



Stage ATIAM

Application de la géométrie différentielle aux problèmes mécaniques : Trajectoires physiques dans les espaces courbes

Stage réalisé de Mars à Juillet 2011 à l'Ircam
Encadrant : Joël Bensoam

Thomas Humbert

6 août 2011

Résumé

Si une particule se déplace dans l'espace intersidéral, sa variation de vitesse est proportionnelle, selon la seconde loi de Newton, aux forces qui lui sont appliquées. En l'absence de celles-ci, sa variation de vitesse est nulle et la particule va tout droit. Ce comportement caractérise un espace plat. La plupart des systèmes dont on aimerait connaître et prédire le comportement dans le but d'établir des modèles physiques ne correspondent pas à ce cas trivial. L'espace est généralement courbe et l'évaluation des variations de vitesse nécessite de généraliser la notion de distance entre deux points. L'objet de ce mémoire est précisément de donner corps à cette notion de courbure et de comprendre son influence sur les trajectoires du système étudié.

Afin de s'initier à ces concepts tout en restant concret, on s'intéresse d'abord aux trajectoires d'une particule astreinte à se déplacer sur une surface. A ce titre, nous ferons le parallèle entre les équations du mouvement et celles des géodésiques où la courbure apparaît clairement sur le plan mathématique [1],[2]. Cependant, les systèmes que nous serons amenés à étudier n'évoluent pas forcément sur des surfaces de \mathbb{R}^3 et il est nécessaire de généraliser la notion de trajectoire aux espaces dits de configuration.

Il peut être en effet plus judicieux d'étudier le mouvement d'un système par rapport aux transformations qu'il subit, par exemple, considérer le mouvement d'une toupie en terme de rotations [3]. Que deviennent ces concepts de distance et de courbure dans ces espaces plus complexes ? Nous verrons alors qu'il est possible d'introduire un formalisme qui permet de déterminer les équations du mouvement uniquement en prenant en compte les informations intrinsèques au groupe des transformations [4].

Pourtant, la résolution de ces équations très générales et non-linéaires peut s'avérer ardue et nous préférons alors développer une méthode géométrique qui permet de tirer partie des questions de symétries (ou d'invariance) inhérentes à l'action d'un groupe. Cependant, ces méthodes peuvent connaître des limites dans certains cas et nous verrons qu'il faudra alors parfois changer de métrique en présence de potentiel ou se réduire aux états d'équilibre dans le cas de systèmes non-intégrables.

Table des matières

1	La physique des espaces courbes, formalisme et propriétés	2
1.1	Généralisation des équations de Newton	2
1.2	Géométrie des surfaces	3
1.2.1	Métrie, géodésiques	3
1.2.2	Courbure d'une surface	8
2	Généralisation à des espaces plus complexes : les groupes de Lie	13
2.1	Cinématique et équations du mouvement dans le groupe des rotations $SO(3)$	13
2.1.1	Mouvement d'un solide dans l'espace	13
2.1.2	Energie cinétique et principe de moindre action	15
2.2	Généralisation à un groupe quelconque	17
2.3	Résolution géométrique	18
2.3.1	L'orbite co-adjointe	19
2.3.2	Ellipsoïde d'énergie	20
2.3.3	Solutions du problème	20
2.4	Généralisation du lien entre invariance et conservation : fonction moment	22
3	Limites de la méthode	25
3.1	De la forme quadratique du Lagrangien	25
3.2	Systèmes non intégrables : Etude de stabilité et Modes Non-linéaires	29
3.2.1	Méthode générale pour l'étude de la stabilité	29
3.2.2	Le pendule tournant : instabilités et bifurcation	31
3.2.3	Modes Non-Linéaires	33
4	Annexes	36

Table des figures

1	Le plan peut être paramétré par les coordonnées cartésiennes (a) ou polaires (b)	4
2	Parmi toutes les trajectoires γ_i , la géodésique du plan entre A et B est la droite Γ_G	6
3	Paramétrisation de la sphère en coordonnées sphériques . . .	7
4	Définition du vecteur normal.	8
5	Les trois classes de surfaces	9
6	Le cylindre est isométrique au plan	10
7	L'hélicoïde (a) et le caténoïde (b) sont deux surfaces reliées par des relations d'isométrie	10
8	Surface de révolution d'axe Δ et de génératrice Γ	12
9	Le mouvement d'un solide peut être vu dans un repère fixe ou un repère mobile [15]	14
10	Trajectoires sur la sphère des Π_c engendrées par l'intersection avec l'ellipsoïde d'énergie[15]	22
11	Pendule plan	25
12	Portrait de phase $\dot{\theta}(\theta)$ pour différents niveaux d'énergie . . .	28
13	Pendule plan mis en rotation autour de l'axe \mathbf{e}_3	32
14	Paramétrisation de l'ellipse permettant d'introduire les fonctions elliptiques	38

Notations

$\mathbf{q} = \langle q^1, q^2, \dots, q^n \rangle$	Vecteur position
$\dot{\mathbf{q}}$	Dérivée de \mathbf{q} par rapport au temps
$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Energie cinétique
$V(\mathbf{q})$	Energie potentielle
$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - V(\mathbf{q})$	Lagrangien
$H(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + V(\mathbf{q})$	Hamiltonien
Γ_{ij}^l	Symboles de Christoffel
$\langle \cdot \cdot \rangle$	Produit scalaire
\hat{g}	Algèbre du groupe de Lie G
\mathbf{u}_c	Vecteur mesuré dans le repère du corps
\mathbf{u}_s	Vecteur mesuré dans le repère fixe
\mathbf{X}	Vecteur de référence d'un point du solide
$\mathbf{x}(t)$	Position d'un point du solide au cours du temps
$\hat{\Omega}$	Elément de l'algèbre
$\boldsymbol{\omega}_c$	Vecteur associé à $\hat{\Omega}_c$
$\boldsymbol{\Pi}$	Vecteur moment
I_c	Matrice principale d'inertie dans le repère du corps

Introduction

Ce document rend compte de 5 mois de stages effectués à l'Ircam dans l'équipe Acoustique Instrumentale sous la direction de Joel Bensoam. Le travail mené a été d'ordre plutôt théorique et a été constitué d'une longue étude bibliographique, d'une part sur la géométrie différentielle (étude des surfaces, notions de groupes, de connexions, d'espace fibré ...), et d'autre part sur les manières d'aborder de façon générale un problème physique. La lecture de la littérature mathématique a demandé un important travail afin d'approprier le formalisme et les notations utilisées. Ce rapport n'a pas pour but de lister tous les domaines étudiés mais de fournir une approche presque pédagogique des notions abordées afin de garder en tête le rapport intime qu'elles entretiennent avec la physique et la démarche logique qui les relie. Dans ce but, de nombreux exemples simples mais significatifs sont présentés.

Architecture du document

La première partie introduit la généralisation des équations de Newton à l'aide du principe de moindre action puis la caractérisation géométrique qui en découle en prenant exemple sur les surfaces représentant les espaces courbes associés. La seconde partie traite de la généralisation des notions appréhendées dans le cadre des surfaces quand on travaille sur un groupe de Lie. En prenant exemple sur le groupe des rotations $SO(3)$, on se propose de montrer qu'il est toujours possible d'écrire les équations du mouvement mais que celles-ci étant compliquées, on préfère fournir une méthode géométrique pour résoudre le problème. La dernière partie s'intéresse aux cas où cette dernière nécessite d'être adaptée ou complétée tel qu'en présence de potentiel ou pour des systèmes non-intégrables.

Remerciements

Je tenais sincèrement à remercier Joel Bensoam qui m'a permis de découvrir et comprendre de nombreux sujets passionnants de la physique, de la mécanique et des mathématiques qui me seront très utiles dans mes futurs travaux de recherche. Travailler avec lui m'a également permis de questionner mes méthodes de travail et de progresser grandement en terme d'autonomie, de gestion des connaissances accumulées et de prise de recul.

J'aimerais également remercier Pauline Eveno, René Caussé, Nicolas Ellis et Gérard, de l'équipe Acoustique Instrumentale, pour leur accueil chaleureux me permettant de travailler dans les meilleures conditions possibles. Pour finir, un grand merci à Florie-Anne pour ses remarques et corrections mathématiques ainsi qu'à Cyril Touzé pour notre discussion sur les modes et autres phénomènes non-linéaires qui semblaient difficiles d'accès.

1 La physique des espaces courbes, formalisme et propriétés

Si une particule se déplace dans l'espace intersidéral, sa variation de vitesse est proportionnelle, selon la seconde loi de Newton, aux forces qui lui sont appliquées. En l'absence de celles-ci, sa variation de vitesse est nulle et la particule va tout droit. Ce comportement caractérise un espace plat. Cependant, si l'on considère un solide, il devient contraignant d'appliquer cette loi à chaque particule et l'on préfère utiliser des systèmes de coordonnées généralisées tels que les angles d'Euler. La détermination des variations des vecteurs vitesses dans ces coordonnées est alors plus compliquée, nécessitant d'introduire la dérivée dite "covariante". L'espace des configurations est alors courbe. Dans ce cas, Lagrange a montré une généralisation de la seconde loi de Newton appelée principe de moindre action que nous allons, dans un premier temps, introduire.

Afin de pouvoir évaluer le rôle de la courbure dans les trajectoires des systèmes étudiés, il va alors être nécessaire d'employer le formalisme des variétés différentielles, que nous présenterons dans le cas des surfaces. Ces variétés à deux dimensions plongées dans un espace à trois dimensions nous permettront de définir une métrique qui mène aux équations des géodésiques faisant apparaître la courbure de manière apparente tout en restant équivalentes aux équations de Lagrange.

1.1 Généralisation des équations de Newton

La généralisation des équations de Newton aux espaces courbes dits Riemanniens a été introduite par Lagrange. Le mouvement d'un système est globalement donné à l'aide de coordonnées généralisées $q^i, i = 1, \dots, n$. Son comportement peut être alors décrit complètement à l'aide du lagrangien $L(q^i, \dot{q}^i)$, fonction des positions q^i , des vitesses \dot{q}^i et usuellement définit comme l'énergie cinétique $T(q^i, \dot{q}^i)$ moins l'énergie potentielle $V(q^i)$ du système avec

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T M(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (1.1.1)$$

où $M(\mathbf{q})$ est la matrice d'inertie du système et $\dot{\mathbf{q}}^T$ la transposée de $\dot{\mathbf{q}}$.

Si on définit l'action comme la fonctionnelle

$$A = \int_a^b L(q^i, \dot{q}^i) dt, \quad (1.1.2)$$

la trajectoire choisie par le système une fois mis en mouvement minimise cette fonctionnelle, c'est à dire qu'elle satisfait l'équation $\delta A = 0$. Cette condition constitue le principe dit "de moindre action". Si on considère toutes les

trajectoires $\delta \mathbf{q}$ virtuellement possibles pour le système, l'application de ce principe et l'emploi d'une intégration par parties

$$\delta A = \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \delta q^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \delta \dot{q}^i \right) dt = \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \delta q^i dt = 0 \quad \forall \quad \delta q^i, \quad (1.1.3)$$

mènent aux équations du mouvement dites de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.1.4)$$

Ces équations généralisent alors les équations de Newton pour n'importe quel espace des configurations. Cependant, cette forme très générale ne donne pas d'informations sur la courbure de l'espace considéré. Afin de pouvoir étudier plus précisément les trajectoires définies ci-dessus, il est alors nécessaire de considérer l'espace des configurations comme un espace mathématique appelé variété [5],[6].

Une variété de dimension n est un ensemble M de points que l'on peut décrire à l'aide d'un système de coordonnées (q^1, q^2, \dots, q^n) afin de repérer de façon unique chaque point de M . Ici, dans le but de fournir des exemples pédagogiques permettant de bien comprendre les notions sous-jacentes à ce formalisme mathématique, nous nous limitons aux variétés à deux dimensions plongées dans l'espace à trois dimensions : les surfaces.

1.2 Géométrie des surfaces

La courbure d'une surface est apparente et une particule la parcourant subit des forces qui la contraignent à rester dessus. On comprend naturellement que plus la courbure est importante, plus les forces mises en jeu pour maintenir la particule sont grandes, et, d'après la seconde loi de Newton, cela se traduit sur les variations de vitesse de la particule. Écrire l'équation du mouvement dans ce cas doit permettre de faire apparaître la notion de courbure. Dans ce but, il est nécessaire de définir une métrique permettant de mesurer et comparer les distances dans ces espaces afin de trouver le chemin qui minimise l'action (1.1.2). Cette métrique, ainsi que la courbure qui, nous verrons, en découle, possède des propriétés qui seront utiles pour les études à venir.

1.2.1 Métrique, géodésiques

Dans un espace plat, la distance entre deux points s'évalue directement. Quand l'espace se courbe, il est nécessaire de définir une "unité de mesure" de référence permettant de réaliser la même démarche : la métrique [7]. Si

une surface est paramétrée tel qu'on peut repérer un point par le vecteur $\mathbf{q} = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v) \rangle$, alors, d'après les différentielles

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (1.2.1)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (1.2.2)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv, \quad (1.2.3)$$

un petit élément de longueur sur la surface $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ devient

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u} \right)^2 du^2 + 2 \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial v} \right) du \cdot dv + \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial v} \right)^2 dv^2 \\ &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Les constantes E, F et G sont les éléments de la “première forme quadratique fondamentale” et forment le tenseur métrique :

$$\gamma = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

Exemple : Tenseur métrique du plan Dans le plan paramétré par les coordonnées cartésiennes $\mathbf{q} = \langle x, y \rangle$, il vient directement $E = G = 1$ et $F = 0$, donc :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \quad (1.2.6)$$

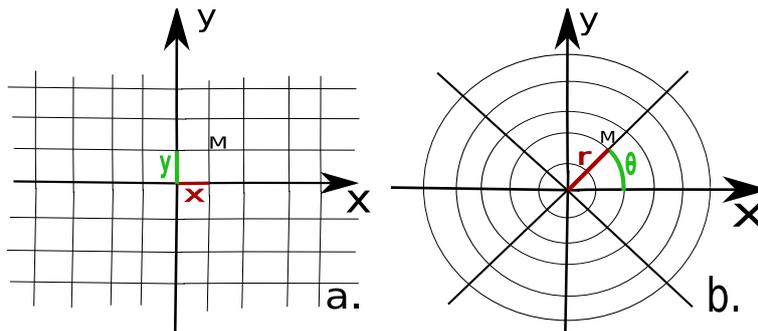


FIG. 1 – Le plan peut être paramétré par les coordonnées cartésiennes (a) ou polaires (b)

On peut par la même occasion exhiber une première propriété de ce tenseur : son équivalence pour les différents systèmes de coordonnées utilisés.

Par exemple, si le plan est maintenant muni des coordonnées polaires données par $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, l'élément de longueur ds^2 (1.2.4) devient :

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (1.2.7)$$

On peut alors vérifier, en remarquant que $dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$ et $dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$ et en remplaçant dans l'équation métrique euclidienne (1.2.6) que l'on retrouve l'équation métrique donnée par les coordonnées polaires. Les propriétés tensorielles du tenseur métrique lui confèrent donc l'invariance par changement de coordonnées.

Du point de vue physique, lorsque les forces extérieures sont nulles, nous avons vu que le Lagrangien du système se réduisait à l'énergie cinétique. L'action (1.1.2) mesure alors la distance sur la variété munie d'une métrique ds^2 définie par l'énergie cinétique du système mise sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \gamma_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j \quad (1.2.8)$$

en utilisant la convention de sommation d'Einstein qui sous-entend la sommation sur toutes les valeurs d'un indice quand il est répété deux fois.

Comme nous sommes maintenant capables de définir l'action associée à une particule parcourant une surface, il est possible de déterminer les trajectoires tracées sur celle-ci. Pour cela, il faut injecter l'énergie cinétique sous la forme (1.2.8) dans les équations de Lagrange (1.1.4). Les propriétés de symétries du tenseur métrique et quelques notions de calcul tensoriel permettent (voir annexe) de mettre l'équation sous la forme :

$$\frac{d^2 q^i}{dt^2} + \Gamma_{ij}^l \frac{dq^k}{dt} \frac{dq^j}{dt} = 0, \quad (1.2.9)$$

où les

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{\gamma^{kl}}{2} (\gamma_{ik,j} + \gamma_{jk,i} - \gamma_{ij,k}) \quad (1.2.10)$$

sont les symboles de Christoffel de seconde espèce [8],[9]. Ce terme fait apparaître quantitativement la courbure de la surface dans l'équation des trajectoires. Les solutions de ces équations équivalentes aux équations de Lagrange sont communément appelées les géodésiques de la surface et nous proposons ici deux exemples concrets de ces courbes.

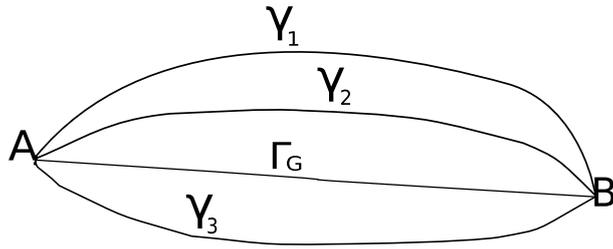


FIG. 2 – Parmi toutes les trajectoires γ_i , la géodésique du plan entre A et B est la droite Γ_G

Exemple : Géodésiques du plan

D'après l'équation métrique euclidienne (1.2.6), le Lagrangien d'une particule parcourant un plan muni des coordonnées cartésiennes peut s'écrire :

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \gamma \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (1.2.11)$$

et d'après les équations de Lagrange (1.1.4), on obtient :

$$\ddot{x} = 0 \quad \dot{x} = \alpha \quad x - x_0 = \alpha t \quad (1.2.12)$$

$$\ddot{y} = 0 \quad \dot{y} = \beta \quad y - y_0 = \beta t.$$

Les géodésiques du plan sont les droites passant par $P_0 = (x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\langle \alpha, \beta \rangle$. On vérifie bien que la ligne droite est le plus court chemin pour rejoindre deux points dans le plan.

On aurait pu obtenir le même résultat en calculant les éléments E, F et G du tenseur métrique d'après leur définition (1.2.4) afin d'écrire le tenseur métrique

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.13)$$

et, d'après l'expression des symboles de Christoffel (1.2.10), trouver $\Gamma_{ij}^l = 0$. En remplaçant dans l'équation des géodésiques (1.2.9), on retrouve bien l'équation des droites (1.2.12).

Ceci permet de voir que dans le cas d'un espace plat, les coefficients de Christoffel sont nuls. Observons ce qu'il advient de ces résultats quand la surface est courbe en prenant exemple sur la sphère.

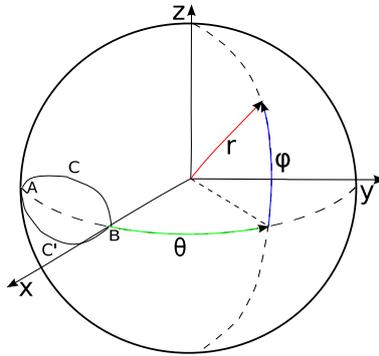


FIG. 3 – Paramétrisation de la sphère en coordonnées sphériques

Exemple : Géodésiques de la sphère La sphère de rayon R peut être paramétrée par

$$\mathbf{q}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} x = R \cos \theta \cos \phi \\ y = R \sin \theta \cos \phi \\ z = R \sin \phi \end{pmatrix}, \quad (1.2.14)$$

ce qui conduit au tenseur métrique

$$\gamma = \begin{pmatrix} R^2 \cos^2 \phi & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}, \quad (1.2.15)$$

et les coefficients de Christoffel associés ne sont plus nuls. Le Lagrangien pour une particule libre de se déplacer sur la sphère est alors :

$$L = R^2 \cos^2 \phi \dot{\theta}^2 + R^2 \dot{\phi}^2, \quad (1.2.16)$$

et les équations des géodésiques sont :

$$\ddot{\phi} + \sin \phi \cos \phi \dot{\theta}^2 = 0 \quad (1.2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\cos^2 \phi \dot{\theta}) = 0.$$

On remarque ici que l'emploi d'un système de coordonnées conduit à des équations qui sont difficiles à résoudre. Dans cet exemple, une solution géométrique peut être déterminée si on admet qu'entre deux points il n'existe qu'une géodésique.

Supposons que l'arc (C) ci-dessus est la géodésique cherchée. Son symétrique (C') par rapport au plan équatorial a la même longueur et est encore tracé sur la sphère (car celle-ci est globalement invariante par symétrie). L'arc (C') est donc lui aussi la géodésique, ce qui n'est pas possible (en dehors du cas où A et B sont antipodaux). (C) n'est donc pas une géodésique et

cette dernière ne peut être que l'arc d'équateur (de grand cercle) qui relie A à B. La sphère étant invariante par symétrie, il est possible de faire passer par chaque couple de point un équateur (ou grand cercle) en construisant l'intersection avec la surface d'un plan passant par le centre de celle-ci et les deux points. Ces courbes sont les géodésiques de la sphère.

A ce stade de l'étude, nous avons pu mettre en lumière, à l'aide de la métrique et des équations des géodésiques, la relation entre les équations du mouvement et la courbure de la surface. Nous cherchons maintenant à évaluer cette dernière de façon plus précise.

1.2.2 Courbure d'une surface

Dans ce but, il est nécessaire de définir en chaque point une normale unitaire

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{q}_u \wedge \mathbf{q}_v}{\|\mathbf{q}_u \wedge \mathbf{q}_v\|}, \quad (1.2.18)$$

où \mathbf{q}_u est la dérivée du vecteur \mathbf{q} par rapport à la variable u .

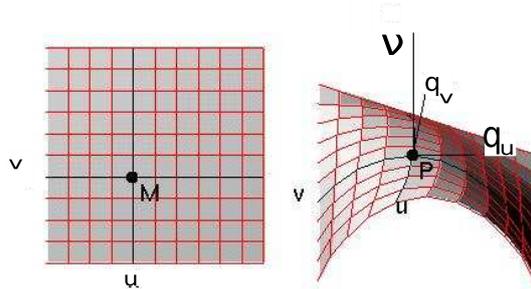


FIG. 4 – Définition du vecteur normal.

On construit alors la seconde forme fondamentale

$$II = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}, \quad (1.2.19)$$

avec

$$\begin{aligned} e &= -\langle \mathbf{q}_u | \boldsymbol{\nu}_u \rangle \\ f &= -\langle \mathbf{q}_v | \boldsymbol{\nu}_u \rangle \\ g &= \langle \mathbf{q}_v | \boldsymbol{\nu}_v \rangle. \end{aligned} \quad (1.2.20)$$

La seconde forme fondamentale permet de quantifier l'évolution de la direction du vecteur normal quand on se déplace sur la surface. En diagonalisant II par rapport à γ , on obtient deux réels k_1 et k_2 appelés "courbures

principales au point P” et l’on définit la courbure de Gauss comme le produit de ces deux quantités

$$\Omega = k_1 k_2 = \frac{eg - f^2}{EF - G^2}. \quad (1.2.21)$$

Cette opération de diagonalisation consiste physiquement à évaluer la courbure dans toutes les directions de l’espace et les courbures principales , k_1 et k_2 , sont alors les courbures extrêmes de la surface [10].

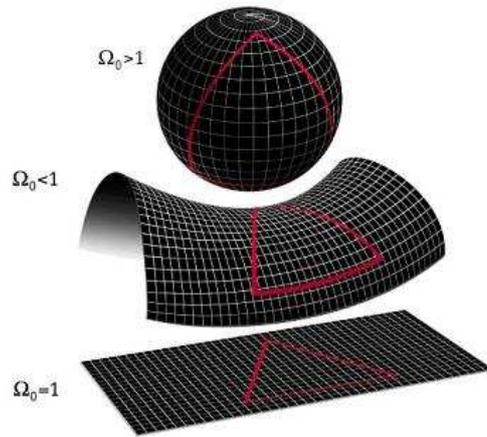


FIG. 5 – Les trois classes de surfaces

Si la courbure est positive, les deux valeurs propres sont de même signe et la surface est située d’un seul coté du plan tangent (ex : ellipsoïde, sphère, ..). Si elle est négative, les courbures principales sont de signes opposés et la surface est située de part et d’autre du plan tangent (ex : hyperboloïde,...). Si la courbure est nulle, alors au moins une des courbures principales est nulle. Ces surfaces sont alors isométriques au plan, c’est à dire que l’on peut passer du plan à celles-ci par une suite de transformations infinitésimales continues sans déchirements ou recollements. Par exemple, on peut rouler une feuille de papier en un cylindre. La courbure des deux surfaces est inchangée et si on déplie le cylindre, les géodésiques qui étaient tracées sur la surface correspondent à des droites sur le plan.

De plus, d’après [11], la courbure d’une surface permet de prédire qualitativement la sensibilité des géodésiques aux conditions initiales. Si la courbure est positive, des géodésiques proches auront tendance à osciller les une autour des autres. Si par contre la courbure est négative, les géodésiques auront tendance à diverger rapidement.

Afin de déterminer certaines propriétés de la courbure, le Théorème Egre-gium de Gauss nous apprend que la courbure ne dépend que de la première forme fondamentale. Nous avons vu que celle-ci ne dépendait pas du système

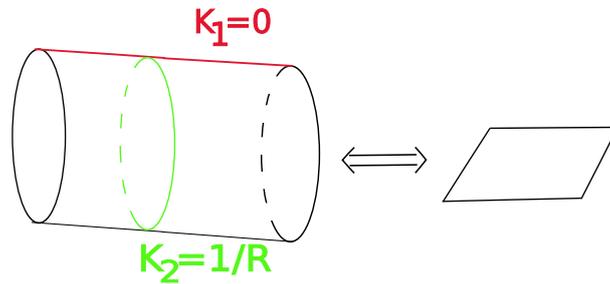


FIG. 6 – Le cylindre est isométrique au plan

de coordonnées employé, il en est donc de même pour la courbure. On vérifie à l'aide de cette propriété le caractère intrinsèque, c'est à dire propre à la surface, de la courbure.

La notion d'intrinsèque engendre également l'égalité de la courbure pour deux surfaces reliées par des relations d'isométrie comme c'était le cas pour le cylindre et le plan. Cette propriété va nous permettre de simplifier l'étude de certaines surfaces en se ramenant, quand c'est possible, à des surfaces qui possèdent des propriétés de symétrie [12].

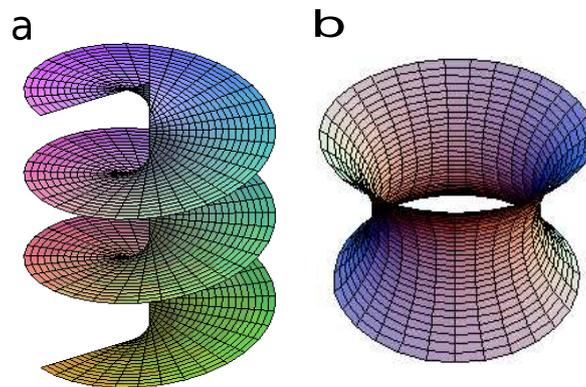


FIG. 7 – L'hélicoïde (a) et le caténoïde (b) sont deux surfaces reliées par des relations d'isométrie

Prenons exemple sur le caténoïde pouvant être paramétré par le vecteur

$$\mathbf{q}(u, v) = \langle \cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u \rangle. \quad (1.2.22)$$

Les vecteurs tangents aux lignes de coordonnées s'écrivent

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u} &= \langle \sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1 \rangle \\ \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial v} &= \langle -\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0 \rangle,\end{aligned}\tag{1.2.23}$$

et, il est alors possible de déduire les différentes composantes du tenseur métrique :

$$\begin{aligned}E &= \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u} \right)^2 = 1 + \sinh^2 u = \cosh^2 u \\ F &= \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial u} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial v} = 0 \\ G &= \left(\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial v} \right)^2 = \cosh^2 u.\end{aligned}\tag{1.2.24}$$

L'hélicoïde droit d'équation

$$\mathbf{q}(u, v) = \langle \sin v \sinh u, \cos v \sinh u, v \rangle,\tag{1.2.25}$$

est isométrique du caténoïde. On peut vérifier que le tenseur métrique est le même que pour ce dernier. Ce résultat est également obtenu pour l'ensemble des surfaces permettant de passer de l'hélicoïde au caténoïde et d'équations

$$\begin{aligned}x &= \cos \alpha \cos v \cosh u + \sin \alpha \sin v \sinh u \\ y &= \cos \alpha \sin v \cosh u - \sin \alpha \cos v \sinh u \\ z &= u \cos \alpha + v \sin \alpha.\end{aligned}\tag{1.2.26}$$

Ces surfaces possédant la même première forme fondamentale, elles ont bien même courbure et les géodésiques seront équivalentes, à une isométrie près. L'étude des courbes sur une surface à priori compliquée peut donc être ramenée, si c'est possible, à l'étude de celles sur une surface proposant des symétries de révolution, comme le caténoïde, où les trajectoires sont plus simples à déterminer.

En effet, les surfaces dites de révolution telles que le caténoïde ou la sphère sont globalement invariantes par rotation. Elles peuvent être paramétrées de façon générale par le vecteur :

$$\mathbf{q}(\theta, \phi) = \langle \Gamma(\phi) \cos \theta, \Gamma(\phi) \sin \theta, g(\phi) \rangle,$$

où le paramètre θ est dit longitude et Γ et g sont des fonctions de la latitude ϕ [13].

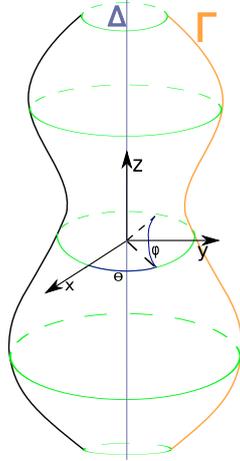


FIG. 8 – Surface de révolution d'axe Δ et de génératrice Γ

Dans ce cas, les équations des géodésiques (1.2.9) se mettent sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Gamma^2 \dot{\theta}) &= 0 \\ \ddot{\phi} - \frac{\Gamma \Gamma'}{\Gamma'^2 + g'^2} \dot{\theta}^2 + \frac{\Gamma' \Gamma'' + g' g''}{\Gamma'^2 + g'^2} \dot{\phi}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

La première équation nous informe de la conservation pour toute surface de révolution de la quantité $C = \Gamma^2 \dot{\theta}$. La constante de Clairaut C correspond physiquement à la conservation du moment cinétique axial $\mathbf{\Pi}_s$ résultant de la symétrie de révolution inhérente à la surface. Nous mettons ici en relief un premier exemple de conservation liée à la symétrie d'un problème.

Jusqu'ici, nous avons généralisé les équations du mouvement à un espace des configurations courbe. En introduisant la notion de métrique, nous avons vu qu'il était possible de retrouver les trajectoires dans ces espaces et qu'il était possible de définir des quantités générales caractéristiques de ces derniers : la courbure et le tenseur métrique.

Que deviennent ces notions si l'espace considéré se complexifie ? Si par exemple on considère le mouvement d'une toupie, il sera plus simple de considérer les trajectoires directement en terme de rotations. Ces dernières sont des matrices appartenant au groupe des rotations dans l'espace à trois dimensions $SO(3)$. Dans ces espaces plus complexes où l'évolution d'un système est décrit en fonction des transformations qui lui sont appliquées, il est nécessaire de redéfinir ce que représente la distance entre deux éléments du groupe (deux rotations pour $SO(3)$ par exemple) et de pouvoir caractériser la courbure de celui-ci.

2 Généralisation à des espaces plus complexes : les groupes de Lie

Un groupe de Lie G est défini comme une variété réelle ou complexe différentiable munie des opérations “multiplication” et “inversion” également différentiables et admettant un élément neutre, chaque élément ayant un symétrique [14]. Le mouvement d’un système est alors vu comme une trajectoire sur le groupe en fonction du temps [4].

Afin d’aborder cette généralisation, nous présenterons tout d’abord la manière de décrire à l’aide du groupe $SO(3)$ le mouvement d’un solide en rotation. L’introduction de l’algèbre du groupe permet alors de définir les vecteurs vitesses en fonction des rotations et d’appliquer le principe de moindre action. Une fois ce formalisme acquis, nous verrons qu’en généralisant les opérations, il sera possible d’étendre la démarche à n’importe quel groupe dont les éléments sont des matrices.

Cependant, la résolution des équations alors obtenues est ardue et nous introduirons une méthode géométrique (d’abord pour $SO(3)$, puis pour un groupe quelconque) permettant de résoudre le problème en tenant compte des symétries du système et des lois de conservation associées.

2.1 Cinématique et équations du mouvement dans le groupe des rotations $SO(3)$

Le groupe des rotations dans l’espace, $SO(3)$, permet de décrire l’évolution d’un système en rotation. La littérature sur les groupes de Lie permet de définir les vitesses de rotation à la fois dans un repère fixe et dans un repère mobile. Ces vitesses constituent ce que les mathématiciens appellent l’algèbre du groupe qui va permettre la comparaison des différentes trajectoires afin d’appliquer le principe de moindre action.

2.1.1 Mouvement d’un solide dans l’espace

Le mouvement d’un solide rigide en rotation dans \mathbb{R}^3 peut être observé de deux points de vue, que l’on se considère comme observateur externe ou sur le solide. On note B la configuration de référence, dont les points sont repérés par le vecteur $\mathbf{X} = \langle X^1, X^2, X^3 \rangle$ dans la base mobile $\langle \mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3 \rangle$. Au cours du temps, le solide revêt différentes configurations repérées depuis un repère fixe par le vecteur $\mathbf{x} = \langle x^1, x^2, x^3 \rangle$ dans la base $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle$. Ces configurations diffèrent de la configuration d’origine par le biais d’une rotation, il est donc possible de donner la position d’un point du solide en fonction du temps par $\mathbf{x}(t) = R(t)\mathbf{X}$, \mathbf{X} repérant la position du point de

référence. $R(t)$ est une matrice de rotation appartenant au groupe spécial orthogonal des rotations dans \mathbb{R}^3 , $SO(3)$, défini par :

$$SO(3) = \{R \in GL(3, \mathbb{R}) \text{ tel que } RR^T = 1 \text{ et } \det R = 1\}. \quad (2.1.1)$$

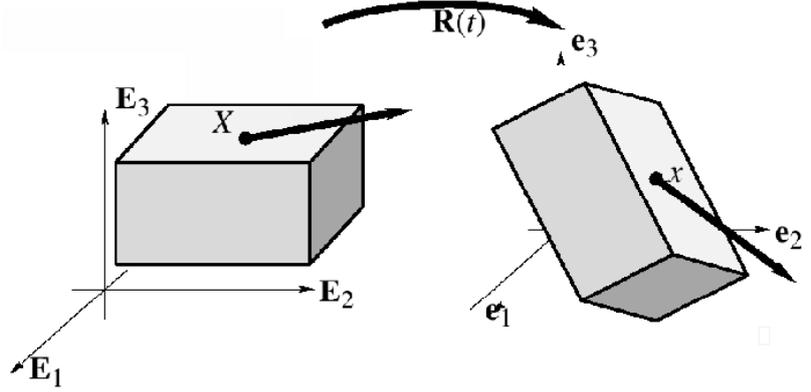


FIG. 9 – Le mouvement d'un solide peut être vu dans un repère fixe ou un repère mobile [15]

Dans le repère fixe (ou spatial), la vitesse s'exprime par

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \\ &= \hat{\Omega}_s \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

On peut également définir la vitesse dite convective dans le repère du corps par

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) &= -\frac{\partial \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \\ &= \hat{\Omega}_c \mathbf{X}. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

$\hat{\Omega}_s = \dot{R}R^T$ et $\hat{\Omega}_c = R^T \dot{R}$ sont les éléments de l'algèbre de Lie $so3$ et constituent des matrices antisymétriques de la forme :

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.4)$$

pouvant être identifiées à \mathbb{R}^3 par

$$\hat{\Omega}\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3, \quad (2.1.5)$$

$$\boldsymbol{\omega} = \langle \omega_1, \omega_2, \omega_3 \rangle \in \mathbb{R}^3.$$

Exemple : Sens physique de l'algèbre de Lie pour SO(3)

Afin d'interpréter physiquement cette quantité, considérons une rotation autour de l'axe \mathbf{e}_1 de la forme :

$$R(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.1.6)$$

On a alors

$$\hat{\Omega}_c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\theta} \\ 0 & \dot{\theta} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.1.7)$$

$$\boldsymbol{\omega}_c = \langle \dot{\theta}, 0, 0 \rangle.$$

On remarque que les éléments de l'algèbre correspondent dans le cas de SO(3) aux vecteurs de vitesse angulaire, l'axe instantané de rotation étant bien \mathbf{e}_1 .

2.1.2 Energie cinétique et principe de moindre action

Une fois l'algèbre défini, l'énergie cinétique est donnée en fonction des vecteurs de vitesse angulaire dans le repère mobile (voir annexe) par :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} dm_0 \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}} dV \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_c^T I_c \boldsymbol{\omega}_c, \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

avec $I_c = \int_{\Omega_0} dm_0 \hat{X}^T \hat{X} dV = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ la matrice principale d'inertie

et \hat{X} la matrice antisymétrique associée au vecteur de référence \mathbf{X} . A noter qu'il sera toujours possible de définir le repère du corps tel que I_c soit une matrice diagonale.

En considérant l'absence de forces extérieures et en vertu du principe de moindre action, on sait que les trajectoires du système satisfont l'équation $\delta \int_a^b T dt = 0$. Afin d'appliquer ce principe, il faut considérer l'ensemble des trajectoires virtuelles que peut choisir le système. Ces trajectoires infinitésimalement proches de la trajectoire réellement empruntée peuvent s'écrire sous la forme

$$R_\varepsilon(t) = R(t) + \varepsilon \delta R(t). \quad (2.1.9)$$

L'algèbre de Lie est défini dans l'espace tangent en l'identité au groupe et à une trajectoire dans le groupe correspond une trajectoire dans l'algèbre. La différence entre la courbe tracée dans l'algèbre correspondant à $R(t)$ et celle correspondant à $R_\varepsilon(t)$ s'exprime par dérivée de Lie

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Omega}_c &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{\Omega}_\varepsilon - \hat{\Omega}_c}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon^T \dot{R}_\varepsilon - R^T \dot{R}}{\varepsilon} \\ &= R^T \delta \dot{R} + \delta R^T \dot{R}. \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

Si $\hat{\eta} = R^T \delta R$ est une trajectoire virtuelle sur l'algèbre s'annulant aux extrémités, $\hat{\eta}(a) = \hat{\eta}(b) = 0$, alors on peut écrire :

$$\frac{d}{dt} \hat{\eta} = \dot{R}^T \delta R + R^T \delta \dot{R}, \quad (2.1.11)$$

et en remplaçant dans (2.1.10), il vient

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Omega}_c &= \frac{d}{dt} \hat{\eta} - \dot{R}^T \delta R + \delta R^T \dot{R} \\ &= \frac{d}{dt} \hat{\eta} + R^T \dot{R} R^T \delta R - R^T \delta R R^T \dot{R} \\ &= \frac{d}{dt} \hat{\eta} + \hat{\Omega}_c \hat{\eta} - \hat{\eta} \hat{\Omega}_c. \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

$$(2.1.13)$$

La différence $\hat{\Omega}_c \hat{\eta} - \hat{\eta} \hat{\Omega}_c$ est différente de 0 car $\text{SO}(3)$ n'est pas plat. On définit alors le crochet de Lie

$$[\hat{\Omega}_c, \hat{\eta}] = \hat{\Omega}_c \hat{\eta} - \hat{\eta} \hat{\Omega}_c, \quad (2.1.14)$$

comme l'opération permettant de traduire la courbure du groupe par la non-commutativité des éléments de l'algèbre associé. D'après [16], le crochet de Lie des matrices de l'algèbre $\text{SO}(3)$ correspond au produit vectoriel des vecteurs associés et les variations du vecteur ω_c sont donc de la forme

$$\delta \omega_c = \dot{\eta} + \omega_c \wedge \eta. \quad (2.1.15)$$

L'application du principe de moindre action, dont les détails sont présentés en annexe, en utilisant les variations de la forme (2.1.15) mène alors à l'équation d'Euler vérifiée par la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega}_c$,

$$-I_c \dot{\boldsymbol{\omega}}_c + I_c \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c = 0. \quad (2.1.16)$$

Ces équations, équivalentes aux équations de Lagrange (1.1.4), ont été obtenu en utilisant les spécificités du groupe des rotations. L'extension au cas d'un groupe de Lie quelconque, sous condition que ses éléments soient des matrices (ce qui est toujours le cas d'après [17]) va nécessiter des développements calculatoires plus compliqués mais permettra au bout du compte de faire un pas de plus afin de pouvoir déterminer les trajectoires d'un système, peu importe la forme de l'espace des transformations qui lui est associé. On peut, par exemple, penser au groupe des difféomorphismes utilisé par Arnold [17] pour décrire l'hydrodynamique des fluides parfaits. Il a en effet montré que, de la même façon qu'il est possible de décrire le mouvement de rotation à l'aide du groupe SO(3), la distribution des particules d'un fluide incompressible contenu dans un volume constant peut être décrit par un groupe de fonctions dont l'algèbre associée permet d'obtenir les équations du mouvement.

2.2 Généralisation à un groupe quelconque

Afin de pouvoir définir les relations entre le groupe et son algèbre dans le cas général, il est nécessaire de définir diverses opérations que l'on qualifie d'actions.

L'automorphisme dit ADjoint d'un élément g sur un autre élément h du groupe est défini, [16], par

$$\text{AD} \quad G \times G \rightarrow G : \quad \text{AD}_g h := ghg^{-1}. \quad (2.2.1)$$

Cette application peut être différenciée et ramenée en l'identité $h=e$ afin de considérer l'action d'un élément du groupe sur un élément $\hat{\Omega}$ de l'algèbre de Lie

$$\text{Ad} \quad G \times g \rightarrow g : \quad \text{Ad}_g \hat{\Omega} := g \hat{\Omega} g^{-1}. \quad (2.2.2)$$

On peut finalement définir l'action adjointe d'un élément de l'algèbre sur un autre élément de l'algèbre par

$$\text{ad} \quad g \times g \rightarrow g : \quad \text{ad}_{\hat{\Omega}_1} \hat{\Omega}_2 = [\hat{\Omega}_1, \hat{\Omega}_2]. \quad (2.2.3)$$

Dans le cas général, le crochet de Lie correspond donc à l'opération adjointe. Les variations d'un élément de l'algèbre (2.1.15) peuvent donc se mettre sous la forme générale

$$\delta \boldsymbol{\omega}_c = \dot{\boldsymbol{\eta}} + \text{ad}_{\boldsymbol{\omega}_c} \boldsymbol{\eta}, \quad (2.2.4)$$

et le principe de moindre action s'écrit alors

$$\begin{aligned}
0 = \delta \int_a^b L(\boldsymbol{\omega}_c) dt &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}_c} \mid \delta \boldsymbol{\omega}_c \right\rangle dt \\
&= \delta \int_a^b \left\langle \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}_c} \mid \dot{\boldsymbol{\eta}} + ad_{\boldsymbol{\omega}_c} \boldsymbol{\eta} \right\rangle dt \\
&= \delta \int_a^b \left\langle \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}_c} \mid \dot{\boldsymbol{\eta}} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta L}{\delta \boldsymbol{\omega}_c} \mid ad_{\boldsymbol{\omega}_c} \boldsymbol{\eta} \right\rangle dt \\
&= \delta \int_a^b \left\langle -\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}_c} \mid \boldsymbol{\eta} \right\rangle + \left\langle \frac{\delta L}{\delta \boldsymbol{\omega}_c} \mid ad_{\boldsymbol{\omega}_c} \boldsymbol{\eta} \right\rangle dt. \quad (2.2.5)
\end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient à l'aide d'une intégration par parties en se rappelant que $\dot{\boldsymbol{\eta}}$ s'annule aux extrémités.

Afin de mener à bien le principe de moindre action, il est nécessaire d'introduire l'espace dual (correspondant physiquement à l'espace des moments $\boldsymbol{\Pi}$) grâce à l'opération dite co-adjointe définie à l'aide du produit scalaire matriciel $\langle A \mid B \rangle = \text{tr}(A^T B)$ par $\langle ad_{\boldsymbol{\omega}_c}^* \boldsymbol{\Pi} \mid \boldsymbol{\eta} \rangle = \langle \boldsymbol{\Pi} \mid Ad_{\boldsymbol{\omega}_c} \boldsymbol{\eta} \rangle$. L'intégrale (2.2.5) peut alors se mettre sous la forme

$$\int_a^b \left\langle ad_{\boldsymbol{\omega}_c}^* \frac{\delta L}{\delta \boldsymbol{\omega}_c} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}_c} \mid \boldsymbol{\eta} \right\rangle dt = 0, \quad (2.2.6)$$

ce qui conduit à l'équation du mouvement générale dite d'Euler-Poincaré

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}_c} = ad_{\boldsymbol{\omega}_c}^* \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\omega}_c}. \quad (2.2.7)$$

Cette équation est à un groupe quelconque ce que (2.1.16) est à $\text{SO}(3)$ et permet donc de prédire de façon générale l'évolution d'un système en fonction des éléments du groupe qui agit. Cependant, sa résolution est ardue et nous nous proposons de trouver les solutions du problème par une méthode géométrique exploitant au maximum les symétries inhérentes à l'action d'un groupe en construisant des surfaces liées aux invariants. A nouveau, nous proposons les solutions dans le cadre du solide rigide en rotation avant d'étendre la méthode au cas général.

2.3 Résolution géométrique

Afin d'exhiber la conservation d'une quantité au cours du mouvement, nous nous rappelons la conservation du moment axial qui découlait de l'invariance par rotation d'une surface de révolution et essayons de retrouver quelque chose d'analogue. Il faut pour cela passer dans l'espace dual des moments. Pour cela on introduit le moment dans le repère du corps par la

relation $\mathbf{\Pi}_c = \langle \Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \rangle = I_c \boldsymbol{\omega}_c$. L'énergie cinétique s'exprime alors sous la forme

$$T = \frac{1}{2} \mathbf{\Pi}_c^T I_c^{-1} \mathbf{\Pi}_c, \quad (2.3.1)$$

et l'équation de Lagrange dans le cadre du groupe $SO(3)$ (2.1.16) devient

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_c = \mathbf{\Pi}_c \wedge I^{-1} \mathbf{\Pi}_c, \quad (2.3.2)$$

ou encore

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1 &= a_1 \Pi_2 \Pi_3 \\ \dot{\Pi}_2 &= a_2 \Pi_3 \Pi_1 \\ \dot{\Pi}_3 &= a_3 \Pi_1 \Pi_2, \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

avec

$$a_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}, \quad a_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3}, \quad a_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}. \quad (2.3.4)$$

On peut d'ailleurs directement exhiber une solution triviale du problème pour $I_1 = I_2 = I_3$. D'après les équations (2.3.3), pour les solides vérifiant cette condition, $\mathbf{\Pi}_c$, et donc $\boldsymbol{\omega}_c$, sont constants au cours du mouvement. Le solide est alors en rotation à vitesse angulaire constante autour d'un axe fixe.

D'après [15], les moments dans les repères fixes et mobiles sont reliés par la relation

$$\mathbf{\Pi}_s = R \mathbf{\Pi}_c, \quad (2.3.5)$$

et, en remplaçant dans l'équation précédente on retrouve la conservation du moment dans le repère fixe

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\Pi}_s = 0. \quad (2.3.6)$$

2.3.1 L'orbite co-adjointe

L'orbite co-adjointe est la surface décrite au cours du mouvement par le vecteur $\mathbf{\Pi}_c$. D'après l'équation de conservation (2.3.6) et la relation entre les moments dans les repères fixes et mobiles (2.3.5), on peut écrire

$$\mathbf{\Pi}_s = \text{cste} \Rightarrow \mathbf{\Pi}_c = R^T \text{cste}. \quad (2.3.7)$$

La conservation du moment dans le repère fixe conduit alors le vecteur $\mathbf{\Pi}_c$ à décrire une sphère d'équation

$$\Pi_1^2 + \Pi_2^2 + \Pi_3^2 = \Pi_0^2, \quad (2.3.8)$$

où Π_0 est la norme du moment initial tel qu'à $t = 0, \|\mathbf{\Pi}_s\|^2 = \|\mathbf{\Pi}_c\|^2 = \Pi_0^2$.

2.3.2 Ellipsoïde d'énergie

En considérant toujours que le Lagrangien est égal à l'énergie cinétique, il peut, d'après l'expression de T en fonction du moment (2.3.1), se mettre sous la forme :

$$\frac{\Pi_1^2}{2E_0I_1} + \frac{\Pi_2^2}{2E_0I_2} + \frac{\Pi_3^2}{2E_0I_3} = 1, \quad (2.3.9)$$

correspondant, si $I_1 > I_2 > I_3$, à l'équation d'une ellipsoïde de demi grand axe $\sqrt{2E_0I_1}$, de demi axe moyen $\sqrt{2E_0I_2}$, et de demi petit axe $\sqrt{2E_0I_3}$. Cette surface est déterminée uniquement par le solide rigide étudié (via sa matrice d'inertie) et son énergie cinétique initiale.

2.3.3 Solutions du problème

Nous cherchons maintenant à connaître les solutions du problème selon le solide considéré, en dehors du cas trivial déjà traité. Pour cela, revenons aux deux surfaces construites précédemment : l'ellipsoïde d'énergie et la sphère correspondant à la conservation du moment angulaire mesuré dans le repère fixe. La solution du problème devant satisfaire les deux lois de conservations, elle peut être vue comme la trajectoire intersection des deux surfaces définies ci-dessus. Elle est obtenue en injectant la troisième composante du moment de l'équation de l'ellipsoïde dans l'équation de la sphère. C'est une ellipse de demi-axes

$$a = \sqrt{\frac{I_1(\Pi_0^2 - 2E_0I_3)}{I_1 - I_3}} \quad b = \sqrt{\frac{I_2(\Pi_0^2 - 2E_0I_3)}{I_2 - I_3}}. \quad (2.3.10)$$

Cas $I_1 = I_2 > I_3$

Ici, l'intersection devient un cercle de rayon $\rho = \sqrt{\frac{I_1(\Pi_0^2 - 2E_0I_3)}{I_1 - I_3}}$ à l'altitude $\Pi_3 = \text{constante}$ pouvant être paramétré par le vecteur :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \rho \cos \lambda t \\ \Pi_2 &= \rho \sin \lambda t \\ \Pi_3 &= \sqrt{\frac{I_3(2E_0I_1 - \Pi_0^2)}{I_1 - I_3}}, \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

où la vitesse $\lambda = a_2\Pi_3$ est obtenue grâce à l'équation d'Euler sous la forme (2.3.3). En dérivant la paramétrisation (2.3.11), on trouve que le mouvement est soumis aux équations

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1 + \lambda\Pi_2 &= 0 \\ \dot{\Pi}_2 - \lambda\Pi_1 &= 0, \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

qui, en fonctions des conditions initiales, possèdent les solutions

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= \Pi_1(0) \cos \lambda t - \Pi_2(0) \sin \lambda t \\ \Pi_2 &= \Pi_2(0) \cos \lambda t + \Pi_1(0) \sin \lambda t.\end{aligned}\tag{2.3.13}$$

Dans ce cas, le corps tourne dans le repère du corps à la vitesse angulaire λ autour de l'axe de symétrie du solide.

Cas $\mathbf{I}_1 > \mathbf{I}_2 > \mathbf{I}_3$

D'après [15], l'ellipse d'équation (2.3.10) peut être paramétrée à l'aide des fonctions elliptiques (définies en annexe) par le vecteur

$$\begin{aligned}\Pi_1 &= -acn(\mu t) \\ \Pi_2 &= bsn(\mu t) \\ \Pi_3 &= \delta dn(\mu t).\end{aligned}\tag{2.3.14}$$

$$\text{A } t = 0, \Pi_1(0) = -a, \Pi_2(0) = 0, \Pi_3(0) = \delta = \sqrt{\Pi_0^2 - a^2} = \sqrt{\frac{I_3(2E_0I_1 - \Pi_0^2)}{I_1 - I_3}}.$$

On utilise à nouveau l'équation d'Euler (2.3.3) afin de déterminer la vitesse angulaire de rotation

$$\mu = \sqrt{\frac{(2E_0I_1 - \Pi_0^2)(I_2 - I_3)}{I_1I_2I_3}}.\tag{2.3.15}$$

La figure ci-dessous représente les trajectoires (pour différentes conditions initiales) du système sur la sphère décrite par $\mathbf{\Pi}_c$, on remarque qu'elles forment des orbites périodiques dont on analysera la stabilité dans la partie suivante.

Nous avons ici exhibé une méthode géométrique prenant en compte les invariances associées aux symétries du système afin de trouver les solutions du problème sans avoir à résoudre les équations du mouvement. Pour cela, nous avons eu recours à l'orbite co-adjointe qui découlait de la conservation du moment dans le repère fixe. On peut donc se demander si il est possible de déterminer la conservation d'une quantité dans le cadre de n'importe quel groupe. La solution à cette question est fournie en ayant recours au formalisme d'Hamilton qui permettra d'introduire la fonction moment, définie comme constante le long des trajectoires d'un système.

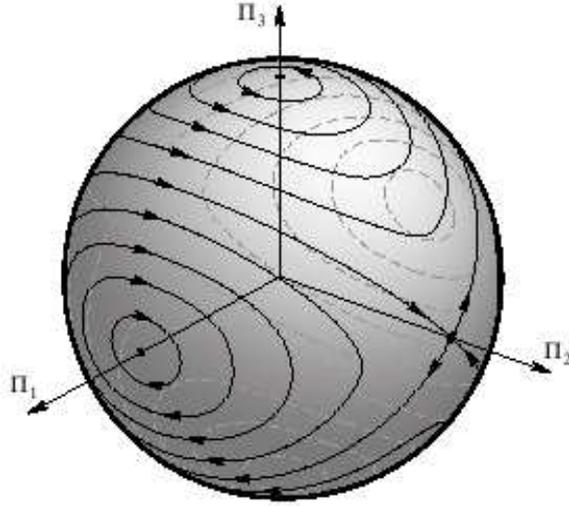


FIG. 10 – Trajectoires sur la sphère des Π_c engendrées par l'intersection avec l'ellipsoïde d'énergie[15]

2.4 Généralisation du lien entre invariance et conservation : fonction moment

La fonction moment permet de traduire le théorème de Noether faisant correspondre à une symétrie d'un système la conservation d'une quantité, par exemple : l'invariance par translation dans le temps entraîne la conservation de l'énergie totale, l'invariance par translation dans une direction de l'espace entraîne la conservation de la quantité de mouvement dans cette direction, l'invariance par rotation entraîne la conservation du moment angulaire.

Afin de définir la fonction moment, il est nécessaire d'introduire le formalisme Hamiltonien à l'aide du moment conjugué

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4.1)$$

permettant d'introduire l'Hamiltonien $H(q^i, p_i, t)$, correspondant à l'énergie totale du système, tel que

$$H(q^i, p_i, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}^j - L(q^i, \dot{q}^i, t). \quad (2.4.2)$$

Les équations du mouvement dites d'Hamilton sont alors :

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (2.4.3)$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}.$$

On notera que dans le cas d'un système conservatif (sans pertes), l'énergie totale du système est conservée au cours du temps, et l'hamiltonien est donc constant le long de toutes les trajectoires du système.

Si l'hamiltonien $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ est invariant par l'action d'un groupe G , alors :

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)), \quad \text{avec} \quad \mathbf{q}(s) = g(s)\mathbf{q}, \quad \mathbf{p}(s) = g(s)\mathbf{p}, \quad (2.4.4)$$

où $g(s)$ est un élément d'un sous-groupe à un paramètre de G , par exemple $g(s) = \exp(s\xi)$ où ξ est un élément de l'algèbre de g . H étant conservé au cours du mouvement, il vient

$$\frac{d}{ds}H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s)) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s))\frac{d}{ds}\mathbf{q}(s) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}H(\mathbf{q}(s), \mathbf{p}(s))\frac{d}{ds}\mathbf{p}(s) = 0. \quad (2.4.5)$$

Pour $s = 0$, $\mathbf{q}(s) = \mathbf{q}$ et $\mathbf{p}(s) = \mathbf{p}$ et d'après (2.4.3) on peut alors écrire

$$-\dot{\mathbf{p}}\frac{d}{ds}|_{s=0}\mathbf{q}(s) + \dot{\mathbf{q}}\frac{d}{ds}|_{s=0}\mathbf{p}(s) = 0, \quad (2.4.6)$$

ou encore

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{p}}\dot{\mathbf{p}} = \frac{d}{ds}J^\xi = 0, \quad (2.4.7)$$

après avoir posé

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{d}{ds}|_{s=0}\mathbf{p}(s) = -\frac{d}{ds}|_{s=0}g(s)\mathbf{p} = -\xi\mathbf{p} \quad (2.4.8)$$

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{d}{ds}|_{s=0}\mathbf{q}(s) = -\frac{d}{ds}|_{s=0}g(s)\mathbf{q} = \xi\mathbf{q}.$$

Dans le cas où le paramètre s est le temps, l'équation (2.4.7) devient

$$\frac{d}{dt}J^\xi = 0 \quad (2.4.9)$$

et la fonction moment J est conservée au cours du mouvement. On peut la définir formellement par la relation :

$$J^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \langle J(\mathbf{q}, \mathbf{p}) | \xi \rangle \quad \forall \xi \in g. \quad (2.4.10)$$

Cette fonction permet donc de déterminer, pour tout groupe G , la quantité conservée au cours du temps. On se propose maintenant de vérifier qu'on retrouve bien la conservation du moment dans le repère fixe dans le cas du groupe $SO(3)$.

Exemple : Fonction moment dans le cas d'une rotation SO3

Si on applique une rotation d'un angle θ d'axe \mathbf{e}_3 à la particule étudiée, sa position est alors : $\mathbf{q}(\theta, t) = R(t)\mathbf{q}(t)$. L'invariance de l'Hamiltonien se traduit par l'équation

$$\frac{dH}{d\theta} = 0. \quad (2.4.11)$$

La démarche décrite précédemment mène à réécrire (2.4.8) dans le cas d'une invariance par rotation sous la forme

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{p}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{q} = \xi \wedge \mathbf{q} \quad (2.4.12)$$

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{p} = -\xi \wedge \mathbf{p}.$$

Sachant que dériver par un vecteur introduit la notion de gradient $\frac{\partial J^\xi}{\partial \mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{q}} J^\xi$, on a

$$\frac{\partial J^\xi}{\partial q_1} = p_2 \quad ; \quad \frac{\partial J^\xi}{\partial q_2} = -p_1 \quad ; \quad \frac{\partial J^\xi}{\partial q_3} = 0. \quad (2.4.13)$$

On vérifie ici que dans le cas d'une invariance par rotation, la quantité conservée est bien le moment.

En se proposant de généraliser l'étude des surfaces au cas des groupes, ce chapitre a permis d'introduire un formalisme permettant de décrire l'évolution d'un système physique en fonction des transformations engendrées par l'action d'un groupe. Nous avons alors montré que l'on pouvait accéder, grâce à cette description, à des équations du mouvement dans des espaces de plus en plus complexes. C'est alors que les questions de symétries ont été approfondies et qu'une méthode géométrique a permis la résolution du problème de rotation du corps rigide à l'aide de l'intersection de l'ellipsoïde associée à la conservation de l'énergie cinétique avec la sphère correspondant à la conservation du moment.

Cependant, certains cas vont nécessiter d'adapter la méthode ou de trouver un autre moyen de résolution. Ce troisième chapitre se propose d'étudier ces situations.

3 Limites de la méthode

Deux limites ont été rencontrées lorsque nous avons essayé d'appliquer le formalisme des groupes de Lie et les méthodes géométriques qui en découlent à d'autres systèmes que le solide rigide en rotation. Premièrement, la construction de l'ellipsoïde d'énergie nécessite que le Lagrangien puisse se mettre sous la forme quadratique, caractéristique d'un système Riemannien. Or, si un potentiel est introduit, nous voyons que cette condition n'est plus directement vérifiée et il va être nécessaire de changer la métrique afin de pouvoir à nouveau considérer une énergie sous forme quadratique dans un espace maintenant pseudo-Riemannien. Le cas du pendule plan, élémentaire mais significatif, permettra d'appliquer la résolution géométrique dans l'espace muni de cette nouvelle métrique.

Les méthodes décrites précédemment vont également être limitées si le système n'est pas intégrable, autrement dit si il y a moins de quantités conservées que le système ne possède de degrés de liberté. Dans ce cas, pour connaître et prédire le comportement du système, il va falloir s'intéresser aux états d'équilibre, ou points fixes, du système et l'étude de la stabilité de ces états permettra d'approcher le comportement du système. Nous verrons finalement qu'une définition géométrique des modes non-linéaires peut être introduite et permettra de caractériser les systèmes complexes sujets à des vibrations de grande amplitude.

3.1 De la forme quadratique du Lagrangien

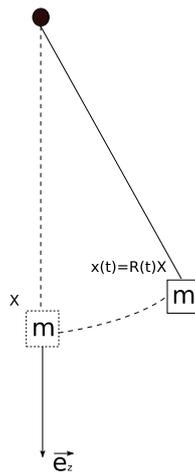


FIG. 11 – Pendule plan

En présence d'énergie potentielle il n'est plus possible d'exprimer le

Lagrangien directement sous forme quadratique et ainsi de construire l'ellipsoïde d'énergie. Il est alors nécessaire de changer de métrique et de faire appel au principe de "Maupertuis-Lagrange-Jacobi" [18] : tout mouvement dans un potentiel $V(\mathbf{q})$ inférieur à l'énergie totale h est un mouvement géodésique de la métrique de Jacobi $\gamma_h = 2(h - V(\mathbf{q}))\gamma_{ij}$ où γ_{ij} est la métrique initiale. Dans cette nouvelle métrique, le Lagrangien est à nouveau égal à l'énergie cinétique (l'opérateur d'inertie dépendant maintenant du potentiel) et la méthode géométrique décrite précédemment peut être appliquée, à quelques détails près.

Exemple 7 : Pendule plan

Pour illustrer cette situation, considérons l'exemple du pendule où l'énergie potentielle s'écrit

$$\begin{aligned} V &= mg\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_z \\ &= \langle mg\mathbf{X}|\mathbf{\Gamma}\rangle, \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

où $\mathbf{\Gamma} = R^T\mathbf{e}_z$ est le mouvement de la direction verticale vue depuis le repère du corps. Le Lagrangien du système s'écrit alors

$$L = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_c^T I_c \boldsymbol{\omega}_c - \langle mg\mathbf{X}|\mathbf{\Gamma}\rangle, \quad (3.1.2)$$

et, il est possible de réécrire le principe de moindre action en présence d'énergie potentielle afin d'obtenir l'équation du mouvement

$$-I_c\dot{\boldsymbol{\omega}}_c + I_c\boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c + mg\mathbf{\Gamma} \wedge \mathbf{X} = 0. \quad (3.1.3)$$

Dans la métrique initiale, l'Hamiltonien est donné par

$$H_0(\mathbf{\Pi}_c) = \frac{1}{2}\mathbf{\Pi}_c^T I_c^{-1}\mathbf{\Pi}_c + V(\mathbf{X}), \quad (3.1.4)$$

et dans le cas du pendule la matrice d'inertie principale s'écrit

$$I_c = m\hat{X}^T \hat{X} = \begin{pmatrix} ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Dans la métrique de Jacobi, l'opérateur d'inertie vaut maintenant $I_h = (h - V(\mathbf{X}))I_c$ et on a alors

$$H_h(\mathbf{\Pi}_c) = \frac{1}{2}\mathbf{\Pi}_c^T \frac{1}{h - V(\mathbf{X})} I_c^{-1}\mathbf{\Pi}_c. \quad (3.1.6)$$

L'hamiltonien étant conservé le long des trajectoires, $H_0 = h$ et $\frac{1}{2}\mathbf{\Pi}_c^T I^{-1}\mathbf{\Pi}_c = h - V(\mathbf{X})$ et on remarque alors que :

$$H_h(\mathbf{\Pi}_c) = \frac{h - V(\mathbf{X})}{h - V(\mathbf{X})} = 1 = L_h. \quad (3.1.7)$$

Il vient alors le lagrangien lié à la métrique de Jacobi

$$\begin{aligned}
L_h &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega}_c I_h \boldsymbol{\Omega}_c \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\Omega_1^2}{a^2} + \frac{\Omega_2^2}{b^2} \right) \\
&= 1,
\end{aligned} \tag{3.1.8}$$

avec $a^2 = \frac{1}{(h-V)I_1}$ et $b^2 = \frac{1}{(h-V)I_2}$ et $\boldsymbol{\Omega}_c$ les vecteurs de vitesse angulaire dans la métrique de Jacobi, vérifiant la relation

$$\boldsymbol{\omega}_c = [h - V(\mathbf{X})] \boldsymbol{\Omega}_c. \tag{3.1.9}$$

En présence de potentiel, l'ellipsoïde d'énergie devient donc un cylindre de rayon $\rho = \sqrt{2/(h-V)ml^2}$ dépendant au cours du mouvement du potentiel.

Afin d'obtenir la solution géométrique du problème, il faut trouver la surface sur laquelle vit le moment d'inertie $\boldsymbol{\Pi}_c = I_h \boldsymbol{\Omega}_c$ tel que

$$\boldsymbol{\Pi}_c = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix} = (h - V(\mathbf{X}))ml^2 \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3.1.10}$$

La surface cherchée est donc un cercle dans le plan $\Pi_3 = 0$. En utilisant la relation entre les vitesses et les moments angulaires dans l'expression du lagrangien lié à la métrique de Jacobi (3.1.8), on trouve que le rayon de ce cercle est

$$\rho_\pi = \sqrt{2(h - V(\mathbf{X}))ml^2}. \tag{3.1.11}$$

La rotation R ayant pour axe de rotation le vecteur \mathbf{e}_1 , la seule solution pour que la relation entre les moments dans les repères fixe et mobile (2.3.5) soit vérifiée est que les deux moments aient une direction fixe dirigée selon l'axe de rotation. On a donc

$$\boldsymbol{\Pi}_s = \boldsymbol{\Pi}_c = \alpha \mathbf{e}_1 \quad \text{avec} \quad \alpha = [h - V(\mathbf{X})]ml^2 \Omega_1, \tag{3.1.12}$$

et la composante Ω_2 doit être nulle. D'après l'expression du lagrangien lié à la métrique de Jacobi (3.1.8), l'intersection est donc le point de coordonnées

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{2}{(h - V(\mathbf{X}))ml^2}} \quad ; \quad \Omega_2 = \Omega_3 = 0, \tag{3.1.13}$$

et, d'après la relation entre les vitesses angulaires dans les deux repères (3.1.9), il vient

$$\omega_1 = \frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{2[h - V(\mathbf{X})]}{ml^2}}, \tag{3.1.14}$$

ce qui permet d'établir l'équation différentielle

$$dt = \frac{l}{g\sqrt{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{1}{2}\omega_0^2 + \cos\theta - \cos\theta_0}}. \quad (3.1.15)$$

A l'aide du changement de variable $\sin u = \sin\phi / \sin(\frac{\theta_0}{2})$ on obtient le portrait de phase présenté ci-dessous et décrit par l'équation

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \sqrt{\frac{1}{2}\omega_0^2 + \cos\theta - \cos\theta_0}. \quad (3.1.16)$$

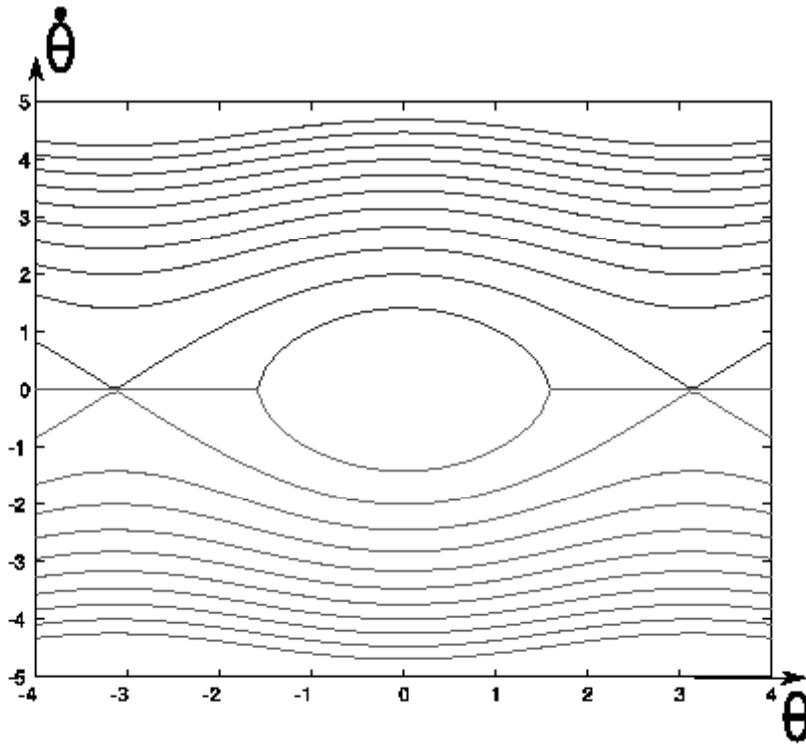


FIG. 12 – Portrait de phase $\dot{\theta}(\theta)$ pour différents niveaux d'énergie

Ce portrait de phase est bien connu des études classiques sur le pendule et représente les trajectoires pour différents niveaux d'énergie h . On remarquera que l'on a pas eu besoin de procéder à la restriction au cas des petits angles comme c'est usuel avec les méthodes classiques. Les positions pour lesquelles la vitesse est nulle sont les points d'équilibres sur lesquels nous reviendrons pour décrire les systèmes non intégrables.

Avant cela, nous devons évoquer une première perspective de travail qui permettrait de généraliser la mise sous forme quadratique du Lagrangien, bien que cette méthode soit à l'heure actuelle trop complexe : la construction de Kaluza-Klein [16]. Cette construction a été mise en place pour unifier l'électromagnétisme et la gravitation et peut également être appliquée à des systèmes gyroscopiques tels que la toupie. En ajoutant une quatrième dimension, il est possible de définir un Lagrangien sous forme quadratique exprimé à partir d'une énergie cinétique qui définit la métrique de Kaluza-Klein sur l'espace tangent.

Il semble que cette construction puisse être généralisée à tout système et permettrait de toujours considérer un Lagrangien sous forme quadratique et alors construire une surface traduisant la conservation de l'énergie.

3.2 Systèmes non intégrables : Etude de stabilité et Modes Non-linéaires

La seconde limite à la détermination des trajectoires d'un système en utilisant les surfaces liées aux quantités conservées intervient si le système considéré n'est pas intégrable, c'est à dire s'il y a moins de quantités conservées au cours du mouvement que le système ne possède de DDL. Sachant que les systèmes non-linéaires correspondent à ce cas de figure, il nous faut trouver une autre façon de prédire ou d'approcher le comportement du système dans ces cas là. Pour cela, on restreint l'étude du comportement aux points fixes du système en prévoyant l'évolution au cours du temps en terme de stabilité ou d'instabilité du point fixe. Ici, après avoir présenté une méthode générale, nous appliquerons cette démarche au cas du solide rigide en rotation, ce qui nous permettra de conclure l'étude de ce cas. Nous proposerons également un exemple de bifurcation non-linéaire pour terminer ensuite sur un moyen de déterminer les modes non-linéaires d'un système en revenant aux concepts de géodésiques de la métrique de Jacobi [19].

3.2.1 Méthode générale pour l'étude de la stabilité

Partons du postulat qu'il sera toujours possible de décrire l'évolution du système sous la forme :

$$\dot{\mathbf{u}} = F(\mathbf{u}), \quad (3.2.1)$$

où $\mathbf{u} = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ en général et F est la "fonction d'évolution". Au cours du temps, l'état du système décrit une trajectoire $\mathbf{u}(t)$ dans l'espace des phases P , cette trajectoire est unique à une condition initiale $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$ près. Un état d'équilibre (ou point fixe) \mathbf{u}_e est alors défini tel que $F(\mathbf{u}_e) = 0$. Si une trajectoire commence à la position \mathbf{u}_e , alors elle reste à cette position quand $t > 0$.

Une fois les points fixes déterminés, l'étude de leur stabilité permet d'obtenir de précieuses informations sur le comportement du système. De façon concrète, on peut dire qu'un système est stable en un point d'équilibre si des petites perturbations n'entraînent pas de grands bouleversement du système. Bien que les trajectoires puissent rester très complexes, la stabilité promet juste de rester proche de l'état d'équilibre. Supposons que le système possède un point fixe $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e$, on cherche à linéariser autour de cette position. Pour cela on pose $\mathbf{y} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_e$ et on peut alors écrire

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y} = F(\mathbf{u}) - F(\mathbf{u}_e). \quad (3.2.2)$$

Or

$$F(\mathbf{u}) = F(\mathbf{u}_e) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_e)d\mathbf{u} = F(\mathbf{u}_e) + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_e)\mathbf{y}, \quad (3.2.3)$$

et l'équation linéarisé est alors

$$\dot{\mathbf{y}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{u}_e)\mathbf{y} = L(\mathbf{u}_e)\mathbf{y}, \quad (3.2.4)$$

où le terme à droite L est la matrice jacobienne de F obtenue par la dérivée de Lie dans la direction \mathbf{y}

$$L(\mathbf{u}_e) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F(\mathbf{u} + \epsilon\mathbf{y}) - F(\mathbf{u})}{\epsilon} \quad (3.2.5)$$

prise au point \mathbf{u}_e . La solution de l'équation linéarisée (3.2.4) peut se mettre sous la forme $\mathbf{y}(t) = \exp st$ où s_i sont les valeurs propres de L . Ceci permet de déterminer la stabilité du système. En effet, si les valeurs propres sont toutes imaginaires pures ou si leurs parties réelles sont négatives, le système est stable (convergence de l'exponentielle). Si par contre, une des valeurs propres possède une partie réelle positive, alors l'état d'équilibre considéré est instable et les perturbations ont tendance à grandir au cours du mouvement (divergence de l'exponentielle).

Application au mouvement eulérien de rotation

La méthode décrite précédemment peut être appliquée au problème de rotation du corps rigide. Pour déterminer la condition d'équilibre, repartons de l'équations d'Euler-Lagrange (2.3.2) sous la forme

$$\dot{\mathbf{\Pi}}_c = \mathbf{\Pi}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c = F(\mathbf{\Pi}_c). \quad (3.2.6)$$

La condtion d'équilibre est alors satisfaite si les vecteurs $\mathbf{\Pi}_c$ et $\boldsymbol{\omega}_c$ sont parallèles. Sans perte de généralité, fixons ces vecteurs selon l'axe \mathbf{e}_1 . Après normalisation, le moment angulaire à l'équilibre correspond au vecteur $\mathbf{\Pi}_e =$

$\langle 1, 0, 0 \rangle$. En posant $\mathbf{y} = \mathbf{\Pi}_c - \mathbf{\Pi}_e$, on peut écrire

$$\begin{aligned} F(\mathbf{\Pi}_c + \epsilon \mathbf{y}) &= (\mathbf{\Pi}_c + \epsilon \mathbf{y}) \wedge [I^{-1}(\mathbf{\Pi}_c + \epsilon \mathbf{y})] \\ &= F(\mathbf{\Pi}_c) + \epsilon \underbrace{(\mathbf{y} \wedge (I^{-1}\mathbf{\Pi}_c) + \mathbf{\Pi}_c \wedge (I^{-1}\mathbf{y}))}_{\langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{\Pi}_c} | \mathbf{y} \rangle} + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \langle \frac{\partial F}{\partial \mathbf{\Pi}_c} | \mathbf{y} \rangle \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_3 - I_1}{I_1 I_3} \\ 0 & \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

et les valeurs propres sont :

$$s_{\pm} = \pm \frac{1}{I_1 \sqrt{I_2 I_3}} \sqrt{(I_1 - I_2)(I_3 - I_1)} \quad (3.2.9)$$

Trois états d'équilibres peuvent être alors étudiés :

- Rotation selon le plus grand axe : $I_1 > I_2, I_1 > I_3$, les deux valeurs propres sont imaginaires pures, cet équilibre est donc stable.
- Rotation selon le plus petit axe : $I_1 < I_2, I_1 < I_3$, les deux valeurs propres sont imaginaires pures, cet équilibre est donc stable.
- Rotation selon l'axe moyen : $I_1 > I_2, I_1 < I_3$, les deux valeurs propres sont réelles et de signe opposées, cet état d'équilibre est alors instable.

On notera qu'ici la stabilité considérée est dite spectrale. Il a été montré que dans certains cas qui ne nous concernent pas ici, ce critère de stabilité n'était pas suffisant [15]. Des méthodes plus générales nécessitant d'introduire les fonctions de Casimir permettent de palier à ce problème mais le temps nous a manqué pour les comprendre et les mettre en place dans les exemples étudiés au cours du stage.

3.2.2 Le pendule tournant : instabilités et bifurcation

Notre démarche consistant à élargir notre point de vue aux systèmes non-linéaires nous a conduit à rencontrer les phénomènes de "bifurcation" [20]. Ce terme est employé quand la modification d'un paramètre de contrôle du système entraîne une évolution du nombre d'états d'équilibre et du caractère stable ou non de ceux-ci. Pour comprendre ces phénomènes à l'aide des méthodes précédemment employées, nous décidons d'exhiber un exemple simple.

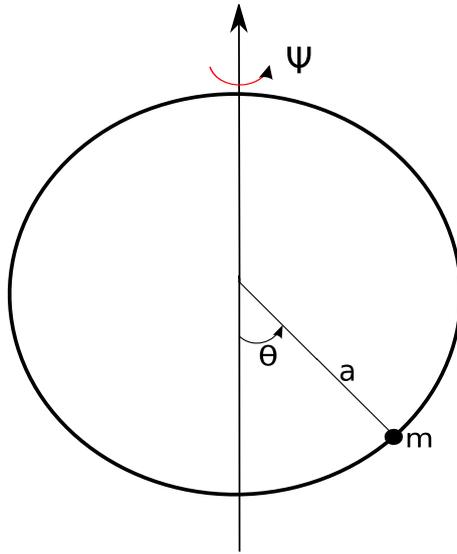


FIG. 13 – Pendule plan mis en rotation autour de l'axe \mathbf{e}_3

Ici, le pendule étudié précédemment est maintenant mis en mouvement autour de l'axe \mathbf{e}_3 à une vitesse Ψ . La position de la bille s'écrit $\mathbf{x}(t) = R(\alpha, \theta)\mathbf{X}(t)$ où $R(\alpha, \theta)$ est la composée d'une rotation $R_1(\theta)$ autour de \mathbf{e}_1 et d'une rotation $R_2(\alpha)$ autour de \mathbf{e}_3 tel que $\dot{\alpha} = \Psi$:

$$R(\alpha, \theta) = R_2(\alpha)R_1(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \theta & \sin \alpha \sin \theta \\ \sin \alpha & \cos \alpha \cos \theta & -\cos \alpha \sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Cette description du système nous permet d'accéder aux équations du mouvement et de procéder à l'étude de stabilité. Les développements sont disponibles en annexe et ils conduisent à des résultats intéressants par rapport aux quatre positions d'équilibre :

- En $\theta_e = 0$, les valeurs propres sont régies par l'équation $\lambda^2 = \Psi^2 - \Psi_c^2$. Si $\Psi < \Psi_c$, les deux valeurs propres sont imaginaires et l'équilibre est stable. Quand $\Psi > \Psi_c$, une des valeurs propres est réelle positive et l'équilibre est donc instable.
- En $\theta_e = \pi$, les valeurs propres sont régies par l'équation $\lambda^2 = \Psi^2 - \Psi_c^2$ et une des deux est toujours réelle positive. Cet équilibre est toujours instable, ce qui semble logique car si on lâche la bille en haut, elle aura toujours tendance à retomber.
- Aux deux angles vérifiant $\cos \theta_e = \frac{g}{l\Psi^2}$, l'équation aux valeurs propres est $\lambda^2 = \Psi^2\left(\frac{\Psi_c^4}{\Psi^4} - 1\right)$ et sur son domaine de définition, $\Psi > \Psi_c$, ces

équilibres sont toujours stables.

Le comportement du système peut donc se résumer de la façon suivante. Pour $\Psi < \Psi_c$, il existe deux états d'équilibre dont un stable. Quand la vitesse de rotation dépasse Ψ_c , deux nouveaux états d'équilibre stable apparaissent et l'équilibre $\theta_e = 0$ devient instable. Le phénomène se produisant à $\Psi = \Psi_c$ est une bifurcation.

Afin de conclure sur les moyens d'approcher le comportement des systèmes non-linéaires, une définition géométrique des modes non-linéaire est présentée.

3.2.3 Modes Non-Linéaires

Physiquement, les modes non-linéaires sont en général introduits quand l'amplitude des vibrations d'un système devient grande. La description de l'état vibratoire à l'aide de la décomposition en somme de modes linéaires n'est alors plus possible. Pourtant, des variations périodiques des coordonnées sont toujours observables [21],[22]. Ce concept de modes non-linéaire est de plus en plus utilisé pour modéliser des structures complexes car l'estimation sur un seul mode non-linéaire est bien plus performante que sur un grand nombre de modes linéaires [23],[20].

Dans [24] et [25], Zhang introduit une définition géométrique de ces modes que nous sommes maintenant à même de comprendre. Pour cela, il part de la constatation que si le mode non-linéaire est une trajectoire du système, alors il correspond à une géodésique. Il faut alors trouver à laquelle de ces trajectoires correspond un mode. Leurs caractères périodiques entraînent qu'elles doivent être fermées et le fait que tous les points atteignent un extremum où la vitesse (et donc l'énergie cinétique) est nulle définit une sous-variété correspondant à $V(q_1, q_2, \dots, q_n) = h$ qui constitue une borne de la trajectoire. Un mode non-linéaire associé à des conditions initiales est donc la géodésique fermée entre l'origine et la sous-variété défini précédemment de l'espace des configuration munie de la métrique de Jacobi

$$\gamma_{ij} = 2(h - V(x_1, x_2, \dots, x_n))\gamma_{ij}. \quad (3.2.11)$$

Nous disposons donc des outils nous permettant de trouver ces trajectoires. Cependant, dans les deux articles cités précédemment, les trajectoires sont déterminées par des approximations à l'aide de suite de polynômes. Nous pensons qu'il est possible de mener plus loin et de mieux exploiter la démarche géométrique découlant de la définition des modes afin de résoudre complètement ce problème. Pour commencer, il serait nécessaire d'appliquer notre point de vue à un système masse-ressort non-linéaire afin d'évaluer si il est possible de définir des surfaces permettant d'accéder aux solutions du problème, mais le temps n'a pas été suffisant pour mener à bien ce projet.

Cette troisième partie a permis de présenter les situations où les outils développés au cours des deux premiers chapitres devaient être adaptés. Nous avons alors montré qu'il était possible de traiter les systèmes régis par un potentiel en changeant la métrique afin de pouvoir redéfinir une surface traduisant la conservation de l'énergie. Pour résoudre les problèmes des systèmes non intégrables, un autre point de vue a du être mis en place en construisant une méthode générale qu'on a pu appliquer avec succès à deux exemples.

La conclusion sur les modes non-linéaires a permis de montrer le rapport entre la géométrie des espaces courbes et les modes non-linéaires, et poursuivre dans cette voie en restant le plus géométrique possible semble être une perspective intéressante pour la poursuite de la généralisation de l'étude des trajectoires aux systèmes non-linéaires.

Conclusion

Dans le but de pouvoir prédire les trajectoires d'un système physique en vue de modéliser son comportement, la question de la généralisation des équations du mouvement au cas des espaces courbes a permis de mettre en oeuvre une large étude bibliographique concernant l'application des outils de la géométrie différentielle et des groupes de Lie à la caractérisation de systèmes dynamique.

Dans un premier temps, la notion de courbure en elle-même nous a mené à consacrer du temps à l'étude des surfaces afin de déterminer des quantités (la courbure et le tenseur métrique) intrinsèques et de pouvoir caractériser au mieux l'espace des configurations et , si possible, se ramener à l'étude des courbes sur une surface de révolution.

Après avoir exhibé un premier exemple de lien entre symétrie et conservation d'une quantité, notre étude s'est poursuivie sur des espaces plus complexes, les groupes de Lie, et plus particulièrement sur le groupe des rotations dans l'espace. Pour ce groupe, nous avons montré qu'il était possible d'écrire les équations du mouvement en fonction des éléments du groupe puis nous avons proposé une méthode permettant la résolution géométrique du problème en insistant sur le rapport entre invariance et conservation. Ces résultats ont ensuite été généralisés aux autres groupes de Lie.

Finalement, nous avons montré qu'en présence de potentiel, un changement de métrique permettait d'adapter la précédente méthode mais que les systèmes non intégrables nous obligeaient à nous restreindre au comportement autour des points d'équilibres.

D'autres concepts mathématiques tels que les connexions ou les espaces fibrés ont été abordés au cours du stage mais leurs compréhension et leurs applications aux systèmes physiques n'ont pu être menés à terme. La poursuite de ces travaux formaliserait notre méthode d'une façon plus générale et permettrait de traiter plus facilement des systèmes régis par d'autres groupes que celui des rotations tels que celui des difféomorphismes ou le groupe des translations et rotations dans l'espace $SE(3)$.

Bien que l'étude présentée ici soit essentiellement théorique, elle n'est néanmoins pas dépourvue d'applications. Par exemple, en synthèse sonore, la détermination des modes non-linéaires permettrait de pouvoir établir des modèles physiques plus réalistes dans le domaine des grandes amplitudes. Les questions de morphing sonore et de trajectoires entre deux sons doivent également pouvoir être traitées à l'aide des outils géométriques développés ici une fois qu'une métrique convaincante du point de vue perceptif ait été construite à l'aide de descripteurs tels que le contenu harmonique ou l'amplitude.

4 Annexes

De Lagrange aux géodésiques

En utilisant la définition de la métrique $L = T = \frac{1}{2}g_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j$ dans (1.1.4), on peut écrire, en l'absence de forces extérieures pour une particule

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g_{kj}\dot{q}^j + g_{ik}\dot{q}^i - \frac{1}{2}g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j) &= 0 \\
\frac{d}{dt}(g_{ik}\dot{q}^i) - \frac{1}{2}g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j &= 0 \\
g_{ik}\ddot{q}^i + g_{ik,j}\dot{q}^j\dot{q}^i - \frac{1}{2}g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j &= 0 \\
g_{ik}\ddot{q}^i + \frac{1}{2}(2g_{ik,j}\dot{q}^j\dot{q}^i - g_{ij,k}\dot{q}^i\dot{q}^j) &= 0 \\
\ddot{q}^i + \frac{g^{kl}}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})\dot{q}^i\dot{q}^j &= 0 \\
\frac{d^2}{dt^2}q^i + \Gamma_{ij}^l\frac{dq^k}{dt}\frac{dq^j}{dt} &= 0, \tag{4.0.12}
\end{aligned}$$

où les

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{g^{kl}}{2}(g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k}), \tag{4.0.13}$$

sont les symboles de Christoffel de seconde espèce.

Principe de moindre action pour S03

On se propose de retrouver l'équation d'Euler (2.1.16) grâce à l'utilisation du principe de moindre action. Premièrement, l'énergie cinétique s'exprime pour SO3 sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
E_c &= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} dm_0\dot{\mathbf{x}}^T\dot{\mathbf{x}}dV = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} dm_0(\dot{R}\mathbf{X})^T(\dot{R}\mathbf{X})dV \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} dm_0\mathbf{X}^T\dot{R}^T\dot{R}\mathbf{X}dV = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} dm_0\mathbf{X}^T\dot{R}^T R R^T \dot{R}\mathbf{X}dV \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} dm_0\mathbf{X}^T\hat{\Omega}_c^T\hat{\Omega}_c\mathbf{X}dV = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} dm_0(\boldsymbol{\omega}_c \wedge \mathbf{X})^T(\boldsymbol{\omega}_c \wedge \mathbf{X})dV \\
&= \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} dm_0(\mathbf{X} \wedge \boldsymbol{\omega}_c)^T(\mathbf{X} \wedge \boldsymbol{\omega}_c)dV = \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} dm_0(\hat{X}\boldsymbol{\omega}_c)^T(\hat{X}\boldsymbol{\omega}_c)dV \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_c^T\left[\int_{\Omega_0} dm_0\hat{X}^T\hat{X}dV\right]\boldsymbol{\omega}_c \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}_c^T I_c \boldsymbol{\omega}_c \\
&= \frac{1}{2}\langle I_c \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\omega}_c \rangle. \tag{4.0.14}
\end{aligned}$$

En considérant les variations de la forme

$$\delta\boldsymbol{\omega}_c = \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\eta}, \quad (4.0.15)$$

le principe de moindre action peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \delta A = 0 &= \delta \int_a^b T dt = \int_a^b \delta E_c dt \\ &= \int_a^b \langle I_c \boldsymbol{\omega}_c | \delta \boldsymbol{\omega}_c \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle I_c \boldsymbol{\omega}_c | \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\eta} \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle I_c \boldsymbol{\omega}_c | \dot{\boldsymbol{\eta}} \rangle + \langle I_c \boldsymbol{\omega}_c | \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\eta} \rangle dt \\ &= [\langle I_c \boldsymbol{\omega}_c | \boldsymbol{\eta} \rangle]_a^b + \int_a^b \langle -\frac{d}{dt} I_c \boldsymbol{\omega}_c | \boldsymbol{\eta} \rangle + \langle (I_c \boldsymbol{\omega}_c) \wedge \boldsymbol{\omega}_c | \boldsymbol{\eta} \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle -\frac{d}{dt} (I_c \boldsymbol{\omega}_c) + I_c \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c | \boldsymbol{\eta} \rangle dt. \end{aligned} \quad (4.0.16)$$

La dernière ligne s'obtient par intégration par partie en considérant que les variations aux extrémités du chemin sont nulles et on l'on trouve bien l'équation recherchée

$$-I_c \dot{\boldsymbol{\omega}}_c + I_c \boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c = 0. \quad (4.0.17)$$

En présence du potentiel, il faut également considérer les variations $\delta\boldsymbol{\Gamma}$ du vecteur $\boldsymbol{\Gamma}$ en reprenant les variations de la forme (2.1.9)

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{\Gamma} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{R_\varepsilon^T \mathbf{e}_3 - R^T \mathbf{e}_3}{\varepsilon} \\ &= \delta R^T \mathbf{e}_3 \\ &= -R^T \delta R R^T \mathbf{e}_3 \\ &= -\dot{\boldsymbol{\eta}} \boldsymbol{\Gamma} \\ &= -\boldsymbol{\eta} \wedge \boldsymbol{\Gamma} \\ &= \boldsymbol{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (4.0.18)$$

En reprenant les astuces de calcul utilisées pour démontrer (4.0.16), l'application du principe de moindre action en présence de potentiel donne

$$\begin{aligned}
0 = \delta \int_a^b L dt &= \int_a^b \langle I\boldsymbol{\omega}_c | \delta\boldsymbol{\omega}_c \rangle - \langle mg\mathbf{X} | \delta\boldsymbol{\Gamma} \rangle dt \\
&= \int_a^b \langle -\frac{d}{dt}(I_c\boldsymbol{\omega}_c) + I_c\boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\eta} \rangle - \langle mg\mathbf{X} | \boldsymbol{\Gamma} \wedge \boldsymbol{\eta} \rangle dt \\
&= \int_a^b \langle -\frac{d}{dt}(I_c\boldsymbol{\omega}_c) + I_c\boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\eta} \rangle - \langle mg\mathbf{X} \wedge \boldsymbol{\Gamma} | \boldsymbol{\eta} \rangle dt \\
&= \int_a^b \langle -\frac{d}{dt}(I_c\boldsymbol{\omega}_c) + I_c\boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\eta} + mg\boldsymbol{\Gamma} \wedge \mathbf{X} | \boldsymbol{\eta} \rangle dt \quad (4.0.19)
\end{aligned}$$

et l'équation d'Euler du mouvement est

$$-\frac{d}{dt}(I_c\boldsymbol{\omega}_c) + I_c\boldsymbol{\omega}_c \wedge \boldsymbol{\omega}_c, \boldsymbol{\eta} + mg\boldsymbol{\Gamma} \wedge \mathbf{X} = 0. \quad (4.0.20)$$

Fonctions elliptiques

Les fonctions elliptiques peuvent être vues comme une généralisation des fonctions trigonométriques quand le cercle devient une ellipse [26].

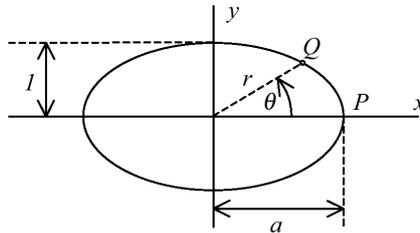


FIG. 14 – Paramétrisation de l'ellipse permettant d'introduire les fonctions elliptiques

Il est nécessaire de définir le module et l'argument d'une fonction elliptique. Pour cela, rappelons l'équation d'une ellipse en coordonnées cartésiennes

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1. \quad (4.0.21)$$

On définit l'excentricité d'une ellipse par

$$\zeta = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \quad (4.0.22)$$

On remarquera que ce paramètre est égal à 0 pour le cercle et à 1 pour la parabole. Le module k est alors défini comme l'excentricité de l'ellipse

normalisée (b=1)

$$k = \sqrt{1 - \frac{1}{a^2}}. \quad (4.0.23)$$

L'argument d'une fonction elliptique s'exprime par

$$u = \int_P^Q r d\theta, \quad (4.0.24)$$

et les 3 fonctions elliptiques utilisées dans le manuscrit s'écrivent alors

$$\begin{aligned} sn(u, k) &= \frac{y}{a} \\ cn(u, k) &= \frac{x}{a} \\ dn(u, k) &= \frac{r}{a}. \end{aligned} \quad (4.0.25)$$

Ces fonctions peuvent être notées sans leur module, par exemple : $sn(u, k) = sn(u)$. Elles vérifient les relations

$$\begin{aligned} cn^2 u + sn^2 u &= 1 \\ dn^2 u + k^2 sn^2 u &= 1 \\ \frac{d}{du} sn(u) &= cn(u) dn(u) \\ \frac{d}{du} cn(u) &= -sn(u) dn(u) \\ \frac{d}{du} dn(u) &= -k^2 sn(u) cn(u). \end{aligned} \quad (4.0.26)$$

Etude de stabilité des équilibres du pendule tournant

La rotation (3.2.10) utilisée pour décrire le mouvement du pendule tournant mène au vecteur de vitesse angulaire mesuré dans le repère du corps $\boldsymbol{\omega}_c = \langle \dot{\theta}, -\dot{\alpha}, \dot{\alpha} \cos \theta \rangle$ et on peut retrouver la valeur de l'énergie cinétique classique pour ce problème

$$T = \frac{1}{2} ml^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2) = \frac{1}{2} ml^2 (\dot{\theta}^2 + \alpha \sin^2 \theta). \quad (4.0.27)$$

D'après (3.1.3), on obtient l'équation du mouvement en fonction de θ et du paramètre de contrôle Ω

$$l\ddot{\theta} = a\Psi^2 \sin \theta \cos \theta - g \sin \theta. \quad (4.0.28)$$

Les positions d'équilibre se trouvent simplement pour $\dot{\theta} = 0$, donc $\ddot{\theta} = 0$. Elles vérifient alors l'équation

$$l\Psi^2 \sin \theta \cos \theta = g \sin \theta. \quad (4.0.29)$$

Les positions $\theta = 0, \pi$, correspondant à la bille en haut ou en bas, sont donc des états d'équilibres tout comme les positions satisfaisant l'équation

$$\cos \theta = \frac{g}{l\Psi^2}, \quad (4.0.30)$$

nous permettant d'introduire une vitesse angulaire critique $\Psi_c = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Cette position n'est définie que quand $\Psi > \Psi_c$. Pour étudier la stabilité de ce système, la linéarisation s'effectue en introduisant $\varphi = \dot{\theta}$ et le système s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \phi \\ \dot{\phi} &= -\Psi_c^2 \sin \theta + \Psi^2 \cos \theta \sin \theta, \end{aligned} \quad (4.0.31)$$

et est associé à la matrice jacobienne

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\Psi_c^2 \cos \theta + \Psi^2(2 \cos^2 \theta - 1) & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.0.32)$$

de polynôme caractéristique

$$\lambda^2 + \Psi_c^2 \cos \theta - \Psi^2(2 \cos^2 \theta - 1) = 0. \quad (4.0.33)$$

Références

- [1] Houchmandzadeh B. *Variétés différentielles et champs de tenseurs*, Cours de l'université Joseph Fourier, 2005.
- [2] Jantzen R. T. *Geodesics on the Torus and other Surfaces of Revolution Clarified Using Undergraduate Physics Tricks with Bonus : Nonrelativistic and Relativistic Kepler Problems*, 2010.
- [3] Lewis D, Ratiu T., Simo JC, Marsden JE *The Heavy top : a geometric treatment*, Nonlinearity **5**(1992) 1-48.
- [4] Boyer F. *Géométrie et dynamique en robotique*, 2005.
- [5] Godinho L., Natario J. *An Introduction to Riemannian Geometry with Application to Mechanics and Relativity*, 2010.
- [6] Bourguignon J-P. *Transport Parallèle et connexions en Géométrie et en Physique*
- [7] Bouteloup D. *Eléments de géométrie différentielle*, Cours de l'ENSG, 2003.
- [8] Beuthe M., Pireaux S. *Exercices de relativité générale*, Cours de l'université de Louvain, 2001-2002.
- [9] Irons M. *The curvature and Geodesics of the torus*, 2005.
- [10] Barré S. *La courbure de Gauss*, Journal des Elèves, Volume 1 (1994), No.1.
- [11] Arnold V., Khesin B. *Topological Methods in Hydrodynamics*, Applied Mathematical Sciences, Volume 125.
- [12] S. E. Rasor *The geodesics Lines on the helicoid*, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol 11, No. 2 (Jan., 1910), pp.77-85.
- [13] Briend J-Y. *Géodésiques des Surfaces de Révolution*, Journal des Elèves, Volume 1, No.1, (1994)
- [14] Lafontaine J. *Introduction aux Variétés Différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [15] Marsden J.E., Ratiu T.S. *Introduction to Mechanics and Symmetry, Second Edition*, 1998
- [16] Darryl D. Holm *Geometric Mechanics, Part II : Rotating, Translating and Rolling*, Imperial College Press, 2008.
- [17] Arnold V. *Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits*, Annales de l'institut Fourier, tome 16, No.1, p. 319-361,(1966).
- [18] Szydowski M. *The Generalised Maupertuis Principle*, Regular and Chaotic Dynamics, (1998).

- [19] Benci V. *Closed Geodesics for the Jacobi metric and periodic solutions of prescribed energy of natural Hamiltonians systems*, Annales de l'I.H.P., section C, tome 1, n°5 (1984), p.401-412.
- [20] Johnson T.L., Rand R.H. *On the existence and bifurcation of Minimal Normal Modes*, Int. J. Non-linear Mechanics (1979) Vol. 14.
- [21] Vakakis A.F. *Non-Linear Normal Modes (NNMs) and their Applications in vibration Theory : An Overview*, Mechanical Systems and Signal Processing (1997) **11**(1),3-22.
- [22] Shaw S.W., Pierre C. *Normal Modes of Vibration fo Non-Linear Continuous Systems*, Journal of Sound and Vibration (1994) **169**(3),319-347.
- [23] Rand R.H. *A Direct Method For Non-Linear Normal Modes*, Int. J. Non-linear Mechanics (1974) Vol. 9., pp. 363-368.
- [24] Zhang X. *Non-Linear Normal Modes as the extremal Geodesics on the Riemannian Manifold*, Euromech 457, Press of the ENTPE, Lyon, 2004.
- [25] Zhang X. *Geodesics, nonlinear normal modes of conservative vibratory systems and decomposition method*, Journal of Sound and Vibration 282 (2005) 971-989.
- [26] Schwalm W. *Elliptic function sn, cn, dn, as Trigonometry*, University N. Dakota