



Rapport de stage : Master 2 SDI ATIAM

Louis Delebecque

10 août 2011

---

## Étude de la passivité dans les pavillons acoustiques pour la simulation stable en guides d'ondes

---

Laboratoire : IRCAM - CNRS UMR 9912  
Équipe Analyse-Synthèse  
1, place Igor Stravinsky,  
75004 Paris

Encadrant : Thomas Hélie, Chargé de Recherche à l'IRCAM  
Thomas.Helie@ircam.fr, 01 44 78 48 24

Co-encadrants : Rémi Mignot, Post-doctorant  
Institut Langevin, ESPCI ParisTech,  
10 rue de Vauquelin, 75005 Paris  
Remi.Mignot@espci.fr

Thomas Hézard, Doctorant à l'IRCAM  
Thomas.Hezard@ircam.fr

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
Contexte et motivation . . . . .	3
Sujet . . . . .	5
<b>1 Passivité des systèmes dynamiques</b>	<b>6</b>
1.1 Exemple d'introduction . . . . .	6
1.2 Notion de théorie des systèmes . . . . .	7
1.2.1 Représentations d'état . . . . .	7
1.2.2 Définition de la passivité . . . . .	7
1.3 Application au système masse-ressort . . . . .	8
<b>2 Modèle de propagation et bilan énergétique pour les variables de Kirchhoff</b>	<b>10</b>
2.1 Modèle de propagation dans les tubes à section variable . . . . .	10
2.1.1 Équations de propagation . . . . .	10
2.1.2 Équations de transport . . . . .	11
2.2 Bilan énergétique pour les variables de Kirchhoff . . . . .	11
2.2.1 Énergie acoustique . . . . .	11
2.2.2 Variation temporelle de l'énergie acoustique . . . . .	12
2.2.3 Étude de stabilité du système . . . . .	13
<b>3 Ondes planes et tubes droits</b>	<b>14</b>
3.1 Ondes planes progressives . . . . .	14
3.1.1 Définition des ondes $p^\pm$ . . . . .	14
3.1.2 Équations de transport . . . . .	14
3.2 Bilan énergétique . . . . .	15
3.2.1 Énergie acoustique . . . . .	15
3.2.2 Variation temporelle de l'énergie acoustique . . . . .	15
3.2.3 Étude de la stabilité . . . . .	15
3.3 Cas du tube droit pour les guides d'ondes . . . . .	16
3.3.1 Influence sur la propagation et le bilan énergétique . . . . .	16
3.3.2 Jonction de cylindres avec discontinuité de section . . . . .	16
<b>4 Ondes sphériques et tubes coniques</b>	<b>19</b>
4.1 Ondes sphériques progressives . . . . .	19
4.1.1 Définition des ondes $\psi^\pm$ . . . . .	19
4.1.2 Équations de transport . . . . .	20
4.2 Bilan énergétique . . . . .	20
4.2.1 Énergie acoustique . . . . .	20
4.2.2 Variation temporelle de l'énergie acoustique . . . . .	21
4.2.3 Étude de la stabilité . . . . .	21

4.3	Cas du cône pour les guides d'ondes . . . . .	21
4.3.1	Influence sur la propagation et la stabilité . . . . .	21
4.3.2	Jonction de cônes avec discontinuité de pente . . . . .	22
4.3.3	Étude de la stabilité pour la jonction de deux cônes . . . . .	23
<b>5</b>	<b>Ondes découplées et tubes à courbure constante</b>	<b>25</b>
5.1	Ondes progressives découplées dans les tubes à courbure constante . . .	25
5.1.1	Définition des ondes $q^\pm$ dans le domaine de Laplace . . . . .	25
5.2	Bilan énergétique . . . . .	25
5.2.1	Représentations intégrales . . . . .	26
5.2.2	Expressions de l'énergie acoustique en fonction de $q^\pm$ . . . . .	27
5.3	Jonction de tronçons a courbure constante avec discontinuité de courbures	29
	<b>Conclusion et perspective</b>	<b>31</b>
<b>A</b>	<b>Forme quadratique définie positive</b>	<b>34</b>
A.1	Fonction définie positive . . . . .	34
A.2	Forme quadratique . . . . .	34
A.3	Matrices définies semi-positives . . . . .	34
A.4	Critère de Sylvester . . . . .	35
A.5	Dérivation d'une forme quadratique . . . . .	35
<b>B</b>	<b>Bilans énergétique : détails des calculs</b>	<b>36</b>
B.1	Variation temporelle de l'énergie en fonction de $p^\pm$ . . . . .	36
B.2	Énergie en fonction de $\psi^\pm$ . . . . .	36
B.3	Dérivée temporelle de l'énergie en fonction de $\psi^\pm$ . . . . .	37
<b>C</b>	<b>Calcul du saut de phase pour le calcul de <math>H_2(s)</math></b>	<b>39</b>
<b>D</b>	<b>Méthode de calcul de la matrice de transfert caractérisant la jonction entre deux tubes</b>	<b>40</b>
D.1	Calcul de la matrice de transfert non causale . . . . .	40
D.2	Modification des entrées sorties . . . . .	41
<b>E</b>	<b>Factorisation de Kelly-Lochbaum</b>	<b>42</b>

# Introduction

## Contexte et motivation

Ce travail s'inscrit dans un contexte de synthèse sonore par guide d'onde numérique, appliquée aux instruments de musique à vent. La synthèse par guide d'onde est une méthode de synthèse par modèle physique dont le principe est de simuler numériquement les systèmes physiques qui régissent la production du son, dans le but d'obtenir un signal sonore équivalent à celui que peut produire un musicien.

Elle peut être considérée comme une approche mixte entre modélisation physique et traitement du signal. Il s'agit d'une simulation dans le domaine temporel, basée sur une décomposition en ondes progressives voyageant dans des lignes à retard. La synthèse par guide d'onde est adaptée aux systèmes à une dimension comme la corde vibrante ou un pavillon acoustique.

Pour les instrument à vent, le résonateur est approximé par plusieurs tronçons de tubes axisymétriques. La décomposition en ondes progressives et la discrétisation du résonateur font apparaître des fonctions de transferts composées de retards purs et de filtres causaux d'ordre fini.

Par rapport à d'autres types de méthodes par modèle physique (différence finie, approche modale), la synthèse par guide d'onde présente l'avantage d'un faible temps de calcul et permet donc, dans de nombreux cas, une utilisation en temps-réel.

Sous certaines conditions, les fonctions de transfert qui caractérisent la jonction entre deux tubes peuvent être factorisées, on obtient alors une structure de Kelly-Lochbaum [1]. Cette structure permet de réduire le nombre de calculs nécessaires à la simulation numérique.

Elle fut initialement utilisée pour synthétiser la voix, le conduit vocal étant alors modélisé par un réseau de cylindres [1]. La synthèse par guide d'onde a ensuite été implémentée dans le cas où la perce de l'instrument est modélisée par un réseau de cônes [2].

Sur cette base, de récents travaux, ont permis d'améliorer le réalisme de la simulation tout en conservant un faible coût de calcul qui rend possible une utilisation en temps-réel :

- l'introduction de l'équation de Webster en coordonnées curvilignes, issue de l'hypothèse de quasi-sphéricité des isobares au voisinage de la paroi, [3] ,
- la discrétisation du résonateur de l'instrument par des tronçons à courbure constante qui permet de conserver la régularité du profil de perce,
- la modélisation des pertes visco-thermiques par l'utilisation de l'équation de Webster-Lokshin,
- un modèle de l'impédance de rayonnement basé sur une portion de sphère pulsante.

L'utilisation de ces quatre éléments permet d'obtenir des simulations numériques réalistes. L'impédance d'entrée d'un trombone, issue de la simulation basée sur ce

modèle, dans laquelle le résonateur est approximé par une dizaine d'éléments, est quasi-similaire à l'impédance d'entrée mesurée sur l'instrument, [7, 8].

Certaines fonctions de transfert complexes qui apparaissent dans la structure de guide d'onde ainsi obtenue, sont irrationnelles. Les réponses impulsionnelles correspondantes sont calculées en utilisant la représentation intégrale [13, 14] dans laquelle la réponse impulsionnelle se modélise comme une somme continue et infinie d'exponentielles complexes décroissantes. La numérisation impose d'approximer cette intégrale infinie par une somme d'ordre fini.

Malgré le réalisme des résultats obtenus, les réalisations numériques effectuées sur ce modèle mettent en évidence l'apparition d'instabilité dans la simulation. En effet, certaines configurations telles que la jonction convexe de deux cônes [12, 5], font apparaître des fonctions de transfert instables. Ce problème d'instabilité apparaît également pour la propagation dans les tubes à courbure constante négative [6]. Dans ce cas, l'instabilité vient du fait que ce modèle de propagation dans ce type de pavillons suppose que le rayon du tube n'est pas toujours positif. Cette condition permet de définir de nouvelles ondes progressives informées par la géométrie qui sont découplées et stables dans tous les tubes à courbure constante [9].

Cette instabilité apparaît tardivement lors des réalisations numériques [6], souvent au bout de quelques dizaines de secondes. Ce constat laisse penser qu'une propriété inconnue est violée par la simulation numérique.

## Sujet

L'objectif de ce stage est d'identifier la propriété de stabilité qui n'est pas respectée par la réalisation en guides d'ondes numériques. Il est important de préciser qu'aucune simulation numérique n'est effectuée.

Nous proposons d'aborder les guides d'ondes sous une approche énergétique [11]. La notion de passivité des systèmes dynamiques est appliquée aux pavillons acoustiques, nous cherchons des conditions suffisantes pour garantir la passivité de ce type de système pour les ondes progressives car elles sont utilisées pour décrire l'état acoustique dans les guides d'ondes numériques. Elles permettent notamment d'obtenir des simulations efficaces grâce aux structures de Kelly-Lochbaum.

L'identification de la propriété de stabilité de la simulation numérique peut se décomposer en trois questions intermédiaires :

- Comment se traduisent les conditions de passivité sur la géométrie du système acoustique ?
- Quel est l'influence du choix de l'état acoustique sur la passivité ?
- Comment se traduisent ces conditions sur les fonctions de transfert qui apparaissent dans les structures de Kelly-Lochbaum ?

La prise en compte des conditions de passivité du système sur les fonctions de transfert, lors de l'approximation des fonctions de transfert, devrait garantir la stabilité de la simulation numérique.

La démarche adoptée pour répondre à ces questions est la suivante.

La première étape consiste à introduire la notion de passivité des systèmes dynamiques. Ensuite le modèle de propagation des ondes acoustiques dans les tubes à section variable utilisé est présenté. Nous effectuons le bilan énergétique dans un tube acoustique à section variable, en utilisant les variables physiques, dites de Kirchhoff. Ce bilan énergétique se fait en deux étapes : le calcul de l'énergie acoustique et sa variation dans le temps.

La détermination de ces expressions permet ensuite d'étudier la passivité du système acoustique pour les variables de Kirchhoff. Bien que dans ce cas, où le système et les variables sont physiques, la stabilité soit évidente, ce travail préliminaire permet d'identifier les propriétés de stabilité pertinentes pour les pavillons acoustiques.

Nous étudions ensuite la stabilité du même système décrit par des variables de type ondes progressives. La décomposition de l'état acoustique en ondes progressives est un choix de représentation qui est utilisé dans les guides d'ondes numériques. Le système acoustique décrit à l'aide de ce type de variables, n'est pas forcément stable.

Les bilans énergétiques et l'étude de la stabilité pour les ondes progressives sont abordés par ordre de complexité, du cas le plus simple vers le plus compliqué. Nous nous intéressons plus particulièrement aux géométries de tubes axisymétriques qui font apparaître des structures de Kelly-Lochbaum. Pour le dernier cas, le calcul de l'énergie nécessite d'utiliser les représentations intégrales.

# Chapitre 1

## Passivité des systèmes dynamiques

### 1.1 Exemple d'introduction

Considérons un exemple physique pour illustrer la notion de passivité, celui d'un système masse-ressort amorti en oscillations forcées. L'entrée du système est la force  $F(t)$  imposée à la masse  $m$  et la sortie correspond à la vitesse  $\dot{x}(t)$  de celle-ci. L'équation différentielle qui régit le système est

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x} + kx(t) = F(t), \quad (1.1)$$

où  $c$  est le coefficient d'amortissement visqueux et  $k$  la constante de raideur du ressort. L'énergie mécanique  $E(t)$  de ce système est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t) \quad (1.2)$$

La dérivée de l'énergie s'écrit :

$$\dot{E}(t) = \dot{x}(t) (m\ddot{x}(t) + kx(t)) \quad (1.3)$$

pour un système conservatif ( $c = 0$ )    pour un système dissipatif ( $c > 0$ )

$$\dot{E}(t) = \dot{x}(t)F(t)$$

$$\dot{E}(t) = \dot{x}(t) (F(t) - c\dot{x}(t))$$

$$\dot{E}(t) = \mathcal{P}(t)$$

$$\dot{E}(t) = \mathcal{P}(t) - c\dot{x}^2(t)$$

Cet exemple montre que pour un système masse-ressort idéal, la dérivée de l'énergie par rapport au temps est égale à la puissance mécanique  $\mathcal{P}(t)$ , et est strictement inférieure à la puissance dans le cas dissipatif.

Si le système n'est plus alimenté ( $F(t) = 0$ ) alors l'énergie  $E(t)$  reste constante, dans le cas conservatif, ou bien décroît dans le cas d'un système amorti.

## 1.2 Notion de théorie des systèmes

Cette partie présente les notions de théorie des systèmes dynamiques nécessaires à la définition de la passivité (c.f. [10] pour plus de détails).

### 1.2.1 Représentations d'état

Le comportement d'un système dynamique est décrit par sa représentation d'état, qui se présente sous la forme de deux fonctions décrivant l'évolution et la sortie  $\mathbf{y}$  du système en fonction de l'état  $\mathbf{x}$  et de l'entrée  $\mathbf{u}$ .

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1.4)$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1.5)$$

où  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  sont deux fonctions continues telles que  $f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = g(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ .

Pour un système linéaire invariant dans le temps, la représentation d'état s'écrit à l'aide de matrices à termes constants.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1.6)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1.7)$$

avec  $\mathbf{G}(s)$  la matrice de transfert du système telle que  $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$  où  $s$  est la variable de Laplace et  $\mathbf{I}$  est la matrice identité.

### 1.2.2 Définition de la passivité

La définition de la passivité d'un système dynamique nécessite de présenter la notion de fonction définie positive.

#### Fonction définie positive

La fonction  $V(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est définie semi-positive si elle satisfait les deux conditions suivantes :

$$V(\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (1.8)$$

$$V(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x}(t) / \mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}. \quad (1.9)$$

Si la condition donnée par l'équation 1.9 se traduit par une inégalité stricte, alors la fonction  $V(\mathbf{x})$  est définie positive.

#### Définition

Un système dynamique est passif si il existe une fonction  $V(\mathbf{x})$  continuellement différentiable et définie semi-positive telle que :

$$\mathbf{u}^T \mathbf{y} \geq \dot{V}(\mathbf{x}) \quad (1.10)$$

Cette définition générale se précise dans certains cas de figures,

pour un système conservatif,  $\mathbf{u}^T \mathbf{y} = \dot{V}(\mathbf{x})$   
pour un système strictement passif,  $\mathbf{u}^T \mathbf{y} \geq \dot{V}(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{x})$

où  $\varphi(\mathbf{x})$  est une fonction définie positive. Le produit scalaire  $\mathbf{u}^T \mathbf{y}$  représente la puissance dissipée par le système et  $V(\mathbf{x})$  est la fonction de stockage.

D'un point de vue traitement du signal, ce système est passif si aucun pôle des éléments de  $\mathbf{G}(s)$  ne se situe dans le domaine de convergence de l'implémentation causale du filtre, qui correspond au plan des réels positifs du plan de Laplace, noté  $\mathbb{C}_0^+$ .

### 1.3 Application au système masse-ressort

Un système masse-ressort est linéaire et invariant dans le temps. Avec le formalisme de la représentation d'état, le système est décrit par le vecteur  $\mathbf{x}$  tel que  $\mathbf{x} = (x(t), \dot{x}(t))^T$ . Dans ce cas, les entrées/sorties du système sont des scalaires :  $\mathbf{u} = F(t)$  et  $\mathbf{y} = \dot{x}(t)$ .

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{c}{m} & -\frac{k}{m} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{pmatrix} F(t) \quad (1.11)$$

$$F(t) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

La fonction de transfert associée à ce système est :

$$G(s) = \frac{s}{s^2 m + s c + k} \quad (1.13)$$

Le calcul des deux pôles de  $G(s)$  montre qu'ils sont compris dans  $\mathbb{C}_0^-$  pour toutes valeurs positives de  $m, c, k$ . La fonction de transfert décrit donc un système passif.

Nous choisissons  $V(\mathbf{x})$  égale à l'énergie mécanique du système telle que  $V(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \rightarrow E(t)$ , car la physique nous assure que l'énergie acoustique  $E(t)$  reste toujours finie et positive. Ainsi si la fonction  $V(\mathbf{x})$  est définie semi-positive, alors l'amplitude de l'état  $\mathbf{x}$  reste bornée. Le système décrit en fonction de l'état  $\mathbf{x}$  est alors stable.

**Théorème** Une matrice réelle symétrique est définie semi-positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont supérieures ou égales à zéro.

L'expression de l'énergie mécanique peut se présenter sous forme matricielle, la fonction  $V(\mathbf{x})$  devient

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{x}^T \begin{pmatrix} \frac{k}{2} & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (1.14)$$

La fonction  $V(\mathbf{x})$  est définie semi-positive si la matrice qui apparait dans l'équation 1.14 est définie semi-positive. Dans ce cas la matrice réelle symétrique est diagonale, les deux termes non-nuls et positifs sont donc les valeurs propres. Le théorème présenté ci-dessus est donc vérifié.

Le système masse-ressort considéré dans cet exemple est donc passif car l'énergie mécanique, définie semi-positive, est toujours supérieure ou égale à la puissance mécanique.

## Interprétations

La passivité signifie que la variation de l'énergie contenue dans le système est inférieure ou égale à la puissance consommée par celui-ci. Si à partir d'un instant donné, la puissance consommée par le système est nulle, alors l'énergie stockée dans le système ne peut pas augmenter.

Le deuxième critère essentiel est que l'énergie soit définie positive (ou définie semi-positive). La fonction  $V(\mathbf{x})$  joue le rôle d'une norme au carré, si  $V(\mathbf{x}) = E(t)$  est définie semi-positive, le fait que l'énergie est constante ou décroissante dans le temps, implique que l'amplitude de l'état  $\mathbf{x}$  n'explose pas.

## Chapitre 2

# Modèle de propagation et bilan énergétique pour les variables de Kirchhoff

### 2.1 Modèle de propagation dans les tubes à section variable

Le modèle de propagation utilisé ici est basé sur les équations d'Euler et de Webster en coordonnées curvilignes [3]. Il s'agit d'un modèle linéaire, conservatif et monodimensionnel, qui fait donc l'hypothèse que la longueur d'onde est grande devant les dimensions radiales du résonateur. Les pertes visco-thermiques peuvent être prises en compte, en utilisant l'équation de Webster-Lokshin, dans laquelle apparait un terme en dérivée fractionnaire par rapport au temps.

#### 2.1.1 Équations de propagation

L'état acoustique du système est décrit par deux variables. Dans un premier temps, nous utilisons les variables physiques, dites de type Kirchhoff : la pression  $p$  acoustique et le débit  $u$  ou la vitesse particulaire  $v$ .

Les équations d'Euler et de Webster en coordonnées curvilignes, linéarisées au premier ordre et hors source, s'expriment :

$$\left( \partial_\ell^2 + 2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) p(\ell, t) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \partial_t v(\ell, t) + \partial_\ell p(\ell, t) = 0 \quad (2.2)$$

Les termes  $\rho$  et  $c$  désignent respectivement la masse volumique de l'air au repos et la célérité des ondes acoustiques. Dans la suite du document, nous utilisons la notation  $\zeta(\ell)$  pour désigner la pente relative en un point du pavillon.

$$\zeta(\ell) = \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \text{ où } R'(\ell) = \partial_\ell R(\ell) \quad (2.3)$$

L'abscisse curviligne,  $\ell$ , peut s'exprimer à partir de la coordonnée cartésienne  $x$  parcourant l'axe de symétrie du tube et du rayon  $R(x)$  du tube tel que :

$$\ell(x) = \int_0^x \sqrt{1 + (\partial_x R(x))^2} dx, \quad (2.4)$$

**Convention axiale** Pour les grandeurs scalaires telles que la vitesse ou le débit, la convention adoptée ici est de type axiale : le débit orienté vers les  $\ell$  croissants est positif.

$$u(\ell, t) = \frac{\vec{u}(\ell, t)}{\vec{e}_\ell} \quad (2.5)$$

$\vec{e}_\ell$  désigne le vecteur unitaire tangent localement au rayon du tube.

L'équation de Webster 2.1 peut également est présentée sous une autre forme qui fait apparaître la courbure du tube  $\Upsilon(\ell) = R''(\ell)/R(\ell)$ ,

$$\left( \partial_\ell^2 - \Upsilon(\ell) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) (R(\ell)p(\ell, t)) = 0 \quad (2.6)$$

Il est important de noter que cette équation différentielle possède une solution analytique dans le cas où  $\Upsilon(\ell)$  est constant.

## 2.1.2 Équations de transport

Le modèle de Webster/Euler peut s'écrire sous la forme d'un système dynamique par le biais de ses équations de transport. Cette représentation équivalente aux équations 2.1 et 2.2 fait apparaître l'équation d'Euler et la conservation de la masse pour les tubes à section variable.

$$\begin{aligned} \partial_t p(\ell, t) &= -\frac{\rho c^2}{S(\ell)} \partial_\ell u(\ell, t) \\ \partial_t u(\ell, t) &= -\frac{S(\ell)}{\rho} \partial_\ell p(\ell, t) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ce système d'équations peut s'exprimer sous une forme matricielle.

$$\partial_t \begin{pmatrix} p(\ell, t) \\ u(\ell, t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_X(\ell) \partial_\ell \begin{pmatrix} p(\ell, t) \\ u(\ell, t) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}_X(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\rho c^2 S(\ell)} \\ -\frac{S(\ell)}{\rho} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$S(\ell)$  désigne le section du tube telle que  $S(\ell) = \pi R^2(\ell)$

## 2.2 Bilan énergétique pour les variables de Kirchhoff

### 2.2.1 Énergie acoustique

L'étude de la stabilité du système nécessite de calculer l'énergie acoustique du système étudié.

L'expression générale de l'énergie acoustique contenue dans un volume  $\Omega$  est donnée par l'intégrale volumique de la densité d'énergie.

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left( \frac{1}{\rho c^2} p^2(\ell, t) + \rho \vec{v}(\ell, t) \cdot \vec{v}(\ell, t) \right) d\omega \quad (2.9)$$

Pour un problème mono-dimensionnel, l'intégrale sur le volume peut se réduire à une intégrale simple sur la coordonnée curviligne spatiale, l'expression de l'énergie acoustique contenue dans un tube axisymétrique de longueur  $\ell = L$  s'écrit :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L S(\ell) \left( \frac{1}{\rho c^2} p^2(\ell, t) + \rho v^2(\ell, t) \right) d\ell \quad (2.10)$$

En fonction de la pression et du débit acoustique, l'énergie devient :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{S(\ell)}{\rho c^2} p^2(\ell, t) + \frac{\rho}{S(\ell)} u^2(\ell, t) d\ell \quad (2.11)$$

L'équation 2.11 peut se mettre sous une forme matricielle quadratique en utilisant le vecteur  $\mathbf{X}(\ell, t)$  tel que  $\mathbf{X}(\ell, t) = (p(\ell, t), u(\ell, t))^T$ .

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{X}^T(\ell, t) \mathbf{W}_X(\ell) \mathbf{X}(\ell, t) d\ell \quad (2.12)$$

avec  $\mathbf{W}_X(\ell) = \begin{pmatrix} \frac{S(\ell)}{\rho c^2} & 0 \\ 0 & \frac{\rho}{S(\ell)} \end{pmatrix}$

La notation  $\mathbf{a}^T$  désigne la matrice transposée de  $\mathbf{a}$ .

### 2.2.2 Variation temporelle de l'énergie acoustique

La dérivée de l'énergie acoustique par rapport au temps est calculée en dérivant l'équation 2.12.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2} \int_0^L \partial_t (\mathbf{X}^T(\ell, t) \mathbf{W}_X(\ell) \mathbf{X}(\ell, t)) d\ell \quad (2.13)$$

La dérivée temporelle de la forme quadratique fait apparaître la dérivée du vecteur  $\mathbf{X}$  (équation 2.14), le détail de ce calcul est présenté en annexe.

$$\partial_t (\mathbf{X}^T(\ell, t) \mathbf{W}_X(\ell) \mathbf{X}(\ell, t)) = 2\mathbf{X}^T(\ell, t) \mathbf{W}_X(\ell) \partial_t (\mathbf{X}(\ell, t)) \quad (2.14)$$

Les équations de transport (2.8) permettent de substituer la dérivée temporelle par une dérivée spatiale.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^L \mathbf{X}^T(\ell, t) \mathbf{W}_X(\ell) \partial_t (\mathbf{X}(\ell, t)) d\ell \quad (2.15)$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^L \mathbf{X}^T(\ell, t) \mathbf{W}_X(\ell) \mathbf{A}_X(\ell) \partial_\ell \mathbf{X}(\ell, t) d\ell \quad (2.16)$$

$$\text{avec } \mathbf{W}(\ell) \mathbf{A}_X(\ell) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= - \int_0^L \partial_\ell (p(\ell, t) u(\ell, t)) \\ &= p(0, t) u(0, t) + p(L, t) (-u(L, t)) \\ &= \mathcal{P}_e(0, t) + \mathcal{P}_e(L, t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

La notation  $\mathcal{P}_e(\ell, t)$  désigne la puissance acoustique entrante dans le système en  $\ell$ . La convention axiale explique la présence du signe moins dans l'expression de  $\mathcal{P}_e(L, t)$ .

L'équation 2.18 montre que la dérivée de l'énergie acoustique par rapport au temps est égale à la somme des puissances entrantes dans le système considéré.

En choisissant, par exemple, des vecteurs d'entrée  $\mathbf{u}$  et de sortie  $\mathbf{y}$  qui contiennent les débits entrants et les pressions à chaque extrémité du tube, tels que

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u(0, t) \\ -u(L, t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} p(0, t) \\ p(L, t) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Nous retrouvons bien la propriété des systèmes conservatifs :  $\mathbf{u}^T \mathbf{y} = \dot{E}$ . Nous remarquons que, pour que cette égalité soit vérifiée, le choix d'une entrée impose la valeur de la sortie. Il n'est cependant pas possible de conclure sur la passivité du système, avant d'avoir vérifié que l'énergie est définie semi-positive.

### 2.2.3 Étude de stabilité du système

L'objectif de ce paragraphe est de prouver la stabilité du système acoustique décrit par les variables de pression/débit. Bien qu'il soit évident que l'amplitude de la pression et du débit restent toujours bornées dans un système acoustique, cet exemple trivial permet d'introduire la démarche qui sera utilisée dans les chapitres suivants pour les ondes progressives.

Nous cherchons à montrer que la fonction  $V(\mathbf{X}(\ell, t))$  qui associe l'énergie au vecteur  $\mathbf{X}(\ell, t)$  est définie positive. Cette condition est suffisante pour prouver que l'amplitude de l'état acoustique reste bornée et pour valider la passivité du système.

Pour les variables de Kirchhoff, la fonction  $V(\mathbf{X})$  s'écrit :

$$V(\mathbf{X}) : \mathbf{X}(\ell, t) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{X}^T(\ell, t) \mathbf{W}_X(\ell) \mathbf{X}(\ell, t) d\ell \quad (2.20)$$

Dans ce cas, le vecteur d'état  $\mathbf{X}(\ell, t)$  ne dépend pas seulement du temps mais aussi de l'espace car à  $t$  fixé, la pression et le débit acoustique sont des fonctions de  $\ell$ . Alors  $V(\mathbf{X})$  n'est plus une fonction mais une fonctionnelle de  $\mathbf{X}$ , ce qui ne modifie pas les propriétés énoncées précédemment.

L'intégrale d'une fonction strictement positive est aussi strictement positive, donc la fonctionnelle  $V(\mathbf{X})$  est définie positive si la forme quadratique  $\mathbf{X}^T(\ell, t) \mathbf{W}_X(\ell) \mathbf{X}(\ell, t)$  est définie positive.

Or les valeurs propres de la matrice réelle et symétrique  $\mathbf{W}_X(\ell)$  sont toutes positives. La fonctionnelle qui définit l'énergie acoustique en fonction de la pression et du débit est donc définie positive. Ce résultat garantit la stabilité des variables de Kirchhoff dans un pavillon acoustique quelconque et valide la passivité de ce système.

# Chapitre 3

## Ondes planes et tubes droits

### 3.1 Ondes planes progressives

Les ondes planes progressives, notées  $p^+$  et  $p^-$ , voyagent respectivement dans le sens des  $\ell$  croissants et décroissants. Elles sont découplées dans les tubes droits.

#### 3.1.1 Définition des ondes $p^\pm$

Les matrices de passage  $\mathbf{P}_{PX}(\ell)$  et  $\mathbf{P}_{XP}(\ell)$  donnent les changements de variables entre l'état  $\mathbf{P}(\ell, t) = (p^+(\ell, t), p^-(\ell, t))^T$  et l'état de pression/débit, tel que

$$\mathbf{P}(\ell, t) = \mathbf{P}_{PX}(\ell)\mathbf{X}(\ell, t).$$

$$\begin{pmatrix} p^+(\ell, t) \\ p^-(\ell, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho c}{S(\ell)} \\ 1 & -\frac{\rho c}{S(\ell)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\ell, t) \\ u(\ell, t) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{X}(\ell, t) = \mathbf{P}_{XP}(\ell)\mathbf{P}(\ell, t)$$

$$\begin{pmatrix} p(\ell, t) \\ u(\ell, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{S(\ell)}{\rho c} & -\frac{S(\ell)}{\rho c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^+(\ell, t) \\ p^-(\ell, t) \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

#### 3.1.2 Équations de transport

Avec le modèle de Webster en coordonnées curvilignes, les équations de transport pour les ondes planes progressives sont :

$$(\partial_t + c\partial_\ell)p^+(\ell, t) = c\zeta(\ell)(p^-(\ell, t) - p^+(\ell, t)) \quad (3.3)$$

$$(\partial_t - c\partial_\ell)p^-(\ell, t) = c\zeta(\ell)(p^-(\ell, t) - p^+(\ell, t)) \quad (3.4)$$

Sous une forme matricielle, les équations de transport deviennent :

$$\partial_t \mathbf{P}(\ell, t) = \mathbf{A}_P \partial_\ell \mathbf{P}(\ell, t) + \mathbf{B}_P(\ell)\mathbf{P}(\ell, t) \quad (3.5)$$

$$\text{où } \mathbf{A}_P = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_P(\ell) = c\zeta(\ell) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{A}_P(\ell)$  caractérise le transport des ondes  $p^\pm$  et la matrice  $\mathbf{B}_P(\ell)$  représente le couplage entre les deux ondes progressives.

## 3.2 Bilan énergétique

### 3.2.1 Énergie acoustique

L'expression de l'énergie acoustique en fonction des ondes  $p^+$  et  $p^-$  est obtenue à partir de la forme quadratique de l'énergie (équation 2.12) en substituant  $\mathbf{X}(\ell, t)$  par  $\mathbf{P}_{XP}(\ell)\mathbf{P}(\ell, t)$ .

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \mathbf{P}^T(\ell, t) \mathbf{W}_P(\ell) \mathbf{P}(\ell, t) d\ell \quad (3.6)$$

$$\text{avec } \mathbf{W}_P(\ell) = \mathbf{P}_{XP}^T(\ell) \mathbf{W}_X(\ell) \mathbf{P}_{XP}(\ell) = \frac{2S(\ell)}{\rho c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

L'équation 3.8 donne l'expression développée de l'énergie acoustique en fonction des ondes  $p^\pm$ .

$$E(t) = \frac{S(\ell)}{\rho c^2} \int_0^L \left( p^{+2}(\ell, t) + p^{-2}(\ell, t) \right) d\ell \quad (3.8)$$

### 3.2.2 Variation temporelle de l'énergie acoustique

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{2S(\ell)}{\rho c^2} \int_0^L \mathbf{P}^T(\ell, t) \mathbf{W}_P(\ell) \partial_t \mathbf{P}(\ell, t) d\ell \quad (3.9)$$

en utilisant les équations de transport (3.5)

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{2S(\ell)}{\rho c^2} \int_0^L \mathbf{P}^T(\ell, t) \mathbf{W}_P(\ell) \left( \mathbf{B}_P \mathbf{P}^T(\ell, t) + \mathbf{A}_P \partial_t \mathbf{P}^T(\ell, t) \right) d\ell \quad (3.10)$$

La factorisation de cette expression fait apparaître une dérivée spatiale dans l'intégrale (annexe B.1), la dérivée de l'énergie devient :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\pi}{\rho c} \left[ R^2(0) \left( p^{+2}(0, t) - p^{-2}(0, t) \right) - R^2(L) \left( p^{+2}(L, t) - p^{-2}(L, t) \right) \right] \quad (3.11)$$

La puissance acoustique en fonction des variables d'onde plane donne :

$$\mathcal{P}(\ell, t) = p(\ell, t) u(\ell, t) = \frac{\pi R^2(\ell)}{\rho c} \left( p^{+2}(\ell, t) - p^{-2}(\ell, t) \right) \quad (3.12)$$

Par identification, nous vérifions que la dérivée temporelle de l'énergie acoustique exprimée en fonction des ondes  $p^\pm$  est également égale à la somme des puissances entrantes dans le tube.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \mathcal{P}_e(0, t) + \mathcal{P}_e(L, t) \quad (3.13)$$

### 3.2.3 Étude de la stabilité

Nous cherchons à vérifier la stabilité du système acoustique décrit par les ondes  $p^\pm$ . La matrice  $\mathbf{W}_P(\ell)$  est réelle, symétrique et diagonale. Les valeurs propres, termes diagonaux de  $\mathbf{W}_P(\ell)$ , sont strictement positives pour tout  $\ell$ . L'énergie acoustique en fonction des ondes  $p^\pm$  est définie positive. L'utilisation des ondes planes progressives dans un pavillon acoustique garantit donc la stabilité.

### 3.3 Cas du tube droit pour les guides d'ondes

Les premiers algorithmes de synthèse par guide d'onde pour les instrument à vent utilisent une discrétisation du résonateur en réseau de cylindres et une décomposition de l'état acoustique en ondes planes progressives. Dans ce cas la pente et la courbure sont nulles :  $\zeta(\ell) = \Upsilon(\ell) = 0 \quad \forall(\ell)$ . Ce choix se justifie par le fait que la propagation des ondes  $p^\pm$  est découplée dans les cylindres.

#### 3.3.1 Influence sur la propagation et le bilan énergétique

Dans les tubes droits, la pente et la courbure sont nulles :  $\zeta(\ell) = \Upsilon(\ell) = 0 \quad \forall(\ell)$ . Cette propriété a pour effet d'annuler le terme de couplage représenté par la matrice  $\mathbf{B}_P(\ell)$  de l'équation 3.5. L'équation de transport devient :

$$\partial_t \mathbf{P}(\ell, t) = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \partial_\ell \mathbf{P}(\ell, t) \quad (3.14)$$

La propagation des ondes  $p^\pm$  à travers le cylindre se modélise alors comme un simple retard.

Comme la pente ou la courbure du tube n'apparaissent pas dans les expressions finales de l'énergie et de sa dérivée par rapport au temps, le bilan énergétique est identique dans ce cas particulier.

#### 3.3.2 Jonction de cylindres avec discontinuité de section

L'utilisation des ondes  $p^\pm$  pour la jonction de cylindres fait apparaître une structure de Kelly-Lochbaum. La structure de Kelly-Lochbaum désigne la factorisation par la fonction de réflexion des fonctions de transfert qui caractérisent la jonction entre deux tubes. Ces fonctions de transfert doivent respecter le principe de causalité pour pouvoir être utilisées pour la simulation temporelle.

Considérons la jonction entre deux cylindres notés  $\textcircled{a}$  et  $\textcircled{b}$  et de rayon  $R(a)$  et  $R(b)$  (figure 3.1).

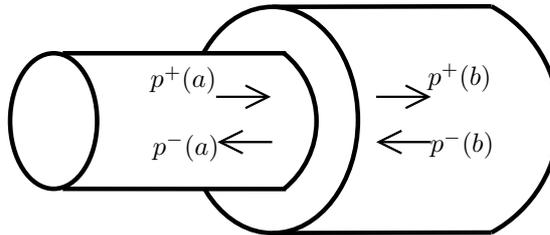


FIGURE 3.1 – *Jonction de deux cylindres  $\textcircled{a}$  et  $\textcircled{b}$  avec une discontinuité de section à la jonction. Les abscisses  $\ell = a$  et  $\ell = b$  désignent respectivement l'extrémité droite du tube  $\textcircled{a}$  et l'extrémité gauche du tube  $\textcircled{b}$*

#### Détermination de la matrice de transfert

L'expression de la matrice de transfert est obtenue en appliquant la continuité de la pression et du débit à la jonction entre deux tubes. Une méthode formalisée, permettant de déterminer l'expression de la matrice de transfert, est présentée en annexe

D .

Sous forme matricielle, la continuité de la pression et du débit à l'interface, s'exprime, dans le domaine de Laplace :

$$\mathbf{X}(b, t) = \mathbf{X}(a, t) \quad (3.15)$$

Le changement de variable est effectué en posant  $\mathbf{X}(\ell, t) = \mathbf{P}_{XP}(\ell)\mathbf{P}(\ell, t)$ . Nous obtenons à partir de cette relation la matrice  $\mathbf{J}_P(a, b)$  qui donne l'expression de l'état en  $\ell = b$  en fonction de l'état en  $\ell = a$  tel que

$$\begin{pmatrix} p^+(b, t) \\ p^-(b, t) \end{pmatrix} = \mathbf{J}_P(a, b) \begin{pmatrix} p^+(a, t) \\ p^-(a, t) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

avec  $\mathbf{J}_P(a, b) = \mathbf{P}_{XP}^{-1}(b)\mathbf{P}_{XP}(a)$

Nous cherchons à obtenir l'expression de la matrice de transfert  $\mathbf{Jc}_P(a, b)$  qui respecte le principe de causalité, tel que :

$$\begin{pmatrix} p^+(b, t) \\ p^-(a, t) \end{pmatrix} = \mathbf{Jc}_P(a, b) \begin{pmatrix} p^+(a, t) \\ p^-(b, t) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Il faut donc modifier les entrées/sorties de la matrice  $\mathbf{J}_P(a, b)$  pour obtenir l'expression de  $\mathbf{Jc}_P(a, b)$ .

$$\mathbf{Jc}_P(a, b) = \begin{pmatrix} 1 + R_P & -R_P \\ R_P & 1 + R_P \end{pmatrix} \text{ avec } R_P = \frac{R^2(a) - R^2(b)}{R^2(a) + R^2(b)} \quad (3.18)$$

Les quatre fonctions de transfert de la matrice  $\mathbf{Jc}_P(a, b)$  peuvent être factorisées par la fonction de réflexion  $R_P$ . Pour les ondes planes, la fonction de réflexion est un gain qui dépend du rapport entre les deux sections. Cette factorisation qui permet d'obtenir la structure de Kelly-Lochbaum est présentée dans l'annexe E. La figure 3.2 montre la structure de Kelly-Lochbaum obtenue par la jonction de deux cylindres avec les ondes planes progressives.

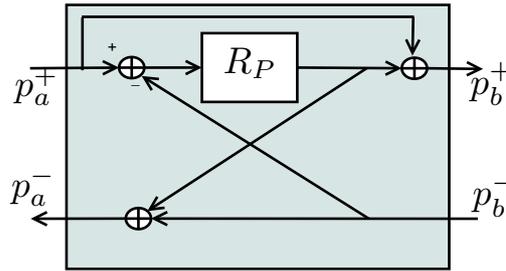


FIGURE 3.2 – Représentation graphique de la structure de Kelly-Lochbaum obtenue pour la connexion de cylindres avec les ondes  $p^\pm$

La fonction de réflexion qui apparaît dans la structure de Kelly-Lochbaum, est stable car elle s'exprime comme un simple gain, positif ou négatif en fonction de la discontinuité de section. Nous avons également vérifié que l'utilisation des ondes  $p^\pm$  garantit la stabilité du système acoustique.

Le critère de passivité est aussi vérifié car la dérivée de l'énergie acoustique est égale à la somme des puissances entrantes. Cependant, pour les ondes progressives, si nous choisissons des entrées et sorties du système  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{y}$  qui respectent le principe de causalité, (qui correspondent à celles de la structure de Kelly-Lochbaum de la figure 3.2) alors la somme des puissances entrantes ne peut pas s'exprimer comme le produit scalaire  $\mathbf{u}^T \mathbf{y}$ .

La matrice de passage entre les états  $p, u$  et  $p^+, p^-$  ne fait pas apparaître d'opérateur temporel. La prochaine section traite des ondes sphériques progressives dont la matrice de passage par rapport aux variables de Kirchhoff fait apparaître une intégration par rapport au temps.

## Chapitre 4

# Ondes sphériques et tubes coniques

### 4.1 Ondes sphériques progressives

Les ondes sphériques progressives sont découplées dans les tubes à courbure nulle, dont font partie les cônes ( $\Upsilon(\ell) = 0$  et  $\zeta(\ell) \neq 0$ ). Cette décomposition fait apparaître une onde convergente qui se propage en direction de l'apex du cône et une onde divergente se propageant dans la direction opposée.

#### 4.1.1 Définition des ondes $\psi^\pm$

**Dans le domaine de Laplace** Les matrices de passage  $\mathbf{P}_{\Psi X}(\ell, s)$  et  $\mathbf{P}_{X\Psi}(\ell, s)$  donnent les changements de variables entre l'état  $\Psi(\ell, s) = (\psi^+(\ell, s), \psi^-(\ell, s))^T$  et l'état de pression/débit. Dans ce cas, les matrices de passage sont exprimées dans le domaine de Laplace.

$$\Psi(\ell, s) = \mathbf{P}_{\Psi X}(\ell) \mathbf{X}(\ell, s)$$

$$\begin{pmatrix} \psi^+(\ell, s) \\ \psi^-(\ell, s) \end{pmatrix} = \frac{R(\ell)}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{c}{s}\zeta(\ell) & \frac{\rho c}{S(\ell)} \\ 1 + \frac{c}{s}\zeta(\ell) & -\frac{\rho c}{S(\ell)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\ell, s) \\ u(\ell, s) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{X}(\ell, s) = \mathbf{P}_{X\Psi}(\ell) \Psi(\ell, s)$$

$$\begin{pmatrix} p(\ell, s) \\ u(\ell, s) \end{pmatrix} = \frac{1}{R(\ell)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{S(\ell)}{\rho c} (1 + \frac{c}{s}\zeta(\ell)) & -\frac{S(\ell)}{\rho c} (1 - \frac{c}{s}\zeta(\ell)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+(\ell, s) \\ \psi^-(\ell, s) \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

**Dans le domaine temporel**

$$\begin{pmatrix} \psi^+(\ell, t) \\ \psi^-(\ell, t) \end{pmatrix} = \frac{R(\ell)}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho c}{S(\ell)} \\ 1 & -\frac{\rho c}{S(\ell)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\ell, t) \\ u(\ell, t) \end{pmatrix} + \frac{cR'(\ell)}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_t^{-1} \begin{pmatrix} p(\ell, t) \\ u(\ell, t) \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\begin{pmatrix} p(\ell, t) \\ u(\ell, t) \end{pmatrix} = \frac{1}{R(\ell)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{S(\ell)}{\rho c} & -\frac{S(\ell)}{\rho c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+(\ell, t) \\ \psi^-(\ell, t) \end{pmatrix} + \frac{c\zeta(\ell)}{R(\ell)} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{S(\ell)}{\rho c} & \frac{S(\ell)}{\rho c} \end{pmatrix} \partial_t^{-1} \begin{pmatrix} \psi^+(\ell, t) \\ \psi^-(\ell, t) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

La notation  $\partial_t^{-1} f(t)$  désigne l'intégrale causale par rapport au temps d'une fonction  $f(t)$  telle que

$$\partial_t^{-1} f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \quad \text{avec } f(t) = 0 \quad \forall t < 0 \quad (4.5)$$

### 4.1.2 Équations de transport

Avec notre modèle de propagation, les équations de transport pour les ondes sphériques progressives s'écrivent :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \psi^+(\ell, t) \\ \psi^-(\ell, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \partial_\ell \begin{pmatrix} \psi^+(\ell, t) \\ \psi^-(\ell, t) \end{pmatrix} - \frac{c^2 \Upsilon(\ell)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \partial_t^{-1} \begin{pmatrix} \psi^+(\ell, t) \\ \psi^-(\ell, t) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

La multiplication à gauche de l'équation 4.6 par le vecteur  $(-1, 1)$ , fournit une relation qui peut s'interpréter comme l'équation d'Euler équivalente pour les ondes  $\psi^\pm$  :

$$\frac{1}{c} \partial_t (\psi^-(\ell, t) - \psi^+(\ell, t)) = \partial_\ell (\psi^+(\ell, t) + \psi^-(\ell, t)) \quad (4.7)$$

## 4.2 Bilan énergétique

### 4.2.1 Énergie acoustique

Dans la suite du document, la notation omet volontairement la dépendance spatiale et temporelle des ondes  $\psi^\pm$ , dans certaines expressions.

Dans le cas présent, le calcul de l'énergie acoustique ne se fait pas sous une forme matricielle en raison de l'apparition de l'intégrale temporelle dans le changement de variable (équation 4.4). La première étape du calcul consiste à exprimer la densité d'énergie linéaire  $e_{lin}(\ell, t)$  en fonction de  $\psi^\pm$ .

$$\begin{aligned} E(t) &= \int_0^L e_{lin}(\ell, t) d\ell \quad (4.8) \\ e_{lin}(\ell, t) &= \frac{\pi}{\rho c^2} \left[ \psi^{+2} + \psi^{-2} + \frac{c^2 \zeta(\ell)^2}{2} (\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right] \\ &\quad + \frac{\pi}{\rho c^2} [c\zeta(\ell)(\psi^+ - \psi^-) \partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-)] \end{aligned}$$

Nous utilisons ensuite la relation 4.7, pour ré-exprimer le terme  $\psi^+(\ell, t) - \psi^-(\ell, t)$ . L'intégration par parties du terme ainsi obtenu (c.f annexe B.2) donne une autre expression de l'énergie acoustique.

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{\pi}{\rho c^2} \int_0^L \left[ \psi^{+2} + \psi^{-2} + \frac{c^2}{2} \Upsilon(\ell) (\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right] d\ell \quad (4.9) \\ &\quad + \frac{c^2}{2\rho} \left[ \zeta(0) (\partial_t^{-1}(\psi^+(0, t) + \psi^-(0, t)))^2 - \zeta(L) (\partial_t^{-1}(\psi^+(L, t) + \psi^-(L, t)))^2 \right] \end{aligned}$$

Ce résultat montre que l'expression de l'énergie acoustique contenue dans un tronçon de tube non-cylindrique, en fonction des ondes sphériques progressives, ne s'exprime

pas uniquement en fonction d'un **terme de volume** comme dans le cas des ondes planes. L'équation 4.9 en évidence l'apparition d'une **contribution aux frontières**. Nous n'avons pas trouvé de telles expressions dans les ouvrages d'acoustique [15, 17, 16, 18], mais seulement des bilans d'énergie dans le cas particulier d'un cône ( $\Upsilon(\ell) = 0$ ) dans lequel se propage une seule onde progressive ( $\psi^+(\ell, t) = 0$ ) monochromatique, et en moyennnant sur une période.

## 4.2.2 Variation temporelle de l'énergie acoustique

Le but de cette partie est de vérifier que, pour les ondes  $\psi^\pm$  la variation de l'énergie s'exprime bien comme la somme des puissances entrantes dans le système ce qui justifie l'expression de l'énergie obtenue ci-dessus. Contrairement aux cas précédents, le calcul de la dérivée temporelle de l'énergie acoustique en fonction des ondes  $\psi^\pm$  ne se fait pas en utilisant une forme matricielle, en raison de la complexité supplémentaire ajoutée par l'apparition d'opérateurs temporels. Cependant le principe est le même car l'ingrédient principal de ce calcul reste les équations de transport (4.6). Ce calcul est détaillé en annexe B.3.

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\pi}{\rho c} \int_0^L \partial_\ell \left[ \psi^{-2} - \psi^{+2} - c\zeta(\ell)(\psi^+ + \psi^-) \partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-) \right] d\ell \quad (4.10)$$

L'équation 4.10 fait apparaître la puissance acoustique en fonction des ondes  $\psi^\pm$  qui s'écrit :

$$\mathcal{P}(\ell, t) = p(\ell, t)u(\ell, t) = \frac{\pi}{\rho c} \left[ \psi^{-2} - \psi^{+2} - c\zeta(\ell)(\psi^+ + \psi^-) \partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-) \right] \quad (4.11)$$

De même que précédemment la variation de l'énergie acoustique dans le temps en fonction des ondes  $\psi^\pm$  est égale à la somme des puissances entrantes dans le tube.

## 4.2.3 Étude de la stabilité

La contribution aux frontières, qui apparaît dans l'équation 4.9, empêche de déterminer directement si la fonctionnelle qui donne l'énergie est définie semi-positive. Nous nous intéressons, dans la suite du chapitre, au cas particulier des cônes de manière à éliminer la contribution de  $\Upsilon(\ell)$  dans l'expression de l'énergie.

## 4.3 Cas du cône pour les guides d'ondes

### 4.3.1 Influence sur la propagation et la stabilité

D'après l'équation de transport 4.6, pour le cas particulier du cône ( $\Upsilon(\ell) = 0$ ), la propagation des ondes  $\psi^\pm$  est découplée et l'équation de transport devient :

$$\partial_t \Psi(\ell, t) = \begin{pmatrix} -c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \partial_\ell \Psi(\ell, t) \quad (4.12)$$

Dans ce cas particulier, l'expression de la dérivée de l'énergie par rapport au temps reste semblable à celle obtenue dans le cas général. Pour un cône ( $\zeta(0) = \zeta(L) = \zeta$  et  $\Upsilon(\ell) = 0$ ), l'expression de l'énergie en fonction des ondes  $\psi^\pm$  se simplifie et devient

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{\pi}{\rho c^2} \int_0^L [(\psi^+)^2 + (\psi^-)^2] d\ell \\
&+ \frac{\pi}{2\rho} \zeta \left[ (\partial_t^{-1}(\psi^+(0,t) + \psi^-(0,t)))^2 - (\partial_t^{-1}(\psi^+(L,t) + \psi^-(L,t)))^2 \right]
\end{aligned} \tag{4.13}$$

L'équation 4.13 montre qu'une condition suffisante pour que l'énergie acoustique soit définie positive est que  $\partial_t^{-1}(\psi^+(0,t) + \psi^-(0,t)) \geq \partial_t^{-1}(\psi^+(L,t) + \psi^-(L,t))$ . Il n'est pas possible d'établir de lien entre ces deux quantités, à un instant donné. Il n'existe pas de résultat général mais nous pouvons affirmer que celui-ci dépend des impédances qui chargent les bords du cône.

Une question intéressante est donc « Comment se traduit cette condition lorsque l'on connecte plusieurs cônes ». Cette question fait l'objet du paragraphe suivant.

### 4.3.2 Jonction de cônes avec discontinuité de pente

La propagation des ondes  $\psi^\pm$  est découplée dans les cônes. La connexion de cônes avec une continuité de rayon à la jonction fait apparaître une structure de Kelly-Lochbaum.

Considérons la jonction, présentée par la figure 4.1 entre deux cônes notés Ⓐ et Ⓑ et de pentes respectives  $\zeta(a)$  et  $\zeta(b)$ .

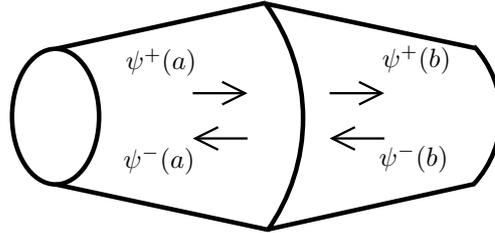


FIGURE 4.1 – Jonction de deux cônes (a et b) avec une discontinuité de pente. Les abscisses  $\ell = a$  et  $\ell = b$  désignent respectivement l'extrémité droite du cône Ⓐ et l'extrémité gauche du cône Ⓑ. Sur cette représentation, la jonction est convexe  $\zeta(a) > \zeta(b)$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \psi^+(b, s) \\ \psi^-(a, s) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 + R_\Psi(s) & R_\Psi(s) \\ R_\Psi(s) & 1 + R_\Psi(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^+(a, s) \\ \psi^-(a, s) \end{pmatrix} \\
&\text{avec } R_\Psi(s) = \frac{\alpha}{s - \alpha} \quad \text{avec } \alpha = \frac{c}{2} (\zeta(a) - \zeta(b))
\end{aligned} \tag{4.14}$$

La figure 4.2 montre la structure de Kelly-Lochbaum obtenue par la jonction de deux cylindres avec les ondes planes progressives.

Pour la jonction de cône et les ondes  $\psi^\pm$ , la fonction de réflexion, qui apparait dans la structure de Kelly-Lochbaum, n'est plus, comme dans le cas des cylindres, un simple gain mais un filtre autorégressif d'ordre 1. La fonction de transfert associée présente un pôle simple en  $s = \alpha \in \mathbb{R}$ .

Pour une jonction concave de cônes ( $\zeta(a) < \zeta(b)$ ),  $\alpha < 0$ . Le pôle de la fonction de transfert  $R_\Psi(s)$  est alors situé hors du domaine de convergence de l'implémentation causale du filtre :  $\alpha \in \mathbb{C}_0^-$ . La fonction de transfert  $R_\Psi(s)$  est donc stable d'un point de vue traitement du signal. Pour une jonction convexe, la fonction de transfert est instable car  $\zeta(a) > \zeta(b)$  et donc  $\alpha > 0$ .

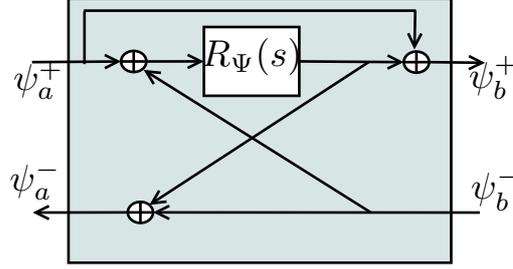


FIGURE 4.2 – Structure de Kelly-Lochbaum obtenue pour la jonction de deux cônes avec une discontinuité de pente avec les ondes  $\psi^\pm$

### 4.3.3 Étude de la stabilité pour la jonction de deux cônes

Au vu du résultat donné par l'équation 4.9, nous proposons d'effectuer un bilan d'énergie « décalé » qui consiste à prendre en compte le terme de volume d'un cône et les contributions d'une seule frontière commune à deux cônes différents. Si l'énergie de ce système est définie positive alors, par récurrence, cette propriété est vérifiée pour tout un réseau de cônes.

Nous considérons deux cônes notés ① et ② possédant le même rayon à la jonction d'abscisse  $\ell = L_a$ .

La figure 4.3 montre une représentation schématique de ce bilan d'énergie.

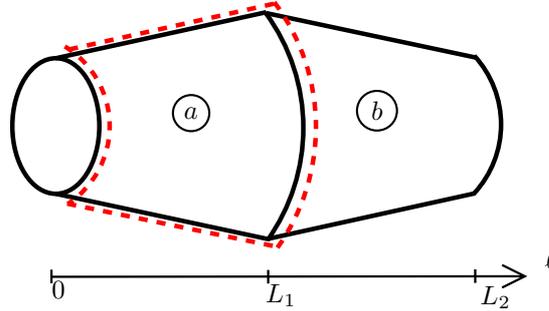


FIGURE 4.3 – Représentation schématique du bilan d'énergie « décalé » pour la jonction de deux cônes ① et ② avec une discontinuité de pente. Les pointillés rouges délimitent le volume dans lequel l'énergie acoustique est calculée.

L'équation 4.15 donne l'expression de l'énergie  $E_d(t)$  de ce système.

$$\begin{aligned}
 E_d(t) &= \frac{\pi}{\rho c^2} \int_{0^+}^{L_1^+} ((\psi_1^+)^2 + (\psi_1^-)^2) dl & (4.15) \\
 &+ \frac{\pi}{2\rho} \left[ \zeta(L_1^+) (\partial_t^{-1}(\psi^+(L_1^+) + \psi^-(L_1^+)))^2 - \zeta(L_1^-) (\partial_t^{-1}(\psi^+(L_1^-) + \psi^-(L_1^-)))^2 \right]
 \end{aligned}$$

L'implémentation en guide d'onde numérique exploite la continuité de la pression à la jonction. Pour les ondes  $\psi^\pm$  et dans le cas d'une jonction avec continuité du rayon, la continuité de la pression se traduit par

$$\begin{aligned}
 (\psi^+(L_1^-) + \psi^-(L_1^-)) &= (\psi^+(L_1^+) + \psi^-(L_1^+)) \quad \forall t \\
 (\partial_t^{-1}(\psi^+(L_1^-) + \psi^-(L_1^-)))^2 &= (\partial_t^{-1}(\psi^+(L_1^+) + \psi^-(L_1^+)))^2 & (4.16)
 \end{aligned}$$

L'équation 4.15 peut donc se réécrire en fonction de  $\psi^\pm(L_1^\pm)$ .

$$\begin{aligned}
E_d(t) &= \frac{\pi}{\rho c^2} \int_{0^+}^{L_1^+} ((\psi_1^+)^2 + (\psi_1^-)^2) d\ell \\
&+ \frac{\pi}{2\rho} (\zeta(L_1^+) - \zeta(L_1^-)) (\partial_t^{-1}(\psi^+(L_1^+) + \psi^-(L_1^-)))^2
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Dans le cas d'une jonction concave ( $\zeta(L_1^+) > \zeta(L_1^-)$ ), tous les termes de  $E_d(t)$  sont positifs, la fonctionnelle qui donne l'énergie en fonction de  $\psi^\pm$  est donc définie positive. Tandis que pour une jonction convexe ( $\zeta(L_1^+) < \zeta(L_1^-)$ ), la condition suffisante n'est pas vérifiée. La jonction de cônes de type convexe ne garantit pas la stabilité du système.

Ce résultat correspond aux conditions de stabilité bien connues pour la jonction de cônes [12, 5], qui sont également visibles, d'un point de vue traitement du signal sur la fonction de réflexion  $R_\Psi$ .

## Chapitre 5

# Ondes découplées et tubes à courbure constante

### 5.1 Ondes progressives découplées dans les tubes à courbure constante

La décomposition en ondes progressives découplées dans les tubes dont la courbure,  $\Gamma(\ell)$  est constante, est issue de [6]. Le changement de variables par rapport à l'état pression/débit fait apparaître des opérateurs plus compliqué que celui des ondes  $\psi^\pm$ .

#### 5.1.1 Définition des ondes $q^\pm$ dans le domaine de Laplace

Les matrices de passages  $\mathbf{P}_{QX}(\ell)$  et  $\mathbf{P}_{XQ}(\ell)$  donnent les changements de variables entre l'état  $\mathbf{Q}(\ell, s) = (q^+(\ell, s), q^-(\ell, s))^T$  et l'état de pression/débit, dans le domaine de Laplace.

$$\mathbf{Q}(\ell, s) = \mathbf{P}_{QX}(\ell)\mathbf{X}(\ell, s)$$

$$\begin{pmatrix} q^+(\ell, s) \\ q^-(\ell, s) \end{pmatrix} = \frac{R(\ell)}{2} \begin{pmatrix} 1 - \frac{\zeta(\ell)}{\Gamma(s)} & \frac{\rho s}{S(\ell)\Gamma(s)} \\ 1 + \frac{\zeta(\ell)}{\Gamma(s)} & -\frac{\rho s}{S(\ell)\Gamma(s)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\ell, s) \\ u(\ell, s) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

$$\mathbf{X}(\ell, s) = \mathbf{P}_{XQ}(\ell)\mathbf{Q}(\ell, s)$$

$$\begin{pmatrix} p(\ell, s) \\ u(\ell, s) \end{pmatrix} = \frac{1}{R(\ell)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{S(\ell)}{\rho s}(\Gamma(s) + \zeta(\ell)) & -\frac{S(\ell)}{\rho s}(\Gamma(s) - \zeta(\ell)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^+(\ell, s) \\ q^-(\ell, s) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

### 5.2 Bilan énergétique

Nous cherchons à obtenir une expression des ondes  $q^\pm$  dans le domaine temporel de manière à obtenir une expression de l'énergie acoustique en fonction du temps. Le changement de variables de  $p, u$  vers  $q^\pm$  fait apparaître des fonctions de transferts irrationnelles dues à la présence d'une racine carré de la variable complexe  $s$ . La réponse impulsionnelle équivalente n'est pas calculable directement par la transformée

de Laplace inverse. Dans cette section, nous utilisons les représentations intégrales pour obtenir une expression de l'énergie acoustique en fonction des ondes  $q^\pm$  dans le domaine temporel.

### 5.2.1 Représentations intégrales

Le principe de cette représentation est d'exprimer un système compliqué par un somme infinie de systèmes simples : des systèmes dynamiques du premier ordre. La représentation intégrale peut également être utilisée pour approcher les dérivés fractionnaires par rapport au temps qui apparaissent dans l'équation différentielle de certains systèmes physiques, comme l'amortissement visco-thermique dans l'équation de Webster-Lokshin [14].

#### Principe

Le problème posé par les fonctions de transferts irrationnelles est l'apparition d'une coupure dans le plan de Laplace. Pour un système causal et stable, cette coupure est comprise dans le demi-plan gauche de Laplace notée  $\mathbb{C}_0^-$  pour lequel ( $\Re e(s) < 0$ ). Le calcul de la transformée de Laplace inverse est réalisé en utilisant le théorème des résidus avec un contour de Broomwich qui exclue la coupure, ce qui fait apparaitre une intégrale infinie dans l'expression de la réponse impulsionnelle.

Soit  $H(s)$  une fonction de transfert possédant une coupure sur l'axe des réels négatifs  $\mathbb{R}^-$ . La réponse impulsionnelle causale s'écrit comme la limite, quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$ , de l'intégrale de  $H(s)$  sur l'axe vertical du plan de Laplace située en  $s = \epsilon \in \mathbb{R}$ .

$$h(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon - i\infty}^{\epsilon + i\infty} H(s) e_+^{st} ds \quad (5.3)$$

où  $e_+^{st}$  désigne la fonction exponentielle causale, tel que  $e_+^{st} = 0 \forall t < 0$ .

L'étape suivante consiste à appliquer le théorème des résidus avec un contour de Broomwich (figure 5.1), noté  $\mathcal{C}_{(R,a,b)}$  qui s'étend à l'ensemble plan  $\mathbb{C}_0^-$  en excluant la coupure tel que  $(R, a, b) \rightarrow (+\infty, 0^+, 0^+)$

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} H(s) e_+^{st} ds = \sum_{\gamma} \text{Res}_{H,\gamma} e_+^{\gamma t} \quad (5.4)$$

où  $\text{Res}_{H,\gamma}$  est le résidu de  $H(s)$  en  $s = \gamma$ .

L'intégrale sur les deux arcs de cercle est nulle car le rayon  $R$  tend vers l'infini.

L'équation 5.4 devient

$$h(t) + 0 - \int_0^{+\infty} \mu(-\xi) e_+^{-\xi t} d\xi + 0 = \sum_{\gamma} \text{Res}_{H,\gamma} e_+^{\gamma t} \quad (5.5)$$

La partie de l'intégrale entourant la coupure s'exprime une somme continue d'exponentielles décroissantes, pondérée par le saut  $\mu(-\xi)$  à la coupure, qui s'exprime

$$\mu(-\xi) = \frac{H(-\xi + i0^-) - H(-\xi + i0^+)}{2i\pi} \quad (5.6)$$

Au final, la représentation intégrale de  $h(t)$  s'écrit

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \mu(-\xi) e_+^{-\xi t} d\xi + \sum_{\gamma} \text{Res}_{H,\gamma} e_+^{\gamma t} \quad (5.7)$$

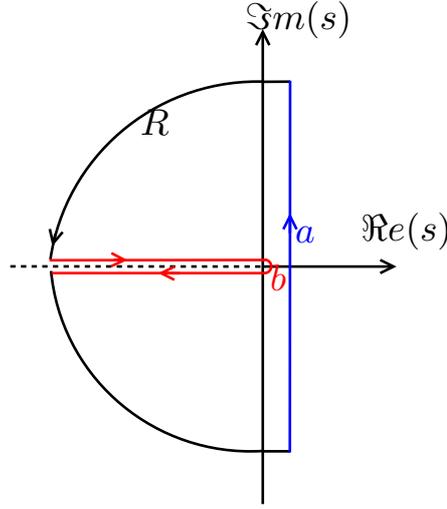


FIGURE 5.1 – Exemple de contour de Bromwich adapté pour une coupure sur  $\mathbb{R}^-$

### Réalisations diffusives

L'intérêt de la représentation intégrale (ou diffusive) est qu'elle est peut facilement se mettre sous la forme d'une représentation d'état. La sortie du système  $y(t)$  est égale à la convolution entre l'entrée  $u(t)$  et  $h(t)$  qui s'exprime également comme une intégrale. Nous supposons que la double intégrale est convergente, et, par conséquent, les intégrales commutent. Nous nous plaçons ici dans le cas où la  $H(s)$  ne possède aucun pôle ( $\sum_{\gamma} \text{Res}_{H,\gamma} e^{\gamma t} = 0$ ).

$$y(t) = [h * u](t) \quad (5.8)$$

$$y(t) = \int_{\tau=0}^t \left[ \int_{\xi=0}^{\infty} \mu(-\xi) e_+^{-\xi t} d\xi \right] u(t - \tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_0^{\infty} \mu(-\xi) y_{\xi}(t) d\xi \quad \text{avec } y_{\xi}(t) = [e_+^{-\xi t} * u](t)$$

Le système est décrit par une infinité de variables  $y_{\xi}(t)$ , sa réalisation diffusive s'écrit

$$\dot{y}_{\xi}(t) = -\xi y_{\xi}(t) + u(t) \quad (5.9)$$

$$y(t) = \int_0^{+\infty} \mu(-\xi) y_{\xi}(t) d\xi \quad (5.10)$$

Pour la simulation numérique de fonctions de transferts irrationnelles [13, 14], l'intégrale infinie sur  $\xi$  est remplacée une somme finie. La coupure du plan complexe, est alors approximée par une agrégation de pôles.

L'état du système est alors décrit par vecteur de dimension finie et les équations 5.9 et 5.10 peuvent se mettre sous la forme d'une représentation d'état.

### 5.2.2 Expression de l'énergie acoustique en fonction de $q^{\pm}$

L'expression de la pression en fonction de  $q^{\pm}$  dans le domaine temporel est obtenue par transformée de Laplace inverse à partir de l'équation 5.2. Pour la pression, le calcul est trivial.

$$p(\ell, t) = \frac{1}{R(\ell)} (q^+(\ell, t) + q^-(\ell, t)) \quad (5.11)$$

L'expression de débit en fonction de  $q^\pm$  dans le domaine temporel nécessite l'utilisation des représentations intégrales. Considérons maintenant la fonction de transfert  $H_1(s)$  qui apparait dans le changement de variables (équation 5.2).

$$H_1(s) = \frac{\Gamma(s)}{s} + \frac{\zeta(\ell)}{s} \quad (5.12)$$

$$H_2(s) = \frac{\Gamma(s)}{s} = \frac{\sqrt{s + ic\sqrt{\Upsilon(\ell)}}\sqrt{s - ic\sqrt{\Upsilon(\ell)}}}{cs} \quad (5.13)$$

La fonction de transfert  $H_2(s)$  possède deux zéros en  $s = \pm ic\sqrt{\Upsilon(\ell)}$  et un pôle en  $s = 0$ . Nous choisissons de définir la racine carré complexe de façon à ce qu'elle soit positive sur  $\mathbb{R}^+$ .

$$\sqrt{s + ic\sqrt{\Upsilon(\ell)}} = \sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad (5.14)$$

Ce choix donne deux coupures conjuguées sur  $\mathbb{R}^-$  tel  $s \in \pm ic\sqrt{\Upsilon} + \mathbb{R}^-$  avec  $\Upsilon \geq 0$ .

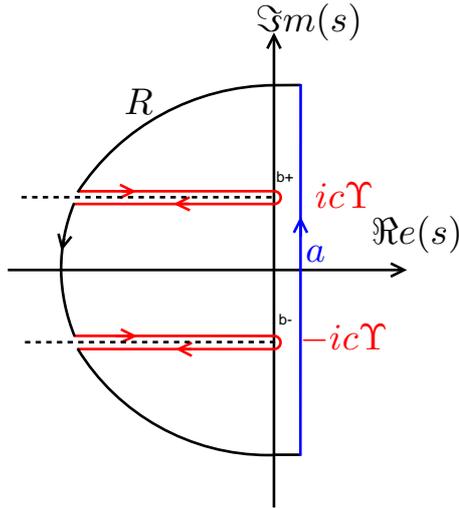


FIGURE 5.2 – Contour de Bromwich adapté pour la fonction de transfert  $H_2(s)$

Le calcul du saut de phase correspondant à la coupure en  $s = -\xi + ic\sqrt{\Upsilon}$  est détaillé en annexe.

Les poids correspondants aux deux coupures sont complexes conjugués l'un de l'autre.

$$\mu^\pm(-\xi) = \frac{\sqrt{\xi} \sqrt{\pm 2ic\sqrt{\Upsilon} - \xi}}{\pi c (\pm ic\sqrt{\Upsilon} - \xi)} \quad (5.15)$$

Le résidu du pôle de  $H_2(s)$  situé en  $s = 0$  est égale à  $\sqrt{\Upsilon}$ .

$$h_2(t) = \sqrt{\Upsilon} + \int_0^{+\infty} \mu^+(-\xi) e^{(-\xi + ic\sqrt{\Upsilon})t} d\xi + \int_0^{+\infty} \mu^-(-\xi) e^{(-\xi - ic\sqrt{\Upsilon})t} d\xi \quad (5.16)$$

Les termes à l'intérieur des intégrales sont complexes conjugués, ils peuvent s'exprimer à partir de la partie réelle de l'un d'entre-eux.

$$h_2(t) = \sqrt{\Upsilon} + \int_0^{+\infty} 2\Re \left[ \mu^+(-\xi) e^{(-\xi + ic\sqrt{\Upsilon})t} \right] d\xi \quad (5.17)$$

Au final, l'expression du débit en fonction de  $q^\pm$  donne

$$U(\ell, t) = \frac{\pi R(\ell)}{\rho} \left[ (\zeta(\ell) + \sqrt{\Upsilon}) \partial_t^{-1}(q^+(\ell, t)) + 2 \int_0^{+\infty} \Re[\mu^+(-\xi) z_\xi^+(\ell, t)] d\xi \right] \quad (5.18)$$

$$+ \frac{\pi R(\ell)}{\rho} \left[ (\zeta(\ell) - \sqrt{\Upsilon}) \partial_t^{-1}(q^-(\ell, t)) - 2 \int_0^{+\infty} \Re[\mu^+(-\xi) z_\xi^-(\ell, t)] d\xi \right]$$

$$\text{avec } z_\xi^\pm(\ell, t) = \left[ e_+^{(-\xi + ic\sqrt{\Upsilon})t} * q^\pm(\ell, t) \right](t)$$

Une fois que les expressions de  $p$  et  $u$  sont déterminées, l'énergie acoustique en fonction des ondes  $q^\pm$  peut être exprimée en utilisant l'équation 2.11. Cette expression n'est pas présentée ici en raison de sa complexité et du fait qu'elle n'a pas été exploitée pour déterminer sous quelles conditions elle est définie positive.

La difficulté vient de la présence d'une double intégrale sur  $\xi$ , dans certains termes. Une piste a été abordée : l'idée consiste à faire apparaître la double intégrale dans les termes qui ne dépendent pas de  $\xi$ , en rajoutant un poids de norme unité, puis d'étudier le comportement de l'ensemble en fonction de  $\xi$ .

### 5.3 Jonction de tronçons a courbure constante avec discontinuité de courbures

La connexion de tronçons a courbure constante avec une continuité de pente à la jonction fait apparaître la même structure de Kelly-Lochbaum pour les ondes planes et une jonction de cylindres. Les deux tronçons ① et ② possèdent une courbure notée  $\Gamma(a)$  et  $\Gamma(b)$ , tel que :

$$\Gamma(\ell) = \sqrt{\frac{c^2}{s^2} + \Upsilon(\ell)} \quad (5.19)$$

La figure 5.3 illustre la connexion de deux tronçons de tube à courbure à constante.

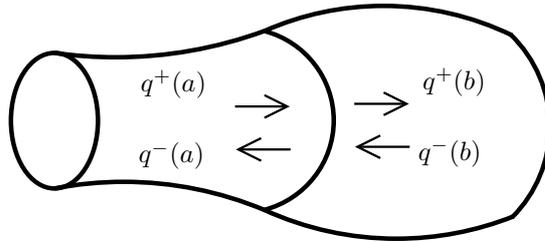


FIGURE 5.3 – Jonction de deux tronçons à courbures constantes ① et ②. La rayon et la pente à la jonction sont continus. Sur cette représentation,  $\Gamma(a) > 0$  et  $\Gamma(b) < 0$

La figure 5.4 montre la structure de Kelly-Lochbaum obtenue pour la jonction de deux tubes à courbure constante.

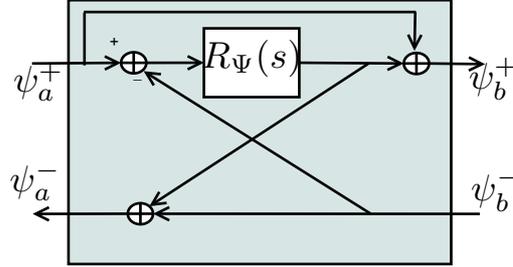


FIGURE 5.4 – Structure de Kelly-Lochbaum obtenue pour la connexion de deux tronçons de courbure constante avec une discontinuité de courbure avec les ondes  $q^\pm$

$$\begin{pmatrix} q^+(b, s) \\ q^-(a, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + R_Q(s) & -R_Q(s) \\ R_Q(s) & 1 - R_Q(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^+(a, s) \\ q^-(b, s) \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

avec  $R_Q(s) = \frac{\Gamma(a) - \Gamma(b)}{\Gamma(a) + \Gamma(b)}$

# Conclusion et perspectives

Le travail effectué au cours de ce stage a permis de mettre en évidence l'intérêt d'utiliser des outils issus du domaine de l'automatique pour aborder les problèmes d'instabilité dans la synthèse par guides d'ondes numériques.

En effet, un critère essentiel pour vérifier la stabilité du système acoustique est que l'énergie acoustique soit « bien posée » : c'est-à-dire que est que la fonction qui associe l'énergie contenue dans le pavillon aux variables utilisées pour décrire l'état du système, soit définie positive.

Bien que l'utilisation d'ondes progressives découplées permet d'obtenir des simulations numériques réalistes et à un faible coût, cette décomposition de l'état acoustique est responsable de l'apparition d'instabilité. Les bilans énergétiques effectués montrent que les phénomènes d'instabilité sont liés à la présence d'opérateurs temporels dans la définition des ondes progressives. L'utilisation des ondes planes progressives garantit la stabilité contrairement à celle des ondes sphériques progressives, dont la définition fait apparaître une intégrale causale par rapport au temps.

Ce travail a mis en avant une expression générale, dans le domaine temporel, de l'énergie acoustique dans les pavillons en fonction des ondes sphériques progressives. Cette approche a permis de retrouver un résultat bien connu pour l'instabilité de la jonction de deux cônes.

Au vu des résultats obtenus, il semble que l'approche automatique du problème se présente comme une piste à approfondir. Les conditions de stabilité sur les fonctions de réflexion n'ont pas été déterminées. Ce résultat dans le cas de la jonction de cônes avec les ondes sphériques progressives ne semble pas être très éloigné du chemin parcouru. La prise en compte des pertes visco-thermiques peut résoudre des problèmes, car, bien que le modèle de propagation soit alors plus compliqué, les pertes se traduisent par une condition de passivité moins stricte.

L'étude de la stabilité d'autres types de jonctions plus compliquées, qui combinent, par exemple une discontinuité de section et de pente, peut se révéler utile.

Une perspective intéressante est de déterminer l'expression de l'énergie acoustique en fonction des ondes définies progressives définies dans [9] pour en étudier la stabilité, bien que ce changement de variables soit plus compliqué que celui correspondant aux ondes découplées dans les tubes à courbure constante. Le calcul de l'énergie acoustique nécessite également l'utilisation des représentations intégrales.

# Bibliographie

- [1] J. L. Kelly, C.C. Lochbaum, Speech synthesis, Proceedings of the Speech Communications Seminar, (Stockholm), Speech Transmission Lab., Royal Institute of Technology, 1962.
- [2] Vesa Valimaki, Discrete-Time Modeling of Acoustic Tubes Using Fractional Delay Filters, Thèse de Doctorat, Helsinki University of Technology, 1995.
- [3] T. Hélie Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion, Thèse de l'Université de Paris-Sud, Orsay, 2002.
- [4] T. Hélie Ondes découplées et ondes progressives pour les problèmes mono-dimensionnels d'acoustique linéaire, Congrès Français d'Acoustique, Tours, France, 2006.
- [5] R.Mihnot, T. Hélie, D. Matignon, Stable realization of a delay system modeling a convergent acoustic cone, Mediteranean conference on control and automation, p. 1574-1579, Ajacio, France, 2008.
- [6] R. Mignot Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent Thèse de Doctorat, Telecom ParisTech, 2009.
- [7] R. Mignot, T. Hélie, D.Matignon, Digital waveguide modeling for wind instruments : building a state-space representation based on the Webster-Lockshin mode, IEEE Transaction on Audio, Speech, and Language Processing, 2010.
- [8] T. Hélie, T. Hézard, R. Mignot, D.Matignon, On the 1D wave propagation in wind instruments with a smooth profile, Aalborg, Forum Acusticum 2011,
- [9] T. Hézard Ondes découplées et ondes progressives dans les tubes acoustiques à section variable pour la représentation en guides d'ondes Stage M2 ATIAM, 2010.
- [10] H. Khalil Nonlinear Systems, Prentice Hall, 2002.
- [11] S. Bilbao, J.O. Smith Energy-conserving finite difference schemes for nonlinear strings, Acta Acustica unites with Acustica, vol. 91, p. 299-311, 2005.
- [12] J. Gilbert, J. Kergomard, and J. D. Polack. On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores. J. Acous. Soc. Am. 04, 1990.
- [13] T. Hélie, D. Matignon Representations with poles and cuts for the time-domain simulation of fractional systems and irrational transfer fonctions, Signal Processing 86 (p 2516-2528), 2006.
- [14] T. Hélie, D. Matignon Diffusive representaton for the analysis and simulation of flared acoustic pipes with visco-thermal losses. WSPC/103-M3AS, 2006.
- [15] P. M. Morse, K.U. Ingard, Theoretical acoustics, Princeton University Press, 1986
- [16] A.D. Pierce, Acoustics : an introduction to its physical principles and applications, Acoustical Soc of America, 1989,
- [17] M. Bruneau, Manuel d'acoustique fondamentale, Hermès Science, 1998.

- [18] A. Chaigne, J. Kergomard, *Acoustique des instruments de musique*, Hermès Science, 2008.
- [19] G.T Gilbert, Positive definite matrices and Sylvester's criterion, *The American Mathematical Monthly*, Vol 98, No 1, p 44-46, January 1991.

## Annexe A

# Forme quadratique définie positive

### A.1 Fonction définie positive

Une fonction scalaire  $f(x)$  est dite définie positive dans une région  $\Omega$  autour de l'origine si :

$$f(0) = 0, \tag{A.1}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega / x \neq 0. \tag{A.2}$$

Dans le cas où l'égalité de la deuxième condition n'est pas stricte :

$$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega / x \neq 0 \tag{A.3}$$

Alors la fonction est dite définie semi-positive.

### A.2 Forme quadratique

Soit une fonction  $f(\mathbf{X})$  qui au vecteur colonne  $\mathbf{X}$ , de dimension  $n$  associe un scalaire tel que :

$$f(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} \tag{A.4}$$

où  $\mathbf{Q}$  est une matrice réelle symétrique (ou complexe hermitienne) de dimension  $n$ .

La fonction quadratique  $f(\mathbf{X})$  est dite définie (semi-)positive si la matrice  $\mathbf{Q}$  est elle-même définie (semi-)positive).

### A.3 Matrices définies semi-positives

Une matrice réelle symétrique  $\mathbf{Q}$  est définie semi-positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont supérieures ou égales à zéro.

## A.4 Critère de Sylvester

Le critère de Sylvester permet de prouver qu'une matrice réelle symétrique (ou complexe hermitienne) est définie positive. Soit  $\mathbf{Q}$  une matrice de dimension  $n$ , on appelle mineurs principaux dominants les déterminants des  $n$  sous-matrices principales  $\mathbf{Q}_p$  définies par :

$$\mathbf{Q}_p = (q_{ij})_{0 \leq i, j \leq p} \quad \text{avec } 1 \leq p \leq n, \quad (\text{A.5})$$

La matrice  $\mathbf{Q}$  est définie positive si ses  $n$  mineurs principaux dominants sont strictement positifs.

## A.5 Dérivation d'une forme quadratique

On cherche la dérivée de  $f(\mathbf{X})$  par rapport au temps :

$$\partial_t f(\mathbf{X}) = (\partial_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}))^T \partial_t \mathbf{X} \quad (\text{A.6})$$

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{X}} f(\mathbf{X}) &= \partial_{\mathbf{X}} (\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X}) + (\partial_{\mathbf{X}}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X}))^T \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{X} + (\mathbf{X}^T \mathbf{Q})^T \\ &= \mathbf{Q} \mathbf{X} + \mathbf{Q}^T \mathbf{X} \\ &= (\mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T) \\ &= 2\mathbf{Q} \mathbf{X} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

L'équation A.6 devient :

$$\begin{aligned} \partial_t f(\mathbf{X}) &= (2\mathbf{Q} \mathbf{X})^T \cdot \partial_t \mathbf{X} \\ &= 2\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \cdot \partial_t \mathbf{X} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

## Annexe B

# Bilans énergétique : détails des calculs

Cette annexe présente le détail des calculs trop longs pour être présentés dans le corps du document.

### B.1 Variation temporelle de l'énergie en fonction de $p^\pm$

$$\begin{aligned}\frac{dE(t)}{dt} &= \frac{2\pi}{\rho c} \int_0^L \left[ R(\ell)R'(\ell) \left( p^{-2}(\ell, t) - p^+(\ell, t)^2 \right) + R^2(\ell) \left( p^-(\ell, t)\partial_\ell p^-(\ell, t) - p^+(\ell, t)\partial_\ell p^+(\ell, t) \right) \right] d\ell \\ &= \frac{\pi}{\rho c} \int_0^L \left[ \partial_\ell \left( R^2(\ell) \right) \left( p^{-2}(\ell, t) - p^+(\ell, t)^2 \right) + R^2(\ell)\partial_\ell \left( p^-(\ell, t)^2 - p^+(\ell, t)^2 \right) \right] d\ell \\ &= \frac{\pi}{\rho c} \int_0^L \partial_\ell \left[ R^2(\ell) \left( p^{-2}(\ell, t) - p^+(\ell, t)^2 \right) \right] d\ell \\ \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{\pi}{\rho c} \left[ R^2(0) \left( p^{+2}(0, t) - p^{-2}(0, t) \right) - R^2(L) \left( p^{+2}(L, t) - p^{-2}(L, t) \right) \right] \quad (\text{B.1})\end{aligned}$$

### B.2 Énergie en fonction de $\psi^\pm$

Dans la suite de cette annexe,  $\psi^\pm(\ell, t)$  est notée  $\psi^\pm$  de manière à alléger les expressions.

$$\begin{aligned}E(t) &= \int_0^L e_{lin}(\ell, t) d\ell \quad (\text{B.2}) \\ e_{lin}(\ell, t) &= \frac{\pi}{\rho c^2} \left[ (\psi^+)^2 + (\psi^-)^2 + \frac{c^2 \zeta(\ell)^2}{2} (\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right] \\ &\quad + \frac{\pi}{\rho c^2} [c\zeta(\ell)(\psi^+ - \psi^-)\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-)]\end{aligned}$$

En intégrant par rapport au temps la relation 4.7, nous obtenons B.3 qui permet de réécrire le dernier terme de l'expression de  $e_{lin}(\ell, t)$ , noté  $\delta(\ell, t)$ .

$$\psi^+ - \psi^- = -c\partial_\ell\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-) \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \delta(\ell, t) &= c\zeta(\ell)(\psi^+ - \psi^-)\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-) \\ &= -c^2\zeta\partial_\ell\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-)\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-) \\ &= -\frac{c^2}{2}\zeta(\ell)\partial_\ell(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

La formule dérivation d'un produit de fonction permet de ré-exprimer  $\delta(\ell, t)$  :

$$-\zeta(\ell)\partial_\ell[(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2] = \partial_\ell[\zeta(\ell)(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2] - \partial_\ell[\zeta(\ell)](\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \quad (\text{B.5})$$

En utilisant le fait que ,  $\partial_\ell[\zeta(\ell)] = \Upsilon(\ell) - \zeta^2(\ell)$ , le terme  $\delta(\ell, t)$  devient :

$$\begin{aligned} \delta(\ell, t) &= -\frac{c^2}{2}\partial_\ell \left[ \zeta(\ell)(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 - \partial_\ell(\zeta(\ell))(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right] \\ &= \frac{c^2}{2} \left[ -\partial_\ell \left( \zeta(\ell)(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right) + \Upsilon(\ell)(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 - \zeta(\ell)^2(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Les deux termes en  $\zeta(\ell)^2$  qui apparaissent dans l'expression de  $e_{lin}(\ell, t)$  se simplifient.

L'équation B.7 donne l'expression de l'énergie acoustique obtenue.

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{\pi}{\rho c^2} \int_0^L \left[ (\psi^+)^2 + (\psi^-)^2 + \frac{c^2}{2}\Upsilon(\ell)(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 - \frac{c^2}{2}\partial_\ell \left( \zeta(\ell)(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right) \right] d\ell \\ E(t) &= \frac{\pi}{\rho c^2} \int_0^L \left[ (\psi^+)^2 + (\psi^-)^2 + \frac{c^2}{2}\Upsilon(\ell)(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right] d\ell \\ &\quad + \frac{\pi}{2\rho} \left[ \zeta(0)(\partial_t^{-1}(\psi^+(0) + \psi^-(0)))^2 - \zeta(L)(\partial_t^{-1}(\psi^+(L) + \psi^-(L)))^2 \right] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

### B.3 Dérivée temporelle de l'énergie en fonction de $\psi^\pm$

Les équations suivantes présentent le détail du calcul de la dérivée temporelle de chacun des termes de l'énergie B.7

$$\begin{aligned} \partial_t [(\psi^+)^2 + (\psi^-)^2] &= 2(\psi^+\partial_t(\psi^+) + \psi^-\partial_t(\psi^-)) \\ &= 2c(\psi^-\partial_\ell(\psi^-) - \psi^+\partial_\ell(\psi^+)) - c^2\Upsilon(\psi^+ + \psi^-)\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-) \\ &= c\partial_\ell((\psi^-)^2 - (\psi^+)^2) - c^2\Upsilon(\psi^+ + \psi^-)\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-) \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$\partial_t \left[ -\frac{c^2}{2}\partial_\ell \left( \zeta(\ell)(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right) \right] = -c^2\partial_\ell(\zeta(\psi^+ + \psi^-)\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-)) \quad (\text{B.9})$$

$$\partial_t \left[ \frac{c^2}{2}\Upsilon(\ell)(\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-))^2 \right] = c^2\Upsilon(\psi^+ + \psi^-)\partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-) \quad (\text{B.10})$$

Les deux termes qui contiennent  $\Upsilon(\ell)$  se simplifient entre-eux. La courbure du tronçon n'apparaît donc pas dans l'expression de la variation de l'énergie acoustique qui s'écrit,

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{\pi}{\rho c} \int_0^L \partial_\ell \left[ \psi^{-2} - \psi^{+2} - c\zeta(\ell)(\psi^+ + \psi^-) \partial_t^{-1}(\psi^+ + \psi^-) \right] d\ell \quad (\text{B.11})$$

## Annexe C

# Calcul du saut de phase pour le calcul de $H_2(s)$

En posant  $s + ic\sqrt{\Upsilon(\ell)} = \rho e^{i\theta}$  avec  $\rho \geq 0$  et  $\theta \in ]-\pi, \pi]$ , La fonction de transfert devient :

$$H_2(s) = \frac{\sqrt{2ic\sqrt{\Upsilon} + \rho e^{i\theta}} + \sqrt{\rho e^{i\theta}}}{c(ic\sqrt{\Upsilon})} \quad (\text{C.1})$$

Le calcul du saut de part et d'autre de la coupure située en  $s = ic\sqrt{\Upsilon}$  s'écrit

$$s = -\xi + ic\sqrt{\Upsilon} + i0^- \rightarrow \rho = \xi, \theta = -\pi \quad (\text{C.2})$$

$$s = -\xi + ic\sqrt{\Upsilon} + i0^+ \rightarrow \rho = \xi, \theta = \pi \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} \mu^+(-\xi) &= \frac{H_2(-\xi + ic\sqrt{\Upsilon} + i0^-) - H_2(-\xi + ic\sqrt{\Upsilon} + i0^+)}{2i\pi} \\ &= \frac{1}{2i\pi} \left( \frac{-i\sqrt{\xi}\sqrt{2i\sqrt{\Upsilon} - \xi}}{c(ic\sqrt{\Upsilon} - \xi)} - \frac{i\sqrt{\xi}\sqrt{2i\sqrt{\Upsilon} - \xi}}{c(ic\sqrt{\Upsilon} - \xi)} \right) \\ \mu^+(-\xi) &= \frac{\sqrt{\xi}\sqrt{2ic\sqrt{\Upsilon} - \xi}}{\pi c(ic\sqrt{\Upsilon} - \xi)} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

## Annexe D

# Méthode de calcul de la matrice de transfert caractérisant la jonction entre deux tubes

Cette annexe présente une méthode générale pour déterminer la matrice de transfert caractérisant la jonction entre deux tubes. Ce formalisme nécessite d'utiliser l'état  $\tilde{\mathbf{X}}$  dont la propagation est découplée dans le type de tube qui forme la jonction. ( $p^\pm$  pour une jonction de cylindres,  $\psi^\pm$  pour une jonction de cônes et  $q^\pm$  pour une jonction de tubes à courbure constante.)

### D.1 Calcul de la matrice de transfert non causale

Les abscisses  $\ell = a, b$  désignent les extrémités droite du tube  $a$  et gauche du tube  $b$ . La continuité de la pression et du débit à la jonction entre deux tubes ( $a$  et  $b$ ) s'écrit :

$$\begin{aligned} p(a, t) &= p(b, t) \\ u(a, t) &= u(b, t) \end{aligned} \tag{D.1}$$

Soit  $\mathbf{P}$  la matrice de passage entre l'état  $\mathbf{X}$  et un état  $\tilde{\mathbf{X}}$  de type onde progressive tel que :  $\mathbf{X}(\ell, s) = \mathbf{P}(\ell)\tilde{\mathbf{X}}(\ell, s)$ .

La continuité de pression/débit peut s'exprimer sous forme matricielle et dans le domaine de Laplace :

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(b, s) &= \mathbf{X}(a, s) \\ \mathbf{P}(b)\tilde{\mathbf{X}}(b, s) &= \mathbf{P}(a)\tilde{\mathbf{X}}(a, s) \\ \tilde{\mathbf{X}}(b, s) &= \mathbf{P}(b)^{-1}\mathbf{P}(a)\tilde{\mathbf{X}}(a, s) \end{aligned} \tag{D.2}$$

La matrice qui donne l'expression de  $\tilde{\mathbf{X}}(b, s)$  en fonction de  $\tilde{\mathbf{X}}(a, s)$  est appelée  $\mathbf{J}$  :

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}^+(b, s) \\ \tilde{X}^-(b, s) \end{pmatrix} = \mathbf{J} \begin{pmatrix} \tilde{X}^+(a, s) \\ \tilde{X}^-(a, s) \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}(b)^{-1}\mathbf{P}(a) \tag{D.4}$$

## D.2 Modification des entrées sorties

La matrice de transfert  $\mathbf{Jc}$  qui donne la structure de KL est obtenue en modifiant les entrées sorties de la matrice  $\mathbf{J}$  (Modification de type  $T \rightarrow Tv$ )

$$\begin{pmatrix} \tilde{X}^+(b, s) \\ \tilde{X}^-(a, s) \end{pmatrix} = \mathbf{Jv} \begin{pmatrix} \tilde{X}^+(a, s) \\ \tilde{X}^-(b, s) \end{pmatrix} \quad (\text{D.5})$$

$$Jv = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{J_{22}} \begin{pmatrix} \det(J) & J_{12} \\ -J_{21} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

## Annexe E

# Factorisation de Kelly-Lochbaum

La décomposition en guide d'onde fait apparaître, en appliquant la continuité de pression et de débit à la jonction entre deux tubes, une matrice de transfert ne contenant pas de retard. Les termes de cette matrice peuvent être factorisés par une seule fonction de réflexion  $R(s)$  qui possède une dépendance en la variable de Laplace. Cette forme permet de réduire le temps de calcul nécessaire à la simulation numérique.

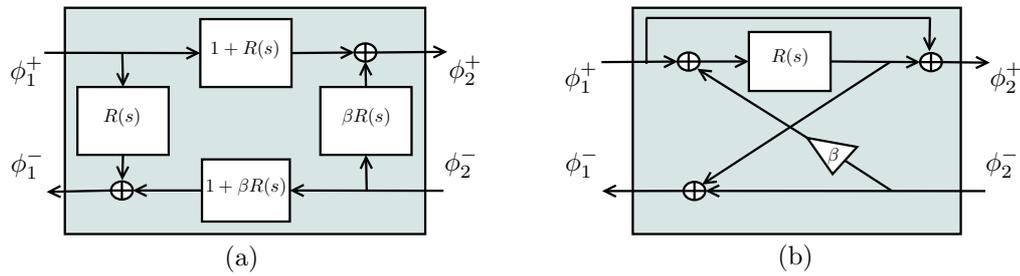


FIGURE E.1 – (a) : Quadripôle factorisable en structure de Kelly-Lochbaum. (b) Structure de Kelly-Lochbaum

$$\begin{pmatrix} \phi_2^+(s) \\ \phi_1^-(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + R(s) & -R(s) \\ R(s) & 1 - R(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+(s) \\ \phi_2^-(s) \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$