MASTER II ATIAM Université Pierre et Marie Curie 2011-2012

Analyseur de circuit électronique analogique audio, et génération automatique de code pour la simulation temps réel

Usciati Tarik

 ${\rm Lieux}:$

du 5 mars au 30 avril Ircam 1 place Igor-Stravinsky 75004 PARIS

du 2 mai au 31 août Orosys 145 rue de la Marbrerie 34740 VENDARGUES

Encadrants : Cohen Ivan - Hélie Thomas

Table des matières

Introduction

1	Mo	délisat	ion et temps continu	6
	1.1	Les Sy	vstèmes Hamiltoniens à ports étendus	6
		1.1.1	Structure générale des systèmes étudiés	7
		1.1.2	Conservation de l'énergie	9
	1.2	Dictio	nnaire de composants	11
		1.2.1	Stockage	11
		1.2.2	Dissipation	12
	1.3	Exem	ples : modélisation de circuits simples	14
		1.3.1	Circuit RLC	14
		1.3.2	Circuit à dissipation non linéaire	16
2	Mis	e en é	quation d'un réseau de systèmes	19
	2.1	Conn	exion série de deux systèmes	20
		2.1.1	Interactions des sources	20
		2.1.2	Calcul du système global	21
	2.2	Génér	ation automatique des équations	22
3	Dise	crétisa	tion et simulation	24
	3.1	Discr	étisation	24
	0.1	3.1.1	Discrétisation des états	24
		312	Bilan de puissance discret	26
	39	Simul		20 27
	0.2	3 9 1	Etaga à triada	$\frac{21}{27}$
		0.⊿.1 २.२.२	Simulation d'un pré amplificatour du commerce	21 20
		9.4.4	Simulation d'un pre-amplificateur du commerce	29

Conclusion

3

Bibliographie

AI	NNE	XES		37
\mathbf{A}	Gén	éralité	és sur les systèmes Hamiltoniens à ports	38
	A.1	Définit	tions	38
	A.2	Relatio	ons constitutives	39
	A.3	Conser	rvation énergétique	40
	A.4	Représ	sentation d'état d'un SHP	40
	A.5	Tablea physiq	u des états dynamiques en fonctions des différents domaines ues	41
В	Les	Bonds	Graphs	43
	B.1	Définit	tions et modèles	43
	B.2	Les élé	éments de base	45
		B.2.1	Composants qui stockent	45
		B.2.2	Composants qui dissipent	47
		B.2.3	Les ports externes	47
		B.2.4	Les jonctions	48
С	Cale	culs ex	plicites pour une connexion en série de deux SHPEs	51
D	Mod	dèle de	e Triode	53

Introduction

Contexte

Depuis la naissance de l'informatique jusqu'à nos jours, la simulation numérique n'a cessé de se perfectionner. En effet, les performances des nos ordinateurs sont en perpétuelle progression et ont permis au fil du temps d'améliorer la précision et la rapidité des calculs. Dans le domaine de l'informatique musicale, ces avancées technologiques ont favorisé l'essor de nouvelles applications liées à la simulation numérique d'instruments ou de dispositifs électroniques.

C'est dans ce contexte que s'inscrit la problématique du stage : le but est de concevoir un simulateur temps réel de circuits audio analogiques et plus particulièrement de pré-amplificateurs à lampes (triodes) de guitare. Les sonorités des ces amplificateurs sont appréciées par les guitaristes. Cependant, l'utilisation des appareils originaux peut poser des problèmes en termes d'encombrement, de poids, ou de prix, pour des usages personnels, en studio, ou sur scène.

L'utilisation des simulateurs permet d'apporter certaines solutions à ces problématiques. Plus portables, plus pratiques à utiliser et bon marché, les simulateurs peuvent remplacer les appareils originaux dans la plupart des cas. De plus, ils intègrent au sein du même dispositif (logiciel ou hardware) la simulation de plusieurs dizaines d'amplificateurs et de pédales d'effet, découplant les possibilités qui s'offrent aux utilisateurs.

Néanmoins, ceux-ci ne permettent pas encore d'atteindre le réalisme et les sensations de jeu des appareils réels. Il existe encore des paliers à franchir entre le modèle et la réalité. En effet, la contrainte temps réel impose, lors du développement d'un simulateur, une simplification des calculs pour respecter un certain degré de performance. Cette problématique offre de nombreux sujets d'études et couvre un large domaine de la recherche scientifique.

Etat de l'Art

Il existe dans le commerce plusieurs logiciels qui simulent le comportement des circuits électroniques. Les applications dédiées aux amplificateurs de guitare pour la simulation temps réel sont nombreuses. On peut citer par exemple :

- Les logiciels Amplitube de IK Multimedia et Revalver de Peavey qui se basent sur la modélisation physique des composants électroniques.
- Les pédales d'effets Pod de Line 6 et ToneLab de Vox qui utilisent la technique du Waveshaping. Elle permet de modéliser, à l'aide d'une fonction, la distorsion générée par le comportement non linéaire du circuit de façon empirique. Cette méthode est peu couteuse en temps de calcul mais moins réaliste que celles des simulateurs à modélisation physique.

D'autres applications plus généralistes sont connues pour leur précision de simulation comme le logiciel SPICE spécifique aux circuits électroniques, ou encore Modelica utilisé dans plusieurs domaines physiques (Electronique, Mécanique, Thermodynamique ...). Cependant, ces simulateurs ne sont pas conçus pour fonctionner en temps réel car leur but est simuler le moins d'erreur possible

Sujet du stage

Le stage propose d'étudier un nouvel outil de modélisation physique : les systèmes Hamiltoniens à ports (SHPs). L'objectif est de développer à partir de cet outil un programme informatique capable de simuler les pré-amplificateurs de guitare. L'avantage d'utiliser ce formalisme mathématique réside dans le fait qu'il garantit la loi de conservation d'énergie. Ce principe a suscité une certaine motivation car il permet de garantir la stabilité des systèmes. Cette propriété intéressante pourrait répondre aux problématiques liées au réalisme et au coût de calcul des simulateurs.

Nous verrons donc en détails, à travers ce document, les méthodes développées et inspirées des SHPs qui ont permis de réaliser la simulation des préamplificateurs de guitare.

Organisation du document

Ce rapport s'articule de la façon suivante :

Nous expliquerons en première partie comment mettre en équation le modèle physique d'un circuit électronique. On utilisera pour cela un formalisme Hamiltonien que nous avons adapté pour répondre aux problématiques du sujet : les systèmes Hamiltoniens à ports étendus (SHPEs).

Nous verrons dans la deuxième partie qu'il est possible d'exprimer le modèle d'un circuit complexe à partir de sous-systèmes plus simples. Le but est de pouvoir générer automatiquement la mise en équation d'un pré-amplificateur à l'aide de sous étages élémentaires.

Enfin, la dernière partie décrira la méthode pour discrétiser ces systèmes et aboutir à une simulation implémentable. On analysera les résultats obtenus à travers deux exemples de circuits : un étage d'amplification typique et un pré-amplificateur de guitare issu du commerce.

Par ailleurs, plusieurs concepts importants et détails techniques sont donnés en annexes dont la définition des SHPs.

1 Modélisation et temps continu

1.1 Les Systèmes Hamiltoniens à ports étendus

Le formalisme mathématique des systèmes Hamiltoniens à ports (SHPs) permet de modéliser des systèmes physiques basés sur la loi de conservation d'énergie [1, 2, 3, 6, 13, 14, 16]. Cette propriété assure, après discrétisation, l'obtention d'un schéma numérique stable.

Cependant, il a fallut adapter les équations des SHPs pour modéliser le comportement non linéaire de certains composants. En effet, le formalisme des SHPs, tel qu'il était défini, ne permettait pas de prendre en compte la dissipation non linéaire des triodes. Ainsi, après quelques semaines de recherches, une reformulation a pu être développée sous le terme de "systèmes Hamiltoniens à ports étendus" (SHPEs).

Dans cette partie, nous expliquerons la mise en équation des SHPEs dans le domaine de l'électronique. On énoncera, dans un premier temps, les équations qui définissent la représentation d'états d'un SHPE. Puis dans un second temps, nous montrerons en quoi ce système permet de garantir la conservation d'énergie. Enfin, après avoir défini les états du système associés à chaque composant électronique, nous illustrerons à travers deux exemples comment modéliser un circuit complet.

Remarque: Des précisions supplémentaires sur les définitions mathématiques sont apportées en annexes : A pour les SHPs, et B pour les Bond Graphs qui est un outil de conception pour la mise en équations d'un système physique.

1.1.1 Structure générale des systèmes étudiés

Rappel sur les Représentation d'Etat

Les représentations d'état (REs) permettent de modéliser des systèmes physiques sous forme matricielle. Le comportement dynamique est décrit à l'aide d'états internes et de variables exogènes. Une RE est formulée ainsi :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} &= f(X(t), u(t)) \\ y(t) &= g(X(t), u(t)) \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} f(X(t), u(t)) = A.X(t) + B.u(t) \\ g(X(t), u(t)) = C.X(t) + D.u(t) \end{cases}$$

pour le cas linéaire, avec :

 $X(t) \in \mathbb{R}^n$: colonne qui représente les n variables d'état $u(t) \in \mathbb{R}^m$: colonne qui représente les m entrées $y(t) \in \mathbb{R}^p$: colonne qui représente les p sorties $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$: Matrices d'état $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$: Matrice de commande $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$: Matrice d'observation $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$: Matrice d'action directe

Système considéré

Notre étude porte sur le formalisme Hamiltonien. Ainsi, les premières semaines de recherches se sont focalisées sur la mise en équation sous forme d'une RE des SHPs. Cependant, nous avons dû introduire l'extension d'une variable W(t)pour prendre en compte et traiter plus facilement certaines non-linéarités des composants dissipatifs absent des SHPs standards. Cela nous a conduit à développer un nouveau type de formalisme dits "systèmes Hamiltoniens à ports étendus" (SHPEs) qui a pour RE le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = (J-R).\frac{\partial H(X)}{\partial X} - K^T.Z(W).W(t) + G_x.u(t) + B_x.d(t) \\ W(t) = K.\frac{\partial H(X)}{\partial X} - M.Z(W).W(t) + G_w.u(t) + B_w.d(t) \\ y_u(t) = g_u(\frac{\partial H(X)}{\partial X}, W(t), u(t), d(t)) \\ y_d(t) = g_d(\frac{\partial H(X)}{\partial X}, W(t), u(t), d(t)) \end{cases}$$

$$(1.1)$$

Les variables d'états sont :

- X(t): vecteur qui représente le comportement dynamique du système. Chaque élément est associé a un composant qui stocke l'énergie. Dim(X(t)) = nombre de composants qui stockent.
- H(X) : scalaire qui représente l'énergie totale stockée .
- W(t): vecteur des états dissipatifs non linéaires. Dim(W(t)) = Nombre de composants non linéaires qui dissipent.
- Z(W): matrice diagonale positive, contenant l'ensemble des fonctions dissipatives non linéaires $Dim(Z(W)) = Dim(W(t)) \times Dim(W(t))$

Les vecteurs d'entrées u(t) et de sorties $y_u(t)$ représentent le port externe des sources du système avec $Dim(u(t)) = Dim(y_u(t))$ =nombre de sources. Les vecteurs d'entrées d(t) et $y_d(t)$ représentent le port externe des contrôles du système avec $Dim(d(t)) = Dim(y_u(t))$ =nombre de contrôles. Le port externe des sources sert à interconnecter plusieurs SHPEs et le port externe des contrôles permet de commander le système. Par ailleurs, les fonctions $g_u(X(t), W(t), u(t), d(t))$ et $g_d(X(t), W(t), u(t), d(t))$ décrivent le comportement des sorties par rapport aux variables d'états et d'entrées.

Les relations entre ces variables sont structurées par les matrices systèmes suivantes :

- J: antisymétrique, traduit et structure les échanges de puissance entre les différents composants stockants.
- M : diagonale positive, indique les échanges de puissance entre les états dissipatifs non linéaires.
- R: semi définie positive, donne le transfert entre composants dissipatifs linéaires et composants stockants.
- K: semi définie positive, même caractère que R mais pour les états dissipatifs non linéaires.
- E_y : donne l'influence des états dissipatifs non linéaires sur les sorties.
- G_i, B_i : donnent l'influence des ports externes sur le système.
- A_y : donne l'influence des états dynamiques sur les sorties.

Nous allons montrer pourquoi la structure de ces systèmes garantit la loi de conservation d'énergie.

1.1.2 Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie est un principe physique selon lequel l'énergie totale d'un système isolé est invariante au cours du temps. Cela peut se traduire sous la forme d'un bilan de puissance donnée par :

$$P_{stockee} = P_{exterieure} - P_{dissiple}$$

On observe que la puissance totale stockée ne peut être qu'inférieure ou égale à la puissance totale issue des ports externes du fait de la positivité des puissances.

En ce qui concerne les SHPEs, l'énergie stockée $E_{stockee}(t)$ est égale à la fonction H(X(t)) (Hamiltonien). Ainsi la puissance stockée $P_{stockee}$ est donnée par :

$$P_{stockee} = E'_{stockee}(t) = \frac{d}{dt}H(X(t))$$

Par ailleurs, H(X) est une fonction composée, par conséquent $\frac{d}{dt}H(X(t)) = \frac{\partial H(X)^T}{\partial X} \frac{dX(t)}{dt}$. Ainsi, pour calculer le bilan de puissance de la représentation d'état (1.1), il suffit de multiplier la première équation par $\frac{\partial H(X)^T}{\partial X}$, ce qui nous donne :

$$\frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} \cdot \frac{dX(t)}{dt} = \underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T}}_{= \frac{\partial H(X)}{\partial X}} \cdot J \cdot \frac{\partial H(X)}{\partial X} - \frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} \cdot R \cdot \frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{= \frac{\partial H(X)}{\partial X}} \cdot K^{T} \cdot Z(W) \cdot W(t) \cdot \frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{= \frac{\partial H(X)}{\partial X}} + \frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} \cdot (G_{x} \cdot u(t) + B_{x} \cdot d(t))$$

On injecte la valeur W(t) issue de la deuxième équation du système (1.1) dans le bilan :

$$\frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} \cdot \frac{dX(t)}{dt} = -\frac{\overbrace{\partial H(X)}^{P_{dissip_{lineaire}}}}{\overbrace{\partial X}^{T} R \frac{\partial H(X)}{\partial X}} - \frac{\overbrace{\partial H(X)}^{P_{dissip_{non-lineaire}}}}{\overbrace{\partial X}^{T} K^{T} Z(W) \left[I + MZ(W)\right]^{-1} K \frac{\partial H(X)}{\partial X}} + \underbrace{y_{u}(t)^{T} \cdot u(t)}_{P_{ext,sources}} + \underbrace{y_{d}(t)^{T} \cdot d(t)}_{P_{ext,controles}}$$

 $P_{dissip_{lineaire}}$ et $P_{dissip_{non-lineaire}}$ sont positives car R et $Z(W) [I + M.Z(W)]^{-1}$ sont semi-définies positives [17]. On retrouve, par conséquent, un bilan de puissance conservatif :

$$P_{stockee} = \frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} \frac{dX(t)}{dt} = \underbrace{(P_{ext,sources} + P_{ext,controles})}_{P_{exterieures}} - \underbrace{(P_{dissip_{lineaire}} + P_{dissip_{non-lineaire}})}_{P_{dissipee \ge 0}}$$

On garantit la passivité du système en exprimant les fonctions de sorties ainsi :

$$g_u(\frac{\partial H(X)}{\partial X}, W(t), u(t), d(t)) = y_u(t) = \left(G_x - K^T Z(W) \left[I + M Z(W)\right]^{-1} G_w\right)^T \frac{\partial H(X)}{\partial X}$$

$$g_d(\frac{\partial H(X)}{\partial X}, W(t), u(t), d(t)) = y_d(t) = \left(B_x - K^T Z(W) \left[I + M Z(W)\right]^{-1} B_w\right)^T \frac{\partial H(X)}{\partial X}$$
(1.2)

Remarque:

Lors de la phase d'implémentation du modèle, nous avons calculé les sorties d'un système à l'aide de la définition de la passivité ci-dessus (eq 1.2). Les valeurs observées donnaient un résultat incohérent. Nous avons alors recalculé $y_u(t)$ et $y_d(t)$ à partir des variables du système puis estimer les nouvelles puissances extérieures $P_{ext,sources}$ et $P_{ext,controles}$ associées. Les valeurs de puissances obtenues étaient identiques à celles issues du bilan énergétique. Nous en avons déduit qu'il existe plusieurs manières d'exprimer les sorties telles que le bilan de puissance reste passif. Par conséquent les équations 1.2 ne semblent pas donner la solution unique aux valeurs des sorties. Ce problème d'unicité du formalisme Hamiltonien à ports est point important qui nécessite une étude approfondie dans une perspective future. Nous nous contenterons d'exprimer les sorties en fonctions des variables du système. Ainsi, la nouvelle RE d'un SHPE que nous utiliserons par la suite sera la suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = (J-R).\frac{\partial H(X)}{\partial X} - K^T.Z(W).W(t) + G_x.u(t) + B_x.d(t) \\ W(t) = K.\frac{\partial H(X)}{\partial X} - M.Z(W).W(t) + G_w.u(t) + B_w.d(t) \\ y_u(t) = A_y.\frac{\partial H(X)}{\partial X} + E_y.Z(W).W(t) + G_y.u(t) + B_y.d(t) \\ y_d(t) = g_d(X(t),W(t),u(t),d(t)) \end{cases}$$
(1.3)

Par ailleurs, nous ne développerons pas les équations de $y_d(t)$ car dans nos modèles le port externe des contrôles correspondra à une source de tension idéale avec d(t) = Tension de la source et $y_d(t) = 0$.

1.2 Dictionnaire de composants

Les pré-amplificateurs de guitares à lampes sont réalisés à l'aide de composants électroniques. On utilisera les modèles idéaux suivants :

- les condensateurs et bobines qui stockent l'énergie;
- les résistances et triodes (sans capacités parasites) qui dissipent l'énergie.

Nous devons exprimer ces composants dans le formalisme des SHPEs afin de modéliser le comportement d'un circuit électronique.

1.2.1 Stockage

Le Condensateur

La propriété d'un condensateur est de pouvoir stocker des charges électriques opposées sur ses armatures. Il en résulte une énergie de stockage qui peut se calculer de la manière suivante :

$$H(q) = \frac{q(t)^2}{2.C}$$

avec q(t): quantité de charge électrique et C: capacité électrique.

En choisissant q(t) comme état dynamique, on obtient les variables d'un SHPE égale à :

FIGURE 1.1 – Schéma électronique d'un condensateur

La Bobine

La bobine emmagasine de l'énergie autour du champ magnétique qu'elle génère lorsqu'un courant la traverse. La formule de l'énergie stockée nous donne :

$$H(\Phi) = \frac{\Phi(t)^2}{2.L}$$

avec $\Phi(t)$: flux magnétique et L: inductance.

Pour ce composant c'est $\Phi(t)$ qui est choisi comme état dynamique du SHPE : $dx(t) = \Phi(t) = \Phi(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\Phi(t)}{dt} = V_L(t) \\ H(x) &= \frac{\Phi(t)^2}{2.L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H(x)}{\partial x} = \frac{x(t)}{L} = \frac{\Phi(t)}{L} = i_L(t) \\ & \xleftarrow{V_L} \\ & \xleftarrow{V_L} \\ & \xleftarrow{U_L} \end{aligned}$$

FIGURE 1.2 – Schéma électronique d'une bobine

Remarque: Pour un ensemble de composants stockants d'énergie $H_i(x_i) = \frac{1}{2a_i}x_i(t)^2$, l'énergie totale H(X) s'exprime :

$$H(X) = \frac{1}{2} \underbrace{(x_1(t), \dots, x_i(t))}_{X(t)^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0\\ & \ddots \\ 0 & \frac{1}{a_i} \end{pmatrix}}_Q \underbrace{\begin{pmatrix} x_1(t)\\ \vdots\\ x_i(t) \end{pmatrix}}_{X(t)}$$

1.2.2 Dissipation

La Résistance

La résistance est un composant linéaire statique qui dissipe de l'énergie par effet Joule. Le courant qui la traverse sera toujours proportionnel à la tension à ses bornes. Les relations constitutives qui la définissent sont :

$$R.i_{\mathsf{R}}(t) = V_{\mathsf{R}}(t)$$
ou $\frac{1}{\mathsf{R}}.V_{\mathsf{R}}(t) = i_{\mathsf{R}}(t)$

Les valeurs de résistance se retrouvent dans la matrice R d'un SHPE.

/	V _R	
`		
•	R	

FIGURE 1.3 – Schéma électronique d'une résistance

La Triode

La triode est un composant non linéaire qui, comme la résistance, dissipe de l'énergie par effet Joule. On négligera l'effet des capacités parasites.



FIGURE 1.4 – Schéma et modèle électronique d'une triode

Les relations constitutives d'une triode sont définies de la manière suivante :

$$f_{GK}(V_{GK}).V_{GK}(t) = i_{GK}(t)$$

$$f_{PK}(V_{GK}, V_{PK}).V_{PK}(t) = i_{PK}(t)$$

Les fonctions $f_{GK}(V_{GK})$ et $f_{PK}(V_{GK}, V_{PK})$ sont non linéaires et dépendent du modèle de triode choisie. Nous utiliserons celui de Norman Koren pour le calcul de $f_{PK}(V_{GK}, V_{PK})$ et celui d'Ivan Cohen [10] pour le calcul de $f_{GK}(V_{GK})$ (fig 1.4 et annexe D).

Les états dissipatifs non linéaires du SHPE sont choisis ainsi :

$$w_{GK}(t) = V_{GK}(t)$$
 et $w_{PK}(t) = V_{PK}(t)$
 $Z_{GK}(w_{GK}) = f_{GK}(V_{GK})$ et $Z_{PK}(w_{GK}, w_{PK}) = f_{PK}(V_{GK}, V_{PK})$

Pour un circuits comprenant N triodes, on aura $W(t) = \begin{pmatrix} w_{GK_1}(t) \\ w_{PK_1}(t) \\ \vdots \\ w_{GK_N}(t) \end{pmatrix}$ et $Z(W) = \begin{pmatrix} Z_{GK_1}(w_{GK_1}) & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & Z_{PK_1}(w_{GK_1}, w_{PK_1}) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & Z_{GK_N}(w_{GK_N}) & 0 \\ 0 & & \dots & \dots & 0 & Z_{PK_N}(w_{GK_N}, w_{PK_N}) \end{pmatrix}$

Par ailleurs, les modèles de Norman Koren et d'Ivan Cohen garantissent le comportement passif de la triode i.e. $Z_{GK}(w_{GK})$ et $Z_{PK}(w_{GK}, w_{PK}) \ge 0$ (voir annexe D). Ainsi on vérifie le fait que Z(W) est diagonale positive.

1.3 Exemples : modélisation de circuits simples

Nous allons maintenant décrire les méthodes pour modéliser les circuits électroniques sous la forme d'un SHPE. On traitera deux exemples simples :

Le premier est un circuit linéaire (fig 1.5) mis en équation à partir des lois de Kirchhoff.

Le second est modélisé à partir des Bonds Graphs (voir annexe B) et illustre le cas non linéaire des composants dissipatifs (fig 1.6).

1.3.1 Circuit RLC



FIGURE 1.5 – Circuit RLC

Définition des ports externes

Les sources du systèmes sont choisies telles que $u(t) = \begin{pmatrix} V_e(t) \\ i_s(t) \end{pmatrix}$ représente les entrées, et $y_u(t) = \begin{pmatrix} i_e(t) \\ V_s(t) \end{pmatrix}$ les sorties. Le produit scalaire $y_u(t)^T . u(t) = i_e(t) . V_e(t) + i_s(t) . V_s(t)$ est homogène à une puissance, elle correspond à $P_{ext,sources}$.

Dans cette exemple il n'y a pas de port externe de contrôles, donc d(t) est de dimension nulle et $P_{ext,controles} = 0$.

Enumération des états

C'est un circuit qui ne compte aucun composant dissipatif non linéaire : W(t) et Z(W) sont donc de dimension nulle.

Les états dynamiques $X(t) = (x_1(t), x_2(t))^T$ sont définis à partir des deux composants qui stockent l'énergie :

Pour la bobine (L) :

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \Phi_L(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_1(t)}{dt} = \frac{\Phi_L(t)}{dt} = V_L(t) \\ H_1(x) &= \frac{\Phi_L(t)^2}{2L} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1} = \frac{x_1(t)}{L} = \frac{\Phi_L(t)}{L} = i_L(t) \end{aligned}$$

Pour le condensateur (C) :

$$\begin{aligned} x_2(t) &= q_C(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = \frac{dq_C(t)}{dt} = i_C(t) \\ H_2(x) &= \frac{q_C(t)^2}{2.C} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} = \frac{x_2(t)}{C} = \frac{q_C(t)}{C} = V_C(t) \end{aligned}$$

Les vecteurs d'états sont construits à partir des états dynamiques :

$$\Rightarrow \quad \frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial H(X)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Mise équation du circuit

Le but est de calculer à l'aide des lois de Kirchhoff la mise en équation du circuit :

Loi des noeuds :

$$\begin{cases} i_e(t) &= i_L(t) \left(=\frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1}\right) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1} - i_s(t) \end{cases}$$

Loi des mailles :

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = V_e(t) - R_1 \frac{\partial H_1(x_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} \\ V_s(t) = \frac{\partial H_2(x_2)}{\partial x_2} - R_2 i_s(t) \end{cases}$$

On obtient la RE suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = \left(\overbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{J} - \overbrace{\begin{pmatrix} R_{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{R}\right) \frac{\partial H(X)}{\partial X} + \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}^{G_{x}} u(t) \\ y_{u}(t) = \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}_{A_{y}} \frac{\partial H(X)}{\partial X} + \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R_{2} \end{smallmatrix}\right)}_{G_{y}} u(t) \end{cases}$$

On retrouve bien que J est antisymétrique et R semi définie positive. Par ailleurs, K, M, E_y , B_x , B_y , B_w , G_w sont nulles car il n'y a ni d'états dissipatifs non linéaires ni d'entrées de contrôle : il s'agit d'un SHP standard.

1.3.2 Circuit à dissipation non linéaire



FIGURE 1.6 – Etage d'amplification à triode

Le montage de la figure (1.6) correspond à un étage typique d'amplification que l'on retrouve dans la plupart des pré-amplificateurs de guitare.

Définition des ports externes

Le choix des sources est défini ainsi :

$$\begin{array}{ll} u(t) &= \begin{pmatrix} V_e(t) \\ i_s(t) \end{pmatrix} \\ y_u(t) &= \begin{pmatrix} i_e(t) \\ V_s(t) \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow y_u(t)^T . u(t) = i_e(t) . V_e(t) + i_s(t) . V_s(t) = P_{ext, sources}$$

 V_b est une source de tension continue considérée comme idéale, elle fixe le point de fonctionnement de la triode. Nous la définissons comme une entrée de contrôle : $d(t) = V_b$.

Enumération des états

On a pour les états dissipatifs non linéaires :

$$W(t) = \begin{pmatrix} w_{GK}(t) \\ w_{PK}(t) \end{pmatrix} \text{ et } Z(W) = \begin{pmatrix} Z_{GK}(w_{GK}) & 0 \\ 0 & Z_{PK}(w_{GK}, w_{PK}) \end{pmatrix}$$

Pour la partie dynamique, il n'y a qu'un seul composant stockant (C_k) :

$$\begin{aligned} X(t) &= q_{C_K}(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dX(t)}{dt} = \frac{q_{C_K}(t)}{dt} \\ H(X) &= \frac{q_{C_K}(t)^2}{2.C_K} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial H(X)}{\partial X} = \frac{X(t)}{C_K} = \frac{q_{C_K}(t)}{C_K} \end{aligned}$$

Mise en équation du circuit

La figure 1.7 nous donne le Bond Graph du circuit. Cet outil permet de construire un schéma bloc qui nous servira à mettre en équation le système. L'annexe B explique en détails le principe mathématique de cette représentation.



FIGURE 1.7 – Bond Graph et schéma bloc associé de l'étage d'amplification

Les équations du systèmes se déterminent à partir du schéma bloc :

$$\frac{dX(t)}{dt} = Z_{GK}(w_{GK}) + Z_{PK}(w_{GK}, w_{PK}) - \frac{1}{R_k} \frac{\partial H(X)}{\partial X}$$

$$\begin{cases} w_{GK}(t) = V_e - R_e Z_{GK}(w_{GK}) - \frac{\partial H(X)}{\partial X} \\ w_{PK}(t) = -\frac{\partial H(X)}{\partial X} + V_b - R_b \left(i_s + Z_{PK}(w_{GK}, w_{PK})\right) \\ \begin{cases} i_e = Z_{GK}(w_{GK}) \\ V_s = V_b - R_b \left(i_s + Z_{PK}(w_{GK}, w_{PK})\right) \end{cases}$$

On obtient le SHPE suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = -\frac{1}{R_k} \frac{\partial H(X)}{\partial X} & -\overline{(-1-1)} Z(W) W(t) \\ W(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}_K \frac{\partial H(X)}{\partial X} & -\overline{\begin{pmatrix} R_e & 0 \\ 0 & R_b \end{pmatrix}} Z(W) W(t) & +\overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R_b \end{pmatrix}} u(t) & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{R_y} \frac{\partial W(t)}{\partial t} \\ y_u(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -R_b \end{pmatrix}}_{E_y} .Z(W) .W(t) & +\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -R_b \end{pmatrix}}_{G_y} .u(t) & +\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{B_y} .d(t) \end{cases}$$

Avec R semi-définie positive, M diagonale positive et J, G_x, B_x, A_y de dimension nulle.

2 Mise en équation d'un réseau de systèmes

La complexité d'un circuit électronique croit avec le nombre de composants. Les pré-amplificateurs de guitare, par exemple, se peuvent se décomposer en plusieurs étages électroniques de traitement incluant en moyenne deux à quatre triodes. Il est donc inconcevable de mettre en équations ces circuits à la main.

Cependant, il est possible avec le formalisme Hamiltonien à ports de modéliser des systèmes complexes à partir de sous-systèmes simples [5, 16] (fig 2.1).



FIGURE 2.1 – Schéma d'interconnexion SHPE

Dans notre cas, seule l'étude des connexions série de dipôle nous intéresse. En effet, les pré-amplificateurs de guitares peuvent se décomposer en cascade d'étages de traitement n'ayant qu'une seule entrée et une seule sortie électronique, i.e un seul port de sources externes. Les entrées de contrôle n'interviennent pas dans le couplage.

Ainsi nous expliquerons comment calculer la représentation d'état issue d'une interconnexion série entre deux SHPE. Nous développerons ensuite l'algorithme qui généralise le calcul pour N connexions série. Il nous permettra de construire la RE du SHPE d'un circuit complexe à partir de sous étages électroniques simples.

2.1 Connexion série de deux systèmes

La méthode présentement développée a été inspiré par la thèse de Stéphan Tassart [15], qui inclut une étude sur les mises en réseau des systèmes.

2.1.1 Interactions des sources

Cette première sous partie a pour but de déterminer les relations d'interaction entre les ports sources de deux SHPE mis en série. Cette étape est nécessaire pour déterminer la représentation d'état du système global .

Par ailleurs, il faut définir une convention sur le sens du courant d'entrée et de sortie d'un étage *i*. Le choix a été fixé de cette façon : pour un signal entrant V_{e_i} , i_{e_i} sera sortant ; et pour un signal sortant V_{s_i} , i_{s_i} sera entrant.

La figure 2.2 montre le couplage des tensions et des courants par rapport à la convention choisie.



FIGURE 2.2 – Connexion série de deux étages éléctroniques

Le port des sources externes est logiquement défini comme suit :

$$\begin{cases} u_i(t) = \begin{pmatrix} V_{e_i} \\ i_{s_i} \end{pmatrix} \\ y_{i_u}(t) = \begin{pmatrix} i_{e_i} \\ V_{s_i} \end{pmatrix} \end{cases}$$

Ce qui nous donne le schéma du SHPE global suivant :



FIGURE 2.3 – Connexion série de deux SHPE

Nous pouvons ainsi poser les équations d'entrées - sorties du système :

$$u_{1}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{11} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{2u}}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} P_{12} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{2u}}(t) \\ u_{2}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{21} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{1u}}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} P_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{2u}}(t) \\ u_{2}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} P_{31} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{31}}y_{1u}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} P_{32} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P_{32}}y_{2u}(t)$$

$$(2.1)$$

 $P_{n,m}$ sont les matrices de passage qui caractérisent la mise en réseau. Leurs valeurs seront différentes en fonction du type d'interconnexion : série, parallèle ou rebouclage.

2.1.2 Calcul du système global

On rappelle que pour un étage i la représentation d'état du SHPE s'exprime de la manière suivante (eq 1.3) :

$$\begin{cases} \frac{dX_{i}(t)}{dt} = \overbrace{(J_{i} - R_{i})}^{A_{x_{i}}} \cdot \frac{\partial H_{i}(X_{i})}{\partial X_{i}} \quad \overbrace{-K_{i}^{T}}^{E_{x_{i}}} \cdot Z_{i}(W_{i}) \cdot W_{i}(t) + G_{x_{i}} \cdot u_{i}(t) + B_{x_{i}} \cdot d_{i}(t) \\ W_{i}(t) = \overbrace{K_{i}}^{A_{w_{i}}} \cdot \frac{\partial H_{i}(X_{i})}{\partial X_{i}} \quad \overbrace{-M_{i}}^{E_{w_{i}}} \cdot Z_{i}(W_{i}) \cdot W_{i}(t) + G_{w_{i}} \cdot u_{i}(t) + B_{w_{i}} \cdot d_{i}(t) \\ y_{i_{u}}(t) = A_{y_{i}} \cdot \frac{\partial H(X_{i})}{\partial X_{i}} + E_{y_{i}} \cdot Z_{i}(W_{i}) \cdot W_{i}(t) + G_{y_{i}} \cdot u_{i}(t) + B_{y_{i}} \cdot d_{i}(t) \end{cases}$$

Les variables d'état du SHPE global valent :

$$\frac{dX(t)}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dX_1(t)}{dt} \\ \frac{dX_2(t)}{dt} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial H(X)}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial H_1(X_1)}{\partial X_1} \\ \frac{\partial H_2(X_2)}{\partial X_1} \end{pmatrix} \\
W(t) = \begin{pmatrix} W_1(t) \\ W_2(t) \end{pmatrix}, \quad Z(W) = \begin{pmatrix} Z_1(W_1) & 0 \\ 0 & Z_2(W_2) \end{pmatrix}$$

Pour l'entrée de contrôle, $d(t) = \begin{pmatrix} d_1(t) \\ d_2(t) \end{pmatrix}$.

La mise en équation du système total consiste à injecter les valeurs explicites de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ dans leur SHPE respectif :

Etape 1 : Explicitation des entrées

Il faut exprimer à l'aide des équations de couplage 2.1 $u_1(t)$ et $u_2(t)$ tel que :

$$\begin{aligned} u_1(t) &= f_1\left(\frac{\partial H_i(X_i)}{\partial X_i}, Z_i(W_i).W_i(t), u(t), d_i(t)\right) \\ u_2(t) &= f_2\left(\frac{\partial H_i(X_i)}{\partial X_i}, Z_i(W_i).W_i(t), u(t), d_i(t)\right) \end{aligned}$$

Etape 2 : Intégration des entrées explicites dans les équations

On injecte ensuite les nouvelles valeurs explicites de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ dans leur SHPE respectif. Ainsi le SHPE global se construit à partir des matrices de permutations et des matrices systèmes des sous-SHPEs :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = A_x \cdot \frac{\partial H(X)}{\partial X} + E_x \cdot Z(W) \cdot W(t) + G_x \cdot u(t) + B_x \cdot d(t) \\ W_i(t) = A_w \cdot \frac{\partial H(X)}{\partial X} + E_w \cdot Z(W) \cdot W(t) + G_w \cdot u(t) + B_w \cdot d(t) \\ y_u(t) = A_y \cdot \frac{\partial H(X)}{\partial X} + E_y \cdot Z(W) \cdot W(t) + G_y \cdot u(t) + B_y \cdot d(t) \end{cases}$$

Avec A_j, E_j, G_j , et B_j construites à partir de $P_{n,m}$, $A_{j,i}$, $E_{j,i}$, $G_{j,i}$, et $B_{j,i}$ où j = [x, w, y] correspond au type d'équation et i = [1, 2] correspond à l'étage du SHPE.

Les calculs explicites sont disponibles en annexe C.

2.2 Génération automatique des équations

On programme une fonction *Serie* avec Matlab qui permet de construire le SHPE global avec les calculs développés en annexe C :

$$[SHPE] = Serie(SHPE1, SHPE2)$$

La structure SHPE contient les matrices systèmes d'un SHPE.

Pour calculer une mise en série de N sous-SHPEs, il suffit d'appeler itérativement la fonction *Serie*. On développe une nouvelle fonction *SerieN* qui prend en argument une liste de sous-SHPEs et qui retourne le SHPE global : function [SHPE] = SerieN(ListeSHPE) temp = nullfor $k = 1 \rightarrow N$ do temp = Serie(temp, ListeSHPE(k))end for return temp; end function

Nous pourrons ainsi calculer automatiquement la valeur des matrices d'un SHPE complexe à partir d'un ensemble de SHPEs plus simples.

3 Discrétisation et simulation

3.1 Discrétisation

Nous avons vu précédemment comment mettre en équation un circuit sous forme d'un SHPE. L'étape suivante consiste à discrétiser ces systèmes pour les simuler dans le domaine numérique. Le schéma de discrétisation obtenu permet de garder les propriétés de conservation comme nous allons le voir. Nous tenons à signaler au lecture que cette étape est très importante car elle touche le cœur de notre sujet.

3.1.1 Discrétisation des états

On approxime $\frac{dX(t)}{dt}$ et $\frac{\partial H(X)}{\partial X}$ par leur différence finie à l'ordre 1 [4, 7] :

$$\frac{dX(t)}{dt} \rightarrow \delta_T X_k = \frac{X_{k+1} - X_k}{T}$$

$$\frac{\partial H(X)}{\partial X} \rightarrow \delta_{X_k} H(X_k) = \begin{pmatrix} \frac{H_i(x_{i_{k+1}}) - H_i(x_{i_k})}{x_{i_{k+1}} - x_{i_k}} \\ \vdots \\ \frac{H_N(x_{N_{k+1}}) - H_N(x_{N_k})}{x_{N_{k+1}} - x_{N_k}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}Q \begin{pmatrix} \frac{x_{i_{k+1}}^2 - x_{i_k}^2}{x_{i_{k+1}} - x_{i_k}} \\ \vdots \\ \frac{x_{N_{k+1}}^2 - x_{N_k}}{x_{N_{k+1}} - x_{N_k}} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}Q \left(X_{k+1} + X_k \right)$$

W(t) se discrétise directement en W_k .

La RE discrète du SHPE est par conséquent égale à :

$$\begin{pmatrix}
\frac{\delta_T X_k}{X_{k+1} - X_k} \\
T \\
W_k \\
y_{u^k} \\
\end{bmatrix} = (J - R) \frac{1}{2}Q(X_{k+1} + X_k) \\
\frac{\delta_{X_k}H(X_k)}{1} \\
\frac{\delta_{X_k}H(X_k)}{1} \\
-K^T Z(W_k)W_k \\
-K^T Z(W_k)W_k \\
+G_x u_k \\
+B_x d_k \\
-MZ(W_k)W_k \\
+G_y u_k \\
+B_y d_k \\
(3.1)$$

Elle peut se réécrire sous la forme implémentable suivante :

$$\begin{cases} X_{k+1} = \Lambda_{-}^{-1}\Lambda_{+}X_{k} & -T\Lambda_{-}^{-1}K^{T}Z(W_{k})W_{k} & +T\Lambda_{-}^{-1}G_{x}u_{k} & +T\Lambda_{-}^{-1}B_{x}d_{k} \\ W_{k} = K_{\frac{1}{2}}Q(X_{k+1}+X_{k}) & -MZ(W_{k})W_{k} & +G_{w}u_{k} & +B_{w}d_{k} \\ y_{k} = A_{y\frac{1}{2}}Q(X_{k+1}+X_{k}) & +E_{y}Z(W_{k})W_{k} & +G_{y}u_{k} & +B_{y}d_{k} \end{cases}$$

$$(3.2)$$

avec $\Lambda_{-} = (I - T(J - R)\frac{1}{2}Q)$ et $\Lambda_{+} = (I + T(J - R)\frac{1}{2}Q).$

Ce schéma numérique est implicite en W_k . Par conséquent, en utilisant l'algorithme de Newton-Raphson [8], la fonction qui permet de simuler le système à l'instant k se programme ainsi :

function SIMULATION (X_k, W_k, u_k, d_k)

$$\begin{split} W_{k,0} &= W_k \\ \text{for } n = 1 \to NbIt \text{ do} \\ &X_{k+1} = \Lambda_{-}^{-1}\Lambda_{+}X_k - T\Lambda_{-}^{-1}K^T.Z(W_{k,n-1}).W_{k,n-1} + T\Lambda_{-}^{-1}G_x.u_k + T\Lambda_{-}^{-1}B_x.d_k \\ &F_{NR}(W)_{|_{W_{k,n-1}}} = W_{k,n-1} - K.\frac{1}{2}Q(X_{k+1} + X_k) + M.Z(W_k).W_k - G_w.u_k - B_w.d_k \\ &W_{k,n} = W_{k,n-1} - Jacobien(F_{NR}(W)_{|_{W_{k,n-1}}})^{-1}.F_{NR} \\ \text{end for} \\ &y_k = A_y.\frac{1}{2}Q(X_{k+1} + X_k) + E_y.Z(W_{k,n}).W_{k,n} + G_y.u_k + B_y.d_k \\ &X_k = X_{k+1} \\ &W_k = W_{k,n} \\ &\text{return } y_k, X_k, W_k \\ \text{end function} \end{split}$$

Pour que l'algorithme converge en NbIt itérations il faut que la fonction $F_{NR}(W)$ soit monotone entre $W = W_{k,0}$ et $W = W_{sol}$ tel que $F_{NR}(W_{sol}) = 0$.

3.1.2 Bilan de puissance discret

Il faut vérifier si le bilan de puissance du SHPE discret garantit la conservation de l'énergie. Tout comme la version continue, il faut multiplier la première équation du système 3.1 par $\delta_{X_k} H(X_k)^T$ pour obtenir le bilan de puissance discret :

$$\underbrace{\delta_{X_k} H(X_k)^T \delta_T X_k}_{F(X_k)^T J \delta_{X_k} H(X_k)^T J \delta_{X_k} H(X_k)}_{0 \to \delta_{X_k} H(X_k)} - \underbrace{\delta_{X_k} H(X_k)^T R \delta_{X_k} H(X_k)}_{P_{dissip_{NL,discret}}} - \underbrace{\delta_{X_k} H(X_k)^T (G_x - K^T Z(W_k) [I + MZ(W_k)]^{-1} K \delta_{X_k} H(X_k)}_{P_{ext,sources,discret}} + \underbrace{\delta_{X_k} H(X_k)^T (B_x - K^T Z(W_k) [I + MZ(W_k)]^{-1} B_w) d_k}_{P_{ext,controles,discret}}$$

$$P_{stockee,discret} = -\underbrace{\left(P_{dissip_{lineaire,discret}} + P_{dissip_{NL,discret}}\right)}_{P_{dissip,discret} \ge 0} + \underbrace{\left(P_{ext,sources,discret} + P_{ext,controles,discret}\right)}_{P_{ext,discret}}$$

La discrétisation réalisée en 3.1.1 a été construite de sorte que ce bilan discret garantisse les mêmes propriétés que sa version continue c'est-à-dire $P_{stockee,discret} \leq P_{ext,discret} - P_{dissip,discret}$. La stabilité est donc assurée.

3.2 Simulation

Nous allons maintenant implémenter avec Matlab la méthode de discrétisation vue précédemment. Deux circuits seront simulés : l'étage à triode vu en première partie (fig 1.6), et un pré-amplificateur complet existant dans le commerce. Les simulations seront comparées avec le logiciel LTSpice [12] conçu à partir du moteur SPICE. Ce dernier nous servira de référence pour caractériser l'erreur de nos modèles.

3.2.1 Etage à triode

Protocole et description des mesures

La figure 3.1 montre les formes d'ondes des sorties $V_s(t)$ des deux simulateurs par rapport à une entrée sinusoïdale $V_e(t)$ d'amplitude 1V et de fréquence $F_{V_e} = 400$ Hz. Deux mesures de simulations sont réalisées pour le SHPE. La première est faite pour NbIt = 2, et la deuxième pour NbIt = 3. Les sorties sont normalisées car la sauvegarde de données sur Ltspice ne doit pas dépasser 1V d'amplitude.

La figure 3.2 caractérise l'erreur absolue entre les deux simulations. L'amplitude de l'entrée est toujours fixée à 1V. Le nombre d'itérations et la fréquence du signal d'entrée sont les paramètres qui varient entre les mesures.

Les figures 3.3 et 3.4 réitèrent le protocole précédent mais pour une amplitude du signale d'entrée égale à 10 V.

La fréquence d'échantillonnage F_{ech} du signal d'entrée est fixée à 44100Hz.

Résultats



FIGURE 3.1 – Sorties des simulations pour une amplitude d'entrée = 1V et de fréquence = 400Hz



FIGURE 3.2 – Erreurs absolues entre les deux simulations pour une amplitude d'entrée = $1\mathrm{V}$



FIGURE 3.3 – Sorties des simulations pour une amplitude d'entrée = 10V et de fréquence = 400Hz



FIGURE 3.4 – Erreurs absolues entre les deux simulations pour une amplitude d'entrée = 10V

Analyse

Les figures 3.2 et 3.4 montrent que plus les variations du signal d'entrée sont importantes (fréquence et amplitude élevées) plus le nombre itérations doit être élevé pour faire diminuer l'erreur. Cela s'explique par le fait que la solution de l'équation $F_{NR}(W) = 0$ est paramétrée par l'entrée du système. Par conséquent si l'entrée varie fortement, l'algorithme met du temps à converger vers la bonne solution.

3.2.2 Simulation d'un pré-amplificateur du commerce

L'objectif premier du stage est de simuler un pré-amplificateur de guitare complet. Ainsi, nous avons dû sélectionner un produit issu du commerce. Le choix s'est porté sur le Tiny Terror de la marque Orange. Avant d'avoir pu implémenter le schéma numérique, plusieurs étapes ont été nécessaires pour modéliser le préamplificateur.

Il a fallut d'abord découper en plusieurs sous étages élémentaires le circuit(fig 3.5), puis construire en utilisant l'algorithme défini en section 2.2 le SHPE global. La discrétisation a ensuite été implémentée à l'aide du schéma numérique 3.2.



FIGURE 3.5 – Circuit électronique du Tiny Terror

	Etages	A_x	E_x	G_x	B_x	A_w	E_w	G_w	B_w	A_y	E_y	G_y	B_y
	1	$-\frac{1}{R_{1}}$	[]	$\left(\frac{1}{R1}\ 1\right)$	[]	[]	[]	[]	[]	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{R1} \\ -1 \end{pmatrix}$	[]	$\begin{pmatrix} -\frac{1}{R1} & 1\\ -1 & -R2 \end{pmatrix}$	[]
	2 et 5	$-\frac{1}{Rk}$	$(1 \ 1)$		[]	$-(\frac{1}{1})$	$-\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Rb \end{smallmatrix} ight)$	$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Rb \end{smallmatrix} \right)$	$\begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$		$\left(egin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -Rb \end{array} ight)$	$\left(egin{array}{cc} 0 & 0 \ 0 & -Rb \end{array} ight)$	$\begin{pmatrix} 0\\1 \end{pmatrix}$
	3	$-\frac{1}{R3+R4}$	[]	$\left(\frac{1}{R3+R4} \ \frac{R4}{R3+R4}\right)$	[]	[]	[]	[]	[]	$-\left(\begin{array}{c}-\frac{1}{R3+R4}\\\frac{R4}{R3+R4}-1\end{array}\right)$	[]	$\begin{pmatrix} \frac{1}{R3+R4} & \frac{R4}{R3+R4} \\ 1-\frac{R3}{R3+R4} & -\frac{R3R4}{R3+R4} \end{pmatrix}$	[]
ſ	4	$-\left(\frac{1}{R5} + \frac{1}{R6}\right)$	[]	$\left(\frac{1}{R6} \ 1\right)$	[]	[]	[]	[]	[]	$-\left(\begin{array}{c}-\frac{1}{R6}\\-1\end{array}\right)$	[]	$\begin{pmatrix} \frac{1}{R6} & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	[]
	6	$-\frac{1}{R7+R8}$	[]	$\left(\frac{1}{R7+R8} \ \frac{R8}{R7+R8}\right)$	[]	[]	[]	[]	[]	$-\left(egin{array}{c} -rac{1}{R7+R8}\ rac{R8}{R7+R8}-1\end{array} ight)$	[]	$\begin{pmatrix} \frac{1}{R7+R8} & \frac{R8}{R7+R8} \\ 1-\frac{R7}{R7+R8} & -\frac{R7R8}{R7+R8} \end{pmatrix}$	[]
	7	[]	[]	$(0 \ 1)$	[]	[]	[]	[]	[]	$\left(\begin{array}{c} 0\\ -1 \end{array} \right)$	[]	$\begin{pmatrix} \frac{1}{R9+R10} & \frac{R10}{R9+R10} \\ \frac{R10}{R9+R10} & R10(\frac{R10}{R9+R10}-1) \end{pmatrix}$	[]

TABLE 3.1 – Matrices des SHPE de chaque sous étage

Résultats préliminaires et analyse des problèmes

Le protocole de mesure reste identique à celui de la simulation précédente. Par ailleurs, sachant que la tension d'une guitare ne dépasse pas 1V, il nous a semblé inutile de traiter le cas où l'amplitude du signal d'entrée $V_e(t)$ valait 10V.



FIGURE 3.6 – Sorties des simulations pour une amplitude d'entrée = 1V et de fréquence = 400Hz



FIGURE 3.7 – Erreurs absolues entre les deux simulations pour une amplitude d'entrée = $1\mathrm{V}$

On constate à partir de la figure 3.7 que l'erreur est très importante même si l'on augmente le nombre d'itérations. Cela provient des variations locales de la fonction $F_{NR}(W_k)$ causées par l'ajout d'une deuxième triode. En effet, le critère de convergence n'est plus respecté car $F_{NR}(W_k)$ n'est plus monotone entre $[W_{k,0}; W_{sol}]$. Nous allons voir comment résoudre ce problème pour améliorer la convergence des calculs.

Améliorations

Amélioration 1 : Augmentation de la fréquence d'échantillonnage

La première amélioration consiste à augmenter la fréquence d'échantillonnage F_{ech} . Cela permet de réduire l'écart entre $W_{k,0}$ et W_{sol} et donc de limiter les variations locales de $F_{NR}(W)$. Ainsi, le but est d'estimer la fréquence F_{ech} minimale qui permet de respecter le critère de convergence dans l'algorithme de Newton-Raphson.

La figure 3.8 montre que pour un nombre d'itération fixé à 3, l'algorithme converge pour une fréquence d'échantillonnage égale à 384 kHz. En effet, à partir de cette fréquence l'erreur moyenne est largement atténuée par rapport au résultat précédent et reste constante. Cette première amélioration permet d'augmenter la précision de la simulation. Cependant, le fait d'augmenter la fréquence d'échantillonnage implique une consommation plus élevée en ressources CPU. Une amélioration supplémentaire décrite dans la section suivante permettra d'abaisser cette fréquence F_{ech} .



FIGURE 3.8 – Amélioration 1 : Erreur absolue moyenne entre les deux simulations en fonction F_{Ve} pour NbIt = 3

Amélioration 2 : Moyenne entre $W_{k,n}$ et $W_{k,n-1}$

La deuxième amélioration permet de limiter l'influence d'une dérivée à pente nulle ou faible. En effet, si la tangente de $F_{NR}(W_{k,n-1})$ est faible alors $W_{k,n}$ sera éloigné de $W_{k,n-1}$. On augmente ainsi le risque de divergence. Pour limiter cette effet, on calcule la solution à l'itération n comme la moyenne entre $W_{k,n}$ et $W_{k,n-1}$. Cette amélioration permet de faire converger l'algorithme pour une fréquence F_{ech} plus faible : on passe de 384 kHz (fig 3.8) à 192 kHz (fig 3.9). Il est maintenant envisageable d'implémenter ce modèle pour la simulation temps réel.



FIGURE 3.9 – Amélioration 2 : Erreur absolue moyenne entre les deux simulations en fonction F_{Ve} pour NbIt = 3

La nouvelle fonction *Simulation* a été redéfinie pour prendre en compte cette amélioration :

```
function SIMULATION(X_k, W_k, u_k, d_k)

W_{k,0} = W_k

for n = 1 \rightarrow NbIt do

X_{k+1} = \Lambda_-^{-1}\Lambda_+X_k - T\Lambda_-^{-1}K^T.Z(W_{k,n-1}).W_{k,n-1} + T\Lambda_-^{-1}G_x.u_k + T\Lambda_-^{-1}B_x.d_k

F_{NR}(W)|_{W_{k,n-1}} = W_{k,n-1} - K.\frac{1}{2}Q(X_{k+1} + X_k) + M.Z(W_k).W_k - G_w.u_k - B_w.d_k

W_{k,n} = W_{k,n-1} - Jacobien(F_{NR}(W)|_{W_{k,n-1}})^{-1}.F_{NR}

W_{k,n} = \frac{W_{k,n}+W_{k,n-1}}{2} // Amélioration 2

end for

y_k = A_y.\frac{1}{2}Q(X_{k+1} + X_k) + E_y.Z(W_{k,n}).W_{k,n} + G_y.u_k + B_y.d_k

X_k = X_{k+1}

W_k = W_{k,n}

return y_k, X_k, W_k

end function
```

Conclusion

Le développement d'un simulateur de pré-amplificateur de guitare implique de résoudre une problématique liée à la performance des calculs numériques. L'objectif du stage a donc été de trouver un modèle qui permettait d'offrir une bonne précision et une faible consommation CPU.

Ainsi, nous nous sommes orientés vers un nouveau formalisme, les Hamiltoniens à ports, qui permet de garantir la stabilité des systèmes en s'appuyant sur la loi de la conservation d'énergie. Cette modélisation physique nous a donc paru une bonne approche pour atteindre le degré de précision souhaité.

Par conséquent, nous avons dans un premier temps défini la méthode qui permettait de modéliser un circuit avec ce formalisme. Puis dans un second temps, nous avons développé un programme informatique qui génère une mise en équation automatique pour concevoir des simulations de circuits complexes. Enfin la dernière étape consistait à élaborer l'algorithme de discrétisation pour simuler le modèle continu.

Les résultats obtenus montrent qu'il est possible avec les Hamiltoniens à ports d'atteindre un degré de précision élevé. Aussi, suite à une amélioration sur la méthode de discrétisation, l'objectif du temps réel a pu être envisagé. Un plugin VST est d'ailleurs en cours de développement, la programmation s'effectuera avec la bibliothèque JUCE [11].

Il reste cependant un point à améliorer. En effet, la génération automatique d'équation d'un système complexe nécessite de déterminer à la main les sous-SHPEs. Il serait intéressant, dans une perspective future, de développer un algorithme qui calcule directement la mise en équation du circuit à partir d'une liste de composants.

Pour conclure, ce stage m'a permis d'apprendre une nouvelle manière de modéliser des systèmes physiques et d'aborder les problématiques liées à la simulation temps réel. J'ai pu découvrir le monde de la recherche et de ce qu'il permet d'accomplir : la réflexion et la démarche scientifique ont élevé mon éveil personnel.

Bibliographie

- C. Melchiorri A. Macchelli. Model reduction for port-hamiltonian systems, 2011.
- [2] Arjan van der Schaft, Dimitri Jeltsema. Port-HamiltonianSystems, 2009.
- [3] C. Batlle Arnau, I. Massana Hugas, and Mezquita. Representation of a general composition of dirac structures. 2011.
- [4] Stefan Bilbao. Numerical Sound Synthesis : Finite Difference Schemes and Simulation in Musical Acoustics. Wiley edition, 2009.
- [5] Gianni Borghesan. *Passive Simulation and Interconnection*. PhD thesis, Universtà di Bologna, 2008.
- [6] Peter C. Breedveld. Port-based modeling of dynamic systems, 2005.
- [7] Juliette Chabassier. Modélisation et Simulation Numérique d'un Piano par Modèles Physiques. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2012.
- [8] P. Deuflhard. Newton Methods for Nonlinear Problems. Affine Invariance and Adaptive Algorithms. Springer series in computational mathematics edition, 2004.
- [9] Peter C. Breedveld Goran Golo, Arjan van der Schaft and Bernhard M. Maschke. Hamiltonian formulation of bond graphs.
- [10] T. Hélie I. Cohen. Measures and parameter estimation of triodes, for the realtime simulation of a multi-stage guitar preamplifier. 129th Convention of the AES, SF USA, 2009.
- [11] JUCE. Bibliothèque de développement vst. http://www.rawmaterialsoftware.com/juce.php.
- [12] LTSpice. Simulateur de circuits électroniques. http://www.linear.com/designtools/software/.
- [13] Rostyslav V. Polyuga. Model Reduction of Port-Hamiltonian Systems. PhD thesis, University of Groningen, 2010.

- [14] S. Stramigioli, C. Secchi, A.J. van der Schaft, and C. Fantuzzi. Sampled data systems passivity and discrete port-hamiltonian systems. *IEEE Transactions* on Robotics, 21(4):574–587, August 2005.
- [15] Stéphan Tassart. Modelisation, simulation et analyse des instruments à vents avec retards fractionnaires. PhD thesis, Université Paris 6, 1999.
- [16] S. Stramigioli V. Duindam, A. Macchelli and H. Bruyninckx. Modeling and Control of Complex Physical Systems. Springer edition, 2009.
- [17] Jean Voedts. Cours de mathématiques. Ellipses edition, 2002.
- [18] Wolfgang Borutzky. Bond Graph Methodology. Springer edition, 2010.

ANNEXES

A Généralités sur les systèmes Hamiltoniens à ports

Le complément d'information sur les systèmes Hamiltoniens à ports présenté dans cette annexe résume les définitions dans un ensemble de documents [1, 2, 3, 6, 13, 14, 16].

A.1 Définitions

Définition A.1.1. On définit deux espaces dual \mathcal{F} et \mathcal{E} tel que $f \in \mathcal{F}$, $e \in \mathcal{E}$ et le produit scalaire $\langle e|f \rangle = e^T f \in \mathbb{R}$. \mathcal{F} représente l'espace des flux et \mathcal{E} l'espace des efforts. Le produit scalaire $\langle e|f \rangle$ correspond donc au sens physique à une puissance

Définition A.1.2. Un système est dit Hamiltonien à port si il satisfait la relation suivante :

$$\langle e_x | f_x \rangle + \langle e_r | f_r \rangle - \langle e_p | f_p \rangle = 0$$
 (A.1)

Cette relation correspond au bilan de puissance respectant le principe de conservation d'énergie. Elle peut se schématiser sous la forme d'une structure de Dirac (fig A.1) ou se réécrire sous le formalisme suivant :

$$(e_x, f_x, e_r, f_r, e_p, f_p) \in \mathcal{D}$$
 (A.2)



FIGURE A.1 – Structure de Dirac

• < $e_x | f_x >$ est une puis sance qui correspond à la dérivée temporelle de l'énergie stockée :

$$\langle e_x | f_x \rangle = \frac{d}{dt} H$$

avec H,
énergie stockée dit « Hamiltonien ».

- $< e_r | f_r >$ est la puissance dissipée par le système : $< e_r | f_r > = P_{dissip}$
- $\bullet \ < e_p | f_p >$ est la puis sance apportée par les sources : $< e_p | f_p > = P_{ext}$

Le bilan de puissance se réécrit donc ainsi :

$$E'_{stockee}(t) = P_{ext} - P_{dissip}$$

A.2 Relations constitutives

Les relations constitutives pour les éléments qui stockent l'énergie sont définies de la manière suivante :

Soit le Hamiltonien $H: X \mapsto \mathbb{R}$ tel que $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ définissant les états dynamique du système et

$$\frac{dX(t)}{dt} = f_x , \quad \frac{\partial H(X)}{\partial X} = e_x$$

ou
$$\frac{dX(t)}{dt} = e_x , \quad \frac{\partial H(X)}{\partial X} = f_x$$

Le choix dépend de la structure physique du composant (cf. tab A.1). Par ailleurs on retrouve que :

$$\frac{d}{dt}H(X(t)) = \frac{\partial H(X)}{\partial X}^T \frac{dX(t)}{dt} = e_x^T f_x$$

qui correspond bien à la puissance issue du port (e_x, f_x) .

La relation constitutive pour les éléments qui dissipent l'énergie est donnée par :

 $e_r = \varphi_R(f_r)$, avec $\frac{\varphi(f_r)}{f_r}$ homogène à une résistance ou $f_r = \varphi_G(e_r)$, avec $\frac{\varphi(e_r)}{e_r}$ homogène à une conductance

A.3 Conservation énergétique

Afin de garantir la loi de conservation d'énergie, le bilan de puissance écrit avec les relations constitutives doit être vérifier. La structure de Dirac $(\frac{\partial H(X)}{\partial X}, \frac{dX(t)}{dt}, \varphi_R(f_r(t)), f_r(t), e_p(t), f_p(t)) \in \mathcal{D}$ a pour bilan :

$$\frac{\partial H(X)}{\partial X}^T \frac{dX(t)}{dt} = e_p(t)^T f_p(t) - \varphi_R(f_r(t))^T f_r(t)$$

Pour que le système soit passif il faut que :

$$\frac{\partial H(X)}{\partial X}^T \frac{dX(t)}{dt} = e_p(t)^T f_p(t) - \varphi_R(f_r(t))^T f_r(t) \le e_p(t)^T f_p(t)$$

Par conséquent, un système est dit conservatif si $\frac{\varphi_R(f_r(t))}{f_r(t)} \ge 0$. Cette condition montre que la totalité de l'énergie qu'apporte les ports extérieurs se transforme soit en puissance dissipée (exemple : effet joule aux bornes d'une résistance) soit en énergie stockée (exemple : quantité d'électrons aux bornes d'une capacité).

A.4 Représentation d'état d'un SHP

La représentation d'état d'un SHP s'exprime sous la forme suivante :

$$\frac{dX(t)}{dt} = (J - R)\frac{\partial H(X)}{\partial X} + Gu(t)$$
(A.3)

- J est une matrice antisymétrique qui traduit et structure les échanges de puissance entre les différents états stockants.
- R est une matrice sémi-définie positive qui comporte les valeurs des fonctions $\frac{\varphi(f_r(t))}{fr_(t)}$ ou $\frac{\varphi(e_r(t))}{e_r(t)}$. Elle décrit le comportement dissipatif du système. G est une matrice qui montre l'influence des sources sur le système.

Pour vérifier si la représentation d'état est en accord avec la définition d'un SHP, il suffit de calculer son bilan de puissance et de voir si il respecte la loi de conservation. Pour cela, on multiplie l'équation (A.3) par le vecteur $\frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T}$:

$$\frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} \frac{dX(t)}{dt} = \frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} (J-R) \frac{\partial H(X)}{\partial X} + \frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} Gu(t)$$
$$= \frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} J \frac{\partial H(X)}{\partial X} - \frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} R \frac{\partial H(X)}{\partial X} + \frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} Gu(t)$$

Or J est antisymétrique donc $\frac{\partial H(X)}{\partial X}^T J \frac{\partial H(X)}{\partial X} = 0$. En définissant $y(t)^T = \partial_X H(X)^T G$, le bilan vaut :

$$\underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} \frac{dX(t)}{dt}}_{P_{stockee}} = -\underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} R \frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{P_{dissip}} + \underbrace{y(t)^{T} u(t)}_{P_{ext}}$$

Remarque: R est semi-définie positive donc $\frac{\partial H(X)}{\partial X}^T R \frac{\partial H(X)}{\partial X} \ge 0$ [17]. Le système a un bilan de puissance qui correspond à celui d'un SHP avec :

$$\frac{\partial H(X)}{\partial X}^{T} R \frac{\partial H(X)}{\partial X} = P_{dissip} \ge 0$$

A.5 Tableau des états dynamiques en fonctions des différents domaines physiques

Domaine	f_x	e_x	x $\frac{dX(t)}{dt}$		$\frac{\partial H(X)}{\partial X}$
Electrostatique	i,	u,	q,	$\partial_t q = i,$	tension
	courant	tension	charge	courant	
Magnétisme	i,	u,	ϕ , flux	$\partial_t \phi = u,$	courant
	courant	tension	magnétique	tension	
Elastique	v,	F,	z,	$\partial_t z = v,$	force
/Translation	vitesse	force	déplacement	vitesse	
Cinétique	v,	F,	p,	$\partial_t p = F,$	vitesse
/Translation	vitesse	force	moment	force	
Elastique	w, vitesse	M, moment	$\theta,$	$\partial_t z = v,$	force
/Rotation	angulaire	de force	angle	vitesse	
Cinétique	w, vitesse	M,moment	b, Moment	$\partial_t b = v,$	vitesse
/Rotation	angulaire	de force	angulaire	moment angulaire	angulaire
Mecanique	D,	P,	$V, \qquad \qquad \partial_t V = D,$		pression
des Fuildes	débit	pression	volume débit		
Thermo-	fs,flux	T,	S,	$S, \qquad \partial_t S = fs, \text{flux}$	
dynamique	d'entropie	température	entropie	d'entropie	
Chimie	fn,flux	μ , potentiel	N,nombre	$\partial_t N = fn, \text{flux}$	potentiel
	molaire	chimique	de mole	molaire	chimique

TABLE A.1 – Tableau du comportement dynamique

Remarque: $\frac{\partial H(X)}{\partial X}$ est forcément la variable dual de la dérivée temporelle de l'état dynamique(cf. A.2). En effet si $\frac{dX(t)}{dt}$ est un flux alors $\frac{\partial H(X)}{\partial X}$ est un effort et vice-versas.

B Les Bonds Graphs

Les Bond Graphs [9, 18] sont un outil de conception élaboré en 1959 par le professeur Henry Paynter à l'institut de technologie du Massachusetts (MIT). Il permet de modéliser à l'aide de graphes orientés les transferts d'énergies entre différents systèmes. Les recherches développées autour de ce sujet ont permis de définir une méthodologie rigoureuse pour construire les Bond Graphs et développer les équations qui décrivent le comportement d'un système.

B.1 Définitions et modèles

Définition B.1.1. On définit un Bond Graph comme un graphe orienté où les sommets représentent les éléments de bases et les liens (Bonds) indiquent le transfert d'énergie instantané entre deux éléments de bases. Une demi-flèche sur l'extrémité du lien donne le sens du transfert. Un lien est composé de deux canaux qui correspondent à l'effort (e) et au flux (f), les deux variables duales d'une puissance tel que Puissance =< e|f > (c.f. définition A.1.1).

Les sommets sont directement connectés à l'aide des canaux et transforment un flux en effort et inversement (fig B.1)



FIGURE B.1 – Liens et Sommets d'un Bond Graph

La demi-flèche orientée vers B signifie que celui-ci reçoit de l'énergie instantanée envoyée par A. En électronique, c'est le courant (flux) qui par convention indique ce transfert. **Définition B.1.2.** On définit la causalité d'un Bond Graph en ajoutant une barre d'orientation. Elle apporte une information sur la direction que doit prendre les signaux lorsqu'on construit le schéma bloc équivalent. Cette notation indique le sens que doit parcourir le signal qui symbolise l'effort. Ce dernier est toujours opposé au signal qui symbolise le flux (fig B.2)



FIGURE B.2 – Liens et Sommets d'un Bond Graph causal

Définition B.1.3. On définit la fonction de comportement énergétique du sommet i tel que :

 $\begin{array}{rccc} F_i & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & in & \mapsto & F_i(in) \end{array}$

in est le canal d'entrée du sommet i et $F_i(in)$ le canal de sortie. Si in est un effort alors $F_i(in)$ est un flux et vice-versa. La fonction de transfert vaut $\frac{F_i(in)}{in}$ (fig B.3).



FIGURE B.3 – Fonctions de transfert d'un Bond Graph causal

B.2 Les éléments de base

Trois types d'éléments sont nécessaires pour modéliser un système physique complet. Il y a :

- Les éléments qui transforment l'énergie. On peut citer les composants qui stockent de l'énergie comme les capacités et les bobines, ou ceux qui la dissipent (résistances, diodes ,triodes, etc ...).
- Les ports externes
- Les éléments qui servent d'aiguillage comme les jonctions "1" et "0"

B.2.1 Composants qui stockent

En électronique, deux composants de nature physique différente peuvent stocker de l'énergie : les capacités liées au domaine de l'électrostatique et les bobines liées au domaine de l'électromagnétisme (c.f. tableau A.1).

La Capacité

En choisissant la charge $q_C(t)$ comme état dynamique, l'énergie stockée aux bornes d'une capacité vaut $H(q_C(t)) = \frac{q_C(t)^2}{2C}$. On obtient ainsi :

$$\frac{dq_C(t)}{dt} = i_C(t) = \text{courant} \triangleq \text{flux}$$
$$\frac{\partial H(q_C)}{\partial q_C} = \frac{q_C(t)}{C} = \text{tension} \triangleq \text{effort}$$

On retrouve les relations constitutives définie en A.2

$$\frac{\frac{dx(t)}{dt}}{\frac{\partial H(x)}{\partial x}} = f_x(t)$$

Cet élément peut être représenté par deux Bond Graphs de causalité différente(fig B.4). Si $\frac{x(t)}{dt}$ correspond au canal d'entrée alors l'implémentation est dite "Intégrable" sinon elle est dite "Dérivable". On utilisera toujours la forme "Intégrable" car elle permet de mettre en équations les représentations d'états.



FIGURE B.4 – Bond Graphs causales d'une capacité

La Bobine

Pour la bobine, c'est le flux magnétique $\phi_L(t)$ qui est choisi comme état; l'énergie stockée est égale à $H(\phi_L(t)) = \frac{\phi_L(t)^2}{2L}$ et :

$$\frac{d\phi_L(t)}{dt} = u_C(t) = \text{ force \'electromotrice } \triangleq \text{ effort}$$
$$\frac{\partial H(\phi_L)}{\partial \phi_L} = \frac{\phi_L(t)}{L} = \text{ courant } \triangleq \text{ flux}$$

Ainsi, on reste en accord avec la définition A.2 des lois constitutives :

$$\frac{\frac{dx(t)}{dt}}{\frac{\partial H(x)}{\partial x}} = e_x(t)$$

La figure B.5 montre les deux types d'implémentation causale. Là encore, la forme "Intégrale" est celle qui permet de mettre en équation la représentation d'état du système.



FIGURE B.5 – Bond Graphs causales d'une bobine

B.2.2 Composants qui dissipent

Les éléments dissipatifs ont pour relations constitutives (c.f. 2.2) :

 $e_r(t) = \varphi_R(f_r(t))$, forme résistive. $f_r(t) = \varphi_G(e_r(t))$, forme conductive.

Les fonctions φ_R et φ_G sont équivalentes aux fonctions de comportements énergétiques $F_r(f_r(t))$ et $F_r(e_r(t))$.La figure B.6 représente les deux Bond Graphs causales d'un composant dissipatif linéaire qui peut être implémenté soit sous forme résistive soit sous forme conductive.



FIGURE B.6 – Bond Graphs causales d'une résistance

B.2.3 Les ports externes

Les ports externes ne font pas partie intégrante du système. Ils permettent de modéliser l'apport en énergie des sources d'entrées ou la transmission d'énergie vers les sources de sorties (fig. B.7).



FIGURE B.7 – Bond Graphs causales des ports externes

B.2.4 Les jonctions

Les jonctions sont des éléments qui ne peuvent ni stocker ni dissiper de l'énergie. Leurs fonctions est de décrire comment l'énergie instantanée est véhiculée entre les différents composants. Par ailleurs, si P_{in} désigne les puissances d'entrées et P_{out} les puissances de sorties d'une jonction , alors cette dernière doit satisfaire la loi de conservation d'énergie :

$$P_{in} - P_{out} = 0 ,$$

avec

$$P_{in} = \sum_{i=1}^{N} e_{in_i} f_{in_i}$$
, $P_{out} = \sum_{k=1}^{M} e_{out_k} f_{out_k}$, $N+M > 1$

Définition B.2.1. Une jonction ayant N puissances d'entrée et m puissances de sortie définie une structure :

• "0" si

$$e_{out_1} = e_{out_2} = \dots = e_{out_M} = e_{in_1} = e_{in_2} = \dots = e_{in_N}$$
$$\sum_{i=1}^N f_{in_i} - \sum_{k=1}^M f_{out_k} = 0$$

• "1" si

$$f_{out_1} = f_{out_2} = \dots = f_{out_M} = f_{in_1} = f_{in_2} = \dots = f_{in_N}$$
$$\sum_{i=1}^N e_{in_i} - \sum_{k=1}^M e_{out_k} = 0$$

Remarque: Les jonctions "0" correspondent à la loi des noeuds et les jonctions "1" à la loi des mailles en électronique.

Bond Graph causale d'une jonction "0"

Prenons un ensemble de quatre éléments A, B, C, D connectés sur une jonction "0" tel que :

$$P_{in} = P_A$$
$$P_{out} = P_B + P_C + P_D$$

La représentation en schéma bloc (fig. B.8) doit satisfaire la définition d'une jonction "0", c'est-à-dire :

$$e_A = e_B = e_C = e_D$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{in_i} - \sum_{k=1}^{m} f_{out_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad f_A - (f_B + f_C + f_D) = 0 \Leftrightarrow f_D = f_A - f_B - f_C$$



FIGURE B.8 – Bond Graph causale d'une jonction "0"

Bond Graph causale d'une jonction "1"

Connectons ces mêmes quatre éléments sur une jonction "1". Le schéma bloc de la figure B.9 obéit aux relations qui définissent cette jonction :

$$f_A = f_B = f_C = f_D$$

$$\sum_{i=1}^{n} e_{in_i} - \sum_{k=1}^{m} e_{out_k} = 0 \quad \Rightarrow \quad e_A - (e_B + e_C + e_D) = 0 \Leftrightarrow e_D = e_A - e_B - e_C$$



FIGURE B.9 – Bond Graph causale d'une jonction "1"

Règle de causalité

La connexion entre deux signaux ne peut être qu'unidirectionnelle dans un schéma bloc (fig. B.10). Par conséquent, seule une barre d'orientation d'effort peut être connecter sur une jonction "0". Par contre, c'est l'inverse pour les jonctions "1" : il ne peut y avoir qu'un seul port d'entrée sans barre d'orientation d'effort.



FIGURE B.10 – Règle de causalité des jonctions

C Calculs explicites pour une connexion en série de deux SHPEs

Etape 1 : Explicitation des entrées

Il faut développer les équations d'interactions 2.1 :

pour u1(t)

$$= f_1\left(\frac{\partial H_i(X_i)}{\partial X_i}, Z_i(W_i).W_i(t), u(t), d_i(t)\right)$$

avec,

$$\begin{array}{rcl} \Pi_{1} & = & (I - P_{11}G_{y2}P_{21}G_{y1})^{-1} \\ \Omega_{1H1} & = & \Pi_{1}P_{11}G_{y2}P_{21}A_{y1} & , & \Omega_{1H2} & = & \Pi_{1}P_{11}A_{y2} \\ \Omega_{1Z1} & = & \Pi_{1}P_{11}G_{y2}P_{21}E_{y1} & , & \Omega_{1Z2} & = & \Pi_{1}P_{11}E_{y2} \\ \Omega_{1d1} & = & \Pi_{1}P_{11}G_{y2}P_{21}B_{y1} & , & \Omega_{1d2} & = & \Pi_{1}P_{11}D_{y2} \\ \Omega_{1u} & = & \Pi_{1}(P_{12} + P_{11}G_{y2}P_{22}) \end{array}$$

pour u2(t)

$$u_{2}(t) = \Omega_{2H1} \frac{\partial H_{1}(X_{1})}{\partial X_{1}} + \Omega_{2H2} \frac{\partial H_{2}(X_{2})}{\partial X_{2}} + \Omega_{2Z1} Z_{1}(W_{1}) + \Omega_{2Z2} Z_{2}(W_{2}) + \Omega_{2d1} d_{1}(t) + \Omega_{1d2} d_{2}(t) + \Omega_{2u} u(t)$$

$$= f_2\left(\frac{\partial H_i(X_i)}{\partial X_i}, Z_i(W_i).W_i(t), u(t), d_i(t)\right)$$

avec,

$$\begin{cases} \Pi_2 &= (I - P_{21}G_{y1}P_{11}G_{y2})^{-1} \\ \Omega_{2H1} &= \Pi_2 P_{21}A_{y1} \\ \Omega_{2Z1} &= \Pi_2 P_{21}E_{y1} \\ \Omega_{2d1} &= \Pi_2 P_{21}D_{y1} \\ \Omega_{2u} &= \Pi_2 (P_{22} + P_{21}G_{y1}P_{12}) \end{cases} , \quad \Omega_{2Z2} &= \Pi_2 P_{21}G_{y1}P_{11}E_{y2} \\ \Omega_{2d1} &= \Pi_2 P_{21}D_{y1} \\ \Omega_{2u} &= \Pi_2 (P_{22} + P_{21}G_{y1}P_{12}) \end{cases}$$

Etape 2 : Intégration des entrées explicites dans les equations

En injectant les nouvelles expressions de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ dans leur SHPE respectif, on obtient une RE du système global qui dépend uniquement des matrices de permutation et des matrices systèmes des sous-SHPEs :

$$\frac{dX(t)}{dt} = \underbrace{\left(\begin{array}{c}A_{x1}+G_{x1}\Omega_{1H1} & G_{x1}\Omega_{1H2} \\ G_{x2}\Omega_{2H1} & A_{x2}+G_{x2}\Omega_{2H2}\end{array}\right)}_{A_{x2}+G_{x2}\Omega_{2H2}}\underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{A_{x2}+G_{x2}\Omega_{2H2}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c}E_{x1}+G_{x1}\Omega_{1Z1} & G_{x1}\Omega_{1Z2} \\ G_{x2}\Omega_{2Z1} & E_{x2}+G_{x2}\Omega_{2Z2}\end{aligned}\right)}_{B_{x}}Z(W)W(t) \\ = \underbrace{\left(\begin{array}{c}A_{w}=K \\ G_{w2}\Omega_{2H1} & A_{w2}+G_{w2}\Omega_{2H2}\end{aligned}\right)}_{G_{w}}\underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{A_{w}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c}E_{w1}+G_{w1}\Omega_{1Z1} & G_{w1}\Omega_{1Z2} \\ G_{w2}\Omega_{2Z1} & E_{w2}+G_{w2}\Omega_{2Z2}\end{aligned}\right)}_{B_{w}}Z(W)W(t) \\ = \underbrace{\left(\begin{array}{c}A_{w1}+G_{w1}\Omega_{1H1} & G_{w1}\Omega_{1H2} \\ G_{w2}\Omega_{2H1} & A_{w2}+G_{w2}\Omega_{2H2}\end{aligned}\right)}_{A_{w2}}\underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{A_{w2}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c}E_{w1}+G_{w1}\Omega_{1Z1} & G_{w1}\Omega_{1Z2} \\ G_{w2}\Omega_{2Z1} & E_{w2}+G_{w2}\Omega_{2Z2}\end{aligned}\right)}_{B_{w}}Z(W)W(t) \\ = \underbrace{\left(\begin{array}{c}G_{w1}\Omega_{1u} \\ G_{w2}\Omega_{2H1} & A_{w2}+G_{w2}\Omega_{2H2}\end{aligned}\right)}_{A_{w2}}\underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{A_{w2}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c}E_{w1}+G_{w1}\Omega_{1Z1} & G_{w1}\Omega_{1Z2} \\ G_{w2}\Omega_{2Z1} & E_{w2}+G_{w2}\Omega_{2Z2}\end{aligned}\right)}_{B_{w}}Z(W)W(t) \\ = \underbrace{\left(\begin{array}{c}G_{w1}\Omega_{1u} \\ G_{w2}\Omega_{2H1} & G_{w1}\Omega_{1H2}\end{aligned}\right)}_{A_{w2}}\underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{A_{w2}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c}G_{w1}\Omega_{11} & G_{w1}\Omega_{1Z2} \\ G_{w2}\Omega_{2U} & G_{w2}\Omega_{2U}\end{array}\right)}_{A_{w2}}Z(W)W(t) \\ = \underbrace{\left(\begin{array}{c}G_{w1}\Omega_{1u} \\ G_{w2}\Omega_{2U}\end{array}\right)}_{A_{w2}}\underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{A_{w2}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c}G_{w1}\Omega_{1u} & G_{w1}\Omega_{1Z2} \\ G_{w2}\Omega_{2U}\end{array}\right)}_{A_{w2}}Z(W)W(t) \\ = \underbrace{\left(\begin{array}{c}G_{w1}\Omega_{1u} \\ G_{w2}\Omega_{2U}\end{array}\right)}_{A_{w2}}\underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{A_{w2}} + \underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{A_{w2}} + \underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial H(X)}_{A_{w2}} + \underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial$$

$$y_{u}(t) = \underbrace{\left(P_{31}(A_{y1}+G_{y1}\Omega_{1H1})+P_{32}G_{y2}\Omega_{2H1}P_{32}(A_{y2}+G_{y2}\Omega_{2H2})+P_{31}G_{y1}\Omega_{1H2}\right)}_{E_{y}} \underbrace{\frac{\partial H(X)}{\partial X}}_{H\left(P_{31}(E_{y1}+G_{y1}\Omega_{1Z1})+P_{32}G_{y2}\Omega_{2Z1}P_{32}(E_{y2}+G_{y2}\Omega_{2Z2})+P_{31}G_{y1}\Omega_{1Z2}\right)}_{H\left(P_{31}G_{y1}\Omega_{1u}+P_{32}G_{y2}\Omega_{2u}\right)}u(t)$$

$$+\underbrace{\left(P_{31}G_{y1}\Omega_{1u}+P_{32}G_{y2}\Omega_{2u}\right)}_{B_{y}}u(t)$$

$$+\underbrace{\left(P_{31}(B_{y1}+G_{y1}\Omega_{1d1})+P_{32}G_{y2}\Omega_{2d1}P_{32}(B_{y2}+G_{y2}\Omega_{2d2})+P_{31}G_{y1}\Omega_{1d2}\right)}_{B_{y}}d(t)$$

D Modèle de Triode

Le modèle de triode utilisé est celui de Norman-Koren pour le calcul de I_{PK} et d'Ivan Cohen pour le calcul de I_{GK} (effet de redressement de grille) :

$$I_{GK} = \frac{V_{GK} - V_{\alpha}}{R_{GK}} \text{ si } V_{GK} \ge V_{\alpha}$$

0 sinon

$$I_{PK} = \frac{E_1^{E_x}}{K_g} \left(1 + signe(E1)\right)$$

avec
$$signe(E1) = 1$$
, si $E1 \ge 0$
= -1 sinon
et $E1 = \frac{V_{PK}}{K_p} ln \left[1 + exp\left(\frac{K_p}{\mu} + K_p \frac{V_{GK} + V_{C+}}{\sqrt{K_{VB} + V_{PK}^2}} \right) \right]$

μ	E_x	K_g	K_p	K_{VB}	V_{C+}	V_{α}	R_{GK}
88	1.4	1060	600	300	0.5	0.33	3000

TABLE D.1 – Tableau des paramètres du modèles Norman-Koren

Par ailleurs les fonctions dissipatives non linéaires se calculent ainsi :

$$Z_{GK}(W_{GK}) = \frac{I_{GK}}{V_{GK}}$$
$$Z_{PK}(W_{GK}, W_{PK}) = \frac{I_{PK}}{V_{PK}}$$

Les figures D.1 et D.2 montrent que ce modèle de triode garantit un comportement passif car $Z_{GK}(W_{GK})$ et $Z_{PK}(W_{GK}, W_{PK})$ sont positives.



FIGURE D.1 – $Z_{GK}(W_{GK})$



FIGURE D.2 – $Z_{PK}(W_{GK}, W_{PK})$