

## Mémoire de stage

Encadrants : Markus Noisternig, Olivier Warusfel

IRCAM - Equipe espaces acoustiques et cognitifs

Mars-Juillet 2011

# Caractérisation du champ sonore dans les salles

Application à la mesure et au transcodage de réponses impulsionnelles  
multi-canaux

---

Julien Colafrancesco

Université Pierre et Marie Curie

Master 2 SAR

Spécialité ATIAM

n° étu: 2400217



Paris, le 8 août 2011



# Résumé

Le présent travail étudie la possible utilisation d'un microphone sphérique dans le cadre d'applications relatives à l'enregistrement de réponses impulsionnelles de salles en multi-canal. Nous chercherons à déterminer dans quelle mesure la description du champ sonore offerte par le microphone sphérique est suffisante pour synthétiser des réponses impulsionnelles possédant les caractéristiques spatiales et directionnelles des configurations microphoniques les plus classiques. Après une brève introduction théorique, les compromis induits par les choix structurels relatifs aux microphones sphériques seront évoqués, les opérations d'extrapolation, de translation, de rotation et de contrôle de la directivité dans le domaine des harmoniques sphériques seront décrites et la validité de ces opérations, dans un cadre pratique relatif à l'utilisation d'un microphone sphérique, sera étudiée par le biais de simulations.

## Remerciements

Je tiens à remercier l'IRCAM pour m'avoir permis de passer une année très enrichissante au sein de la formation ATIAM puis de l'équipe Espaces Acoustiques et Cognitifs où j'ai effectué mon stage.

Je voudrais particulièrement remercier Mr Markus Noisternig et Mr Thibaut Carpentier pour leur soutien sur le plan scientifique, technique aussi bien que méthodologique. Merci aussi à Mr Olivier Warusfel pour avoir fait confiance à ma candidature. Enfin je voudrais remercier Mr Johannes Zaar et Mr Jérémie Nicolle, stagiaires travaillant sur des sujets connexes au mien, pour les échanges prolifiques que nous avons pu avoir.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Aspects théoriques</b>	<b>10</b>
1.1 Solution de l'équation des ondes en coordonnées sphériques . . . . .	10
1.2 Composante angulaire . . . . .	12
1.3 Fonction radiale . . . . .	13
1.4 Le problème intérieur . . . . .	14
1.5 Modèles de sources sonores dans le domaine des harmoniques sphériques . .	15
<b>2 Le microphone sphérique</b>	<b>16</b>
2.1 Transformée en harmoniques sphériques discrète . . . . .	16
2.2 Discrétisation de la sphère . . . . .	18
2.2.1 Hyperinterpolation . . . . .	20
2.3 Aliasing spatial . . . . .	21
2.4 Configuration de la sphère . . . . .	21
2.4.1 Sphère ouverte à microphones omnidirectionnels . . . . .	21
2.4.2 Omission des bandes fréquentielles inexploitablees . . . . .	23
2.4.3 Sphère ouverte à microphones cardioïdes . . . . .	23
2.4.4 Sphère fermée à microphones omnidirectionnels . . . . .	24
2.4.5 Sphère fermée à microphones cardioïdes . . . . .	26
2.4.6 Double sphère . . . . .	27
2.4.7 Double sphère rigide-ouverte . . . . .	29
2.4.8 Résumé sur les filtres holographiques . . . . .	30
2.5 Commutation de l'ordre . . . . .	30

<b>3 Opérations dans le domaine des harmoniques sphériques</b>	<b>32</b>
3.1 Interpolation . . . . .	32
3.2 Extrapolation . . . . .	34
3.3 Translation . . . . .	36
3.3.1 Calcul direct des coefficients . . . . .	37
3.3.2 Methode recursive . . . . .	38
3.3.3 Translation coaxiale . . . . .	39
3.3.4 Performances des algorithmes . . . . .	40
3.3.5 Analyse des résultats . . . . .	41
3.4 Rotation . . . . .	43
3.4.1 Calcul direct des coefficients de rotation . . . . .	45
3.5 Directivité . . . . .	45
<b>4 Transcodage</b>	<b>50</b>
4.1 Configurations espacées . . . . .	51
4.2 Configurations coincidentes . . . . .	52
4.3 Configurations presque coïncidentes . . . . .	53
<b>Conclusion</b>	<b>55</b>
<b>A Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques</b>	<b>58</b>
<b>B Fonctions de Bessel et de Hankel sphériques</b>	<b>60</b>
<b>C Source sonore ponctuelle</b>	<b>61</b>

# Introduction

Le stage que j'ai entrepris cette année se déroule à l'IRCAM au sein de l'équipe « Espaces acoustiques et cognitifs ». Comme le titre de mon stage l'indique, j'ai pour sujet l'étude et la caractérisation du champ sonore dans les salles et son application au transcodage de réponses impulsionnelles. Le contexte de ces 15 dernières années [Gar95], de par une généralisation de la convolution dans le domaine des réverbérations numériques, rend ce sujet particulièrement pertinent. En effet, les réverbérations à convolution d'aujourd'hui permettent d'atteindre des degrés de réalisme sans précédent tout en restant raisonnables d'un point de vue calculatoire (grâce aux algorithmes de transformées de Fourier rapides). Ceci dit, nous pouvons observer un certain manque de flexibilité dans la mesure des dites réponses impulsionnelles, la capture de celles-ci gardant l'empreinte du système d'enregistrement utilisé. Parmi ces systèmes d'enregistrement, nous pouvons entre autre citer les diverses configurations stéréophoniques (AB, XY, OCT, ORTF... [SD85]) , les arbres microphoniques (Fukushima tree, Decca tree [Ear04]) ou encore les têtes artificielles dédiées aux enregistrements binauraux.

Le but de ce stage est donc d'étudier la possibilité d'un enregistrement plus flexible permettant de resynthétiser en différé ce qu'aurait capté l'un des systèmes de prise de son cité précédemment. A cette fin, l'équipe s'est orientée vers l'utilisation d'un microphone sphérique. Ce dernier est constitué d'un grand nombre de capsules permettant d'obtenir une description du champ sonore dans un domaine particulier, celui des « harmoniques sphériques ». Nous reviendrons bien entendu en détail sur ce domaine, en attendant, notons qu'il s'agit d'une décomposition spatio-fréquentielle du champ sonore pouvant être considérée de manière analogue à une transformée de Fourier dans un espace à trois dimensions. Les travaux précédemment effectués au sein de l'IRCAM ont eux traité un cas similaire bien qu'inverse [NCNW10]. Dans ces travaux l'analyse du champ sonore s'effectuait à l'aide d'un ensemble de capsules organisées à la surface d'une sphère englobant les différentes sources sonores.

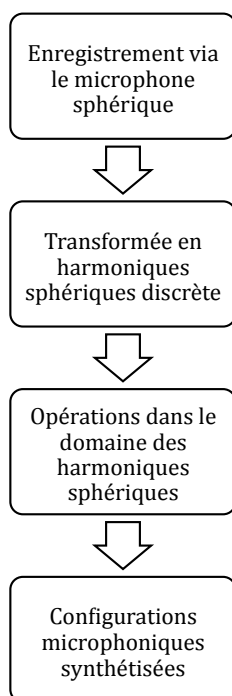


FIGURE 1 – Diagramme représentant les différentes étapes nécessaires à la synthèse, à partir d'un enregistrement réalisé via le microphone sphérique, d'une configuration microphonique

La figure 1 est un diagramme représentant les différentes étapes nécessaires afin de synthétiser, à partir d'un enregistrement réalisé via le microphone sphérique, une configuration microphonique donnée. Conséquemment, le travail proposé ici s'organisera selon plusieurs axes. La première partie introduira la théorie et le formalisme relatif aux harmoniques sphériques. Nous y introduirons aussi le "problème intérieur", ce dernier induisant qu'une connaissance de la pression en tous points à la surface d'une sphère nous permettrait d'extrapoler un champ de pression en tous points à l'intérieur d'un volume sphérique exempt de source sonore et concentrique à la sphère d'origine.

La seconde partie, correspondante aux deux premières cellules du diagramme, sera elle consacrée à la structure même du microphone (rayon de la sphère, type, nombre et répartition sur la surface de la sphère des capsules utilisées). Le microphone sphérique devant être réalisé dans les prochains mois, il a été nécessaire de prendre en compte de nombreux paramètres, relatifs au prix, à la performance ou encore à la fabrication du dit microphone. Il s'agira donc d'effectuer un bref état de l'art des connaissances sur les schémas de discrétisation de la sphère et sur les contraintes techniques relatives aux microphones sphériques. Pour ce faire,



nous ferons référence aux principaux travaux des chercheurs actifs dans ces domaines.

Suite à cela, nous aborderons l'interpolation, l'extrapolation, la translation, la rotation, et le contrôle de la directivité dans le domaine des harmoniques sphériques (troisième cellule du diagramme). Nous évoquerons la théorie relative à chacune de ces opérations et nous mettrons en évidence les limitations que celles-ci induisent en pratique en présentant le résultat de simulations.

Enfin, nous entamerons une discussion prospective sur la possible utilisation du microphone sphérique afin de synthétiser les caractéristiques des configurations stéréophoniques les plus standard. Pour ce faire, nous présenterons des stratégies de synthèse mettant en jeu une combinaison des opérations citées précédemment et nous réfléchirons aux contraintes que ces stratégies impliquent.

# Chapitre 1

## Aspects théoriques

La description du champ sonore dans le domaine des harmoniques sphériques s'obtient via la résolution de l'équation des ondes en coordonnées sphériques. Nous aborderons ici cette résolution puis nous nous détaillerons la partie radiale ainsi que la partie angulaire dont la solution est composée.

### 1.1 Solution de l'équation des ondes en coordonnées sphériques

La partie suivante résume brièvement la solution de l'équation des ondes en coordonnées sphériques, le lecteur intéressé peut se référer aux ouvrages [Wil99] et [GD04] pour de plus amples informations. L'équation des ondes en coordonnées cartésiennes est donnée par la relation

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

avec  $p(x, y, z, t)$  le champ de pression en fonction du temps,  $c$  la célérité des ondes acoustiques dans le milieu considéré et  $t$  le temps.

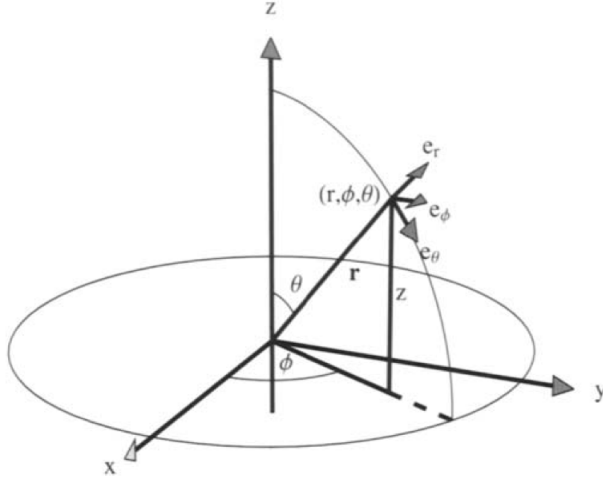


FIGURE 1.1 – Définition des coordonnées sphériques de manière relative aux coordonnées cartésiennes (extrait de [Wil99])

Les relations entre coordonnées cartésiennes et sphériques (visualisables en 1.1) étant les suivantes :

$$x = r \sin \theta \cos \phi , \quad (1.2)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi , \quad (1.3)$$

$$z = r \cos \theta , \quad (1.4)$$

nous pouvons obtenir l'équation des ondes en coordonnées sphériques, soit :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial p}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial p}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 . \quad (1.5)$$

La résolution de cette équation nous donne comme solution

$$p(r, \theta, \phi, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (a_n^m(k) y_n(kr) + b_n^m(k) j_n(kr)) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (1.6)$$

pour les ondes stationnaires, et

$$p(r, \theta, \phi, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (c_n^m(k) h_n^{(1)}(kr) + d_n^m(k) h_n^{(2)}(kr)) Y_n^m(\theta, \phi) \quad (1.7)$$

pour les ondes propagatives (voir annexe A pour le détail des calculs).

$k$  est ici le nombre d'onde (soit  $\frac{2\pi f}{c}$ , avec  $f$  la fréquence),  $j_n$  et  $y_n$  sont les fonctions de Bessel de première et seconde espèce,  $h_n^{(1)}$  et  $h_n^{(2)}$  sont les fonctions de Hankel de première et

seconde espèce,  $Y_n^m$  sont les harmoniques sphériques,  $a_n^m$ ,  $b_n^m$ ,  $c_n^m$  et  $d_n^m$  sont les coefficients spatiaux de la décomposition du champ sonore.

Nous présenterons en détail les composantes de cette solution dans la partie suivante. Ceci dit, nous pouvons d'ores et déjà remarquer que cette solution est formée à partir d'une composante angulaire dépendante de  $\theta$  et  $\phi$  et d'une composante radiale dépendante de  $r$ .

## 1.2 Composante angulaire

Les fonctions angulaires (A.6) et (A.8) peuvent être combinées en une fonction  $Y_n^m$  nommée "harmonique sphérique" :

$$Y_n^m(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!}} P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (1.8)$$

avec  $P_n^m$  les polynômes de Legendre de première espèce.

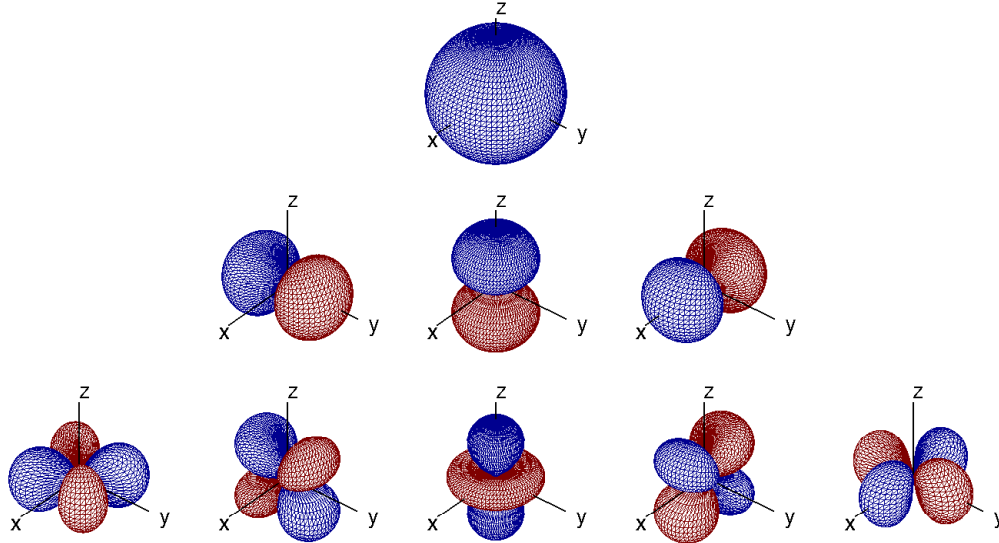


FIGURE 1.2 – Harmoniques sphériques réelles pour  $n = 0, 1, 2$  et  $m = -n, \dots, n$

Deux caractéristiques relatives aux harmoniques sphériques sont d'une grande importance dans le cadre de ce travail, notons dans un premier temps qu'une fonction  $g(\theta, \phi)$  de carré sommable peut être décomposée en une somme d'harmoniques sphériques :

$$g(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_n^m Y_n^m(\theta, \phi), \quad (1.9)$$

et dans un second temps, notons que les harmoniques sphériques sont orthonormales les unes aux autres, c'est à dire

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi Y_n^m(\theta, \phi) Y_{n'}^{m'}(\theta, \phi)^* \sin \theta d\theta = \delta_{nn'} \delta_{mm'} . \quad (1.10)$$

En mathématique, une terminologie est souvent utilisée afin de parler des harmoniques sphériques. En effet, les harmoniques sont dit zonaux lorsque  $m = 0$ , sectoriels quand  $|m| = n$  et tesseraux si  $0 < |m| < n$ .

### 1.3 Fonction radiale

Comme son nom l'indique, la fonction radiale est relative au rayon de la sphère considérée. Cette fonction est basée sur les fonctions de Bessel ou de Hankel sphériques (Voir annexe B pour plus d'informations sur ces fonctions). Les trois premières fonctions de Bessel sphériques de première et de seconde espèce sont représentées sur la figure 1.3.

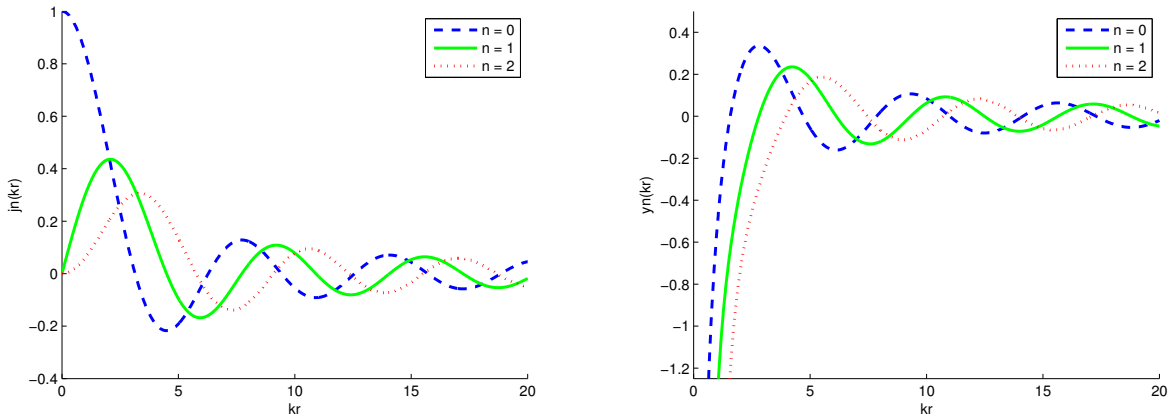


FIGURE 1.3 – Les trois premières fonctions de Bessel  $j_n$  et  $y_n$

Nous pouvons dès à présent remarquer que les harmoniques sphériques d'ordre élevé (et donc de plus grande variabilité angulaire) sont associées aux fonctions radiales dont le maximum apparait à de grandes distances, la résolution angulaire allant ainsi de paire avec l'expansion radiale. Nous pouvons aussi observer que la fonction  $j_n$  est la seule des quatre fonctions définies précédemment à être finie en  $kr = 0$ , ceci aura une certaine importance dans la partie suivante, lorsque nous évoquerons le "problème intérieur".

## 1.4 Le problème intérieur

Le problème intérieur peut être représenté par la figure 1.4. Dans le cadre de ce problème, les sources sonores sont situées à l'extérieur d'une sphère de rayon  $r_{max}$ . Nous cherchons à caractériser le champ sonore à l'intérieur de cette sphère qui constitue le domaine de validité. Dans la mesure où le domaine ne comprend pas de source sonore et où la fonction  $y_n$  n'est pas finie en  $kr = 0$ , le champ acoustique peut être caractérisé par

$$p(r, \theta, \phi, k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_n^m(k) j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi) . \quad (1.11)$$

En multipliant les deux membres de cette équation par  $Y_n^{m'}(\theta, \phi)^*$ , et en intégrant sur la surface d'une sphère de rayon  $r_d$  nous pouvons facilement utiliser la propriété d'orthogonalité des harmoniques sphériques (1.10) et ainsi trouver

$$b_n^m(k) = \frac{1}{j_n(kr_d)} \int \int p(r, \theta, \phi) Y_n^m(\theta, \phi)^* \sin \theta d\theta d\phi . \quad (1.12)$$

A partir de maintenant, et pour faciliter la lecture, nous omettrons de noter la dépendance des coefficients  $b_n^m$  au nombre d'onde  $k$ .

Si nous connaissons la pression acoustique sur l'une des sphère de rayon  $r_d \leq r_{max}$ , nous pouvons donc calculer les coefficients  $b_n^m$  et les réinjecter par la suite dans l'équation (2.2). Une fois les coefficients déterminés, il est donc possible d'obtenir la pression acoustique en tous points de notre domaine de validité.

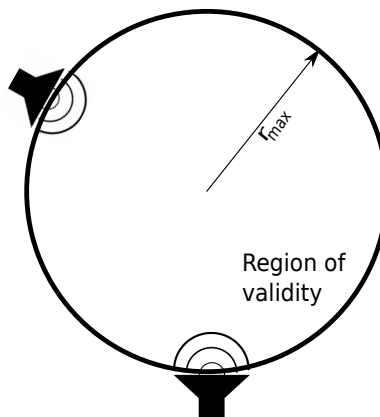


FIGURE 1.4 – Représentation du problème intérieur

## 1.5 Modèles de sources sonores dans le domaine des harmoniques sphériques

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, l'obtention des coefficients  $b_n^m$  suffit à décrire le champ sonore en présence. Via le principe de superposition acoustique, nous pouvons percevoir le champ acoustique global comme la somme des champs acoustiques associés à chaque source sonore. A chacune de ces sources correspond donc un jeu de coefficients  $b_n^m$ , ce dernier pouvant être déterminé analytiquement pour les deux modèles d'ondes sonores les plus typiques à savoir l'onde plane et l'onde sphérique.

Via les dérivations détaillées en [Zot09], nous avons en effet :

$$b_n^m = 4\pi i^n Y_n^m(\theta_s, \phi_s) \quad (1.13)$$

pour une onde plane, et :

$$b_n^m = -ikh_n^{(2)}(kr_s) Y_n^m(\theta_s, \phi_s) \quad (1.14)$$

pour une onde sphérique, avec  $(\theta_s, \phi_s, r_s)$  les coordonnées sphériques de la source sonore et  $i = \sqrt{-1}$ .

Dans les applications relatives au microphone sphérique, on considèrera souvent l'onde comme plane lorsque  $kr_s > 1$  [Zot09], cette approximation se justifie par la diminution de la courbure du front d'onde à mesure que la distance parcourue par celui-ci augmente.

# Chapitre 2

## Le microphone sphérique

Lors de la partie précédente, nous avons pu constater que la résolution du problème intérieur nous demandait de connaître la pression en tous points à la surface d'une sphère. En pratique, nous ne disposons pas de dispositif nous permettant d'obtenir ce type d'informations, nous pouvons au mieux élaborer, à partir d'un réseau de capsules microphoniques, un microphone sphérique nous permettant d'obtenir des valeurs de pression à sa surface en un ensemble fini de points. Dans cette partie, nous nous concentrerons sur le passage de la théorie à la pratique en étudiant les contraintes relatives à l'utilisation d'un microphone sphérique. Nous présenterons ainsi la version "discrète" de la transformée en harmonique sphérique puis nous étudierons en détail l'influence de la structure du microphone sur les résultats obtenus.

### 2.1 Transformée en harmoniques sphériques discrète

En pratique, nous discrétisons cette sphère et nous ne connaissons ainsi la pression à sa surface que sur un ensemble fini de points, ceci ayant pour effet de limiter l'ordre maximum de la décomposition à un nombre  $N$ . En notant :

$$\psi_{nm}(r) = b_n^m j_n(kr) , \quad (2.1)$$

Il vient alors

$$\hat{p}(r_0, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \psi_{nm}(r_0) Y_n^m(\theta, \phi) . \quad (2.2)$$

Le problème peut donc s'écrire sous la forme matricielle

$$\mathbf{p}_N = Y_N \boldsymbol{\psi}_N , \quad (2.3)$$



avec :

$$Y_N = \begin{bmatrix} y_{0,0}(\boldsymbol{\theta}_1) & y_{-1,1}(\boldsymbol{\theta}_1) & \dots & y_{N,N}(\boldsymbol{\theta}_1) \\ y_{0,0}(\boldsymbol{\theta}_2) & y_{-1,1}(\boldsymbol{\theta}_2) & \dots & y_{N,N}(\boldsymbol{\theta}_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{0,0}(\boldsymbol{\theta}_L) & y_{-1,1}(\boldsymbol{\theta}_L) & \dots & y_{N,N}(\boldsymbol{\theta}_L) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

$$\boldsymbol{\psi}_N = [\psi_{0,0} \quad \psi_{-1,1} \quad \dots \quad \psi_{N,N}]^T,$$

$$\mathbf{p} = [p(\boldsymbol{\theta}_1) \quad p(\boldsymbol{\theta}_2) \quad \dots \quad p(\boldsymbol{\theta}_L)]^T,$$

et en notant  $\boldsymbol{\theta}_l$  les coordonnées  $(\theta_l, \phi_l)$  de la  $l^{\text{ième}}$  capsule et  $L$  le nombre de capsules.

Afin de déterminer les coefficients  $\boldsymbol{\psi}_N$  à partir de  $\mathbf{p}_N$  il est donc nécessaire de procéder à une inversion de la matrice  $Y_N$ . La difficulté réside dans le fait que cette matrice est dans certains cas mal conditionnée, ceci empêchant une inversion directe. Afin de contourner ce problème nous utilisons la décomposition en valeurs singulières de  $Y_N$  :

$$Y_N = USV^T. \quad (2.6)$$

$S$  est une matrice diagonale comportant les valeurs singulières de  $Y_N$ , et  $U$  et  $V$  sont deux matrices orthogonales contenant respectivement les vecteurs singuliers de gauche et de droite. La diagonale de la matrice  $S$  peut être arrangée de manière à ce que ses valeurs soient organisées selon un ordre croissant, et nous pouvons tronquer la matrice  $S$  (et respectivement  $U$  et  $V$ ) de manière à ne garder que les  $K$  valeurs singulières significatives (les valeurs égales ou proches de zéro étant négligeables). En notant  $\tilde{S}$ ,  $\tilde{U}$  et  $\tilde{V}$  les matrices tronquées, nous pouvons écrire la pseudo inverse de la matrice  $Y_N$ , soit :

$$Y_N^\dagger = \tilde{V}\tilde{S}^{-1}\tilde{U}^T. \quad (2.7)$$

La solution du système d'équations linéaires peut enfin s'écrire

$$\tilde{\boldsymbol{\psi}}_N = Y_N^\dagger \mathbf{p}. \quad (2.8)$$

En fonction des dimensions de  $Y_N$ , et du nombre de valeurs singulières  $K$  retenues, nous pouvons remarquer trois situations distinctes [NZK09] :

- $K = (N + 1)^2 \leq L$  : "Transformée en harmoniques sphériques discrète" (DSHT), la pseudo-inverse procure une analyse en harmonique sphérique exacte.
- $K = L \leq (N + 1)^2$  : "Interpolation en harmoniques sphériques discrète" (DSHI), la pseudo-inverse agit comme un interpolateur, qui procure une représentation exacte des points de mesure.
- $K < \min[(N + 1)^2, L]$  : "Approximation en harmoniques sphériques discrète" (DSHA), l'inversion ne procure ni une transformation ni une interpolation exacte.

## 2.2 Discrétisation de la sphère

Afin d'obtenir une transformée en harmonique discrète avec un nombre minimal de points de mesures, il est nécessaire de maximiser  $K$ . Pour ce faire, la sphère doit être discrétisée de la manière la plus uniforme possible. Les solides de Platon (Fig. 2.1) discrétisent la sphère uniformément, cependant, ils ne sont que 5 et ont un nombre de sommets culminant à 20 pour le dodécaèdre.

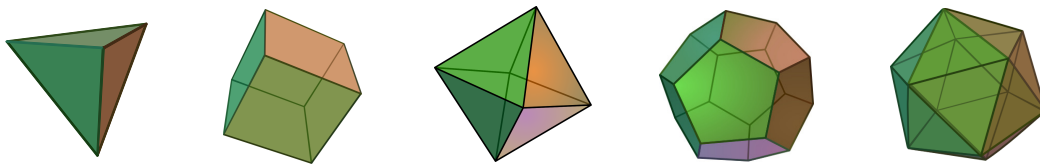


FIGURE 2.1 – Les 5 solides de Platon (extrait de [Wik07a])

20 points de mesure n'est pas un nombre suffisant si nous désirons travailler à des ordres d'harmoniques sphériques élevés, il est donc nécessaire de proposer des solutions alternatives. A cette fin, les méthodes suivantes sont souvent proposées [NZK09] :

- Extremal points for hyperinterpolation [SW03]
- Spiral points [RSZ94]
- Equal-area partition [SK97]
- HEAIPix [GHB<sup>+</sup>05]
- Gauss-Legendre scheme [Sne94]
- Equi-distant cylindrical grid [RSZ94]
- Equi-angle grid [DH94]

Tout ces schémas de discrétisation ont la possibilité de mettre en jeu un grand nombre de sommets, cependant, ils ne sont pas strictement uniformes. Aucune de ces méthodes n'est parfaite, il faudra donc choisir la solution optimale en fonction de nos attentes (DSHT ou DSHI).

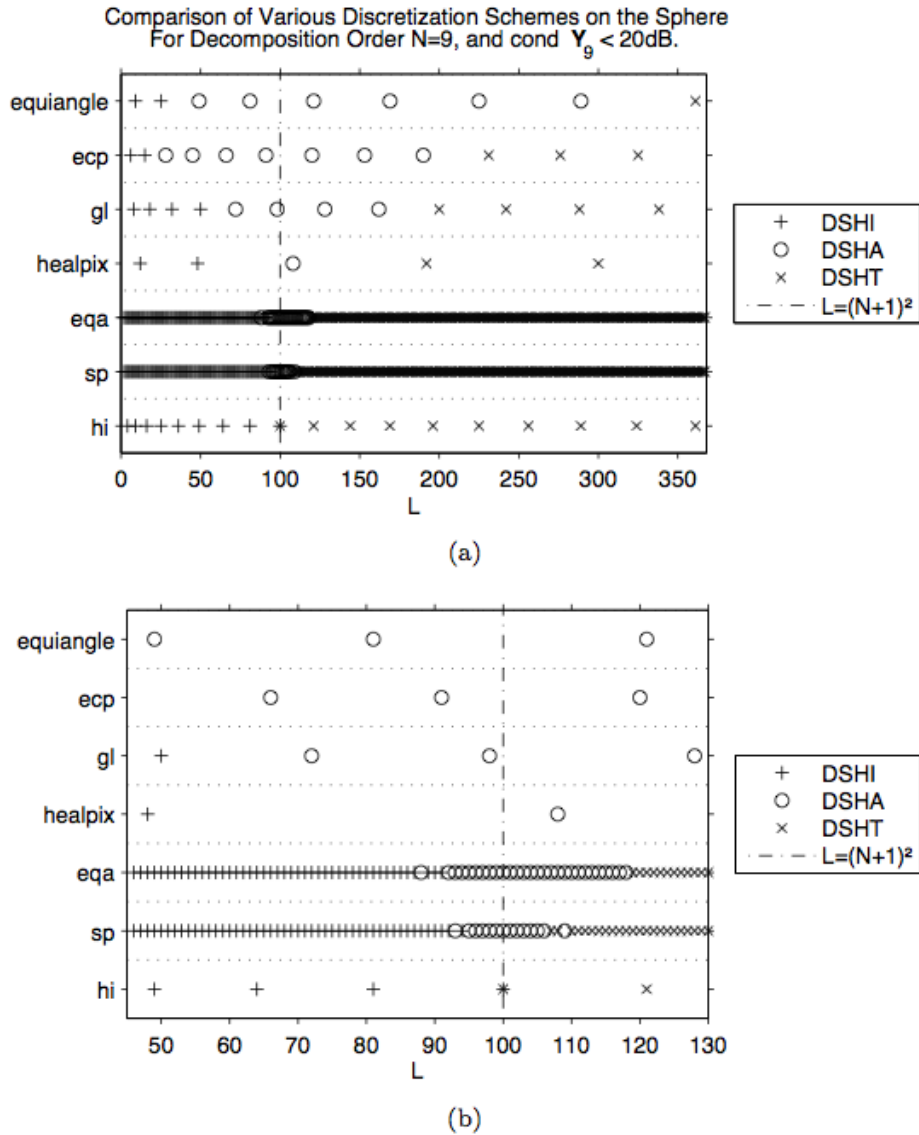


FIGURE 2.2 – Comparaison des divers schémas de discrétisation (Extrait de [NZK09])

La figure 2.2 étudie, pour une transformée à l'ordre 9, le type de résultat obtenu (DSHT, DSHI ou DSHA) en fonction du schéma de discrétisation utilisé et du nombre de points de discrétisation en jeu. Via l'observation de cette figure, nous pouvons remarquer que l'hyper-interpolation est le schéma permettant d'obtenir une DSHT avec le moins de points possible.

En effet, la DSHT est obtenue dès 100 points, ce qui correspond à  $(N + 1)^2$  (pour  $N = 9$ ) soit le minimum théorique. La DSHT étant l'objectif visé dans le cadre d'applications relatives au microphone sphérique, nous avons dans la suite de notre travail privilégié ce schéma en l'utilisant dans l'ensemble des simulations effectuées.

### 2.2.1 Hyperinterpolation

L'hyperinterpolation en tant que schéma de discrétisation sur la sphère est liée aux travaux se basant sur la théorie des systèmes extrêmes [SW01, SW03]. En considérant une sphère unité  $S^2$ ,  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d\}$  l'ensemble des points discrétisant la sphère, et  $\{\phi_1, \dots, \phi_{d_n}\}$  une base de  $d_n$  polynômes sphériques sur  $\mathbb{P}_n(S^r)$  (l'espace des polynômes sphériques de degré égal à  $n$  au plus), un système est dit extrême s'il est constitué de  $d_n$  points maximisant le déterminant de la matrice  $\phi_i(\mathbf{x}_j)_{i,j=1}^{d_n}$ .

Le problème de la discretisation de la sphère peut être vu comme la maximisation de la distance minimale entre les différents points de discretisation. Les travaux sur les systèmes extrêmes à la surface de la sphère cités précédemment ont abouti à un certain nombre de résultats, à savoir :

- La démonstration d'une distance géodésique minimum entre les points supérieure à  $\pi/(2n)$ .
- Une conjecture émettant l'hypothèse que cette distance minimum serait en réalité supérieure à  $\pi/n$ .
- La démonstration que la distance maximum entre un point et le point lui étant le plus proche n'est pas plus grande que  $\cos^{-1}(z_n)$ , avec  $z_n$  la plus grande racine de  $P_{n/2}$  et  $P_n$  le polynôme de Legendre d'ordre  $n$ .

Des algorithmes complexes ont été proposés afin de calculer des systèmes de points répondant à la définition d'un système extrême [RS85], une base de donnée est cependant disponible à l'adresse : <http://web.maths.unsw.edu.au/~rsw/Sphere/Extrema1/index.html>, les coordonnées des points de discretisation y étant disponibles pour des systèmes allant jusqu'à l'ordre 191.

## 2.3 Aliasing spatial

La discrétisation de la pression sonore à la surface de la sphère introduit une limite fréquentielle  $f_{al}$  supérieure dans l'estimation des coefficients spatiaux. Cette limitation est liée au critère de Shannon et nous parlons donc d'aliasing spatial, la fréquence d'aliasing pouvant être définie par [BDM06] :

$$f_{al} = \frac{c}{2R\gamma} , \quad (2.9)$$

avec  $c$  la vitesse de propagation des ondes acoustiques dans le milieu considéré,  $R$  le rayon de la sphère microphonique et  $\gamma$  l'angle maximum entre les différents capteurs.

Une fois la transformée en harmoniques sphériques effectuée, cette limitation a pour effet de replier les composantes spatiales dont la description nécessite un ordre élevé (supérieur à l'ordre de troncation) à des ordres inférieurs [RWB07].

## 2.4 Configuration de la sphère

### 2.4.1 Sphère ouverte à microphones omnidirectionnels

Les aspects théoriques développés dans la partie précédentes considéraient des mesures de la pression idéale en des points infinitésimalement petits, ceci de manière à ce que la mesure ne perturbe aucunement le champ sonore en présence. En pratique, afin de se rapprocher le plus possible de cette situation idéale, l'approche naturelle consisterait à utiliser des microphones à pression (omnidirectionnels) disposés sur une sphère vide.

Nous pouvons d'ores et déjà souligner qu'en réalité les microphones à pression ne sont pas parfaitement omnidirectionnels (surtout en haute fréquence), qu'ils sont sujets à un bruit thermodynamique, et que de par leur taille, ils perturbent le champ sonore et mesurent la pression acoustique en un volume fini.

Un microphone sphérique ouvert à microphones omnidirectionnels est soumis à la relation [BR07] :

$$\chi_n^m(kr_d) = \psi_n^m(kr_d) = b_n^m j_n(kr_d) , \quad (2.10)$$

avec  $\chi_n^m(kr_d)$  égale à la DSHT des valeurs mesurées en sortie des microphones et  $\psi_n^m(kr_d)$  équivalente à la pression dans le domaine des harmoniques sphériques.

Afin de retrouver les coefficients  $b_n^m$  il est donc nécessaire de procéder à une inversion de la fonction de Bessel. Cette opération de filtrage inverse pose en pratique des problèmes lorsque  $kr_d$  est égale à l'une des racines de  $j_n(kr)$ . C'est une limitation majeure dans la mesure où elle réduit les bandes de  $kr$  exploitables à celles ne contenant pas de racines de fonctions de Bessel. Nous utiliserons la terme "fonction holographique" pour qualifier la composante dépendante du rayon d'évaluation, il s'agit ici de  $j_n(kr_d)$ , le filtre holographique étant différent suivant la configuration du microphone sphérique, les différentes possibilités seront résumées en 2.4.8. Au delà de l'impossibilité d'une division par zéro, notons aussi que ce filtrage peut impliquer de très fortes amplifications, notamment en basses fréquences pour les ordres élevés et au voisinage des racines des fonctions de Bessel. La figure 2.3 indique la nécessité d'une amplification de plus de 70dB à 100Hz pour  $N = 2$ , ceci étant démesuré en situation réelle à cause du bruit thermodynamique auquel sont soumis les microphones. Nous étudierons dans les parties suivantes les solutions possibles à ce problème.

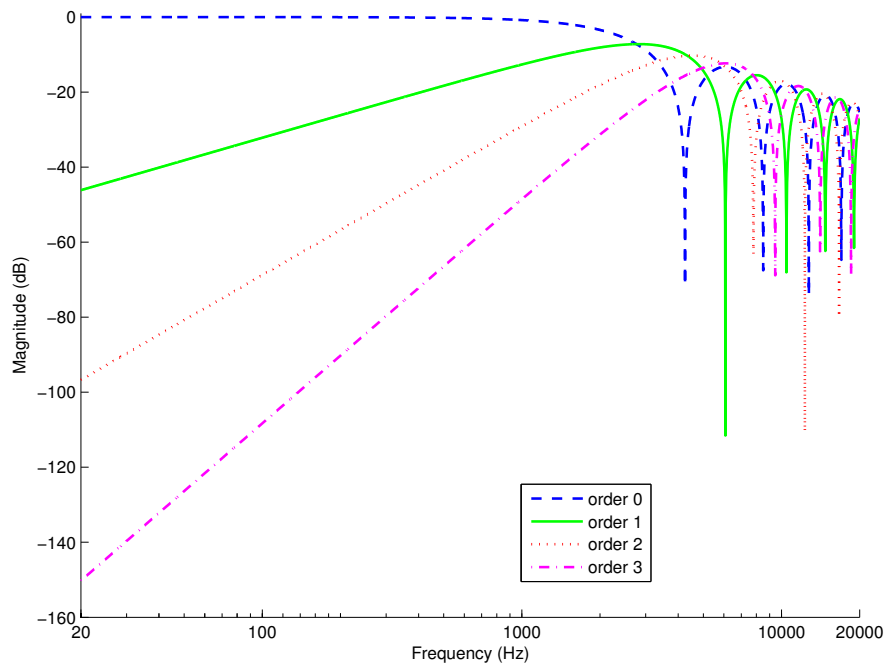


FIGURE 2.3 – Filtre holographique d'une sphère ouverte pour  $n$  allant de 0 à 3

## 2.4.2 Omission des bandes fréquentielles inexploitable

Cette solution a été proposée par Abhyapala [Abh08], elle consiste à ne calculer les coefficients que sur les bandes de fréquences ne faisant pas intervenir les racines des différentes fonctions de Bessel, pour retrouver par la suite les valeurs omises par extrapolation. Pour ce faire, Abhyapala propose le développement des coefficients  $b_n^m(k)$  via des séries de Fourier-Bessel, de cette manière

$$b_n^m(k) = \sum_{l=1}^{\infty} k r_d a_{nml} j_n \left( \frac{z_{nl}}{k_u} k \right) , \quad (2.11)$$

avec  $a_{nml}$  les coefficients du développement en série de Fourier-Bessel,  $z_{nl}$  la  $l^{\text{ième}}$  racine de la fonction de Bessel d'ordre  $n$  et  $0 < k < k_u$  la bande de fréquence considérée.

En disposant d'un nombre suffisant d'échantillons fréquentiels  $q$  permettant d'éviter le voisinage de l'une des racines des fonctions de Bessel, nous pouvons utiliser la relation :

$$a_{nml} \approx \frac{2}{k_u^3 j_{n+1}^2(z_l)} \sum_{q=1}^Q b_n^m(k_q) j_n \left( \frac{z_{nl}}{k_u} k_q \right) k_q^2 \Delta k_q , \quad (2.12)$$

avec  $\Delta k_q$  l'intervalle fréquentiel entre le  $q^{\text{ième}}$  et le  $q^{\text{ième}} + 1$  échantillon. Nous avons donc obtenu les coefficients du développement en série de Fourier-Bessel qui, une fois réinjectés dans (2.11) permettent de calculer les coefficients  $b_n^m$  pour tout  $k$ .

## 2.4.3 Sphère ouverte à microphones cardioïdes

Une autre solution consiste à s'écarter du modèle initial en utilisant des microphones cardioïdes (ordre 1) plutôt que des microphones omnidirectionnels (ordre 0). Nous obtenons donc en sortie du microphone une combinaison de la vitesse et de la pression acoustique au point de mesure ce qui nous donne, avec  $\nu_n^m(kr_d)$  la vitesse dans le domaine des harmoniques sphériques, la relation [BR07] :

$$\chi_n^m(kr_d) = \psi_n^m(kr_d) - \rho_0 c \nu_n^m(kr_d) = b_n^m [j_n(kr_d) - i j_n'(kr_d)] . \quad (2.13)$$

La différence entre la fonction de Bessel et sa dérivée ne s'annulant pas, une division de  $\chi_n^m(kr_d)$  par cette différence est donc tout à fait faisable numériquement, ceci nous permettant d'accéder aux coefficients  $b_n^m$ . Le problème de cette configuration réside dans le choix même du microphone d'ordre 1, qui de par sa construction plus complexe s'écarte davantage du microphone idéal (Rapport Signal/Bruit (RSB) plus élevé, directivité variant drastiquement

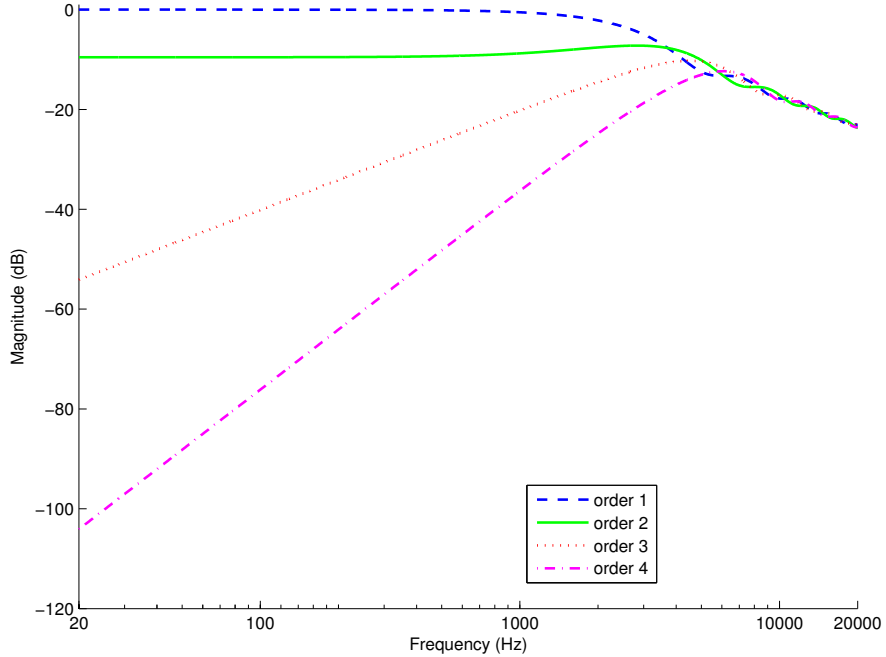


FIGURE 2.4 – Filtre holographique d’une sphère ouverte à microphones cardioïdes pour  $n$  allant de 0 à 3

avec la fréquence). L’obtention de microphones de bonne qualité demanderait un investissement financier plus important que dans les cas de microphones omnidirectionnels, ce qui est un paramètre à prendre en compte dans le cas d’un microphone d’ordre supérieur constitué de plusieurs dizaines de capsules.

#### 2.4.4 Sphère fermée à microphones omnidirectionnels

Nous pouvons aussi, en violant les conditions du problème intérieur, placer les microphones autour d’une sphère rigide, il s’agit de l’approche proposée dans [Ple09]. Nous nous retrouvons ainsi dans une configuration hybride entre problème intérieur et problème extérieur. Les effets de diffraction dus à la sphère peuvent cependant être pris en compte en utilisant, avec  $r_k$  le rayon du noyau sphérique rigide, la relation [BR07] :

$$\chi_n^m(kr_d) = \psi_n^m(kr_d) = b_n^m \left[ j_n(kr_d) - \frac{j_n'(kr_k)}{h_n^{(2)'}(kr_k)} h_n^{(2)}(kr_d) \right]. \quad (2.14)$$

Ici encore, l’inversion ne pose plus de problème car les deux seuls zéro interviennent en



$kr = 0$  et  $kr = \infty$ . De plus, les effets de diffraction dus à la présence physique du dispositif sont ici pris en compte par le modèle. Ceci n'est pas le cas pour la configuration avec sphère ouverte où la simple présence des capsules et de l'armature les soutenant engendrera des effets de diffraction non négligeables en haute fréquence

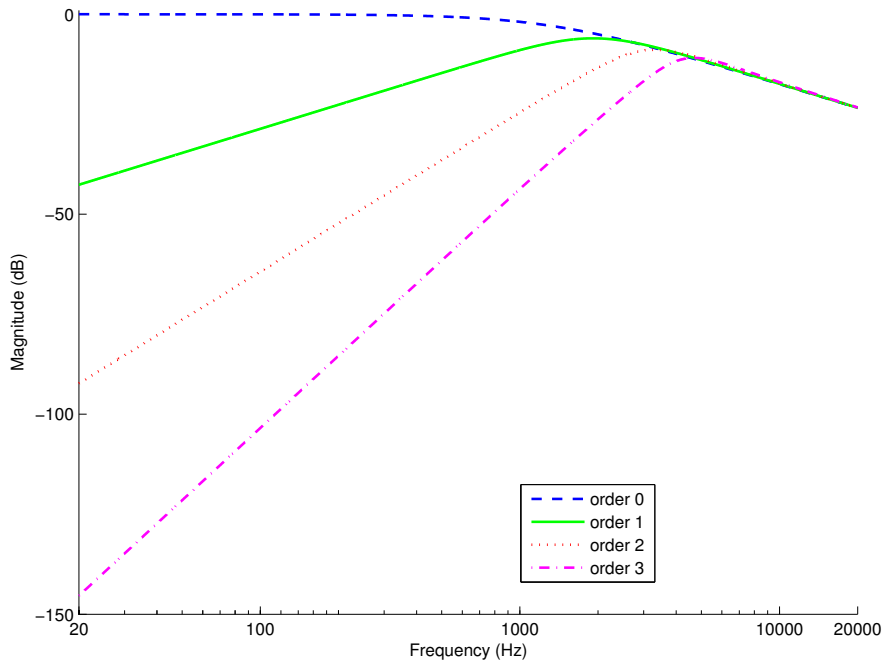


FIGURE 2.5 – Filtre holographique d'une sphère fermée à microphones omnidirectionnels pour  $n$  allant de 0 à 3

Certaines limitations doivent cependant être soulignées, les réflexions à la surface de la sphère rigide sont certes prises en compte dans le calcul du champ sonore, mais des artefacts peuvent apparaître si ces réflexions viennent à se refléter une seconde fois à la surface d'un des obstacles présents dans la pièce et sont enregistrées de nouveau par les microphones. Pour une majorité d'applications, ces artefacts sont négligeables (à condition que la sphère soit de rayon suffisamment petit), mais si le but de l'enregistrement est d'effectuer une mesure précise du champ sonore dans un contexte scientifique, ces derniers doivent être pris en considération.

Une autre limitation réside dans le fait qu'en pratique la sphère utilisée ne sera pas parfaitement rigide, et l'approximation faite par ce modèle risque de grandir au fur et à mesure que nous descendons dans les basses fréquences. Afin de palier à ce problème, l'une des solutions

pourrait être d'intégrer l'impédance du matériau constituant la sphère dans notre dernière relation. En comparant les figures 2.4 et 2.5, nous pouvons aussi remarquer que cette configuration impose une amplification légèrement plus forte en basses fréquences. Il s'agirait donc d'étudier le compromis entre l'amplification plus faible d'une sphère à capsules cardioïdes, et la qualité globalement meilleure des composants constituant la sphère microphonique rigide à capsules omnidirectionnelles.

### 2.4.5 Sphère fermée à microphones cardioïdes

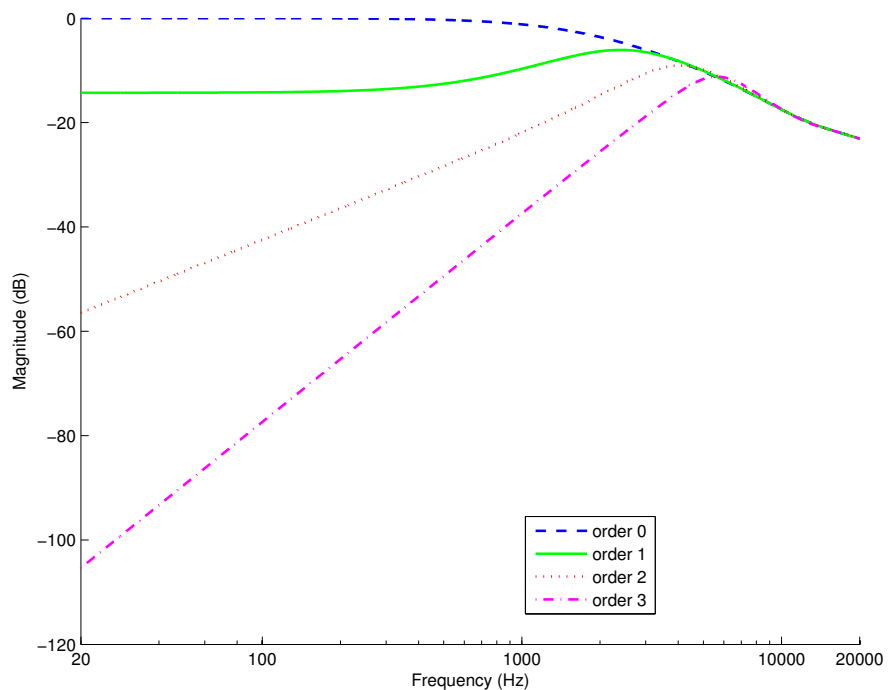


FIGURE 2.6 – Filtre holographique d'une sphère fermée à microphones cardioïdes pour  $n$  allant de 0 à 3

Cette configuration est une combinaison des deux précédentes, il est évident que dans ce cas le rayon de la sphère microphonique doit être plus grand que le rayon de la sphère rigide afin que l'arrière des capsules cardioïdes ne soit pas encastré dans la sphère. En effet, ceci ferait perdre aux capsules leur directivité dans la mesure où les microphones cardioïdes tirent cette dernière d'une ouverture à l'arrière de leur capsule. Cette configuration induit la

relation [BR07] :

$$\chi_n^m(kr_d) = [j_n(kr_d) - ij'_n(kr_d) + (ih_n^{(2)'}(kr_d) - h_n^{(2)}(kr_d)) \frac{j'_n(kr_k)}{h_n^{(2)'}(kr_k)}] b_{mn} . \quad (2.15)$$

Nous pouvons en quelque sorte considérer cette configuration comme hybride entre la configuration à sphère rigide et celle à capsules cardioïdes. En étudiant l'équation (2.15) nous pouvons remarquer que celle-ci devient égale à l'équation (2.10) dans le cas où  $r_k = r_d$ , ceci confirme mathématiquement le fait que les capsules deviennent quasi omnidirectionnelles si ces dernières sont encastrées dans la sphère rigide. Inversement, un noyau rigide suffisamment petit devant la sphère de mesure et la longueur d'onde considérée serait négligeable, ce qui aurait pour conséquence de nous faire tendre vers une configuration à sphère ouverte.

### 2.4.6 Double sphère

Comme nous avons pu le remarquer précédemment, la configuration comportant une sphère vide n'est utilisable que sur une bande de fréquence réduite où aucune des fonctions de Bessel en jeu n'est susceptible de s'annuler. Afin de remédier à ce problème tout en gardant le design d'une sphère vide, l'une des solutions est d'utiliser plusieurs sphères microphoniques concentriques mais de rayon différent [BR07]. En effet, les racines de  $j_n(kr)$  se situant à des fréquences dépendantes du rayon de la sphère considérée, si le ratio entre les deux rayons est bien choisi, nous disposerons toujours d'au moins une mesure correcte quelle que soit la fréquence. Nous introduisons pour ce faire le paramètre de sélection suivant (avec  $\alpha$ , le ratio entre le rayon des deux sphères) :

$$\beta_n(kr) = \begin{cases} 0, & \text{si } |j_n(kr)| \geq |j_n(\alpha kr)| \\ 1, & \text{si } |j_n(kr)| < |j_n(\alpha kr)| \end{cases}$$

Via l'intermédiaire de ce paramètre nous pouvons maintenant écrire :

$$\chi_n^m(kr_d) = [(1 - \beta_n(kr_d))j_n(kr_d) + \beta_n(kr_d)j_n(\alpha kr_d)] b_n^m \quad [\text{BR07}]. \quad (2.16)$$

Une grande attention doit cependant être portée dans le choix des deux rayons afin que les fonctions de Bessel ne s'annulent qu'en des zones fréquentielles strictement différentes. Plusieurs travaux dédiés à l'optimisation du paramètre  $\alpha$  ont d'ores et déjà vu le jour et une

valeur optimale de 1,2 a été proposée dans [BR07], cette valeur a été conservée dans l'ensemble des simulations que nous avons effectuées mettant en jeu une double sphère ouverte.

La figure 2.8 indique certains des résultats obtenus par le biais d'une simulation visant à étudier les bénéfices d'une telle méthode. Nous simulons dans un premier temps la réponse de deux microphones sphériques concentriques soumis au champ sonore d'une source ponctuelle  $C$ , le bruit thermodynamique des capsules étant reproduit par l'ajout d'un bruit blanc gaussien. Nous disposons à l'issue de cette simulation de deux jeux de coefficients  $b_n^m$  dont nous calculons l'erreur par rapport à la solution analytique donnée par le modèle d'une source ponctuelle décrit par l'équation (1.14). Les deux premières courbes de la figure 2.8 nous permettent de visualiser l'erreur à l'ordre 0 en fonction de la fréquence pour chaque sphère, nous pouvons notamment y visualiser les extremums de cette erreur au voisinage des racines des fonctions de Bessel. La troisième courbe conserve pour chaque fréquence l'information issue de la sphère bénéficiant du meilleur rapport signal bruit, nous observons qu'il est ainsi possible d'amoindrir le niveau du bruit sur une large bande de fréquences.

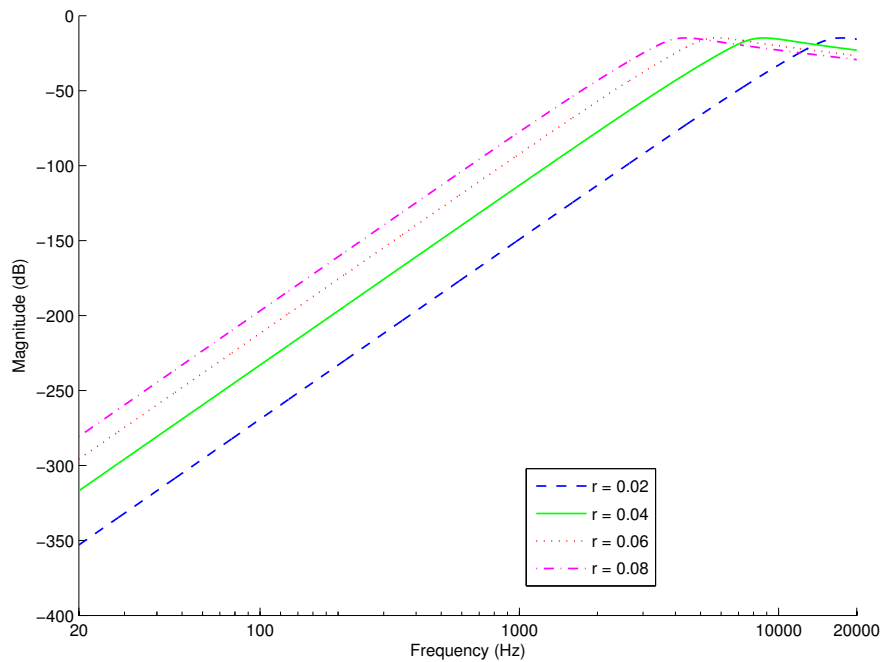


FIGURE 2.7 – Filtre holographique d'une sphère fermée pour des sphères microphoniques de différents rayons

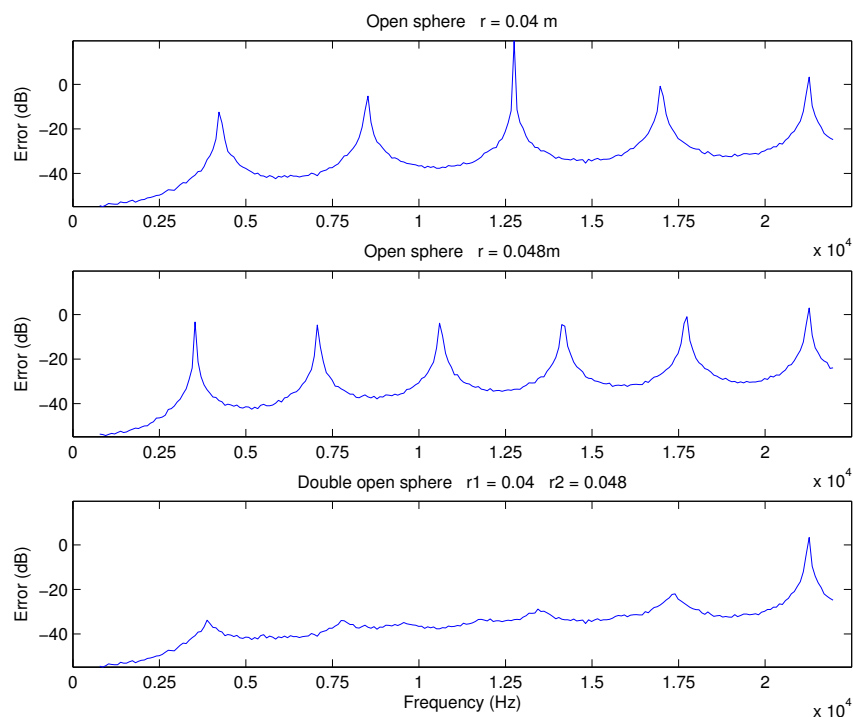


FIGURE 2.8 – Illustration des bénéfices de la méthode basée sur l’utilisation d’une double sphère. Les deux premières figures représentent l’erreur en dB sur l’estimation des coefficients spatiaux pour des sphères de rayon différent, la dernière figure représente l’erreur en dB lorsque les informations issues des deux sphères sont recoupées.

### 2.4.7 Double sphère rigide-ouverte

La figure 2.7 permet de visualiser les filtres holographiques correspondant à des sphères fermées de différent rayon. Nous pouvons remarquer que l’amplification exigée par ces filtres augmente à mesure que nous descendons en basses fréquences et qu’une sphère de rayon réduit exige une plus forte amplification dans les basses fréquences qu’une sphère de rayon plus important. Les microphones étant notamment soumis à un bruit thermodynamique, nous avons précédemment pu souligner la nécessité d’éviter les trop fortes amplifications. Il existe donc une limite fréquentielle inférieure à partir de laquelle il n’est plus possible d’obtenir des coefficients avec une assez grande fidélité, cette limite inférieure descendant à mesure que le rayon de la sphère augmente.

Par ailleurs, nous avons aussi mentionné la relation déterminant la fréquence d’aliasing

spatial (2.9), cette fréquence étant inversement proportionnelle au rayon de la sphère. Il existe donc deux limites fréquentielles, une inférieure et une supérieure, toutes deux dépendantes du rayon de la sphère. Une sphère de rayon important sera donc plus adaptée aux basses fréquences, et une sphère de petit rayon sera plus adaptée aux fréquences élevées.

Le dispositif proposé en [JPvS06] réside dans l'utilisation de deux sphères de rayon différent ayant pour centre un noyau rigide. La plus petite des deux sphères est ainsi utilisée afin d'obtenir les coefficients aux fréquences les plus élevées, et inversement, la plus grande des sphères est utilisée en basses fréquences. Il est ainsi possible d'étendre globalement la bande de fréquences sur laquelle le microphone sphérique reste opérationnel.

## 2.4.8 Résumé sur les filtres holographiques

Afin de faciliter la lecture dans la suite de ce travail, nous pouvons introduire la fonction  $Holo_n(r_k, r_d, k)$ , cette dernière représente génériquement le filtre holographique. Comme nous avons pu le voir, le filtre holographique est dépendant du type de microphone sphérique utilisé, pour résumer :

$$\Xi_n(r_k, r_d, k) = \begin{cases} j_n(kr_d), & \text{ouverte omni.} \\ j_n(kr_d) - ij'_n(kr_d), & \text{ouverte cardio.} \\ j_n(kr_d) - \frac{j'_n(kr_k)}{h_n^{(2)}(kr_k)} h_n^{(2)}(kr_d) & \text{fermée omni.} \\ j_n(kr_d) - ij'_n(kr_d) + (ih_n^{(2)}(kr_d) - h_n^{(2)}(kr_d)) \frac{j'_n(kr_k)}{h_n^{(2)}(kr_k)} & \text{fermée cardio.} \end{cases} \quad (2.17)$$

## 2.5 Commutation de l'ordre

Dans la section précédente, nous avons mis en évidence que l'estimation des coefficients spatiaux obtenus via un microphone sphérique était optimale en une bande de fréquences donnée. Cette bande de fréquences est entre autre dépendante de l'ordre de la décomposition, comme nous pouvons le constater sur les figures 2.3 2.4 2.5 2.6 , l'amplification en basses fréquences exigée par les filtres holographiques est de plus en plus forte à mesure que l'ordre augmente.

La figure 2.9 nous permet quant à elle de visualiser l'évolution des fonctions de Bessel de première espèce en fonction de leur ordre pour  $kr = (2, 10, 20)$ . Nous nous apercevons que ces fonctions décroissent de manière exponentielle pour  $n > kr$  après avoir oscillé pour  $0 < n < kr$ . En replaçant cette observation dans le cadre de la description dans le domaine des harmoniques de l'onde plane ainsi que de l'onde sphérique données précédemment (1.14) (1.13), nous pouvons en conclure que les composantes spatiales significatives sont bornées par  $n \leq kr$ .

Fort des deux remarques précédentes il est donc possible d'émettre l'idée selon laquelle de meilleurs résultats pourraient être obtenus en considérant un ordre de décomposition particulier pour chaque bande de fréquences. A cette fin, la règle informelle suivante a été proposée [DZG04] :

$$n = \lfloor kr \rfloor + 1 . \quad (2.18)$$

Cette méthode reste cependant à améliorer car des artefacts sont pour l'instant observables lorsque deux bandes de fréquences adjacentes sont traitées avec des ordres de décomposition distincts. Afin de résoudre ce problème, certaines pistes devront dans le futur être explorées, nous pourrions par exemple effectuer des fondus enchainés entre les bandes fréquentielles afin de lisser les transitions.

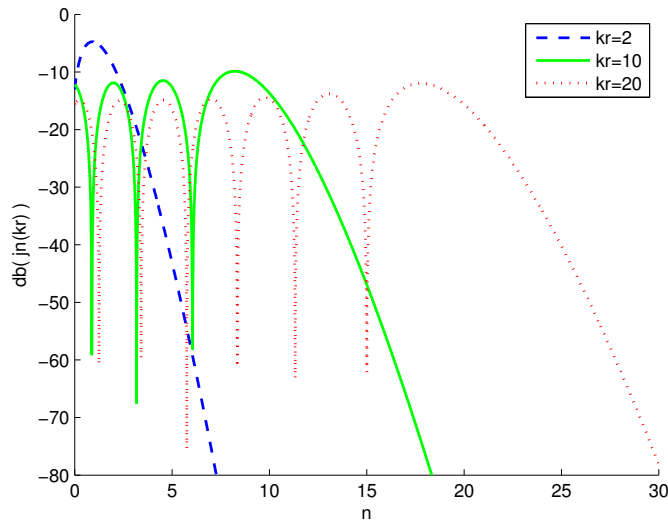


FIGURE 2.9 – Fonctions de Bessel en fonction de l'ordre

# Chapitre 3

## Opérations dans le domaine des harmoniques sphériques

Dans cette partie, nous étudierons certaines opérations pouvant être effectuées dans le domaine des harmoniques sphériques à savoir l'interpolation, l'extrapolation, la translation, la rotation et le contrôle de la directivité. Nous présenterons tout d'abord la théorie relative à ces opérations puis nous présenterons les résultats de simulations visant à estimer l'erreur induite par rapport au résultat escompté.

### 3.1 Interpolation

L'une des opérations les plus simples à effectuer à partir des valeurs fournies par les différents capteurs à la surface de la sphère est une opération d'interpolation. Il est ainsi possible d'obtenir des valeurs de même nature que celles issues des capteurs, ceci en tous points sur la sphère de mesure.

Soit  $g(\theta_l, \phi_l)$ , avec  $l = 1, \dots, L$ , une fonction à la surface de notre microphone sphérique discrétisée par les  $L$  capsules constituant notre dispositif. Nous pouvons à partir de ces données calculer une transformée en harmoniques sphériques discrète

$$\chi_n^m = DSHT_N(g(\theta_l, \phi_l)) , \quad (3.1)$$

nous avons ainsi accès aux coefficients  $\chi_n^m$  pour  $n = 0, \dots, N$  et  $m = -n, \dots, n$ . En effectuant



une transformé en harmoniques sphériques discrète inverse, à savoir :

$$g(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \chi_n^m Y_n^m(\theta, \phi) , \quad (3.2)$$

nous obtenons désormais une version continue mais à résolution spatiale limitée de  $g$ .

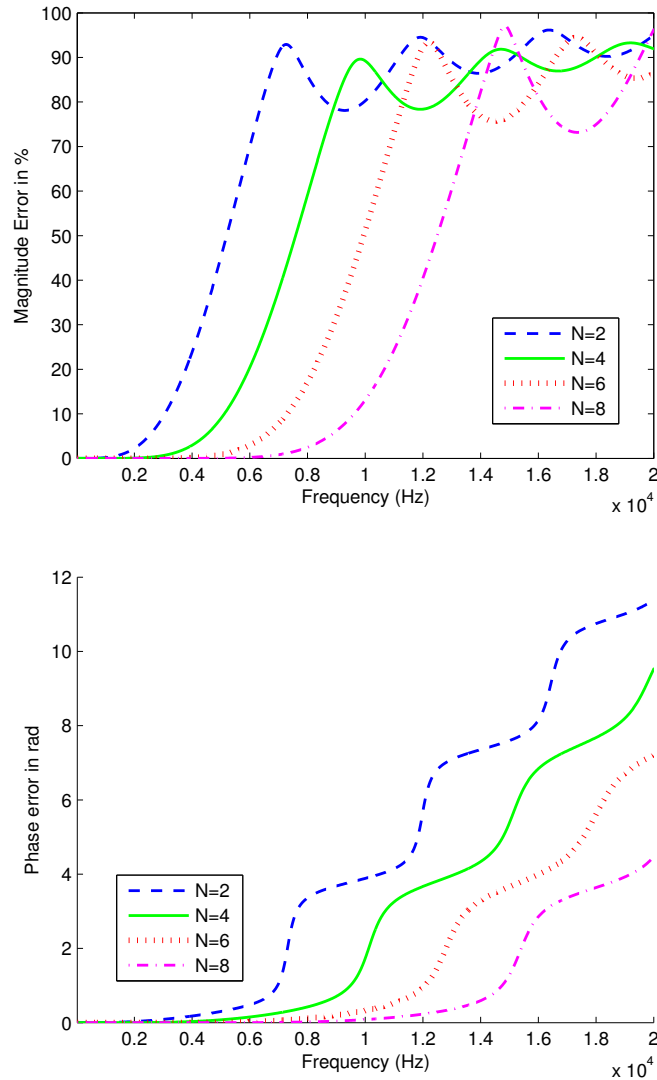


FIGURE 3.1 – Erreur de recomposition en fonction de la fréquence pour un microphone sphérique de rayon égal à 4 cm

En d'autres termes, le procédé décrit précédemment met en oeuvre une décomposition puis une recomposition sur la sphère. Les figures présentes en 3.1 sont issues d'une simulation permettant de comparer l'erreur entre la fonction recomposés et la fonction exacte en un point à la surface de la sphère. Ces simulations ont été effectuées avec une sphère ouverte de rayon

égal à 0.04 m et une fréquence d'échantillonnage de 96 kHz. Le schéma de discrétisation choisi fut le schéma d'Hyperinterpolation d'ordre 15 (256 capsules), nous avons volontairement suréchantillonné spatialement la sphère afin de minimiser les effets d'aliasing et nous avons omis de simuler le bruit thermodynamique relatif aux capsules microphoniques, ces précautions ont été prises afin de pouvoir observer l'influence de l'ordre de la décomposition sur l'opération d'interpolation dans des conditions idéales. Nous pouvons par ce biais observer la nature des dégradations relatives à une limitation de l'ordre dans le domaine des harmoniques sphériques, il y a effectivement une altération des résultats à mesure que la fréquence augmente et que l'ordre de troncation diminue. L'expression de la source ponctuelle en coordonnées cartésiennes donnée en C a été utilisée afin de calculer la réponse impulsionnelle relative à chaque capsule et a aussi servi de référence afin de calculer l'erreur de recombinaison.

## 3.2 Extrapolation

Si l'opération d'interpolation nous permet d'obtenir des valeurs à la surface de notre microphone sphérique entre les différents points de mesure, une extrapolation nous permettrait de nous désolidariser de la surface de la sphère pour obtenir des valeurs de pression en tous points dans un volume donné. L'opération d'extrapolation que nous allons tenter de décrire est en grande partie basée sur la résolution du problème intérieur, ceci dit, nous nous inscrivons ici dans un contexte pratique lié à l'utilisation d'un microphone sphérique et prenant en compte les diverses structures dont il peut être issu.

Il est dans un premier temps nécessaire de compenser les coefficients spatiaux  $\chi_n^m$  obtenus en fonction du rayon et de la structure du microphone sphérique utilisé. Cette compensation peut être résumée par l'opération de filtrage inverse

$$b_n^m(k) = \frac{\chi_n^m(k)}{\Xi_n(r_k, r_d, k)} . \quad (3.3)$$

Ce filtrage nous donne accès aux coefficients  $b_n^m$  pouvant enfin être injectés dans

$$p(\theta, \phi, r, k) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n b_n^m(k) j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi) , \quad (3.4)$$

Avec  $p(\theta, \phi, r, k)$  la pression dans un domaine de validité semblable à celui en jeu dans le cas du problème intérieur, à savoir, la plus grande sphère concentrique à la sphère de mesure ne contenant pas de sources sonores.

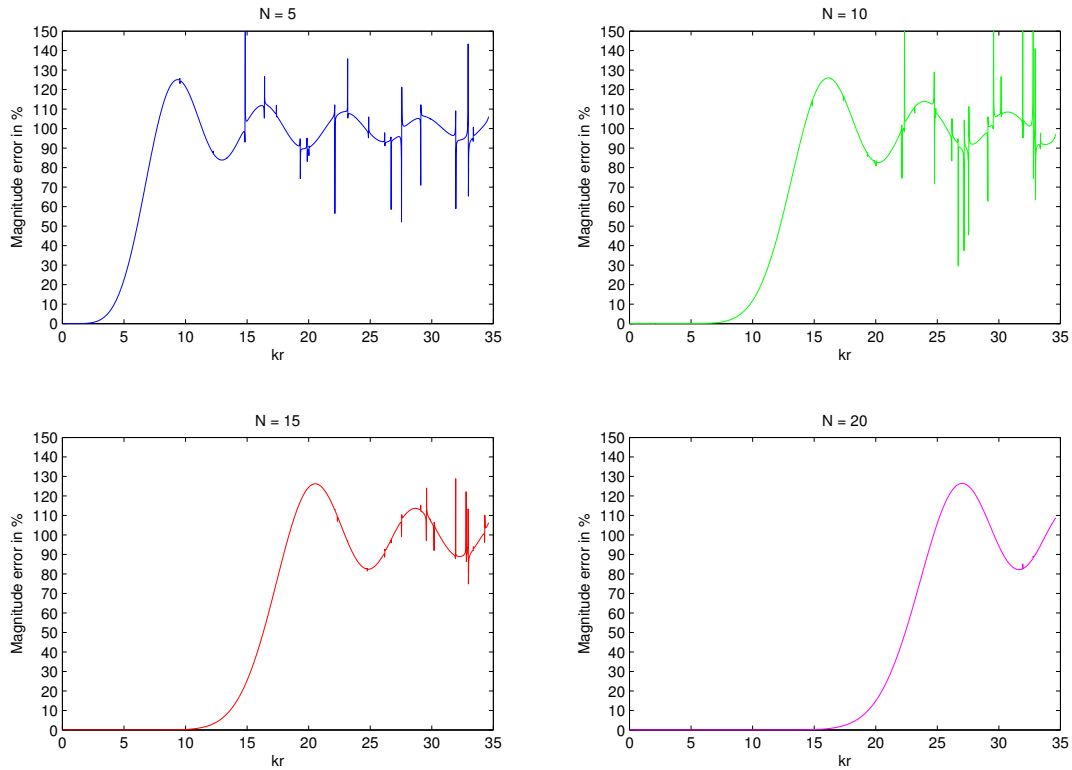


FIGURE 3.2 – Erreur d’extrapolation pour des ordres de troncation de 5, 10, 15 et 20

La figure 3.2 est issue d’une simulation dédiée à l’évaluation des erreurs induites lors d’une extrapolation. Ces simulations ont été effectuées avec une sphère ouverte de rayon égal à 0.04 m et une fréquence d’échantillonnage de 96 kHz. Le schéma de discrétisation choisi fut le schéma d’Hyperinterpolation d’ordre 25 (676 capsules), nous avons volontairement suréchantillonné spatialement la sphère afin de minimiser les effets d’aliasing et nous avons omis de simuler le bruit thermodynamique relatif aux capsules microphoniques, ces précautions ont été prises afin de pouvoir observer l’influence de l’ordre de la décomposition sur l’opération d’extrapolation dans des conditions idéales. L’expression de la source ponctuelle en coordonnées cartésiennes donnée en C a été utilisée afin de calculer la réponse impulsionnelle relative à chaque capsule et a aussi servi de référence afin de calculer l’erreur de recomposition.

Le microphone sphérique utilisé étant de type ouvert, nous pouvons remarquer des pics d’erreurs correspondant à une division par 0 occasionnée par les fonctions de Bessel. Le facteur  $r$  n’étant plus fixé comme dans le cas de l’interpolation, il est nécessaire de considérer

la dépendance du terme  $j_n(kr)$  (issu de (3.4)) au produit du nombre d'onde et du rayon d'extrapolation. La limite fréquentielle supérieure soulignée dans la section précédente est ainsi relative au rayon d'extrapolation, un compromis devant être trouvé entre des valeurs de  $k$  et de  $r$  élevées, ceci afin de minimiser l'erreur lors de la recombinaison.

### 3.3 Translation

Lors des parties précédentes, nous avons considéré pour les raisons de simplicité l'origine du repère comme point de référence. Nous pouvons en réalité considérer tout autre point de l'espace comme centre de décomposition. Nous introduisons pour ce faire la notation suivante :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_n^m R_n^m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_*) , \quad (3.5)$$

avec

$$R_n^m = j_n(kr) Y_n^m(\theta, \phi) , \quad (3.6)$$

et  $\mathbf{r}_*$  le centre de décomposition.

En considérant les points  $\mathbf{r}_{*1}$  et  $\mathbf{r}_{*2}$  comme deux centres de décomposition distincts, nous obtenons alors

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_n^m(\mathbf{r}_{*2}) R_n^m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{*1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_n^m(\mathbf{r}_{*2}) R_n^m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{*2}) . \quad (3.7)$$

Dès lors, la question de la translation se pose, comment connaître les coefficients d'une décomposition en un point de l'espace à partir des coefficients connus en un autre point ? En supposant que l'on puisse décomposer  $R_n^m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{*1})$  en prenant comme base  $R_n^m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{*2})$ , il vient

$$R_n^m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{*1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (R|R)_{n'n}^{m'm} R_n^m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{*2}) . \quad (3.8)$$

Via la dernière équation, nous pouvons successivement modifier l'expression du champ de

pression centré sur  $\mathbf{r}_{*1}$  de la manière suivante :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_n^m(\mathbf{r}_{*1}) R_n^m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{*1}) , \quad (3.9)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_n^m(\mathbf{r}_{*1}) \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (R|R)_{n'n}^{m'm} R_n^m(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{*2}) , \quad (3.10)$$

$$= \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (R|R)_{n'n}^{m'm} b_n^m(\mathbf{r}_{*1}) \right] R_{n'}^{m'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{*2}) . \quad (3.11)$$

Enfin, en intervertissant  $n'$  et  $n$  ainsi que  $m'$  et  $m$  dans l'équation (3.11) puis en comparant le résultat obtenu à l'équation (3.7) nous obtenons

$$b_n^m(\mathbf{r}_{*2}) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (R|R)_{nn'}^{mm'} b_{n'}^{m'}(\mathbf{r}_{*1}) . \quad (3.12)$$

Les coefficients  $(R|R)_{nn'}^{mm'}$  sont de par leur fonction appelés coefficients de translation, et sont suffisants pour déterminer les coefficients d'une décomposition centrée en un point à partir des coefficients d'une décomposition centrée en un autre point. En regardant les équations précédentes, il est aisé de constater que les coefficients de translation sont dépendants des centres de décompositions  $\mathbf{r}_{*1}$  et  $\mathbf{r}_{*2}$ , cette dépendance n'est cependant pas liée aux valeurs particulières de  $\mathbf{r}_{*1}$  et  $\mathbf{r}_{*2}$  mais plutôt à leur différence  $\mathbf{t} = \mathbf{r}_{*2} - \mathbf{r}_{*1}$ .

### 3.3.1 Calcul direct des coefficients

Les coefficients de translation peuvent être déterminés directement par leur expression. Sans rentrer dans les détails, les coefficients de translation peuvent à leur tour être décomposés en prenant comme base les fonctions  $R_n^m$ , formellement :

$$(R|R)_{n'n}^{m'm}(\mathbf{t}) = \sum_{n''=0}^{\infty} \sum_{m'=-n''}^{n''} (r|r)_{n''n'n}^{m''m'm} R_{n''}^{m''}(\mathbf{t}) . \quad (3.13)$$

Les coefficients  $(r|r)_{n''n'n}^{m''m'm}$  sont appelés coefficients de re-expansion structurels, ils sont liés aux coefficients de *Clebsch-Gordan* de la manière suivante :

$$(r|r)_{n''n'n}^{m''m'm} = \epsilon_m \epsilon_{-m'} \epsilon_{m''} i^{n'+n''-n} \left[ \frac{4\pi(2n+1)(2n'+1)}{(2n''+1)} \right]^{1/2} (nn'00|nn'n''0) \times (nn'm-m'|nn'n''m'') \quad [\text{Ste61}], \quad (3.14)$$

avec

$$\epsilon_m = \begin{cases} (-1)^m, & \text{pour } m \geq 0 \\ 1, & \text{pour } m \leq 0 . \end{cases} \quad (3.15)$$

### 3.3.2 Methode recursive

L'inconvénient d'une détermination directe des coefficients de translation réside dans sa grande complexité. Celle-ci est en effet de  $N^5$  ce qui peut vite devenir prohibitif à mesure que notre ordre de décomposition augmente. La littérature de ces dernières années [GD01] [GD04] s'est donc concentrée sur l'élaboration d'algorithmes permettant de réduire la complexité des calculs relatifs à l'obtention des coefficients de translation. En effet, un certain nombre de relations de récurrence et de symétrie concernant les coefficients de translation nous permettent de calculer ces derniers de manière récursive, sans passer par le calcul des coefficients structurels de re-expansion.

Nous allons détailler ici l'une des méthodes récursives permettant d'atteindre une complexité de  $N^4$ . Afin que tous les coefficients  $(R|R)_{n'n}^{m'm}$  correspondant à un ordre de troncation  $N$  soient estimés, notons que l'algorithme exige d'élever temporairement l'ordre de troncation à  $2N$ , nous noterons cet ordre de troncation temporaire  $Nt$ .

Il est dans un premier temps possible de calculer directement les coefficients de translation  $(R|R)_{n'0}^{m'0}(\mathbf{t})$ , ceci via

$$(R|R)_{n'0}^{m'0}(\mathbf{t}) = \sqrt{4\pi}(-1)^{n'} R_{n'}^{m'}(\mathbf{t}) . \quad (3.16)$$

les valeurs ainsi trouvées sont suffisantes pour initialiser notre algorithme récursif.

Afin de faciliter la lecture des prochaines étapes, introduisons la notation suivante :  $(R|R)_{n'}^{m'm} = (R|R)_{n'|m'}^{m'm}$  et  $(R|R)_{,n}^{m'm} = (R|R)_{|m'n}^{m'm}$ . Cette notation nous permet de discriminer plus facilement lorsque des coefficients de translation sectoriels ( avec  $n = m$  ou  $n' = m'$ , par analogie avec les harmoniques sphériques 1.2) sont en jeu.

Considérons maintenant les deux relations de récurrences suivantes :

$$c_{m+1}^{-m-1}(R|R)_{n'}^{m',m+1} = c_{n'}^{-m'}(R|R)_{n'-1}^{m'-1,m} - c_{n'+1}^{m'-1}(R|R)_{n'+1}^{m'-1,m} , \quad (3.17)$$

et

$$c_{m+1}^{-m-1}(R|R)_{n'}^{m',-m-1} = c_{n'}^{m'}(R|R)_{n'-1}^{m'+1,-m} - c_{n'+1}^{-m'-1}(R|R)_{n'+1}^{m'+1,-m} , \quad (3.18)$$

avec

$$c_n^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}} , & \text{pour } 0 \leq m \leq n \\ -\sqrt{\frac{(n-m-1)(n-m)}{(2n-1)(2n+1)}} , & \text{pour } -n \leq m < 0 \\ 0 & \text{pour } |m| > n . \end{cases}$$

La relation (3.17) permet de calculer les coefficients  $(R|R)_{n',m}^{m',m}$  pour  $0 < m < Nt$  à partir des coefficients  $(R|R)_{n'0}^{m'0}(\mathbf{t})$ . A l'inverse, la relation (3.18) permet de calculer les coefficients  $(R|R)_{n'}^{m',m}$  pour  $0 > m > -Nt$ .

Nous disposons par la suite de la relation de symétrie

$$(R|R)_{n'n}^{m'm}(\mathbf{t}) = (-1)^{n+n'}(R|R)_{nn'}^{-m,-m'}(\mathbf{t}) . \quad (3.19)$$

Nous pouvons par conséquent calculer les coefficients  $(R|R)_{n'}^{m',m}$  à partir des coefficients  $(R|R)_{n'}^{m',m}$ . A ce stade nous disposons donc de l'ensemble des coefficients sectoriels dont nous avons besoin. La dernière relation de récurrence

$$a_{n-1}^m(R|R)_{n',n-1}^{m',m} - a_n^m(R|R)_{n',n+1}^{m',m} = a_{n'}^{m'}(R|R)_{n'+1,n}^{m',m} - a_{n'-1}^{m'}(R|R)_{n'-1,n}^{m',m} , \quad (3.20)$$

réorganisable sous les formes

$$a_n^m(R|R)_{n',n+1}^{m',m} = -a_{n'}^{m'}(R|R)_{n'+1,n}^{m',m} + a_{n'-1}^{m'}(R|R)_{n'-1,n}^{m',m} - a_{n-1}^m(R|R)_{n',n-1}^{m',m} , \quad (3.21)$$

et

$$a_{n'}^{m'}(R|R)_{n'+1,n}^{m',m} = a_{n-1}^m(R|R)_{n',n-1}^{m',m} - a_n^m(R|R)_{n',n+1}^{m',m} + a_{n'-1}^{m'}(R|R)_{n'-1,n}^{m',m} , \quad (3.22)$$

avec

$$a_n^m = \begin{cases} a_n^{-m} = \sqrt{\frac{(n+1+m)(n+1-m)}{(2n+1)(2n+3)}} , & \text{pour } |m| \leq n \\ 0 & , \text{pour } |m| > n \end{cases} ,$$

nous permet de calculer tous les coefficients de translation tesseraux restants.

### 3.3.3 Translation coaxiale

Nous appelons translation coaxiale une translation orientée selon l'un des axes de notre repère. Il s'agit d'un cas particulier intéressant car la translation peut dans ce cas s'effectuer avec un moindre nombre de coefficients. Considérons une translation orientée selon l'axe  $z$  :

$$R_n^m(\mathbf{r} + t\mathbf{i}_z) = \sum_{n'=|m|}^{\infty} (R|R)_{n'n}^{m'm}(t)R_{n'}^m(\mathbf{r}) , \quad (3.23)$$

avec  $\mathbf{i}_z$  le vecteur de la base du repère correspondant à l'axe  $z$ .

Les deux fonctions  $R_{n'}^m(\mathbf{r})$  et  $R_n^m(\mathbf{r} + t\mathbf{i}_z)$  étant toutes deux dépendantes de  $e^{im\phi}$  (1.8), et les fonctions  $e^{im\phi}$  étant orthogonales pour  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ . On ne peut donc décomposer

$R_n^m(\mathbf{r} + t\mathbf{i}_z)$  à un ordre  $m$  donné qu'à partir de fonctions de bases  $R_n^m(\mathbf{r})$  de même ordre. Il devient ainsi possible de réduire de 1 le nombre d'indices relatifs aux coefficients de translation et d'écrire :

$$R_n^m(\mathbf{r} + t\mathbf{i}_z) = \sum_{n'=|m|}^{\infty} (R|R)_{n'n}^m(t)R_{n'}^m(\mathbf{r}) , \quad (3.24)$$

ou encore, en suivant le même raisonnement qu'en (3.11),

$$b_n^m(t\mathbf{i}_z) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} (R|R)_{nn'}^m b_{n'}^{m'} . \quad (3.25)$$

La méthode récursive détaillée en 3.3.2 nous permettait d'atteindre une complexité de  $(N)^4$  c'est à dire une proportionnalité entre le nombre de coefficients à déterminer et le nombre de calculs à effectuer. Des méthodes récursives très semblables ont aussi été développées [GD01] afin de calculer les coefficients  $(R|R)_{nn'}^m$ , avec cette même proportionnalité. Le nombre d'indices relatifs aux coefficients de translation coaxiaux étant de 3, il devient ainsi possible d'atteindre une complexité de  $(N)^3$ .

Afin de remédier au fait que cette complexité ne puisse être atteinte que dans le cas d'une translation sur l'axe  $z$ , nous pouvons allier une opération de translation et une opération de rotation. L'opération de rotation sera détaillée dans la suite de ce travail 3.4, notons pour l'instant que celle-ci permet d'effectuer un changement de base conservant le centre du repère. Afin de réaliser tous types de translation, nous pouvons donc effectuer une rotation afin que l'axe  $z$  du repère soit orienté dans la direction de la translation désirée, puis effectuer une translation coaxiale.

Les coefficients de rotation pouvant eux aussi être atteints via une complexité de  $(N^3)$  [CGR99], la complexité globale de la méthode alliant rotation et translation coaxiale sera elle aussi de  $(N^3)$ .

### 3.3.4 Performances des algorithmes

La complexité n'étant qu'une indication de l'évolution du nombre de calculs en fonction de l'ordre, il n'est donc pas assuré que la méthode alliant rotation et translation sur l'axe  $z$  soit la meilleure à l'ordre nous concernant. Nous avons donc implanté les trois algorithmes afin d'évaluer leurs performances dans un contexte audionumérique relatif au microphone



sphérique. La figure 3.3 permet de visualiser le temps de calcul mis par chacune des trois méthodes pour  $N$  allant de 0 à 10. L'allure des courbes semble bien corrélée avec la complexité relative à chacune des méthodes, et nous observons des différences significatives dès l'ordre 6 en faveur de la méthode bénéficiant de la meilleure complexité. Les applications que nous visons n'étant pas temps-réel le gain peut sembler insignifiant, notons tout de même que l'opération de translation doit être effectuée pour toutes les bandes de fréquences ce qui peut vite devenir prohibitif.

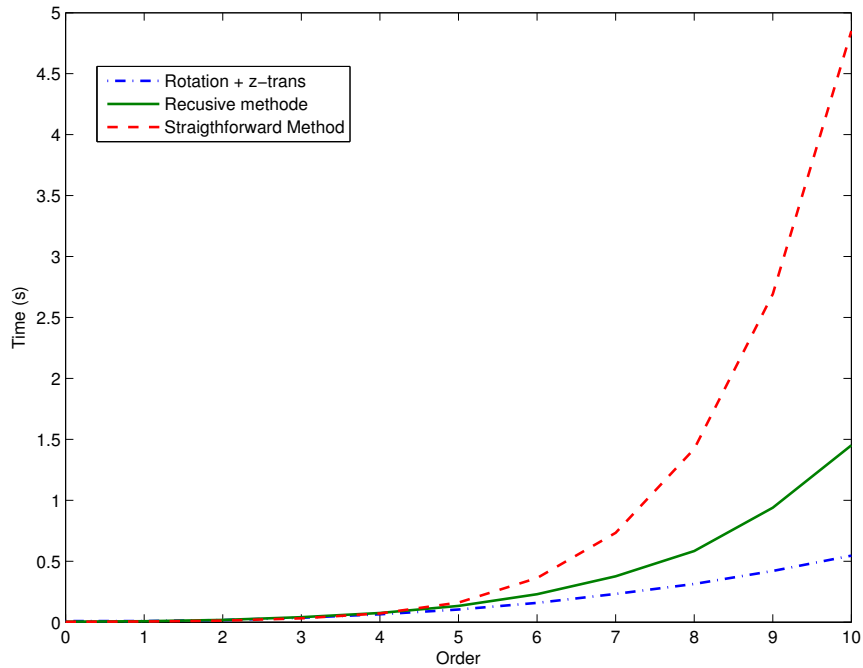


FIGURE 3.3 – Temps de calcul en fonction de l'ordre pour chacune des trois méthodes

### 3.3.5 Analyse des résultats

Nous avons par la suite effectué un ensemble de simulations permettant d'évaluer la validité des résultats et la pertinence des opérations de translation dans le contexte de ce projet. Pour ce faire, nous avons comparé les coefficients obtenus par translation aux coefficients exacts donnés par la solution analytique des coefficients aux harmoniques sphériques d'une source ponctuelle (1.14). Les figures 3.4 et 3.5 représentent le pourcentage d'erreurs pour des translations de coefficients tronqués à l'ordre 20 et 30. Ces figures nous permettent de mettre

en évidence une dégradation des résultats à mesure que l'ordre des coefficients augmente et à mesure que la fréquence augmente.

La distance de translation choisie lors de ces simulations fut de 0.085m, ceci correspondant aux distances en jeu lors d'applications relatives à des enregistrements binauraux ou ORTF. Les figures mettent en évidence qu'un ordre de troncation de 20 permet d'obtenir des coefficients exploitables à l'ordre 0 pour des fréquences allant jusqu'à 11kHz. A la vue de l'équation (3.6), nous pouvons cependant noter que  $k$  et  $r$  sont à considérer sous la forme du terme  $kr$ , ils influent par conséquent de manière équivalente sur les résultats de la translation. La limitation fréquentielle à 11 kHz mise en exergue précédemment pourrait ainsi être généralisée à une limitation sur  $kr$ . Ceci nous donnerait, sachant  $r = 0.085$ , un  $kr_{max} \approx 17$ .

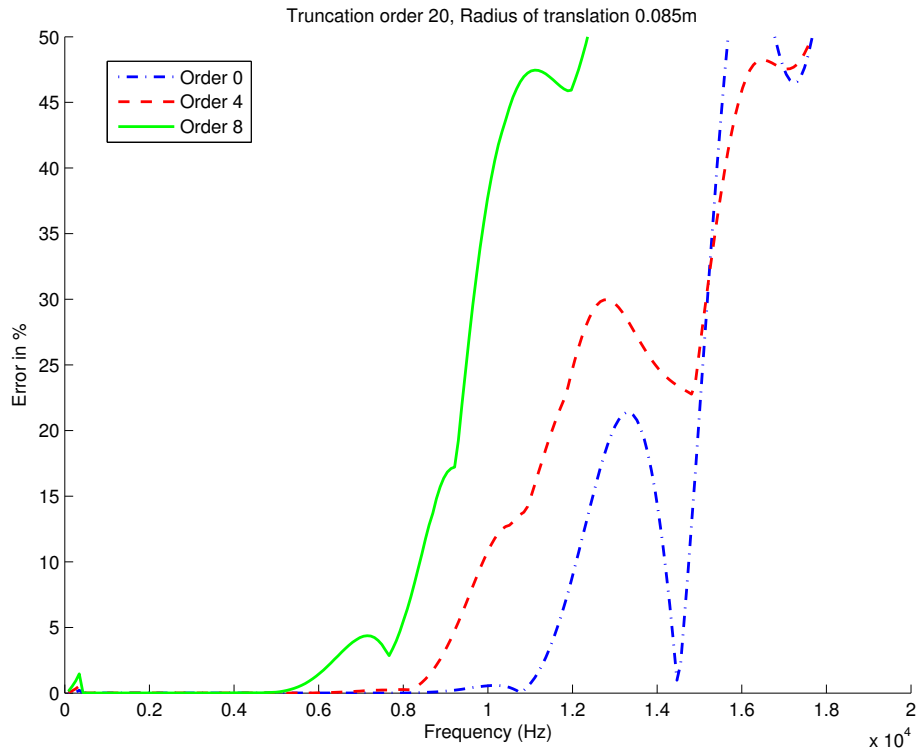


FIGURE 3.4 – Pourcentage d'erreur pour un ordre de troncation de 20

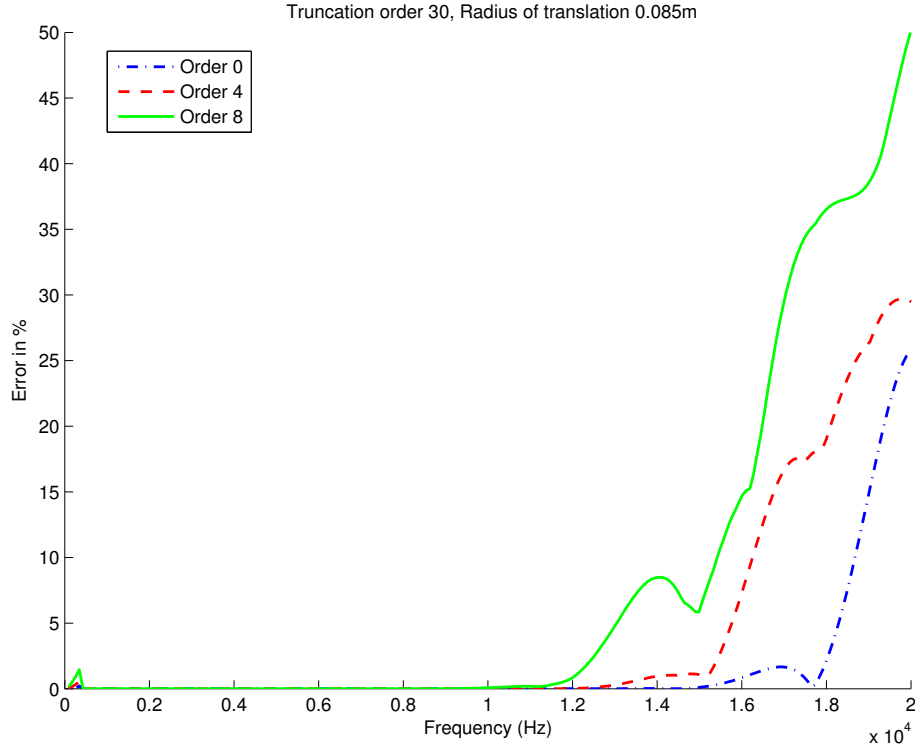


FIGURE 3.5 – Pourcentage d’erreur pour un ordre de troncation de 30

### 3.4 Rotation

Comme nous avons pu le voir dans la partie précédente, le champ sonore peut être transformé par le biais d’opérations linéaires telles que la translation. La rotation est une autre opération possible, elle consiste à faire tourner le champ sonore autour d’un certain axe et selon un certain angle.

Comme dans le cas de la translation, nous pouvons nous baser sur le fait que les fonctions  $R_n^m(\mathbf{r})$  peuvent subir la re-décomposition

$$R_n^m(\mathbf{r}) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} T_{n'n}^{m'm} R_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (3.26)$$

avec  $T_{n'n}^{m'm}$  les coefficients de reexpansion et  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  et  $\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  les coordonnées spatiales d’un même point dans deux repères ayant respectivement pour base les vecteurs  $(\hat{\mathbf{i}}_x, \hat{\mathbf{i}}_y, \hat{\mathbf{i}}_z)$  et  $(\hat{\mathbf{i}}_x, \hat{\mathbf{i}}_y, \hat{\mathbf{i}}_z)$  et le même point d’origine  $O$ .

En suivant le même cheminement qu'en (3.11), nous pouvons par la suite obtenir :

$$b_n^m(Q) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} T_{nn'}^{mm'} b_{n'}^{m'} , \quad (3.27)$$

avec  $b_n^m$  les coefficients spatiaux décrivant le champ sonore et  $b_n^m(Q)$  les coefficients spatiaux décrivant le champ sonore ayant subi une rotation définie par la matrice  $Q$ .

Comme nous l'avons vu précédemment, la rotation mise en jeu dans le cadre de ce travail conserve l'origine du repère. Cette rotation peut par conséquent être définie par une simple orientation dans l'espace. Afin de définir une orientation dans l'espace, trois angles sont suffisants. Plusieurs représentations sont ainsi possibles, cependant, les travaux sur le sujet [CGR99] [GD04] ont jusqu'à maintenant préféré utiliser les angles d'Euler [Aca75].

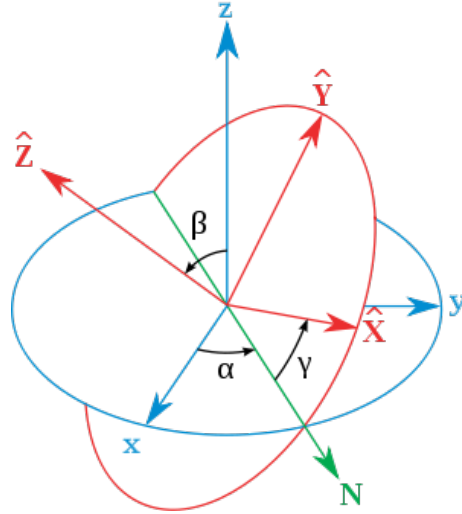


FIGURE 3.6 – Angles d'Euler, depuis [Wik08]

Les angles d'Euler sont les trois angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  visualisables dans la figure 3.6. La matrice de rotation peut dès à présent être réécrite  $Q(\alpha, \beta, \gamma)$  afin de noter son unique dépendance aux angles d'Euler, les coefficients  $b_n^m$  et  $T_{nn'}^{mm'}$  n'étant dépendants que de la matrice  $Q$ , nous pouvons conséquemment réécrire :

$$b_n^m(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{m'=-n}^n T_{nn'}^{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) b_{n'}^{m'} . \quad (3.28)$$

En reprenant l'équation (3.26) et en considérant  $R_n^m(\mathbf{r}) = j_n(kr)Y_n^m(\mathbf{r})$  nous obtenons :

$$j_n(kr)Y_n^m(\mathbf{r}) = \sum_{n'=0}^{\infty} j_{n'}(kr) \sum_{m'=-n'}^{n'} T_{n'n}^{m'm} Y_{n'}^{m'}(\hat{\mathbf{r}}) . \quad (3.29)$$

Les fonctions de Bessel sont cependant linéairement indépendantes et il est donc impossible d'exprimer une fonction de Bessel  $j_n$  comme une combinaison linéaire de fonctions basées sur  $j_{n'}$  lorsque  $n \neq n'$ . De cette remarque résulte :

$$T_{n'n}^{m'm} = T_{nn'}^{mm'} = 0, \quad n' \neq n. \quad (3.30)$$

Nous pouvons par conséquent réduire à trois les indices des coefficients de rotation et finalement obtenir

$$b_n^m(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^{n'} T_n^{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) b_{n'}^{m'}. \quad (3.31)$$

### 3.4.1 Calcul direct des coefficients de rotation

Les coefficients de rotation  $T_n^{mm'}(\alpha, \beta, \gamma)$  peuvent être calculés directement à partir de la formule suivante :

$$T_n^{mm'}(\alpha, \beta, \gamma) = e^{im'\alpha} e^{-im\gamma} H_n^{mm'}, \quad (3.32)$$

avec

$$H_n^{mm'}(\beta) = \epsilon_m \epsilon_{m'} [(n+m)!(n-m)!(n+m)!(n-m)!]^{1/2} \times \sum_{\sigma=\max(0, -(m+m'))}^{\min(n-m, n-m')} \frac{(-1)^{n-\sigma} \cos^{2\sigma+m'+m} \frac{1}{2} \beta \sin^{2n-2\sigma-m'-m} \frac{1}{2} \beta}{\sigma!(n-m-\sigma)!(n-m'-\sigma)!(m+m'+\sigma)!}, \quad (3.33)$$

et  $\epsilon$  tel que défini en (3.15).

Cependant, comme dans le cas de la translation, l'obtention des coefficients à l'aide de cette expression induit des calculs d'une complexité égale à  $O(N^4)$ . Des méthodes récursives ont cependant été développées en [CGR99] et [GD04], ces dernières permettant de réduire la complexité à  $O(N^3)$ .

## 3.5 Directivité

Le contrôle de la directivité à partir de réseaux de microphones est un domaine de recherche actif, les systèmes proposés sont généralement basés sur la multiplication des signaux issus des différents microphones par un gain complexe puis de leur sommation. Dans le cadre du microphone sphérique, une étape supplémentaire est introduite et nous effectuons l'opération de beamforming dans le domaine des harmoniques sphériques. Ceci a pour avantage

de nous rendre indépendants de la répartition spatiale des différents éléments de notre réseau de microphone. La spécification d'une figure de directivité dans le domaine des harmoniques sphériques est de plus assez instinctive dans la mesure où nous sommes habitués à représenter une figure de directivité comme une fonction sur une sphère et que comme nous l'avons vu, toute fonction sur une sphère de carré sommable peut être décomposée en une somme pondérée d'harmonique sphérique.

Pour ces raisons, la communauté scientifique a témoigné d'un intérêt grandissant pour le microphone sphérique et un certain nombre de publications ont vu le jour [ME02] [FR08] [PR05], nous allons ici tenter de les synthétiser. Une figure de directivité pouvant être décrite par une fonction sur une sphère, nous pouvons donc l'écrire sous la forme d'une décomposition en harmoniques sphériques, c'est à dire

$$F(\theta, \phi) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n f_n^m Y_n^m(\theta, \phi) . \quad (3.34)$$

La directivité contrôlable peut alors être obtenue en compensant les coefficients  $b_n^m$  par la fonction radiale correspondant à la source sonore, puis en calculant le produit scalaire entre les valeurs obtenues et les coefficients  $f_n^m$  issus de la figure de directivité. La fonction radiale étant dépendante du type de source sonore, deux cas doivent être pris en compte. En notant  $y(k)$  le signal en sortie du microphone nous obtenons

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n \frac{b_n^m}{-ikh_n^{(2)}(kr_s)} f_n^m \quad (3.35)$$

pour une onde sphérique, et :

$$y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=-n}^n \frac{b_n^m}{4\pi i^n} f_n^m \quad (3.36)$$

pour une onde plane.

Dans le cadre de ce type d'applications, nous pouvons cependant considérer sans trop de conséquences que l'onde est plane si la source sonore se situe à plus d'un mètre. Il reste cependant un problème en champ proche dans la mesure où nous sommes obligés de spécifier la distance entre le microphone et la source (ou la source la plus proche si de multiples sources sonores sont présentes).

Concernant l'implémentation de la directivité contrôlable, les coefficients  $f_n^m$  sont déterminés en discrétisant la fonction de directivité selon un schéma semblable à celui du microphone

sphérique puis en calculant une transformée en harmoniques sphériques discrète. Afin de pouvoir contrôler indépendamment la forme de la fonction de directivité et sa direction, nous effectuons les rotations dans le domaine des harmoniques sphériques sur les coefficients  $f_n^m$ , ceci en utilisant les algorithmes de rotation détaillés dans la partie précédente. La figure 3.8 nous permet de visualiser ce processus.

Afin de vérifier la viabilité de la méthode abordée ici, nous avons effectué un certain nombre de simulations visant à recréer les figures de directivité les plus classiques (cardioïde, hypercardioïde, bidirectionnelle, Dirac). Pour ce faire, nous calculons la réponse impulsionnelle du dispositif pour une source sonore située en différentes positions sur une sphère ayant le microphone comme centre. Nous pouvons ainsi représenter la figure de directivité effectivement recréée et la comparer à nos attentes.

Les figures 3.7 et 3.9 illustrent le résultat de ces simulations, nous retrouvons bien les formes caractéristiques des figures de directivité en jeu. Afin d'estimer plus finement la validité du contrôle de la directivité, nous avons calculé l'index de directivité des figures synthétisées avec l'index de directivité théorique correspondant, ceci pour les figures omnidirectionnelles, cardioïdes, supercardioïdes, hypercardioïdes et bidirectionnelles. L'index de directivité est défini comme la différence en dB entre la réponse du microphone à un champ diffus et la réponse en champ libre à une source sonore sur l'axe de directivité de même intensité que le champ diffus, il s'agit d'une mesure nous permettant entre autre de caractériser une figure de directivité particulière d'où son intérêt dans notre contexte.

Les résultats des simulations sont présentés en 3.1, la décomposition du champ sonore fut effectué à l'ordre 1 par un microphone sphérique de type fermé équipé de microphones omnidirectionnels. Afin de pouvoir analyser indépendamment du reste l'étape où nous synthétisons la figure de directivité, nous avons volontairement suréchantillonné spatialement la sphère afin de minimiser les effets d'aliasing et nous avons omis de simuler le bruit thermodynamique relatif aux capsules microphoniques. A la vue du tableau 3.1, nous pouvons remarquer de très bons résultats dans la reconstitution des 5 figures de directivité, et ceci dès l'ordre 1.

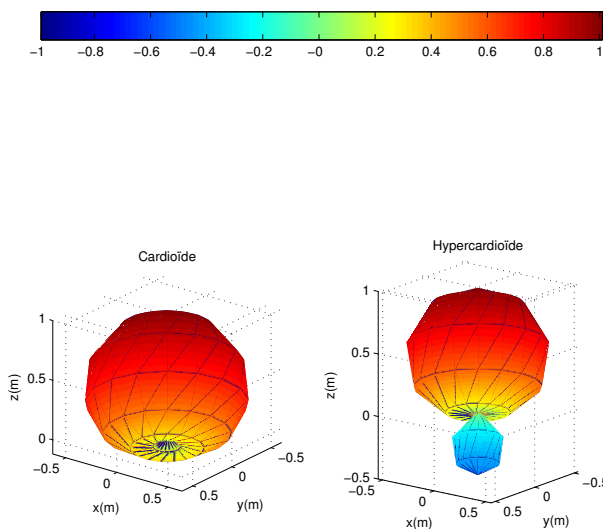


FIGURE 3.7 – Synthèse des figures de directivité cardioïdes et hypercardioïdes

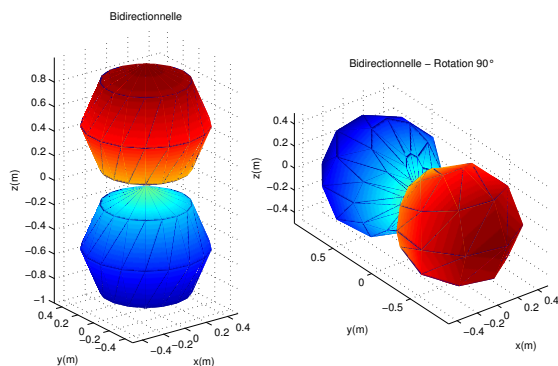


FIGURE 3.8 – Synthèse et contrôle de l'orientation d'une figure de directivité bidirectionnelle

	Omnidirectionnelle	cardioïde	supercardioïde	hypercardioïde	Bidirectionnelle
Théorie	0 dB	4.8 dB	5.7 dB	6 dB	4.8 dB
Synthèse	$2.0053 \times 10^{-5}$ dB	4.7712 dB	5.6729 dB	6.0205 dB	4.7710 dB

TABLE 3.1 – Synthèse de 5 figures de directivité (omnidirectionnelle, cardioïde, supercardioïde, hypercardioïde et bidirectionnelle). Comparaison entre les index de directivité obtenus et les index de directivité théoriques.



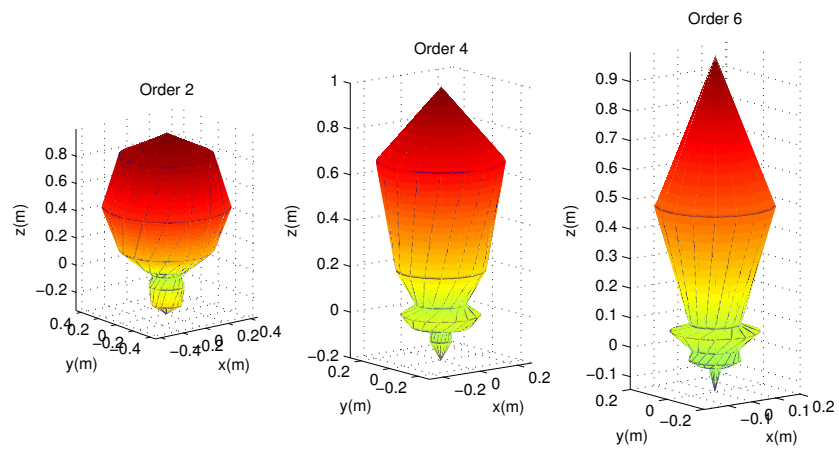


FIGURE 3.9 – Synthèse de Dirac spatiaux à l'ordre 2, 4 et 6

# Chapitre 4

## Transcodage

Comme nous l'avons mentionné lors de l'introduction, de nombreuses applications dans le domaine de l'audio numérique se basent aujourd'hui sur des réponses impulsionnelles pré-enregistrées. Les réverbérations à convolution sont un bon exemple de ce type d'applications, elles permettent aujourd'hui de simuler la réverbération d'une salle avec un degré de réalisme sans précédent. Cependant, les mesures de réponses impulsionnelles manquent encore de flexibilité, les enregistrements de réponses impulsionnelles de salles en multi-canal gardent en effet l'empreinte de la configuration microphonique utilisée.

Alors que les microphones traditionnels nous permettent d'obtenir une information relative au champ sonore en un point de l'espace, le microphone sphérique tel que nous l'avons décrit précédemment nous permet d'obtenir une description du champ sonore en un certain volume. A partir de cette description il est ensuite possible de synthétiser diverses configurations microphoniques et de pallier ainsi au manque de flexibilité des enregistrements de réponses impulsionnelles traditionnelles.

Dans cette partie, nous allons essayer de proposer des stratégies de re-synthèse pour les configurations microphoniques les plus classiques (A-B, ORTF, OCT, MS, XY...). Nous prendrons surtout en exemple les prises de son stéréophoniques dans la mesure où les stratégies proposées dans cette partie peuvent facilement être généralisées aux prises de son basées sur plus de deux microphones (OCT, arbres microphoniques ...).

## 4.1 Configurations espacées

Les techniques de prises de son espacées sont principalement basées sur l'enregistrement d'une scène sonore en des points assez éloignés les uns des autres pour mettre en valeur des différences de temps d'arrivée et des différences d'intensité entre les signaux obtenus, ceci en fonction de la position des sources sonores dans l'espace.

Parmi ces configurations la plus commune est la prise de son stéréophonique A-B, celle-ci consiste en l'utilisation de deux microphones omnidirectionnels espacés d'une distance pouvant varier de 50 cm à 3 m en fonction de la distance séparant le dispositif de la scène sonore. Cette technique est aussi appelée "stéréo de temps d'arrivée" dans la mesure où les déphasages contribuent principalement à la sensation de "largeur" de la stéréo.

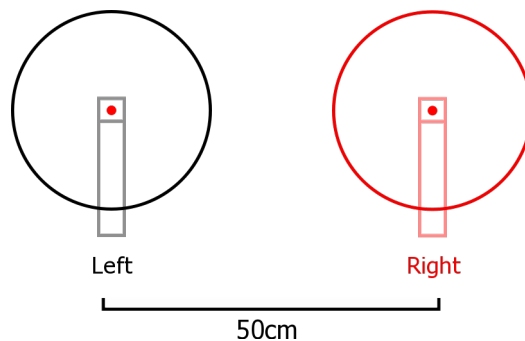


FIGURE 4.1 – Un exemple de configuration espacée, la prise de son A-B (extrait de [Wik07b]).

Afin de simuler une prise de son A-B nous avons donc besoin d'informations relatives à la pression en deux points de l'espace distants d'au minimum 50 cm.

Afin de synthétiser une prise de son A-B il sera donc suffisant d'effectuer deux opérations d'extrapolation diamétralement opposées et de même rayon (de moitié égal à l'espacement voulu entre les microphones). Nous pouvons d'ores et déjà réaliser que le rayon d'extrapolation sera dans le meilleur des cas égal à 25 cm ce qui au vu des simulations effectuées nous demanderait un microphone sphérique d'ordre bien supérieur à ce que nous pouvons espérer en pratique.

## 4.2 Configurations coïncidentes

Contrairement aux configurations espacées où la captation s’opère en des points distincts de l’espace. Les prises de son coïncidentes disposent idéalement les microphones au même endroit, la stéréophonie étant obtenue via les caractéristiques de directivité des microphones employés. La prise de son XY, visible sur la figure 4.2, est un exemple de prise de son coïncidente. Dans le cadre de cette technique, deux microphones cardioïdes sont idéalement disposés dans l’espace de manière à ce que leurs capsules soit confondues et que leurs axes soient perpendiculaires. La stéréo ainsi créée est donc une stéréo d’intensité dépendante de l’angle d’incidence des sources sonores.

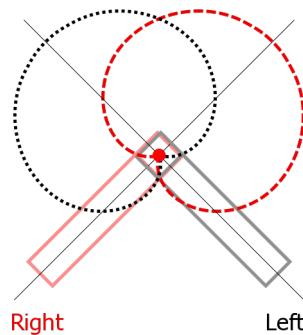


FIGURE 4.2 – Un exemple de configuration microphonique coïncidentes, la prise de son XY (extrait de [Wik07b]).

Les prises de son coïncidentes sont les plus simples à synthétiser à partir des données de notre microphone sphérique. En effet, les capsules étant confondues, nous n’avons pas à effectuer d’opérations de translation ou d’extrapolation. Afin de synthétiser une configuration XY il est donc suffisant d’appliquer la méthode détaillée en 3.5 et créer ainsi deux figures de directivité correspondantes aux critères de la prise de son en jeu.

Les microphones cardioïdes étant des microphones d’ordre 1 (combinaison linéaire de la pression et de la vitesse), une analyse du champs sonore de même ordre sera donc suffisante pour synthétiser une prise de son XY. Il en va de même avec les configurations coïncidentes mettant en jeu des microphones bidirectionnels (Blumlein, MS...). Au final l’ensemble des prises de son coïncidentes les plus standard peuvent donc être synthétisées via l’utilisation d’un microphone sphérique sans même avoir besoin d’obtenir une décomposition du champ sonore d’ordre supérieur à 1.

### 4.3 Configurations presque coïncidentes

Ces techniques peuvent être vues comme une combinaison des configurations microphoniques coïncidentes et espacées. Les microphones utilisés possèdent en effet une courbes de directivité et sont généralement espacés de 10 à 30 cm. La stéréophonie ainsi créée se base donc sur des différences de phase ainsi que sur des différences d'intensité accentuées par la directivité des microphones. La configuration ORTF 4.3 est un exemple de prise de son presque coïncidente, ce dispositif se compose de deux microphones cardioïdes avec un angle inter-axial de  $110^\circ$  et des capsules espacées de 17 cm .

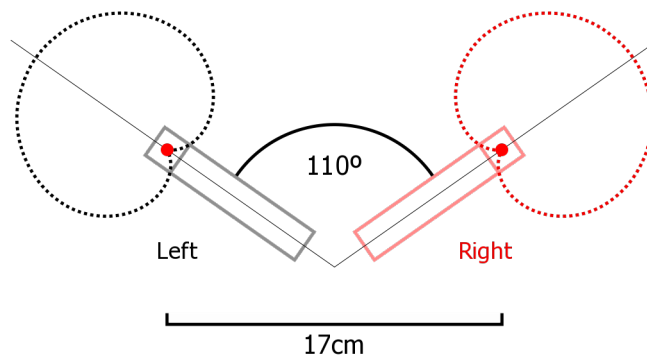


FIGURE 4.3 – Un exemple de configuration microphonique presque coïncidente, la prise de son ORTF (extrait de [Wik07b]).

Contrairement au cas de la prise de son espacée, un couple d'extrapolation ne suffit pas afin de reproduire une prise de son ORTF. Une extrapolation ne nous fournirait qu'une valeur équivalente à la pression insuffisante en vue d'un contrôle de la directivité. Il est donc nécessaire de déplacer la description du champ sonore aux emplacements des capsules via une translation pour synthétiser ensuite les figures de directivité appropriées.

Les simulations effectuées en 3.3.5 prenaient en compte un rayon de translation de 8.5 cm, cette valeur étant celle requise afin de synthétiser une configuration ORTF. En observant la figure 3.4 nous pouvons en conclure qu'un ordre de troncation de 20 nous permettrait d'obtenir des résultats probants jusqu'à 10kHz. L'ordre à atteindre pour des applications en audionumérique est donc assez conséquent. Il s'agit pourtant du cas le plus favorable parmi les techniques presque coïncidentes, la simulation d'une prise de son NOS (de par un écartement inter-microphone plus élevé) ou d'une prise de son effectuée à l'aide d'une tête artificielle (de

par sa figure de directivité plus complexe) demanderait un ordre de décomposition encore plus élevé.

# Conclusion

Comme cela a été mentionné au cours de l'introduction, la présente étude a été motivée par la problématique suivante : Peut-on, à l'aide d'un microphone sphérique, obtenir une description du champ sonore suffisante pour synthétiser de manière flexible des enregistrements de réponses impulsionnelles ayant les caractéristiques des configurations microphoniques les plus standard ? Afin de répondre à cette question, un plan organisé autour de quatre parties a été proposé.

Dans la première partie, nous avons brièvement abordé le cadre formel sur lequel se fonde le microphone sphérique, à savoir la décomposition du champ sonore en harmoniques sphériques. Cette décomposition est issue de la résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques et propose de décrire le champ sonore en un ensemble de composantes spatiales. Nous avons par la suite évoqué le problème dit "intérieur", ce dernier mettant en exergue le fait qu'une connaissance de la pression en tous points à la surface d'une sphère nous permettrait d'extrapoler un champ de pression en tous points à l'intérieur d'un volume sphérique exempt de sources sonores et concentrique à la sphère d'origine.

Pour l'heure, il n'existe pas de dispositif permettant de connaître la pression à la surface d'une sphère de manière continue, qui plus est, sans altérer le champ sonore. La seconde partie s'est donc attachée au passage de la théorie à la pratique en présentant notamment les diverses structures de microphones sphériques basées sur une discrétisation du champ sonore, ainsi que les limitations sur l'ordre de la décomposition qu'une telle discrétisation implique. De par une minimisation du nombre de points nécessaires à l'obtention d'un ordre de décomposition donné, les systèmes extrêmes à la surface d'une sphère ont ainsi pu être présentés comme les meilleurs schémas de discrétisation. Nous avons aussi pu observer l'intérêt relatif à l'utilisation d'une sphère rigide plutôt que vide, ce choix optimisant le RSB en évitant les trop fortes amplifications et les divisions par 0 en jeu lors de certaines étapes de traitement. La réalisation

d'un microphone sphérique étant en préparation au sein de l'IRCAM, l'état de l'art proposé dans cette partie nous a permis de mieux cerner les enjeux liés aux différents paramètres et de réduire par conséquent l'éventail des possibilités.

La troisième partie est le coeur du travail effectué durant ce stage, celle-ci présente diverses opérations pouvant être effectuées dans le domaine des harmoniques afin de reconstituer des mesures de réponses impulsionnelles avec une flexibilité nous permettant de simuler les configurations microphoniques les plus classiques. Nous avons ainsi abordé l'interpolation, l'extrapolation, la translation, la rotation et le contrôle de la directivité, ceci en proposant le résultat de simulations visant à estimer l'erreur induite par ces opérations. Nous avons pu mettre en évidence un compromis drastique entre fréquence et rayon maximum pour ce qui est des opérations de translation et d'extrapolation.

L'implémentation des différents algorithmes de translation récursifs ayant été l'une des tâches réalisées lors de ce stage, une analyse comparant la rapidité de 3 algorithmes a été effectuée. Les résultats ont permis de constater des performances globalement meilleures, et ceci quel que soit l'ordre, pour l'algorithme alliant une rotation puis une translation coaxiale.

Pour finir, une discussion a été proposée autour de trois exemples typiques de prise de son stéréophonique : la prise de son AB (configuration espacée), la prise de son X-Y (configuration coïncidente) la configuration ORTF (configuration presque coïncidente). Le but de cette discussion fut de présenter des stratégies permettant de simuler les configurations citées précédemment, puis de réfléchir à la contrainte sur l'ordre de décomposition que ces stratégies impliquent. Nous avons ainsi pu mettre en lumière le fait que les prises de son espacées demanderaient, de par la grande distance séparant les microphones, un ordre de décomposition difficilement accessible en pratique. Au contraire les prises de son coïncidentes pourraient théoriquement être reconstituées avec un microphone sphérique d'ordre 1. Parmi les configurations presque coïncidentes, la prise de son ORTF serait la plus accessible, elle demanderait tout de même un ordre de décomposition de 20 pour être valide jusqu'à 10 kHz. Les remarques issues de cette brève analyse prospective mériteraient cependant d'être vérifiées plus formellement via des simulations mettant en jeu l'ensemble des opérations impliquées par les stratégies mentionnées.

Parmi les sujets à évoquer à la suite de ce travail, nous pourrions citer la simulation d'une tête artificielle. Cette dernière est en effet très semblable à une prise de son presque



coïncidente au détail près que sa simulation demanderait de générer des figures de directivité incluant des retards temporels en plus des amplifications et ceci selon des formes complexes. Aujourd'hui, le microphone sphérique est aussi à la base de travaux sur la séparation de sources issues d'une analyse en composantes indépendantes dans le domaine des harmoniques sphériques [EJvS10]. Ce thème, abordé rapidement en fin de stage, pourrait se révéler très intéressant dans un contexte scientifique relatif à l'analyse et à l'identification des composantes constituant une scène sonore.

D'un point de vue plus personnel, ce stage m'a apporté un bagage théorique valide dans de nombreux contextes, notamment celui de la reproduction d'environnements sonores via les techniques ambisoniques. Désireux de continuer mon cursus en doctorat au Centre de Recherche et de Création en Informatique musicale (CICM) sur le thème de la spatialisation, les connaissances acquises durant mon stage me seront sans doute très utiles. Ce doctorat sera notamment basé sur les questions d'usages relatifs à la spatialisation dans le cadre de la musique contemporaine, mais aussi sur la question de l'esthétisation possible des principes acoustiques liés à la spatialisation dans le domaine de la composition.

# Annexe A

## Résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques

Nous pouvons proposer à l'équation des ondes la solution à variables séparées

$$p(r, \theta, \phi, t) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\phi)T(t) . \quad (\text{A.1})$$

En injectant cette dernière dans l'équation des ondes en coordonnées sphériques, nous obtenons les quatre équations différentielles ordinaires :

$$\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} + m^2\Phi = 0 , \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right] \Theta = 0 , \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 R - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 0 , \quad (\text{A.4})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2T}{dt^2} + k^2 T = 0 . \quad (\text{A.5})$$

Nous allons maintenant résoudre chaque équation indépendamment. La solution de l'équation (A.2) est

$$\Phi(\phi) = \Phi_1 e^{im\phi} + \Phi_2 e^{-im\phi} . \quad (\text{A.6})$$

Afin de trouver les solutions de l'équation (A.3) il est nécessaire d'effectuer le changement de variable  $\eta = \cos\theta$  avec  $(-1 \leq \eta \leq 1)$ , nous obtenons ainsi

$$\frac{d}{d\eta} \left[ (1 - \eta^2) \frac{d\Theta}{d\eta} \right] + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1 - \eta^2} \right] \Theta = 0 , \quad (\text{A.7})$$

dont les solutions sont données par

$$\Theta(\theta) = \Theta_1 P_n^m(\cos\theta) + \Theta_2 Q_n^m(\cos\theta) , \quad (\text{A.8})$$

où  $P_n^m$  et  $Q_n^m$  sont respectivement les fonctions de Legendre associées de première et seconde espèce. Les fonctions de seconde espèce ne sont pas finies en  $\eta \pm 1$ , nous éliminons donc cette solution en prenant  $\Theta_2 = 0$ .

Les solutions de l'équation différentielle (A.4) sont elles définies par

$$R(r) = R_1 j_n(kr) + R_2 y_n(kr) , \quad (\text{A.9})$$

ou encore par

$$R(r) = R_3 h_n^{(1)}(kr) + R_4 h_n^{(2)}(kr) , \quad (\text{A.10})$$

avec respectivement,  $j_n$  et  $y_n$  les fonctions de Bessel Sphériques de première et seconde espèce,  $h_n^{(1)}$  et  $h_n^{(2)}$  les fonctions de Hankel sphériques de première et seconde espèce.

Enfin, l'équation (A.5) a pour solution

$$T(\omega) = T_1 e^{i\omega t} + T_2 e^{-i\omega t} , \quad (\text{A.11})$$

avec  $k = 2\pi f/c$ .

# Annexe B

## Fonctions de Bessel et de Hankel sphériques

Les fonctions de Bessel sphériques interviennent dans les problèmes mettant en jeu une symétrie sphérique, elles sont construites à partir des fonctions de Bessel ordinaires de la manière suivante :

$$j_n(x) = \sqrt{\frac{t\pi}{2}} \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}}, \quad (\text{B.1})$$

$$y_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{Y_{n+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}}, \quad (\text{B.2})$$

avec  $J_n$  et  $Y_n$  les fonctions de Bessel ordinaires.

A partir des fonctions définies ci-dessus, nous pouvons maintenant définir les fonctions de Hankel sphériques :

$$h_n^{(1)}(x) = j_n(x) + iy_n(x), \quad (\text{B.3})$$

$$h_n^{(2)}(x) = j_n(x) - iy_n(x). \quad (\text{B.4})$$

# Annexe C

## Source sonore ponctuelle

La fonction de green de l'équation de Helmholtz en trois dimension est donnée par l'équation différentielle inhomogène

$$(\Delta + k^2)G(x) = -\delta(x) . \quad (\text{C.1})$$

En prenant  $x = \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\|$ , la solution bien connue à l'équation (C.1) est une source ponctuelle en coordonnées cartésiennes

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_s, k) = \frac{e^{-ik\|\mathbf{r}-\mathbf{r}_s\|}}{4\pi\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_s\|} , \quad (\text{C.2})$$

avec  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  le point d'observation et  $\mathbf{r}_s = (x_s, y_s, z_s)$  la position de la source sonore.

# Bibliographie

- [Abh08] T. D. Abhayapala, “Generalized framework for spherical microphone arrays : spatial and frequency decomposition,” in *IEEE Int Conf on Acoust, Speech and Sig Proc*, 2008, pp. 5268–5271.
- [Aca75] Académie scientifique impériale de Russie, *Novi commentari Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*. Petropolis, Typis Academiae Scientiarum, 1775, vol. t.20, pp. 189–207, <http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/9527>. [Online]. Available : <http://www.biodiversitylibrary.org/item/38593>
- [BDM06] S. Bertet, J. Daniel, and S. Moreau, “3D sound field recording with higher order ambisonics - objective measurements and validation of spherical microphone,” in *120th Conv of the Audio Eng Soc*, 5 2006. [Online]. Available : <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=13661>
- [BR07] I. Balmages and B. Rafaely, “Open-sphere designs for spherical microphone arrays,” *IEEE Trans on Audio, Speech and Language Proc*, vol. 15, no. 2, pp. 727–732, 2007.
- [CGR99] C. H. Choi, J. I. M. S. Gordon, and K. Ruedenberg, “Rapid and stable determination of rotation matrices between spherical harmonics by direct recursion,” *The Journal of Chemical Physics*, vol. 111, no. 19, pp. 8825–8831, 1999. [Online]. Available : <http://scitation.aip.org/getabs/servlet/GetabsServlet?prog=normal&id=JCPA6000111000019008825000001&idtype=cvips&gifs=yes>
- [DH94] J. R. Driscoll and D. M. Healy, “Computing fourier transforms and convolutions on the 2-sphere,” *Adv Appl Math*, vol. 15, no. 2, pp. 202–250, 1994. [Online]. Available : <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6W9D-45P0H0G-B/2/44060d9d048f53ab56ccc47adf07d705>

- [DZG04] R. Duraiswami, D. N. Zotkin, and N. A. Gumerov, “Interpolation and range extrapolation of HRTFs,” in *IEEE Int Conf on Acoust, Spheech and Sig Proc*, 2004, pp. 45–48.
- [Ear04] J. Eargle, *The microphone book*. Elsevier, 2004, ch. 11, pp. 173–183.
- [EJvS10] N. Epain, C. Jin, and A. van Schaik, “Blind source separation using independent component analysis in the spherical harmonic domain,” in *Proc of the 2nd Int Sym on Ambisonics and Spherical Acoustics*, Paris, France, May 2010.
- [FR08] E. Fisher and B. Rafaely, “The nearfield spherical microphone array,” *IEEE Int Conf on Acoust Speech and Sig Proc*, pp. 5272–5275, 2008. [Online]. Available : <http://ieeexplore.ieee.org/lpdocs/epic03/wrapper.htm?arnumber=4518849>
- [Gar95] W. G. Gardner, “Efficient Convolution without Input-Output Delay,” *J Audio Eng Soc*, vol. 43, no. 3, p. 136, 1995.
- [GD01] N. A. Gumerov and R. Duraiswami, “Fast, exact, and stable computation of multipole translation and rotation coefficients for the 3-d helmholtz equation,” Perceptual Interfaces and Reality Laboratory Institute for Advanced Computer Studies, Tech. Rep., 2001.
- [GD04] ———, *Fast Multipole Methods For The Helmholtz Equation In Three Dimensions*. Elsevier, 2004, ch. 3, pp. 89–139.
- [GHB<sup>+</sup>05] K. M. Gorski, E. Hivon, A. J. Banday, B. D. Wandelt, F. K. Hansen, M. Reinecke, and M. Bartelmann, “Healpix : A framework for high-resolution discretization and fast analysis of data distributed on the sphere,” *The Astrophysical Journal*, vol. 622, no. 2, p. 759, 2005. [Online]. Available : <http://stacks.iop.org/0004-637X/622/i=2/a=759>
- [JPvS06] C. Jin, A. Parthy, and A. van Schaik, “Optimisation of co-centred rigid and open spherical microphone arrays,” in *120th Conv of the Audio Eng Soc*, 5 2006. [Online]. Available : <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=13568>
- [ME02] J. Meyer and G. Elko, “A highly scalable spherical microphone array based on an orthonormal decomposition of the soundfield,” *IEEE Int Conf on Acoust Speech and Sig Proc*, vol. 2, pp. 1781–1784, 2002. [Online]. Available : [http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs\\_all.jsp?arnumber=1006109](http://ieeexplore.ieee.org/xpls/abs_all.jsp?arnumber=1006109)

- [NCNW10] K.-V. Nguyen, T. Carpentier, M. Noisternig, and O. Warusfel, “Calculation of head related transfer functions in the proximity region using spherical harmonics decomposition : Comparaison with the measurements and evaluation,” *Proc of the 2nd Int Sym on Ambisonics and Spherical Acoustics*, May 2010.
- [NZK09] M. Noisternig, F. Zotter, and B. F. Katz, *Reconstructing Sound Source Directivity In Virtual Acoustic Environments*. World Scientific, November 2009, pp. 357–372.
- [Ple09] P. Plessas, “Rigid sphere microphone arrays for spatial recording and holography,” Master’s thesis, IEM Graz, University of Technology Graz, Austria, 2009.
- [PR05] M. Park and B. Rafaely, “Sound-field analysis by plane-wave decomposition using spherical microphone array.” *J Acoust Soc Am*, vol. 118, no. 5, pp. 3094–103, 2005.
- [RS85] M. Reimer and B. Sündermann, “A remez-type algorithm for the calculation of extremal fundamental systems for polynomial spaces on the sphere,” Fakultät für Mathematik, TU Dortmund, Tech. Rep., 1985, Ergebnisberichte des Instituts für Angewandte Mathematik, Nummer 075.
- [RSZ94] E. A. Rakhmanov, E. B. Saffand, and Y. M. Zhou, “Minimal discrete energy on the sphere,” *Mathematical Research Letters*, vol. 1, pp. 647–662, 1994.
- [RWB07] B. Rafaely, B. Weiss, and E. Bachmat, “Spatial Aliasing in Spherical Microphone Arrays,” *IEEE Trans on Sig Proc*, vol. 55, no. 3, pp. 1003–1010, Mar. 2007. [Online]. Available : <http://dx.doi.org/10.1109/TSP.2006.888896>
- [SD85] R. Streicher and W. Dooley, “Basic stereo microphone perspectives-a review,” *J Audio Eng Soc*, vol. 33, no. 7/8, pp. 548–556, 1985. [Online]. Available : <http://www.aes.org/e-lib/browse.cfm?elib=4435>
- [SK97] E. B. Saff and A. B. J. Kuijlaars, “Distributing many points on a sphere,” *The Mathematical Intelligencer*, vol. 19, no. 5–11, décembre 1997.
- [Sne94] N. Sneeuw, “Global spherical harmonic analysis by least-squares and numerical quadrature methods in historical perspective,” *Geophysical Journal International*, vol. 118, no. 3, pp. 707–716, 01 1994.
- [Ste61] S. Stein, “Addition theorems for spherical wave functions,” *Quarterly of Applied Mathematics*, vol. 19 :15-24, 1961.



- [SW01] I. H. Sloan and R. S. Womersley, “How good can polynomial interpolation on the sphere be?” *Applied Mathematics Report AMR15-01*, April 2001.
- [SW03] —, “Extremal systems of points and numerical integration on the sphere,” *Adv Comput Math*, vol. 21, pp. 107–125, 2003.
- [Wik07a] Wikipedia : The Free Encyclopedia. Wikimedia Foundation Inc., “Les 5 solides de platon,” [http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic\\_solid](http://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid), Mars 2007, téléchargé le 25 Juillet 2011.
- [Wik07b] —, “Stereophonic sound,” [http://en.wikipedia.org/wiki/Stereophonic\\_sound](http://en.wikipedia.org/wiki/Stereophonic_sound), Septembre 2007, téléchargé le 13 Juillet 2011.
- [Wik08] —, “Angles d’euler,” <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Eulerangles.svg>, Janvier 2008, téléchargé le 16 Juillet 2011.
- [Wil99] E. G. Williams, *Fourier Acoustics : Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. Academic Press, 1999.
- [Zot09] F. Zotter, “Analysis and synthesis of sound-radiation with spherical arrays,” Ph.D. dissertation, IEM - Institute of Electronic Music and Acoustics - University of Music and Performing Arts, Graz, Austria, November 2009.