p$  fois. Ce qui est encore une fois très intéressant musicalement. Ces canons n'étant évidemment pas Vuza, car  $\sharp A$  n'a que 2 facteurs premiers (cf. théorème 2), on a alors  $A$  qui est de période  $\frac{N}{p}$ .

Aussi, dans le sous cas  $S_A = \{2^a, 3\}$ , j'avais obtenu la même formule que celle rappelée dans la propriété 15 ci-dessus.

## 6 Pavage modulo $p$

De nombreuses propriétés sur les canons se font par la notation polynomiale (par exemple les conditions de Coven-Meyerowitz du théorèmes 4), et comme on l'a vu, il est pratique de les étudier dans l'anneau  $\mathbb{Z}[X]/(X^N - 1)$ . Cependant il n'est pas factoriel, sinon la propriété 1 réglerait facilement le problème de trouver tous les canons, en effet, on chercherait toutes les factorisations qui donnerait un motif non périodique, puis on pourrait vérifier que ces motifs satisfont  $(T0) \Rightarrow (T2)$  et on aurait une CNS de pavage par la propriété 5.

Cette propriété 1 donne l'idée, introduite dans [2], de travailler sur l'ensemble  $\{0, 1\}[X]$  des polynômes à coefficients 0 ou 1, mais celui-ci n'est pas un anneau. On travaille alors sur  $\mathbb{F}_2[X]$  pour avoir

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_2[X] \times \mathbb{F}_2[X] &\longrightarrow \mathbb{F}_2[X] \\ (A, B) &\longmapsto A \times B \end{aligned}$$

et la notion de pavage revient à la divisibilité de  $1 + X + \dots + X^{N-1}$  par  $A(X) \bmod (X^N - 1, 2)$ .

On peut alors étendre cette idée à  $\mathbb{F}_p[X]$ , avec  $p$  premier.

La notion de pavage modulo  $p$  se formalise de manière quasiment identique à celle de pavage classique.

**Définition 14** ([2]).  $(A, B) \in \mathbb{N}^2$  pave  $\mathbb{Z}_N$  modulo  $p$  ssi

$$A(X) \times B(X) = 1 + X + \dots + X^{N-1} \bmod (X^N - 1, p).$$

Cette notion, en plus d'être intéressante mathématiquement, car elle permet de n'avoir que des sommes directes, l'est musicalement. Elle enrichit la notion de canon en autorisant les superpositions de notes et permet d'avoir de l'harmonie. Le morceau Wave<sup>1</sup>, du groupe Pantha du Prince and the Bell Laboratory fait penser à ce qu'on pourrait obtenir avec ces canons, même si les musiciens ne se sont sans doute pas inspirés de la théorie des canons modulo  $p$  trop peu popularisée.

**Définition 15.** On peut adapter la notation  $0-1$  pour le pavage modulo  $p$  en considérant un multienemble  $C$  de  $\mathbb{N}$  fini. On note ce multienemble de façon équivalente par une suite presque nulle  $C_{0-p}$  de  $\{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $C_{0-p}[n] = \mathbf{1}_C(n)$ , où  $\mathbf{1}_C$  est la fonction indicatrice multienemble de  $C$ . On notera de la même façon  $C_{0-p}$  toute suite finie de  $\{0, \dots, p-1\}$  tronquée strictement après  $\max(C)$ . Réciproquement, on dira que toute suite  $s$  finie, ou infinie presque nulle de  $\{0, \dots, p-1\}$  est associée à un multienemble  $C$  tel que  $C_{0-p} = s$ . On parlera de notation  $0-p$ .

1. <http://www.youtube.com/watch?v=7Q3usGBLi6I>

**Définition 16.** Soit un motif  $A \subset \mathbb{N}$  fini et une suite quelconque finie, ou infinie presque nulle, de 0–1 qu'on associe à un  $B \subset \mathbb{N}$  fini tels que  $0 \in A \cap B$ . La notion de sous-pavage modulo  $p$  s'adapte ainsi : soit alors  $m$  le plus petit indice tel que  $(A + B)_{0-p}[m] \not\equiv 1 \pmod{p}$  et  $M$  le plus grand indice tel que  $(A + B)_{0-p}[M] \equiv 0$ . (Ces indices existent bien car  $A$  et  $B$  sont finis). On appelle sous-pavage la suite à valeur dans  $\{0, \dots, p-1\}$ ,  $C[m, \dots, M]$ , tel que  $C[i]$  congru à  $\#\{a + b = i, (a, b) \in A \times B\}$  modulo  $p$ , ou indifféremment cette suite à laquelle on a concaténé un nombre fini de 0 ou qu'on fait précéder d'un nombre  $n$  strictement plus petit que  $m$  de 1. On dira que le sous-pavage commence à l'indice  $m - n$ .

**Exemple 9.** Si  $A = \{0, 1, 3\}$  et  $B = \{0, 2, 4\}$ , alors

$$A + B = \{0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 7\},$$

et un sous-pavage modulo 3 est 2112101.

**Remarque 7.** Si  $p = 2$ , alors les notions de notation 0–2 et de sous-pavage modulo 2 sont confondues avec celles de notation 0–1 et de sous-pavage.

**Définition 17.** On parle de *remplir* un sous-pavage modulo  $p$   $\widetilde{A}_{0-1}$  qui commence à l'indice  $i$  et de taille  $n$  par un ensemble d'entrées  $\widetilde{B}$  avec le motif  $A$  si  $(A + \widetilde{A} + \widetilde{B})_{0-p}[i, \dots, i + n] = \overline{1 \pmod{p}^n}$ .

**Exemple 10.** Si on a le sous-pavage 1001 modulo 2 qu'on veut remplir avec le motif  $A(2) = \{0, 1, 4\}$ , alors on pourra le remplir avec les entrées  $B_{0-1} = 1010$ . Pour une représentation graphique de cette notion, voir l'étape 3' dans l'exemple 11 suivant).

**Définition 18.** Lorsqu'on a rempli le sous-pavage  $\widetilde{A}_{0-1}$  qui commence à l'indice  $i$  et de taille  $n$  en ajoutant les entrées  $\widetilde{B}'_{0-1}$  de taille  $n$  aux entrées  $B$  déjà utilisées pour paver jusqu'à l'indice  $i$  avec le motif  $A$ , on appelle *sous-pavage suivant*  $\widetilde{B}'_{0-1}$  un sous-pavage de  $(B \cup \widetilde{B}') + A + \widetilde{A}$ .

**Définition 19.** Un pavage modulo  $p$  est dit compact si  $(A, B) \subset \mathbb{N}^2$  pavent exactement  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$  modulo  $p$ .

**Théorème 6.** Soit  $p$  premier,  $P \in \mathbb{F}_p[X]$  tel que  $P(0) \neq 0$ , alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $P$  divise  $X^N - 1$ .

*Démonstration.*

**Lemme 3.** On note  $I_{d,p}$  l'ensemble des polynômes irréductibles unitaires de degré  $d$  dans  $\mathbb{F}_p[X]$ . Alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$X^{p^n} - X = \prod_{d|n} \prod_{P \in I_{d,p}} P.$$

*Démonstration.* Pour commencer, remarquons que dans  $\mathbb{F}_p[X]$  la dérivée du polynôme  $X^{p^n} - X$  vérifie

$$(X^{p^n} - X)' = -1$$

donc ce polynôme n'a pas de facteur irréductible multiple. On va donc montrer que si  $d$  divise  $n$  alors tous les éléments de  $I_{d,p}$  divisent  $X^{p^n} - X$  et réciproquement que tout polynôme irréductible qui divise  $X^{p^n} - X$  a un degré qui divise  $n$ .

Soit  $P \in I_{d,p}$  tel que  $d|n$ . On note  $K = \mathbb{F}_p[X]/(P)$  le corps de rupture de  $P$  sur  $\mathbb{F}_p$ . On note  $\alpha$  l'image de  $X$  dans  $K$ , ainsi  $K = \mathbb{F}_p(\alpha)$ .  $P$  est irréductible de degré  $d$  donc  $[K : \mathbb{F}_p] = d$  et  $K = \mathbb{F}_{p^d}$ . On obtient donc  $\alpha^{p^d} = \alpha$  et comme  $d|n$  par récurrence on a  $\alpha^{p^n} - \alpha = 0$  c'est à dire  $P$  divise  $X^{p^n} - X$  dans  $\mathbb{F}_p[X]$ .

Réciproquement, soit  $P \in \mathbb{F}_p[X]$  un facteur irréductible du polynôme  $X^{p^n} - X$ , de degré  $d$ . Avec les mêmes notations que précédemment puisque  $P|X^{p^n} - X$  on a  $\alpha^{p^n} = \alpha$  donc  $\alpha \in \mathbb{F}_{p^n}$  et par suite  $\mathbb{F}_p \subset K \subset \mathbb{F}_{p^n}$ . En regardant les degrés de ces extensions on obtient

$$[\mathbb{F}_{p^n} : K] \times d = [\mathbb{F}_{p^n} : K] \times [K : \mathbb{F}_p] = [\mathbb{F}_{p^n} : \mathbb{F}_p] = n$$

donc  $d|n$ . □

Comme notre polynôme  $P$  a un facteur constant non nul,  $X$  ne fait pas partie de ses facteurs irréductibles. On note  $n$  le ppcm des degrés de ses facteurs irréductibles. En appliquant le lemme, on obtient immédiatement que  $P$  divise  $X^{p^n} - X$ , et comme  $1|n$  on trouve dans le produit le facteur  $X$  qui n'est pas dans la décomposition de  $P$ , donc on a notre résultat en posant  $N = p^n - 1$ . □

**Remarque 8.** Ce que le théorème signifie, c'est qu'en travaillant dans  $\mathbb{F}_p[X]$ , tout motif  $A$  pave modulo  $p$  si on considère

$$P(X) = A(X)(X - 1)$$

et que le polynôme quotient obtenu  $Q$ , tel que  $P(X) \cdot Q(X) = (X^n - 1)$ , peut toujours être un polynôme associé à un motif (i.e. un polynôme de  $\{0, 1\}[X]$ ) en itérant la transformation

$$\alpha X^k = (\alpha - 1)X^k + X^{k+N} \text{ mod } X^N - 1.$$

Comme dans  $\mathbb{F}_2[X]$  tous les polynômes sont à coefficients dans  $\{0, 1\}$ , cette étape de transformation n'est pas utile, et tout motif admet un pavage compact modulo 2.

Par exemple, dans  $\mathbb{F}_3[X]$ , on a  $A(X) = 1 + X + X^3$  qui vérifie

$$X^{24} - 1 = A(X)(X - 1) \cdot (X^{20} + X^{19} + 2X^{17} + 2X^{15} + 2X^{14} + 2X^{13} + 2X^{10} + X^9 + 2X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + 2X^4 + 2X^3 + X^2 + 1)$$

Le polynôme quotient  $Q(X) = X^{20} + X^{19} + 2X^{17} + 2X^{15} + 2X^{14} + 2X^{13} + 2X^{10} + X^9 + 2X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + 2X^4 + 2X^3 + X^2 + 1$  n'est pas à coefficients dans  $\{0, 1\}$ , et n'est donc pas associable à un motif des entrées. Mais en appliquant la transformation  $2X^k = X^k + X^{k+24}$  ci-dessus aux termes  $(2 * X^{17}, 2 * X^{15}, 2 * X^{14}, 2 * X^{13}, 2 * X^{10}, 2 * X^8, 2 * X^4, 2 * X^3)$ , on obtient le polynôme

$$Q'(X) = X^{20} + X^{19} + X^{41} + X^{17} + X^{39} + X^{15} + X^{38} + X^{14} + X^{37} + X^{13} + X^{34} + X^{10} + X^9 + X^{32} + X^8 + X^7 + X^6 + X^5 + X^{28} + X^4 + X^{27} + X^3 + X^2 + 1$$

qu'on peut associer à des entrées, et qui vérifie

$$A(X) \cdot Q'(X) = 1 + X + \dots + X^{23} \pmod{X^{24} - 1}.$$

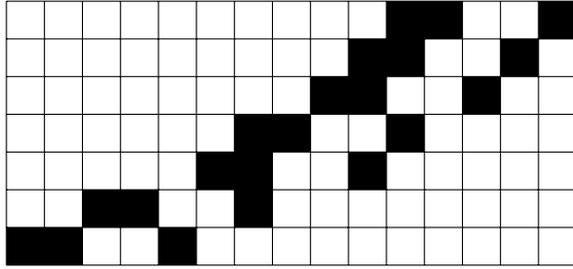
J'ai amélioré l'algorithme proposé dans [4] en le rendant optimal, pour obtenir le motif des entrées pour paver modulo  $p$  avec un motif fini si le pavage est compact (par exemple pour tout motif si  $p = 2$ ).

**Méthode 1.** Il existe un algorithme glouton (cf annexe 2) d'inspiration graphique qui permet de paver modulo  $p$ , avec la représentation en mosaïque lorsqu'on peut obtenir un pavage compact.

1. On place le motif en position 0.
2. On cherche le premier indice tel qu'on n'ait pas 1 mod  $p$  voix sur ce temps et
3. Si cet indice n'est pas juste après le motif qu'on vient de placer, on place le motif à cet indice, et on retourne en 2.
4. Sinon, arrêt.

On récupère ainsi les voix des entrées  $B$  et la taille du pavage  $N$ .





Étape 4 : fin.

Bien sur on n'a pas unicité d'un tel pavage : le motif  $A = \{0, 1, 4\}$  pave avec  $B = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$ , mais aussi avec les  $B_i$  suivants :

- $B_1 = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 21\}$
- $B_2 = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 24, 27, 28, 30, 31, 32\}$
- ...

**Propriété 16.** *L'algorithme de la méthode 1 permet d'avoir le plus petit nombre d'entrées pour un pavage modulo  $p$ .*

*Démonstration.* Soit  $A \subset \mathbb{N}$  fini, et  $p$  premier. Par l'absurde, on suppose qu'il existe un ensemble d'entrées  $\tilde{B}$  qui pave avec moins de voix que  $B$  obtenu par l'algorithme, i.e.  $\sharp\tilde{B} < \sharp B$ . Soit  $i$  le plus petit indice tel que  $\tilde{B}[i] = \tilde{b} < B[i] = b$ . Lorsqu'on applique l'algorithme pendant  $i-1$  étapes, on a le même sous-pavage obtenu entre  $C = A + \tilde{B}[0 \dots i-1]$  et  $C = A + B[0 \dots i-1]$ . Comme  $\tilde{B}$  pave avec  $A$ , alors en place  $\tilde{b}$  on n'a pas  $1 \pmod p$  voix dans  $C$ . Donc l'étape 2 de l'algorithme, qui cherche le plus petit indice tel qu'on n'a pas  $1 \pmod p$  voix dans le pavage obtenu fournira en  $i$ -ième indice de  $B$  un  $b' \leq \tilde{b} < b$ . Contradiction avec le fait que le  $i$ -ième indice de  $B$  soit  $b$ .  $\square$

**Exemple 12.** Dans le cas de l'exemple 11, le minimum de voix nécessaires pour paver modulo 2 avec le motif  $A = \{0, 1, 4\}$  est donc 7.

**Remarque 9.** Lorsqu'on travaille sur le pavage de  $\mathbb{Z}_N$ , on a vu que les canons de Vuza pouvaient être considérés comme une base par l'opération de concaténation par la propriété 2. On a aussi vu qu'ils étaient suffisant pour trouver une CNS de la condition de pavage d'un motif à la propriété 5.

Cet algorithme glouton fournit aussi des pavages minimaux sous le sens de la concaténation. Ils sont les "canon de Vuza modulo  $p$ ". On pourrait espérer un rapprochement entre ces notions de canon de Vuza, et les seconds étant facile à obtenir, pouvoir revenir aux premiers et les énumérer beaucoup plus rapidement.

**Propriété 17.** *Pour un motif  $A$  donné, si l'algorithme de la méthode 1 fournit un motif  $B$  pour paver modulo  $p$ , alors pour ce motif  $B$  on peut*

prendre  $A$  pour entrées, et on aura des notes superposées aux mêmes temps et de même nombre. Ceci étend la notion de dualité de la remarque 2 aux canons modulo  $p$ .

*Démonstration.* En utilisant les notations de la propriété, si on écrit

$$A +_p B = \{a + b \bmod p, (a, b) \in A \times B\} = C,$$

on obtient un multi-ensemble  $C$  de  $\mathbb{N}$  qui vérifie par définition de pavage modulo  $p$ ,

$$C = \left\{ \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k_0 p + 1 \text{ fois}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{k_1 p + 1 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{N, N, \dots, N}_{k_N p + 1 \text{ fois}} \right\}$$

où  $\forall i \in [0, N], k_i \in \mathbb{N}$ .

Par commutativité dans  $\mathbb{Z}_p$  on a aussi bien sûr que  $C = B +_p A$ , et donc que  $A$  fournit avec pavage mod  $p$  pour  $B$ . Et les notes superposées, correspondants aux  $k_i \neq 0$  sont aux mêmes positions  $a + b = b + a$  et de même nombre  $k_i p + 1$ .  $\square$

**Remarque 10.** Cependant, on peut avoir en gardant les notations, que  $A$  n'est pas le complément minimal que donnerait l'algorithme de la méthode 1 appliqué à  $B$ , si  $A$  est découpable en sous-motifs qui donnent deux pavages consécutifs de  $B$ . Par exemple, l'algorithme pour  $A = \{0, 1, 2, 6, 7, 8\}$  donne  $B = \{0, 3\}$ , pour qui il donne  $A' = \{0, 1, 2\}$ . Mais le  $A'$  obtenu sera toujours une sous-partie de  $A$ .

Un algorithme très simple qu'Amiot présente dans [4], inspiré de l'algorithme glouton, permet d'obtenir un multiple  $n$  de la taille  $N$  minimale d'un pavage modulo  $p$  :

### Méthode 2.

1. Poser  $j = 0, m = 0, n = 1$
2. Si  $A$  ne divise pas  $X^n - 1$  modulo  $p$ , incrémenter  $j$  et  $m$ , puis écrire  $n = p^j * \text{ppcm}(p - 1, p^2 - 1, \dots, p^m - 1)$ , et retourner en 2.
3. Renvoyer  $n$ .

Cependant, il faut appliquer l'algorithme de la méthode 1 pour obtenir la valeur minimale de  $N$ .

Si on regarde (figure 3) modulo 2 la taille minimale  $N$  des pavages des motifs simples de type  $\{0, 1, n\}$ ,  $n \geq 2$ , on s'aperçoit qu'elle croit très rapidement, et que cet algorithme de la méthode 2 est utile car appliquer l'algorithme de la méthode 1 devient vite lourd pour la machine.

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$N$	3	7	15	21	63	127	63	73	889	1533	3255	7905	11811	32767	255

Figure 3 : Taille  $N$  du pavage compact minimum modulo 2 obtenu avec le motif  $\{0, 1, n\}$

On remarque que les motifs du type  $A = \{0, 1, 2^k\}$  ont un pavage compact de taille bien moins importante. Nous allons nous intéresser à ce cas.

## 7 Le cas $A = \{0, 1, 2^k\}$ , modulo 2

Le résultat principal que nous avons établi est le

**Théorème 7.** *Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , le motif  $A = \{0, 1, 2^k\}$  pave modulo 2 avec  $B$  qui a  $\sharp B = 4^k - 3^k$  termes un pavage compact qui finit sur le temps*

*$N = 4^k - 2$  et en obtenant  $4^k - \frac{3^{k+1} - 1}{2}$  notes superposées, que nous appelons doublons.*

Grâce à une preuve constructive, ce théorème permet de connaître les motifs des entrées pour paver modulo 2 avec tous les motifs de la forme  $A(k) = \{0, 1, 2^k\}$ . Comme on montre aussi facilement qu'on n'aura jamais plus de 3 notes superposées, on obtient donc les résultats complets de cardinalités de ce pavage : le nombre d'entrées qu'il faut, la taille du pavage compact obtenu et le nombre de notes qui seront superposées.

Je commence par une introduction, qui permet d'expliquer "avec les mains" comment construire ce genre de pavage, et l'idée de la preuve. Une seconde partie présente une série de lemmes techniques nécessaires à la preuve, et enfin, la démonstration rigoureuse du théorème est présentée dans une troisième sous-partie.

### 7.1 Introduction

Regardons d'abord comment l'algorithme de la méthode 1 construirait les entrées  $B$  par exemple sur  $A(3) = \{0, 1, 8\}$ .

L'algorithme place le motif en première position, c'est à dire qu'on part de  $B = \{0\}$ , et on a  $(A + B)_{0-1} = 110000001$ .

Il faut donc ensuite boucher les trous entre les indices 2 et 7. L'algorithme ajoute des entrées  $B = B \cup \{2, 4, 6\}$ , et on obtient  $(A + B)_{0-1} = 11111111010101$ . Le nouveau problème devient de boucher le nouveau sous-pavage 010101.

La méthode utilisée est donc de boucher les trous (c'est à dire remplir le sous-pavage comme expliqué dans la définition 17) du sous-pavage en cours, au sens de la définition 6, en ajoutant des entrées. Mais en ajoutant ces entrées on crée un nouveau sous-pavage. On construit ainsi  $B$  de façon incrémentale en cherchant à chaque étape à boucher le nouveau sous-pavage créé, c'est à dire le sous-pavage suivant celui qu'on vient de boucher, comme expliqué dans la définition 18.

Les Lemmes 4 à 7 présentés plus bas donnent des cas particuliers simples de complétions de sous-pavages, les suivants permettent d'augmenter la taille

des entrées nécessaires à la complétion d'un sous-pavage qu'on concatène à lui même.

**Remarque 11.** Soit  $i \in \mathbb{N}$ , notre motif principal  $A(k) = \{0, 1, 2^k\}$  étant de taille  $\max(A(k)) - \min(A(k)) = 2^k$ , si on prend une suite finie  $B_{0-1}$  de  $\{0, 1\}^{2^k}$  telle que la voix des entrées associée  $B$  pave modulo 2 avec  $A$  entre les indices  $i$  et  $i + 2^k - 1$  sur un sous-pavage quelconque de taille  $2^k$  qui commence à l'indice  $i$ , alors le sous-pavage suivant de taille  $2^k$  et commençant à l'indice  $i + 2^k$  obtenu sera  $B_{0-1}$ . Ceci est dû à l'espacement entre les deux premières notes et la dernière de  $A$ .

**Exemple 13.** On prend  $A = \{0, 1, 4\}$  et la suite  $B_{0-1} = 1010$  associée à  $B = \{0, 2\}$ , qui pave sur le sous-pavage nul 0000 qui commence à l'indice 0. Alors on a  $(A + B)_{0-1} = 1111010$ , c'est à dire que le sous-pavage de taille  $2^2 = 4$  commençant à l'indice 4 est  $1010 = B_{0-1}$ .

Ce phénomène s'exprime élégamment en construisant récursivement les entrées  $B(k)$  associées à  $A(k)$  dans un tableau qu'on appellera  $V(k)$ , dont les lignes sont obtenues en tronçonnant le mot  $B_{0-1}(k)$  en sous-mots successifs de  $2^k$  lettres. La preuve du théorème 7 reposera sur le fait que ce tableau  $V(k)$  est identique au tableau  $T(k)$  construit par récurrence selon la méthode 3 expliquée ci-dessous.

**Exemple 14.** Pour quelques valeurs de  $k$ , regardons ce que seront  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $B_{0-1}(k)$  en notation 0-1, puis  $B_{0-1}(k)$  rangé dans la tableau  $V(k)$ .

- $k = 1$ ,  $A(1) = \{0, 1, 2\}$ ,  $B(1) = \{0\}$ ,  $B_{0-1}(1) = 1$   
 $V(1) = (10)$
- $k = 2$ ,  $A(1) = \{0, 1, 4\}$ ,  $B(2) = \{0, 2, 5, 6, 8, 9, 10\}$ ,  
 $B_{0-1}(2) = 10100110111$   
 $V(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $k = 3$ ,  $A(1) = \{0, 1, 8\}$ ,

$$B(3) = \{0, 2, 4, 6, 9, 10, 13, 14, 16, 17, 18, 20, 21, 22, 27, 28, 29, 30, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54\}$$

$$B_{0-1}(3) = 10101010011001101110111000011110101111100111111011111110$$

$$V(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Méthode 3.** On note  $T(1) = (10)$ .  $\forall k \geq 1$  on peut construire de la façon suivante un tableau  $T(k)$  par récurrence.

Si on a déjà construit le tableau  $T(k)$  de taille  $(2^k - 1, 2^k)$  on construit  $T(k+1)$  de taille  $(2^{k+1} - 1, 2^{k+1})$  de cette façon :

$$\left( \begin{array}{c|c} T(k) & T(k) \\ \hline & 11 \dots 1 \ 0 \\ & 11 \dots 1 \ 0 \\ \widetilde{T(k)} & \vdots \quad \vdots \\ & 11 \dots 1 \ 0 \end{array} \right)$$

où  $\widetilde{T(k)}$  est de taille  $(2^k, 2^k)$  et défini ainsi : la première ligne est  $\overline{0}^{(2^k-1)}1$ , et les dernières lignes sont  $T(k)$  dont on a changé la dernière colonne de 0 en une colonne de 1 (on montre facilement par construction que la dernière colonne de  $T(k)$  est nulle pour tout  $k$ ).

On présente ci-dessous les précédents tableaux  $T(k)$ , donnés avec les séparations de la construction par récurrence :

$$T(1) = (10)$$

$$T(2) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$T(3) = \left( \begin{array}{c|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{où on voit bien } \widetilde{T(2)} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

**Définition 20.** Si pour remplir un sous-pavage  $\widetilde{A}_{0-1}$  de taille  $n \leq 2^k$  avec le motif  $A(k) = \{0, 1, 2^k\}$ , il faut l'ensemble des entrées  $\widetilde{B}$  de taille  $n$ , on

note alors  $\tilde{A}_{0-1} \xrightarrow{k} \tilde{B}_{0-1}$  avec  $\xrightarrow{k}$  la *fonction de remplissage* définie sur et à valeur dans les suites finies  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}^n$  de 0 – 1, notée de façon postfixe.

**Exemple 15.** Par exemple  $\bar{0}^{2n} \xrightarrow{k} \bar{10}^n$  si  $2n \leq 2^k$ .

**Remarque 12.** Par la remarque 11 on voit que le motif  $B(k)$  cherché sera donc celui associé à la suite  $B_{0-1} = \tilde{B}_1 \dots \tilde{B}_n$  où

$$\forall i \leq n \ \# \tilde{B}_i = 2^k \text{ et } \bar{0}^{2^k} \xrightarrow{k} \tilde{B}_1 \xrightarrow{k} \dots \xrightarrow{k} \tilde{B}_n$$

et on aura par la démonstration du théorème que  $n = 2^k - 1$ . Les  $\tilde{B}_i$  sont les sous-pavages suivants des sous-pavages  $\tilde{B}_{i-1}$ , comme expliqué à la définition 18.

Vu la définition des dimension de  $V(k)$  qui, rappelons-le, est l'écriture lignes à lignes de  $B(k)_{0-1}$ , cela voudra dire que  $V(k) = \begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \dots \\ \tilde{B}_n \end{pmatrix}$ .

**Exemple 16.** Pour  $k = 2$ , on a  $\bar{0}^4 \xrightarrow{2} 1010 \xrightarrow{2} 0110 \xrightarrow{2} 1110$  et on a bien  $B_{0-1}(2) = 10100110111$  ou  $B_{0-1}(2) = 101001101110$  soit

$$V(2) = \begin{pmatrix} 1010 \\ 0110 \\ 1110 \end{pmatrix}.$$

On cherchera donc à montrer que pour tout  $k$ ,  $T(k) = V(k)$

## 7.2 Lemmes

**Lemme 4.**  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  pour paver modulo 2 avec le motif  $\{0, 1\}_{0-1} = 11$  sur le sous-pavage  $0\bar{1}^n 0$ , il faut les entrées  $\bar{1}^{n+1} 0$ .

*Démonstration.* Montrons-le par récurrence sur  $n$ .

Si  $n = 1$ , pour paver le sous pavage 010 avec le motif 11, on commence par mettre une voix en premier indice dans les entrées :  $B_{0-1} = 1 \dots$ . On obtient alors sur le nouveau sous-pavage  $100 = 1(1 + 1 \bmod 2)0$ . Il faut ensuite faire entrer à nouveau le motif, i.e.  $B_{0-1} = 11.$ , et le sous-pavage devient 111. Le pavage étant obtenu, il ne faut plus ajouter d'entrée et on a  $B_{0-1} = 110$ .

Si cela était vrai pour un  $n$  fixé, cherchons à paver le sous-pavage  $0\bar{1}^{n+1} 0$ .

Le sous-pavage commence par un 0, donc les entrées par un 1, i.e.  $B = 1.\bar{1}^{n+2}$ , et le sous-pavage suivant sera  $10\bar{1}^n 0 = 1(1 + 1 \bmod 2)\bar{1}^n 0$ . Par hypothèse de récurrence, pour paver les  $n + 2$  derniers termes de ce sous-pavage

suivant, il faut que les  $n + 2$  derniers termes de  $B$  soient  $\bar{1}^{n+1}0$ . Et donc on a bien  $B = 1\bar{1}^{n+1}0 = \bar{1}^{n+2}0$ .  $\square$

**Lemme 5.**  $\forall k \in \mathbb{N}, \bar{1}^{(2^k-1)}0 \bar{1}^{(2^k-1)}0 \xrightarrow{k+1} \bar{0}^{(2^k-1)}1\bar{1}^{(2^k-1)}0$

*Démonstration.* Comme  $|\bar{1}^{(2^k-1)}0 \bar{1}^{(2^k-1)}0| \leq 2^{k+1}$ , seul les deux premiers éléments de  $A(k) = \{0, 1, 2^{k+1}\}$  sont utilisés pour couvrir le sous-pavage. On cherche donc à paver avec le motif  $\{0, 1\}$  sur le motif  $\bar{1}^{(2^k-1)}0 \bar{1}^{(2^k-1)}0 \xrightarrow{k+1} \tilde{C}$ .

Le premier bloc de 1, de taille  $2^k - 1$  est déjà pavé, il n'y a donc pas besoin d'ajouter des voix, et  $\tilde{C}$  commence donc par  $\bar{0}^{(2^k-1)}$ . On arrive sur un motif qui remplit les conditions du lemme 4, qui nous donne  $\tilde{C} [2^k \dots 2^{k+1}] = \bar{1}^{2^k}0$ .

On obtient bien  $\tilde{C} = \bar{0}^{(2^k-1)}1\bar{1}^{(2^k-1)}0$ .  $\square$

**Lemme 6.**  $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall n < 2^k - 2, 0\bar{1}^n0 \xrightarrow{k} \bar{1}^{(n+1)}0$ .

*Démonstration.* Comme  $|0\bar{1}^n0| \leq 2^k$ , on ne se soucie ici encore que de paver avec les deux premières notes 11 du motif  $A(k)$ , et on rentre dans les conditions du lemme 4.  $\square$

**Lemme 7.**  $\forall k \in \mathbb{N}, 0\bar{1}^{(2^k-2)}0 \xrightarrow{k} \bar{1}^{(2^k)}$

*Démonstration.* Ici, nous n'avons pas  $|0\bar{1}^{(2^k-2)}0| < 2^k$  et on ne peut pas utiliser le lemme 4. Cependant, on a exactement  $|0\bar{1}^{(2^k-2)}0| = 2^k$ . C'est à dire qu'on ne sort des conditions du lemme que sur le dernier indice. Donc si on doit ajouter une entrée au premier temps (le sous-pavage commence par un 0, donc on devra le faire), il suffit de considérer le même sous pavage, avec une voix en plus à la fin :  $0\bar{1}^{(2^k-2)}1$ , qu'on pave avec le motif 11.

Ainsi par une récurrence similaire, on obtient les entrées  $\bar{1}^{(2^k-1)}0$ , mais le dernier 0 est donc rempli par la dernière note de  $A(k)$ , il faut ajouter une dernière fois le motif, et donc le sous-pavage obtenu est  $\bar{1}^{(2^k)}$ .  $\square$

**Lemme 8.**  $\forall k \in \mathbb{N}, \text{ si } \sharp A = \sharp B = 2^k - 1, \text{ si } A0 \xrightarrow{k} B0 \text{ alors } A1 \xrightarrow{k} B1$ .

*Démonstration.* Comme  $\sharp A = \sharp B = 2^k - 1 < 2^k$ , on ne pave encore une fois qu'avec le motif 11. Le fait d'avoir un 0 après  $B$  signifie qu'on a obtenu un pavage du sous-pavage  $A0$  en mettant en dernière position dans  $B$  un 1. Ce qui fait qu'en complétant le sous-pavage à la fin, on obtient quelque chose du type

les deux derniers termes de $B0$	1	0
le motif 11 ajouté en avant dernière position	1	1
sous-pavage précédent	0	0

C'est à dire qu'on a  $\{01\} + B0 + A0 = \bar{1}^{\#A+1}$

Donc si mon sous-pavage devient  $A1$ , jusqu'à l'avant-dernière position il faut le même  $B$  pour le motif des entrées, puis un 1 pour à la fin boucher le trou créé par le  $1+1 = 0 \pmod 2$ .

C'est à dire qu'on est maintenant dans le cas  $\{01\} + B0 + A1 = \bar{1}^{\#A}0$ , et donc  $\{01\} + B1 + A1 = \bar{1}^{\#A}1$

Pour visualiser on se retrouve avec :

les deux derniers termes de $B1$	1	1
<hr/>		
nouveau sous-pavage obtenu	1	0
après avoir rajouté le 11	1	=
supplémentaire en dernière position	1	1 + 1
<hr/>		
le motif 11 ajouté en avant dernière position	1	1
sous-pavage précédent	0	1

On a bien  $A1 \xrightarrow{k} B1$ . □

**Lemme 9.**  $\forall n, k \in \mathbb{N}, \forall a \in \{0, 1\}$ , si  $\#A = \#B = 2^k - 1$ , si  $Aa \xrightarrow{k} B0$  alors  $\overline{Aa}^n \xrightarrow{k+n-1} \overline{B0}^n$ .

*Démonstration.* Comme précédemment  $\#A = \#B = 2^k - 1 < 2^k$ , et on ne pave encore une fois qu'avec le motif 11. De même ici, avoir un 0 après le  $B$  nous resitue dans cette configuration finale :

les deux derniers termes de $B$	1	0
le motif 11 ajouté en avant dernière position	1	1
sous-pavage précédent	0	0

C'est à dire qu'on a  $\{01\} + B0 + Aa = \bar{1}^{\#A+1}0000\dots$

Ce qui veut dire qu'après le  $B0$ , on ne "déborde" pas en rajoutant un 1 à prendre en compte après le motif, et que cette partie du pavage est terminée en position  $2^k$ . On commencera le pavage suivant sans avoir à garder la mémoire de ce pavage. On peut donc concaténer ce motif de remplissage  $n$  fois, si on prend garde à paver avec  $\{0, 1, 2^{k+n-1}\}$  pour ne pas rencontrer le motif de fin. □

### 7.3 Démonstration

Montrons maintenant le théorème. Pour cela commençons par montrer que

**Théorème 8.** *Le tableau  $T(k)$  construit par récurrence par la méthode 3 est*

*égal à  $V(k)$ , qui, rappelons-le, représente* 
$$\begin{pmatrix} \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \dots \\ \tilde{B}_n \end{pmatrix}$$

*avec  $B(k) = \tilde{B}_1 \cdots \tilde{B}_n$  et  $\#B_i = 2^k$ .*

*Démonstration.* Nous allons montrer ce résultat par récurrence sur  $k$  :

Si  $k = 1$  on a sans soucis  $T(1) = (10) = V(1)$  et le motif d'entrée est simplement  $B(1) = \{0\}$ .

Si on a montré ce résultat pour  $k$ , prouvons qu'il est vrai au rang  $k + 1$  :

Par le lemme 9 avec  $n = 2$ , si  $T(k)$  donne le pavage du motif  $\{0, 1, 2^k\}$ ,  $(T(k)|T(k))$  donne bien le début du pavage du motif  $\{0, 1, 2^{k+1}\}$ . En effet, on avance par blocs de taille  $2^{k+1}$  avant d'arriver à la dernière note de  $A(k + 1)$ .

Par le lemme 5 on obtient la construction de la première ligne de  $\widetilde{T(k)}|1^{2^k-1}0$ .

Par le lemme 6, on obtient le remplissage du bloc en bas à droite :

$$\begin{array}{ll} 11 \dots 1 & 0 \\ 11 \dots 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 11 \dots 1 & 0 \end{array}$$

En effet, on remarque qu'on a toujours un 0 avant ces lignes de 1, pour rester dans le cas du lemme 6, car sinon on arrive à une ligne remplie par des 1, et on se retrouve dans le cas du lemme 5, qui implique un passage à l'indice  $k + 2$ .

Le lemme 8 permet de comprendre pourquoi les dernières lignes de  $\widetilde{T(k)}$  ressemblent à  $T(k)$ . On essaye de recommencer à paver avec notre motif 11, la dernière note de  $A(k + 1)$  ne rentrant pas en compte dans un bloc de cette taille. Ceci nous avait donné le motif  $T(k)$  la première fois. Seulement, on peut imaginer qu'au dessus de la première ligne de  $T(k)$  on avait une ligne de 0. Ceci est logique, en effet au début de la construction d'un pavage, on part d'un espace temps vide, c'est à dire d'un sous-pavage nul.

Ici, la ligne avant la reprise est  $\overline{0}^{2^k-1}1$ . Donc on reprend ensuite  $T(k)$  pour les  $2^k - 1$  premières entrées, et le lemme 8 donne le 1 sur la dernière colonne à la place des 0, c'est à dire en place  $2^k$  pour chacune des lignes construites de  $\widetilde{T(k)}$ .

Enfin le lemme 7 nous donne l'arrêt de la construction. Si on arrive à la  $(k + 1)$ -ième étape avec le motif  $\{0, 1, 2^{k+1}\}$ , on a construit  $\overline{1}^{(2^{k+1}-1)}$  qui finit bien de paver, car on utilise en dernières positions la dernière note de  $A(k+1)$ . En effet, une suite de  $2^{k+1} - 1$  entrées nous donne mod 2 un pavage qui se complète avec à sa suite  $2^{k+1} - 1$  notes seules.

On conclut par récurrence que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  le tableau  $T(k)$  construit par l'algorithme de la méthode 3 nous donne bien les entrées  $B(k)_{0-1}$  lues lignes à lignes, c'est à dire qu'il vaut  $V(k)$ . □

Maintenant que nous savons construire les entrées  $B(k)$ , pour avoir les cardinaux et finir de prouver le théorème il reste à compter.

Pour avoir  $\sharp B(k)$  il faut compter le nombre  $b(k)$  de 1 dans le tableau  $T(k)$ . On peut les avoir par récurrence :

On a les deux premiers termes :  $b(1) = 1$  ;  $b(2) = 7$ .

Par construction de  $T(k + 1)$ , on obtient la récurrence

$$b(k + 1) = 3 * b(k) + 4^k.$$

Le  $3 * b(k)$  vient des blocs  $T(k)$  remis trois fois, et le  $4^k$  vient du bloc de 1 en bas à droite de taille  $2^k \times 2^k$ .

On vérifie facilement que pour tout  $k$ ,  $b(k)$  vérifie

$$b(k + 2) - 7b(k + 1) + 12b(k) = 0,$$

soit par résolution classique  $b(k) = a * 4^k + b * 3^k$ , et avec les conditions initiales,  $b(k) = 4^k - 3^k$ .

Pour obtenir  $N$ , on sait que le pavage sera fini sur le dernier 1 de  $B(k)_{0-1}$  où on met le dernier  $A(k)$ . On a

$$N = (2^k - 1) * 2^k - 1 + 2^k - 1 = 4^k - 2.$$

Le premier produit vient de la taille de  $T(k)$ , le  $-1$  vient du dernier 0 qui ne compte pas, le  $+2^k$  est l'ajout du motif à cette position, et le dernier  $-1$  du décalage entre le départ à 0 pour un motif, et à 1 pour le compte.

Pour finalement avoir le nombre de doublons, il nous faut utiliser ce petit lemme :

**Lemme 10.** *Si on construit un pavage modulo 2 du motif  $A$  par la méthode 1 avec  $\sharp A = n$ , alors on ne peut pas avoir plus de  $n$  notes superposées.*

*Démonstration.* Le pavage est minimal, donc une superposition de notes vient forcément de notes différentes de  $A$  jouées ensemble. En effet, si on a  $a \in A$  tel que dans la superposition on ait deux fois  $a$ , ça veut dire que le motif  $A$  rentre deux fois au même temps, et donc qu'on peut supprimer ces deux  $A$  et avoir un pavage plus petit.

On ne peut donc pas choisir  $n + 1$  ou plus de notes différentes dans  $A$  et on a ainsi au maximum  $n$  notes superposées.  $\square$

Ici, comme  $\sharp A(k) = 3$ , on ne peut pas avoir plus de 3 notes superposées, et comme à la fin du pavage on a 1 note modulo 2 à chaque temps, on ne peut avoir qu'une ou 3 notes à chaque temps.

Donc les notes superposées sont toujours par 3, et, en notant  $D$  l'ensemble des doublons, on a la formule

$$\sharp A \times \sharp B - 2\sharp D = N + 1$$

Le 2 vient donc du fait que les notes superposées dépassent exactement de 2 un pavage classique, et le +1 après  $N$  vient encore du décalage entre le départ à 0 pour un motif, et à 1 pour le compte.

Et on obtient

$$\sharp D = 4^k - \frac{3^{k+1} - 1}{2}.$$

■

## 8 Conclusions et perspectives

L'étude des canons rythmiques mosaïques n'est pas qu'une fin en soi. La résolution de certains problèmes liés à la caractérisation des conditions de pavage revient à celle en dimension 1 de la conjecture de Fuglede, qui a été montrée fautive par Tao en dimension supérieures ou égales à 5 dans [21] et qui reste ouverte en dimension 1 et 2.

L'accélération des algorithmes, ou l'étude directe, pourrait intégrer la notion de canon dans les logiciels en temps réels et offrir un nouvel outils aux compositeurs, ou toute autre personne utilisant les sciences appliquées à la musique.

Notamment, les canons modulo  $p$  ne sont pas encore utilisés par les compositeurs, car la notion est neuve et peu étudiée, et de nombreux outils seraient à ajouter à OpenMusic, langage de programmation visuelle pour compositeurs, et en particulier enrichir les MathTools ([1]).

Aussi, la notion de rythmes asymétriques ([7]) est à étudier sous l'œil des canons mosaïques, car on peut les rapprocher des canons de Vuza par le fait qu'on ne peut pas les séparer en deux sous-rythmes.

Enfin, des études perceptives sur les canons modulo  $p$  seraient à envisager, car ils paient une période beaucoup plus courte que les canons de Vuza (72 est la taille du plus petit mauvais groupe), et on pourrait les utiliser pour voir si la notion de minimalité par concaténation est repérable à l'oreille.

Ce stage a permis un gros travail de pré-thèse. Il a commencé par une étude (non terminée) de l'abondante bibliographie du sujet. Ensuite, un travail de mise à jour des résultats et de leurs démonstrations (lorsqu'elles existaient) a dû être effectué. Enfin, des implémentations, tentatives de reproduction des résultats obtenus, ou automatisation de représentations graphiques m'ont permis de saisir plus en profondeur les liens entre toutes les notions, et le fonctionnement des pavages. Ceci me permettant d'avoir une caractérisation complète des pavages modulo 2 des motifs de la forme  $A(k) = \{0, 1, 2^k\}$  dont les perspectives d'applications musicales nous semblent très prometteuses. La résolution de ce cas apporte plusieurs pistes de recherche :

- Lorsqu'on regarde la démonstration, on s'aperçoit qu'un résultat similaire devrait s'obtenir par un même raisonnement pour les canons du type  $A(m, k) = \{0, 1, \dots, m-1, m^k\}$ . Il reste à savoir si notre cas  $A(k)$  fonctionne parce qu'on pave modulo 2, et donc s'il faudra paver différemment pour le cas  $A(m, k)$ , quitte à perdre notre pavage compacte. Aussi, peut-être qu'au lieu de pouvoir adapter la preuve avec un tableau  $T(m, k)$  à coefficients dans  $\{0, 1, \dots, m-1\}$ , il faudra une structure plus compliquée avec une plus grande dimension.
- L'utilisation de ces cas pourrait servir à donner une borne sur la taille

$N$  du pavage compact, et l'algorithme de la méthode 2 serait alors suffisant pour avoir la taille exacte.

- En reprenant l'idée de la preuve, on pourrait imaginer définir une règle de réécriture plus générale, et qu'on pourrait étudier, afin de formaliser la création de pavage modulo  $p$  par une grammaire formelle.

De façon plus générale, l'étude des canons modulo  $p$  offre d'autres pistes de recherche telles :

- On pourrait définir une notion de croissance des canons. En effet, lorsqu'on trace des canons modulo  $p$  avec l'algorithme de la méthode 1 on s'aperçoit que les voix montent avec une "pente" assez régulière. Formaliser ce principe ouvrirait peut-être une étude d'encadrement du nombre de voix nécessaire pour paver un motif.
- L'étude de l'ensemble des notes superposées, les doublons, est aussi très intéressante. Le motif des doublons est très certainement lié à l'inverse du motif de base. Sur de très nombreux exemples, on voit un lien entre ceux-ci. Pour le motif  $A(2) = \{0, 1, 4\}$  qui est dessiné sur l'exemple 11 on voit que le motif des doublons est exactement le rétrograde du motif  $A(2)$ .

Comprendre ce motif des doublons permettrait peut-être d'aller du pavage modulo  $p$  au pavage dans  $\mathbb{Z}$  et de donner un espace de travail plus simple pour les canons rythmiques mosaïques.

Nous terminons en soulignant qu'il y a de nombreux problèmes ouverts dans la théorie des canons rythmiques mosaïques qui trouveront sans doute une place dans les axes de recherche de ma thèse, à savoir :

- Utilisation de la théorie des mots.
- Calculs par automates pour générer des canons non périodiques.
- État de l'art du pavage et quasi-périodicité à réexprimer en terme de transformée de Fourier.
- Recherche d'algorithmes linéaires.
- Pavages non-périodiques à la Penrose.
- Théorème de structure pour  $\#S_A \geq 3$ .
- Pavages obtenus en ajoutant à la translation d'autres transformations sur le motif rythmique (rétrogradation, augmentation, ...)
- Extension de la notion de pavage rythmique mosaïque à celle de canons mélodico-rythmiques, qui correspond au pavage en dimension 2.
- Conditions nouvelles sur  $R_A$  pour savoir si un motif est périodique.
- ... et tant d'autres !

On peut voir sur le graphe de la figure 4 quels articles ont créés l'histoire de l'étude des canons rythmiques, et quels pistes ils ouvrent :

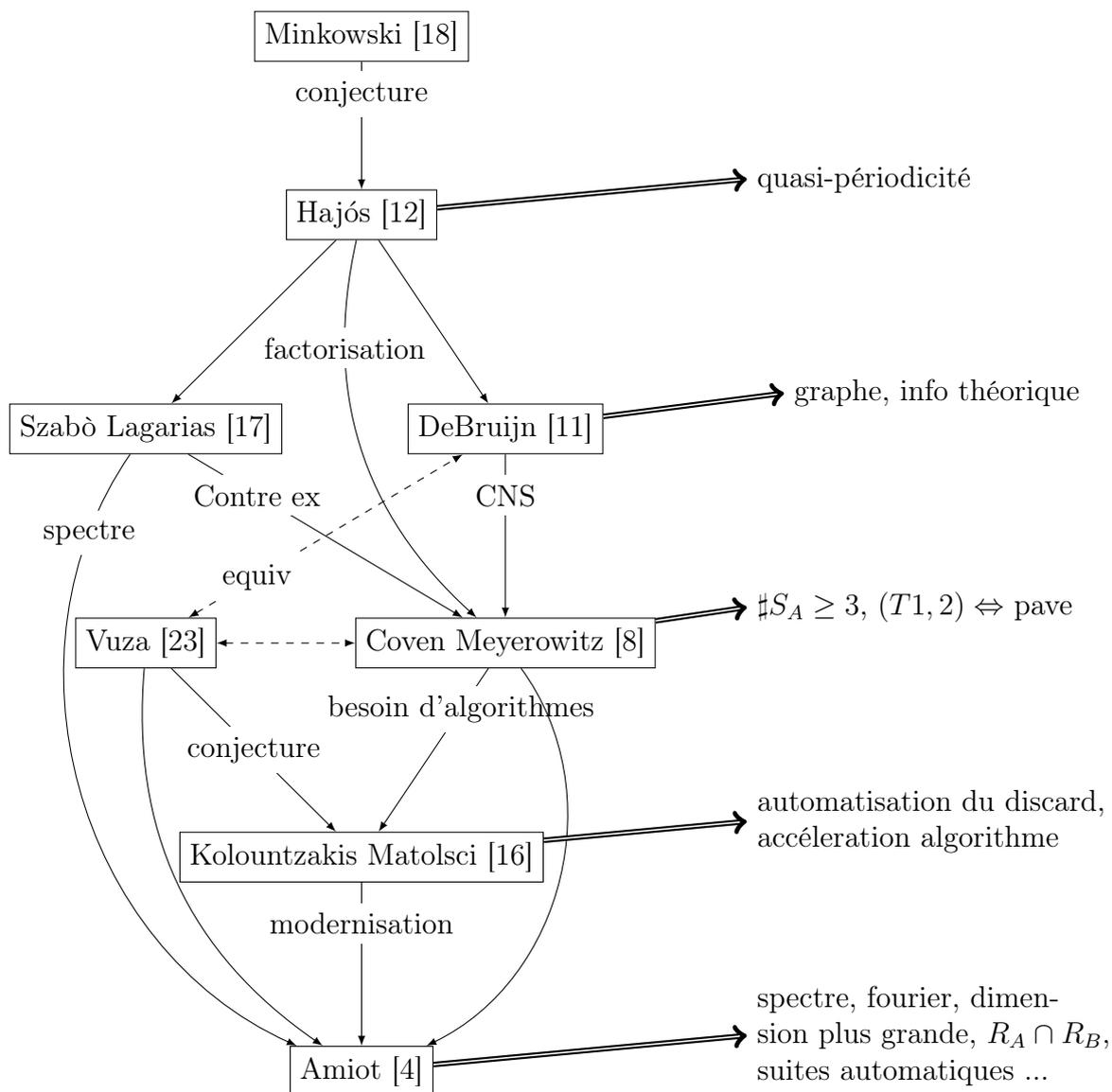


Figure 4 : Réseau conceptuel pour l'étude des canons rythmiques mosaïques à partir de la littérature existante et pistes de recherches futures.

## 9 Annexes

### 9.1 Annexe 1 : programme en lisp qui donne tous les canons $A$ tel que $S_A = \{p^a, q^b\}$ en utilisant la programmation par contraintes.

```
(in-package :om)

(defun racine-n-unite (n k)
  (exp (/ (* 2 pi k (complex 0 1)) n)))

(defun is-good-in-k (n prime &rest p )
  (let ((rep 1))
    (loop for e in p do
      (setf rep (+ rep (exp (/ (* 2 pi (complex 0 1) prime e) n))))
    )
    (< (abs (- rep 0)) 0.00001)))

(defun make-constraints (n pa qb primesn primesp primesq VarArray)
  (loop for prime in primesn do
    (eval '(s::assert! (s::funcallv #'is-good-in-k ,
                                   n ,prime ,.VarArray)))
  )
  (loop for prime in primesp do
    (eval '(s::assert! (s::funcallv #'is-good-in-k ,
                                   pa ,prime ,.VarArray)))
  )
  (loop for prime in primesq do
    (eval '(s::assert! (s::funcallv #'is-good-in-k ,
                                   qb ,prime ,.VarArray)))
  )
  (loop for i from 0 to (- (length VarArray) 2) do
    (s::assert! (s::<v (nth i VarArray) (nth (+ i 1) VarArray))))))

(in-package :s)
(defun find-polynome (n pa qb nbVar primesn primesp primesq )
  (solution
   (let* ((VarArray (om::make-n-variables n nbVar))
```

```

        )
        (om::make-constraints n pa qb primesn primesp primesq VarArray)
        VarArray)
        (static-ordering #'divide-and-conquer-force)))

(in-package :om)

(defmacro apply-nd (fun params )
  '(let ((*counter* 0)
        (*result* nil))
    (catch 's::end
      (s::all-values (setf *result* (,fun ,.params))
                    *result* ))))

(defmethod find-all-polynomes ((p integer) (alpha integer)
                                (q integer) (beta integer))
  (let* ((nvar (- (* p q) 1))
         (pa (expt p alpha))
         (qb (expt q beta))
         (n (* pa qb))
         (primesn (loop for i from 1 to (- n 1) when
                        (relativelyPrimes i n) collect i))
         (primesp (loop for i from 1 to (- pa 1) when
                        (relativelyPrimes i pa) collect i))
         (primesq (loop for i from 1 to (- qb 1) when
                        (relativelyPrimes i qb) collect i))
         )
    (print (list primesn primesp primesq))
    (apply-nd s::find-polynome (n pa qb nvar primesn primesp primesq) )
  ))

find-all-polynomes 2 4 3 1

```

## 9.2 Annexe 2 : programme en SageMath qui a un motif $A$ donné, renvoie les entrées $B$ , les doublons $D$ et leur cardinal ainsi que la taille $N$ du pavage compact obtenu modulo 2

```
def pavagedansF2(A): #liste qui contient 0
    A.sort()
    entree = [0]
    doublon = []
    k = A[(len(A)-1)]
    verif = [0 for n in range(0, k+1)]
    for i in A:
        verif[i] = 1
    while (0) in verif:
        i = verif.index(0)
        aajouter = i+k +1 - len(verif)
        verif.extend([0 for n in range(0, aajouter)])
        for j in A:
            if verif[j+i] == 0:
                verif[j+i] = 1
            else:
                verif[j+i] = 0
                doublon.append(j+i)
        entree.append(i)
    entree.sort()
    doublon.sort()
    print('A =' + str(A)+ ' de taille ' + str(len(A)))
    print('B =' + str(entree)+ ' de taille ' + str(len(entree)))
    print('D =' + str(doublon) + ' de taille ' + str(len(doublon)))
    print ('N =' + str(A[(len(A)-1)] + entree[(len(entree)-1)]))
```

### 9.3 Annexe 3 : routines TikZ pour obtenir proprement des dessins vectoriels des canons en représentation circulaire ou mosaïque

Prend en entrée une taille  $n$ , un motif  $A$ , et un rayon  $r$  et dessine le motif  $A$  dans un cercle représentant  $\mathbb{Z}_n$  de rayon  $r$ .

```
\newcommand{\canon}[3]{
\begin{tikzpicture}

\def \n {#1}
\def \r {#3}

\draw (0,0) circle (\r);

\foreach \i in {1,...,\n }{
\draw[black, fill = white, rotate = 90] ({\r*cos(deg(2*\i*pi/\n))},
{\r*sin(deg(2*\i*pi/\n))}) circle (0.1);
}

\foreach \i in #2 {
\fill [rotate = 90]({\r*cos(deg(-2*(\i)*pi/\n))},
{\r*sin(deg(-2*(\i)*pi/\n))}) circle (0.1);
}

\end{tikzpicture}
}
```

Prend en entrée les motifs  $A$  et  $B$  et dessine la représentation mosaïque de  $A + B$ .

```
\newcommand{\tracer}[2]{
\begin{tikzpicture}

\newcounter{i}
\setcounter{i}{0}

\foreach \b in #2 {
\foreach \a in #1 {
\fill ({(\a+\b)*0.03}, {\value{i}*0.03}) rectangle ({(\a+\b+1)*0.03},
{\value{i}+1)*0.03});
}
}

\stepcounter{i}
}

\end{tikzpicture}
}
\begin{flushleft}
```

Pour ces deux derniers, on utilisera l'environnement `inctext` avec l'option `paper=graphics` de la bibliothèque `incgraph` pour bien voir les canons avec beaucoup de termes.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Résumé - Abstract</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Notations</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Canons rythmiques mosaïques</b>	<b>7</b>
4.1	Définition . . . . .	7
4.2	Périodicité . . . . .	11
<b>5</b>	<b>Conditions de Coven-Meyerowitz</b>	<b>13</b>
5.1	Polynômes cyclotomiques . . . . .	13
5.2	Facteurs cyclotomiques d'un motif $A$ . . . . .	15
5.3	Conditions de Coven Meyerowitz . . . . .	17
5.4	Retour à la périodicité . . . . .	17
5.5	Le cas particulier $S_A = \{p^a, q^b\}$ . . . . .	19
<b>6</b>	<b>Pavage modulo <math>p</math></b>	<b>23</b>
<b>7</b>	<b>Le cas <math>A = \{0, 1, 2^k\}</math>, modulo 2</b>	<b>31</b>
7.1	Introduction . . . . .	31
7.2	Lemmes . . . . .	34
7.3	Démonstration . . . . .	37
<b>8</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>40</b>
<b>9</b>	<b>Annexes</b>	<b>43</b>
9.1	Annexe 1 : programme en lisp qui donne tous les canons $A$ tel que $S_A = \{p^a, q^b\}$ en utilisant la programmation par contraintes.	43
9.2	Annexe 2 : programme en SageMath qui a un motif $A$ donné, renvoie les entrées $B$ , les doublons $D$ et leur cardinal ainsi que la taille $N$ du pavage compact obtenu modulo 2 . . . . .	45
9.3	Annexe 3 : routines TikZ pour obtenir proprement des dessins vectoriels des canons en représentation circulaire ou mosaïque	46

## Références

- [1] Carlos Agon and Moreno Andreatta. Modeling and implementing tiling rhythmic canons in the openmusic visual programming language. *Perspectives of New Music*, 49(2) :66–91, 2011.
- [2] Emmanuel Amiot. Why rhythmic canons are interesting. *E. Lluis-Puebla, G. Mazzola et T. Noll (eds.), Perspectives of Mathematical and Computer-Aided Music Theory, EpOs*, pages 190–209, 2004.
- [3] Emmanuel Amiot. Rhythmic canons and galois theory. *Colloquium on mathematical music theory, H. Friepertinger (ed.)*, 2005.
- [4] Emmanuel Amiot. Structures, algorithmes and algebraic tools for rhythmic canons. *Perspectives of New Music*, 49(2) :93–142, 2011.
- [5] Moreno Andreatta. Mathematica est exercitium musicae : la recherche mathémusicale et ses interactions avec les autres disciplines. 2010.
- [6] Moreno Andreatta. Constructing and formalizing tiling rhythmic canons : A historical survey of a “mathemusical” problem. *Perspectives of New Music*, 49(2) :33–64, 2011.
- [7] Marc Chemillier and Charlotte Truchet. Computation of words satisfying the “rhythmic oddity property”(after simha arom’s works). *Information Processing Letters*, 86(5) :255–261, 2003.
- [8] Ethan M Coven and Aaron Meyerowitz. Tiling the integers with translates of one finite set. *Journal of Algebra*, 212(1) :161–174, 1999.
- [9] Nicolaas Govert De Bruijn. On bases for the set of integers. *Publ. Math. Debrecen*, 1 :232–242, 1950.
- [10] Nicolaas Govert De Bruijn. On the factorization of cyclic groups. *Indag. Math.*, 15 :370–377, 1953.
- [11] Nicolaas Govert de Bruijn. On the factorization of finite abelian groups. *Indag. Math. Kon. Ned. Akad. Wetensch., Amsterdam*, 15 :258–264, 1953.
- [12] György Hajós. Sur la factorisation des groupes abéliens. *Časopis Pest. Mat. Fys*, 74 :157–162, 1949.
- [13] György Hajós. Sur le probleme de factorisation des groupes cycliques. *Acta Mathematica Hungarica*, 1(2) :189–195, 1950.
- [14] Douglas R. Hofstadter. Gödel, escher, bach : An eternal golden braid, a metaphorical fugue on minds and machines in the spirit of lewis carroll, 1979.
- [15] Tom Johnson. Tiling in my music. *Perspectives of New Music*, 49(2) :9–21, 2011.

- [16] Mihail N Kolountzakis and Máté Matolcsi. Algorithms for translational tiling. *Journal of Mathematics and Music*, 3(2) :85–97, 2009.
- [17] Jeffrey C. Lagarias and Sándor Szabó. Szabó : Universal spectra and tildeman’s conjecture on factorization of cyclic groups. *J. Fourier Anal. Appl*, pages 63–70.
- [18] Hermann Minkowski. *Diophantische approximationen : eine einföhrung in die zahlentheorie*, volume 2. BG Teubner, 1907.
- [19] László Rédei. Ein beitrage zum problem der faktorisierung von endlichen abelschen gruppen. *Acta Mathematica Hungarica*, 1(2) :197–207, 1950.
- [20] Arthur D Sands. On the factorisation of finite abelian groups. *Acta Mathematica Hungarica*, 8(1) :65–86, 1957.
- [21] Terence Tao. Fuglede’s conjecture is false in 5 and higher dimensions. *arXiv preprint math/0306134*, 2003.
- [22] Dan Tudor Vuza. Sur le rythme périodique. *Revue Roumaine de Linguistique-Cahiers de Linguistique Théorique et Appliquée*, 22(1) :173–188, 1985.
- [23] Dan Tudor Vuza. Supplementary sets and regular complementary unending canons in four parts. *Perspectives of New Music*, 1991-1993.