

Vibrations non linéaires de *Steeldrums*  
Caractérisation expérimentale et modèle phénoménologique

Mélodie Monteil

Mars - juin 2010

Stage de Master 2 Recherche Atiam - UPMC - Paris VI  
Encadrement : Olivier THOMAS et Cyril TOUZÉ  
Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés  
Conservatoire National des Arts et métiers  
Paris



# Remerciements

Mes premiers remerciements iront bien évidemment à Olivier Thomas et à Cyril Touzé pour leur encadrement actif et pédagogique ainsi que pour l'intérêt qu'ils portent à la compréhension du fonctionnement de cet instrument qui m'est cher. Je joins à eux Joël Frolat pour les remercier grandement de leur soutien dans l'établissement de mes projets futurs.

S'en suit des remerciements à l'ensemble de l'équipe du laboratoire pour m'avoir accueillie dans une ambiance détendue et conviviale, ainsi qu'à l'équipe d'acoustique pour le prêt de matériels qui a permis de mener à bien mes expériences. Au passage, un petit clin d'oeil aux partenaires de bureau qui ont apprécié découvrir le *Pan* sous toutes ses formes ...

Merci également à Bertrand David et à Jean-Loïc Le Carrou pour s'être rendu disponibles lorsque j'en ai eu besoin.

Enfin, un grand merci à Calypsociation pour le prêt des instruments, sans quoi ce stage aurait beaucoup plus difficilement vu le jour.



# Table des matières

|                                                                                                   |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Remerciements</b>                                                                              | <b>2</b>  |
| <b>Introduction</b>                                                                               | <b>6</b>  |
| <b>1 Le <i>Steelpan</i></b>                                                                       | <b>8</b>  |
| 1.1 Origines du <i>Steelpan</i> . . . . .                                                         | 8         |
| 1.2 Facture instrumentale . . . . .                                                               | 8         |
| 1.3 Conditions de jeu . . . . .                                                                   | 11        |
| 1.4 Le <i>Steeldrum</i> et les <i>steelbands</i> . . . . .                                        | 11        |
| 1.5 État de l'art . . . . .                                                                       | 12        |
| <b>2 Analyse vibratoire expérimentale</b>                                                         | <b>13</b> |
| 2.1 Analyse modale : cadre des vibrations linéaires . . . . .                                     | 13        |
| 2.1.1 Principe général . . . . .                                                                  | 13        |
| 2.1.2 Détails de l'expérience . . . . .                                                           | 15        |
| 2.1.3 Résultats . . . . .                                                                         | 17        |
| 2.2 Analyse en régime libre : comportement en condition de jeu . . . . .                          | 21        |
| 2.2.1 Montage et acquisition . . . . .                                                            | 21        |
| 2.2.2 Influence de la localisation de l'impact . . . . .                                          | 22        |
| 2.2.3 Influence de la force de frappe . . . . .                                                   | 24        |
| 2.2.4 Évolution temporelle des deux premiers partiels . . . . .                                   | 24        |
| 2.3 Conclusion partielle . . . . .                                                                | 27        |
| <b>3 Vibrations de systèmes non linéaires type coques minces</b>                                  | <b>28</b> |
| 3.1 Analyse non linéaire . . . . .                                                                | 28        |
| 3.1.1 Cadre général, non linéarités géométriques . . . . .                                        | 28        |
| 3.1.2 Cas particulier : équations non linéaires de coques sphériques . . . . .                    | 29        |
| 3.1.3 Discrétisation du problème : couplage non linéaire . . . . .                                | 30        |
| 3.2 Troncature et comportements non linéaires . . . . .                                           | 31        |
| 3.2.1 Modèle à un degré de liberté . . . . .                                                      | 31        |
| 3.3 Expérience : <i>Steelpan</i> soumis à des oscillations forcées . . . . .                      | 34        |
| 3.3.1 Montage : excitation de la structure et acquisitions . . . . .                              | 34        |
| 3.3.2 Résultats : mise en évidence de phénomènes non linéaires . . . . .                          | 34        |
| 3.3.3 Conclusion partielle . . . . .                                                              | 36        |
| <b>4 Modèle simple d'une note de <i>Steelpan</i>, cas d'une résonance 1 : 2</b>                   | <b>38</b> |
| 4.1 Théorie non linéaire . . . . .                                                                | 38        |
| 4.1.1 Équations de couplage . . . . .                                                             | 38        |
| 4.1.2 Résolution analytique . . . . .                                                             | 39        |
| 4.2 Expérience : recalage et identification des coefficients non linéaires quadratiques . . . . . | 40        |

|                                                                                      |                                                                                    |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 4.2.1                                                                                | Montage Expérimental . . . . .                                                     | 41        |
| 4.2.2                                                                                | Comparaison entre expérience et théorie . . . . .                                  | 42        |
| 4.2.3                                                                                | Paramètres déterminés par l'étude linéaire . . . . .                               | 43        |
| 4.2.4                                                                                | Résultats . . . . .                                                                | 45        |
| 4.3                                                                                  | Modèle en oscillations libres . . . . .                                            | 46        |
| 4.4                                                                                  | Conclusion partielle . . . . .                                                     | 49        |
| <b>Conclusion</b>                                                                    |                                                                                    | <b>50</b> |
| <b>A <i>Patterns</i> de <i>Pans</i> standards</b>                                    |                                                                                    | <b>51</b> |
| <b>B Visualisation de quelques déformées modales</b>                                 |                                                                                    | <b>53</b> |
| <b>C Résolution des systèmes non linéaires par la méthode des échelles multiples</b> |                                                                                    | <b>55</b> |
| C.1                                                                                  | Système à un degré de liberté : non linéarités cubiques . . . . .                  | 55        |
| C.2                                                                                  | Système non linéaire à 2 degrés de liberté : non linéarités quadratiques . . . . . | 58        |
| <b>Bibliographie</b>                                                                 |                                                                                    | <b>65</b> |

# Introduction

Le *Steeldrum* (fig. 1) est l'un des derniers instruments acoustiques inventé au cours du XX<sup>ème</sup> siècle. Il est plus couramment appelé *Steelpan*, ou tout simplement *Pan* [10]. Il est fabriqué à partir de bidons d'acier et appartient à la famille des idiophones, ou percussions mélodiques, car le son est produit par la matière même, sans recours à la tension de membranes ou de cordes.



FIGURE 1 – Photographie d'un *Steelpan*.

Cet instrument métallique est né dans les années 1940 sur l'île de Trinidad et Tobago, île des Antilles la plus méridionale de la région des Caraïbes. Il est, en premier lieu, joué au sein d'orchestres : les *Steelbands* qui sont typiquement composés de *Steeldrums* de taille et de registres différents (dont le nombre de futs varie selon l'instrument), et d'une section rythmique (l'*engine room*) (fig. 2). Un *Steelband* peut comprendre de 2 à 3 musiciens, pour les plus petites formations, et jusqu'à 120 pour former de grands orchestres qui se représentent lors des carnivals. Il arrive également que l'on retrouve le *Steeldrum* mêlé à d'autres familles d'instruments, notamment dans le monde du Jazz. Les *Steelpans*, à eux seuls, peuvent être considérés comme une famille d'instruments. Les orchestres interprètent, généralement, des morceaux de Calypso (musique traditionnelle de Trinidad) arrangés pour *Steelbands*, mais le chromatisme de l'instrument permet d'élargir le répertoire au jazz, à la variété, la musique classique, populaire ...

La physique des instruments de musique se propose de comprendre et d'expliquer les mécanismes de production des sons. Elle permet de joindre plusieurs disciplines comme la mécanique des fluides et des solides qui incluent l'acoustique et les vibrations. L'acoustique musicale nous place face à des objets vibrants complexes, présentant des phénomènes vibratoires fins. En règle générale, on cherche à comprendre un savoir faire de fabrication par une description fine de l'instrument et de son comportement. Un modèle physique peut être créé dans un but de sélection de



FIGURE 2 – À gauche : photographie d'un *Steelband*. À droite : *Iron*, percussion typique de l'*engine room*.

paramètres nécessaires et suffisants à la description du comportement dynamique. La synthèse sonore, basée sur le fonctionnement physique des instruments de musique, permet de tester les modèles numériques établis en comparant le son produit par l'instrument au son de synthèse et de valider les paramètres.

Ce rapport rend compte d'une étude visant une caractérisation des vibrations des *Steelpans*, ainsi que la mise en place d'un modèle simple de comportement permettant de reproduire ses principales caractéristiques. Le caractère majeur de cet instrument, du point de vue de son fonctionnement mécanique, est que les vibrations responsables de la production du son doivent être décrites par un modèle non linéaire pour qu'il soit réaliste. Ce caractère le distingue de la majorité des autres instruments à corps vibrant solide, dont les vibrations sont bien décrites par un modèle linéaire. Cette non linéarité du comportement est à la source d'une complexité mathématique accrue des modèles, mais aussi d'un large éventail de phénomènes vibratoires caractéristiques et inhabituels pour un système linéaire, qui permettent d'expliquer le timbre particulier de l'instrument

Après une brève description de l'instrument et de sa technique de fabrication, on cherchera à mettre en évidence des phénomènes vibratoires responsables de son timbre si particulier. Pour cela une approche expérimentale exploratoire a été menée, permettant d'une part l'observation des réponses vibratoires lorsqu'il est sujet à différents modes d'excitation, d'autre part, la fixation de certains paramètres caractéristiques de ces réponses. Ceux-ci ont été introduits dans des modèles théoriques simples que l'on a comparé aux résultats expérimentaux.



# Chapitre 1

## Le *Steelpan*

### 1.1 Origines du *Steelpan*

L'évolution des orchestres de Trinidad est liée à une longue période d'esclavage durant la colonisation britannique qui s'est terminée en 1962 avec la déclaration de l'indépendance de l'île. Les *Steelbands* ont servi d'appuis stratégiques pour faire valoir l'originalité culturelle et identitaire d'un pays constitué de deux îles très différentes : Trinidad et Tobago. Le *Steeldrum* est devenu symbole fondateur de l'unité culturelle trinitadienne, jusqu'à atteindre, aujourd'hui, le statut d'emblème national de l'île (déclaré instrument national officiel en 1992) [27].

Dans les quartiers les plus pauvres, les afro-antillais se livraient à toutes sortes d'expériences musicales avec des matériaux de récupération dont les barils de pétrole. C'est à force de déformations du métal que sont apparus les premiers barils à plusieurs notes. ("*On ne peut se passer de faire l'hypothèse d'une corrélation qui réjouirait tout sociologue marxiste entre infrastructures industrielles et les superstructures culturelles*" - Daniel Verba). En 1881, des émeutes amènent les autorités britanniques à interdire aux esclaves l'usage de tambours à peau pendant les fêtes, ceux-ci vont alors se tourner vers le bambou pour accompagner leurs chants. Ces ensembles musicaux, appelés *tamboos-bamboos*, vont être agrémentés de percussions métalliques dans les années 1920 telles que des boîtes à biscuits ou des réservoirs d'essence [8] [9]. L'apparition à proprement parler du *Steeldrum* n'est accessible que sous forme d'anecdotes ou mythes racontés. Durant la seconde guerre mondiale, les fêtes de carnaval sont prohibées. Certains continuent malgré tout à jouer en cachette et à faire évoluer l'instrument. C'est lors d'un concert, devant le gouverneur de Trinidad, en 1946, que Winston Spree, suggéré timidement inventeur du *Steelpan*, joua un prélude de J.S Bach, puis *God save the Queen*. C'est ainsi que le *Steelpan* pût gagner toute crédibilité et reconnaissance.

Il n'est arrivé en France que dans les années 70, ramené par des amateurs de ces sons si originaux. Aujourd'hui, le "grand public" peine encore à accepter le fait que l'on puisse tirer des sons aussi particuliers de ces "simples" bidons.

### 1.2 Facture instrumentale

Les *Steeldrums* sont des instruments complexes. Ce sont des sortes de cuvettes sphériques, façonnées de manière à obtenir différents dômes. Frappés en ces différents endroits, ils produisent toute une gamme de notes accordées. L'accord de l'instrument se fait grâce à la forme particulière que l'on impose au métal.

Les facteurs sont appelés *tuners*, de l'anglais accordeurs. Chacun possède sa technique, son savoir faire et ses préférences. Il est donc difficile de standardiser la fabrication de cet instrument. Néanmoins, nous tentons, ici, d'en extraire les étapes principales et nécessaires [11].

Le bidon d'origine est d'une capacité de 208 litres pour un diamètre de 59,5 centimètres. Le choix du fut de pétrole se fait souvent en fonction de la qualité de l'anneau circulaire autour du bidon afin que celui-ci puisse résister aux chocs qu'il pourra subir tout au long de la fabrication. L'épaisseur du métal a aussi une grande importance qui dépend de l'instrument du *Steelband* que l'on désire construire (plus épais pour les graves). Elle est d'environ 1,2 millimètre et doit être la plus homogène possible sur toute la surface.

La surface supérieure du bidon, initialement plane, est abaissée, emboutie progressivement, pour être transformée en une cuvette concave (fig. 1.1). On réduit ainsi l'épaisseur au centre afin d'y placer les notes les plus aiguës. Encore une fois, la profondeur d'emboutissage dépend grandement du registre du *Pan* que l'on souhaite construire (les *Steelpans* les plus aigus sont les plus profonds).



FIGURE 1.1 – Première étape : l'emboutissage du fut.

Le *tuner* dessine approximativement, au crayon, la situation géographique des notes à l'intérieur de la cuvette. Il peut utiliser des gabarits donnant une superficie indicative de chaque note. Les modèles de disposition des notes, ou *patterns*, sont plus ou moins standards. Cela signifie que pour un même instrument, on peut trouver différentes *patterns*. Quoi qu'il en soit, ils sont organisés en couronnes concentriques par rapport au centre du bidon. Dans la plupart des cas, les notes d'une couronne intérieure sont dans l'alignement des notes de la couronne extérieure et sont souvent les octaves correspondantes (rapport de fréquence double). Une fois les délimitations faites, le tuner va enfoncer le métal restant entre chaque note à l'aide d'un marteau pour en faire ressortir la convexité. Chaque délimitation est accentuée au poinçon afin de désolidariser, un minimum, deux notes voisines. Ces délimitations sont appelées les *grooves* (fig. 1.2). Ils ont pour fonction de séparer mécaniquement et acoustiquement ces deux notes [10]. Nous verrons plus loin que cette séparation n'est pas si évidente.

Enfin, les notes sont mises à niveau en alignant les paires d'octaves selon un des diamètres du fut. On peut s'apprêter à découper le bidon dans sa largeur, c'est à dire déterminer la longueur de ce que l'on appelle la jupe du *Pan*, qui équivaut à sa caisse de résonance. Là aussi, la longueur de la jupe dépend de l'instrument (plus longue pour les plus graves).

L'étape suivante est celle de la cuisson du *Steeldrum*, pendant environ 30 minutes à  $170^{\circ}\text{C}$ , qui permet de stabiliser l'élasticité du métal qui vient de subir de nombreuses variations à l'issue de toutes ces opérations (fig. 1.3).



FIGURE 1.2 – Martelage entre chaque espace pré-dessiné et délimitation au poinçon *grooving*.



FIGURE 1.3 – Découpage de la jupe et cuisson du métal.

Le *Steeldrum* est enfin terminé, ou presque. Il reste encore à l'accorder. Pour lui donner son timbre si particulier, le tuner prend soin d'accorder chaque composante harmonique (ou partiel) indépendamment les unes des autres. Trois phases sont réalisées : un accordage grossier de la fréquence fondamentale, un accordage plus fin des fréquences supérieures, et un ajustement à l'ensemble des notes. Pour cela chaque note est modelée au marteau pour accentuer ou diminuer la courbure de la note et faire émerger certains partiels (le fondamental au centre ; les partiels supérieurs sur la périphérie de la note (fig. 1.4)). La face la plus centrale du *Pan* est plus fine que sur les bords. Cela entraîne que les déformées modales diffèrent d'une octave à l'autre. L'accordage est donc fait selon les déformées, elles-mêmes relatives aux axes qui orientent la note [1].

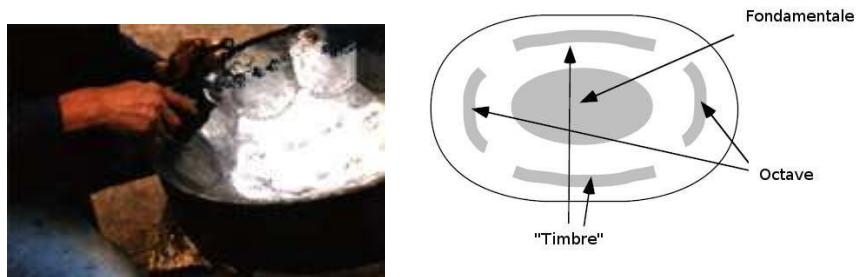


FIGURE 1.4 – Accordage fin ou *fine tuning*.

Il arrive souvent que les *Steeldrums* soient chromés dans un souci de protection contre la rouille et de maintien de l'accordage. Ils nécessitent alors un ré-accordage, ou *fine-tuning*.

### 1.3 Conditions de jeu

En condition de jeu, le son produit par le *Steeldrum* est provoqué par des impacts plus ou moins intenses du musicien qu'il réalise à l'aide de *sticks* (baguettes de bois habillées de morceaux de gomme à l'extrémité : le *rubber*). Appartenant à la famille des idiophones, les sons entendus proviennent des vibrations de la structure mise en excitation par la frappe du musicien (fig. 1.5).

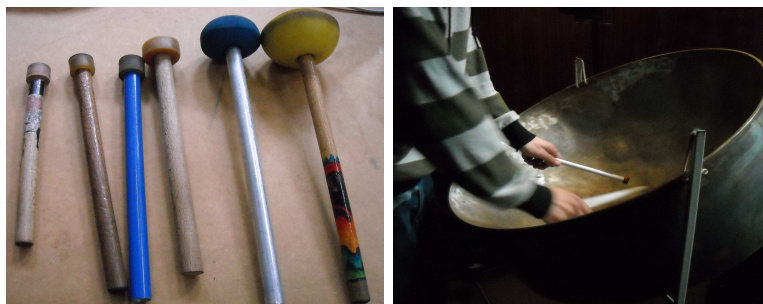


FIGURE 1.5 – À gauche : exemple de *sticks* adaptés aux différents instruments de l'orchestre. À droite : *Steelpan* en situation de jeu.

Malgré une grande accessibilité de cet instrument, qui réside notamment dans le fait qu'il suffise d'un geste simple pour produire un son, la virtuosité, elle, se situe dans ce qui est appelé le *touché* de la note. Le musicien doit adapter sa frappe à chaque note (plus celle-ci est aiguë, plus la frappe devra être importante). La courbure du fut creusé demande une souplesse du poignet nécessaire pour accéder à la note tout en gardant un contrôle indispensable de la frappe.

### 1.4 Le *Steeldrum* et les *steelbands*

Les *steelbands*, à la manière des orchestres symphoniques, sont composés de plusieurs pupitres (fig. 1.6). Chaque pupitre possède un rôle précis dans l'interprétation d'une oeuvre musicale, défini par le compositeur. Le principe est tel que plus la note est grave, plus sa surface est importante, plus elle occupera de l'espace à l'intérieur du fut. Pour conserver le chromatisme dans l'ensemble des instruments, plus un *Steelpan* est grave, plus il sera composé de futs différents. Plus de détails concernant l'organisation de l'orchestre sont donnés en annexe.



FIGURE 1.6 – Exemples de trois différents *Steelpans* : de gauche à droite (du plus aigu au plus grave) *Tenor*, *Double Second*, *Six Bass*.

## 1.5 État de l’art

Différentes études d’acoustique et de vibration ont déjà été menées sur les *Steelpan*s. On trouve aussi de la littérature dans le domaine de la métallurgie [14].

Le comportement acoustique a été majoritairement étudié par Hampton, Rossing et Kronman [18, 19, 17, 11, 10]. Des mesures expérimentales ont mis en évidence des phénomènes vibratoires propres à l’instrument. Des analyses modales linéaires ont montré que chacune des notes de l’instrument est accordée de manière à vibrer selon une fréquence fondamentale et des fréquences harmoniques. À chacune de ces fréquences correspond une déformation de l’instrument. Les caractéristiques géométriques, dues à la fabrication, localisent les déformations du matériau. L’organisation des notes au sein même d’un bidon est faite de sorte qu’il y ait des relations d’accord entre elles. Par exemple, une note et son octave sont dans l’alignement d’un diamètre du fut. Cela implique que deux notes voisines possèdent des fréquences communes pour lesquelles elles peuvent toutes deux être sollicitées selon une déformation qui leur est propre. L’enrichissement spectral, en fonction de la force de frappe, a aussi été mis en évidence et expliqué par la présence de non linéarités dans les mécanismes de production du son. En revanche, aucun modèle non linéaire n’est proposé.

Dans une série d’articles [1, 2, 3, 4, 5], Achong *et al.* considèrent le *Steelpan* comme un assemblage de sous domaines présentant des caractéristiques vibratoires de systèmes non linéaires. La réponse de l’instrument a été modélisée au moyen d’un modèle non linéaire analytique de coque. Le *Steelpan* est alors considéré comme un système de modes localisés. En réponse à une excitation impulsionnelle extérieure, le mouvement reste confiné autour du point d’application de la force. L’évolution des partiels de la note excitée montre des échanges d’énergie qui font évoluer le son au cours du temps. D’autres modèles ont également révélé qu’il pouvait y avoir des couplages aussi de type non linéaires entre la vibration d’une note et celle de la jupe.

Le *Steelpan* présente une dynamique vibratoire complexe qui rend le son produit riche et subtil. Ceci est en premier lieu dû à sa géométrie originale (cuve sphérique sertie de creux et de bosses qui localisent les vibrations) et à sa fabrication qui impose au matériau un nouvel état initial (chauffage, martelage). En second lieu, la faible épaisseur de la structure ainsi que les conditions aux limites (chaque dôme de note est en première approximation encastré) favorisent l’apparition de non linéarités dans les vibrations en conditions normales de jeu.

## Chapitre 2

# Analyse vibratoire expérimentale

### 2.1 Analyse modale : cadre des vibrations linéaires

L'analyse modale expérimentale permet d'appréhender le comportement dynamique d'une structure et d'aboutir à sa caractérisation mécanique (caractérisation des modes propres) par l'estimation de paramètres linéaires tels que les fréquences propres, l'amortissement et les déformations de la structure. En vibrations libres, ce sont ces fréquences qui sont entendues et qui construisent le spectre sonore et donc le timbre de l'instrument. Expérimentalement, on mesure la réponse vibratoire de la structure lorsqu'elle est soumise à une excitation choisie sur un ensemble de points qui constituent un maillage préalablement défini.

#### 2.1.1 Principe général

On rappelle d'abord le principe théorique de l'analyse modale qui permet l'extraction des paramètres nécessaires à la caractérisation d'une structure vibrante. On suppose que le système est linéaire dans la gamme des amplitudes d'excitation étudiées et que le système continu peut se représenter par un système discret où les paramètres sont exprimés pour chaque noeud du maillage.

L'équation générale de la dynamique de ce système linéaire s'écrit [26] :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{X}(t)$  est le vecteur déplacement de l'ensemble discret de points du maillage. Les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  sont respectivement des matrices d'inertie, d'amortissement (supposé visqueux), et de raideur.  $\mathbf{F}(t)$  est le vecteur représentant les forces extérieures exercées sur le système.

On résout ce système en développant  $\mathbf{X}$  sur les modes propres réels de la structure, solution du système conservatif associé soumis à aucune force :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{X}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t \quad (2.2)$$

Calculs faits, on obtient le problème aux valeurs propres :

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

où il y a  $N$  solutions  $(\boldsymbol{\Phi}_i, \omega_i)$ , avec  $i \in [1 : N]$ .  $\boldsymbol{\Phi}_i$  est la  $i^{\text{ème}}$  déformée modale et  $\omega_i$  la  $i^{\text{ème}}$  pulsation propre.

On cherche la solution de (2.1) sous la forme :

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{\Phi}_i q_i(t) \quad (2.4)$$

où  $q_i(t)$  est la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée modale, une fonction temporelle inconnue (il y en a donc  $N$ ).

En remplaçant la nouvelle expression  $\mathbf{X}$  dans l'équation du mouvement (soit eq. (2.4) dans eq. (2.1)), on obtient (grâce à la propriété d'orthogonalité des modes propres et en considérant un amortissement faible), une somme d'oscillateurs découplés dont les équations du mouvement sont du type :

$$\ddot{q}_j + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j + \omega_j^2 q_j = F_j \quad (2.5)$$

avec  $\mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{M} \mathbf{\Phi}_i = 1$  et  $F_i = \mathbf{\Phi}_j^T \mathbf{F}$  et où  $\mu_i = \xi_i \omega_i$  est le coefficient d'amortissement modal de l'oscillateur  $i$ .

Si l'on excite la structure de manière harmonique, avec une pulsation d'excitation  $\Omega$ , on suppose que  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 \cos \Omega t$ . Dans ce cas,

$$\begin{cases} \mathbf{F}(t) = \mathcal{R}e[\mathbf{F}_0 e^{-j\Omega t}] = \mathcal{R}e[\mathbf{F}^* e^{-j\Omega t}] \\ \mathbf{X}(t) = \mathcal{R}e[\mathbf{X}^* e^{-j\Omega t}] \\ \mathbf{q}_i(t) = \mathcal{R}e[\mathbf{q}_i^* e^{-j\Omega t}] \end{cases} \quad (2.6)$$

avec  $\mathbf{X}^* = \sum \mathbf{\Phi}_i q_i^*$  où  $q_i^*$  est l'amplitude complexe de  $q_i(t)$ .

On montre alors que :

$$q_i^*(t) = \frac{\mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{F}_0}{\omega_i^2 - \Omega^2 + 2j\xi_i\omega_i\Omega} \quad (2.7)$$

si bien que :

$$\mathbf{X}^* = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{\Phi}_i \mathbf{\Phi}_i^T \mathbf{F}_0}{\omega_i^2 - \Omega^2 + 2j\xi_i\omega_i\Omega} \quad (2.8)$$

La fonction de réponse en fréquence (FRF) de la structure entre le point d'excitation  $q$  et le point de mesure  $p$  est alors obtenue en mesurant la réponse de la structure au point  $p$  à une excitation ponctuelle au point  $q$ . Dans ce cas :

$$H_{pq}(\Omega) = \frac{X_p}{F_q} = \sum_{i=1}^N \frac{\Phi_{ip}\Phi_{iq}}{\omega_i^2 - \Omega^2 + 2j\xi_i\omega_i\Omega} \quad (2.9)$$

où  $X_p$  est la  $p^{\text{ième}}$  composante de  $\mathbf{X}$  et  $\Phi_{ij}$  et la  $j^{\text{ième}}$  composante de  $\mathbf{\Phi}_i$ .

L'analyse modale expérimentale vise à identifier :

- les fréquences (ou pulsations) propres :  $\omega_i = 2\pi f_i$
- les facteurs d'amortissement :  $\xi_i$
- les déformées modales :  $\mathbf{\Phi}_i$

Pour cela, deux méthodes sont utilisées dans ce travail :

### Mesure de déformées opérationnelles

Pour une structure très résonante, c'est à dire avec un amortissement très faible ( $\xi_i \ll 1$ ), lorsque l'on choisit  $\Omega$  proche d'une fréquence propre  $\omega_i$ , l'équation (2.10) montre que l'on peut négliger l'influence des modes autres que le  $i^{\text{ème}}$ . Alors :

$$\mathbf{X}^* \approx \frac{\Phi_i \Phi_i^T \mathbf{F}_0}{\omega_i^2 - \Omega^2 + 2j\xi_i \omega_i \Omega} \quad (2.10)$$

Dans ce cas, la déformée de la structure sera :

$$\mathbf{X}(t) = |\mathbf{X}^*| \cos(\Omega t + \phi) \quad (2.11)$$

avec  $|\mathbf{X}^*|$  proportionnel à  $\Phi_i$ , la  $i^{\text{ème}}$  déformée modale. La géométrie de la déformée de la structure donne alors  $\Phi_i$  et la fréquence d'excitation donne la  $i^{\text{ème}}$  fréquence propre.

### Extraction modale

Des logiciels (tels que *Modan* utilisé au chapitre 4) permettent d'estimer les paramètres qui produisent la meilleure correspondance, au sens des moindres carrés, entre les  $H_{pq}(\Omega)$  théoriques et les FRF mesurées expérimentalement.

#### 2.1.2 Détails de l'expérience

Expérimentalement, on cherche donc à caractériser la structure en identifiant les paramètres propres aux modes, à savoir les  $\omega_i$ ,  $\xi_i$  et  $\Phi_i$ .

Dans le cadre de notre étude, des analyses modales ont été réalisées sur différents *Steelpans* de l'orchestre : le *tenor*, le *double second* et le *six bass* (fig. 1.6). Ces trois instruments appartiennent à différents pupitres extrêmes du *Steelband*. Le *tenor* est composé de 28 notes disposées sur un seul fut, le *double second* est composé de 38 notes réparties sur deux futs et le *six bass* comporte 18 notes pour six futs, chacun étant composé de 3 notes.

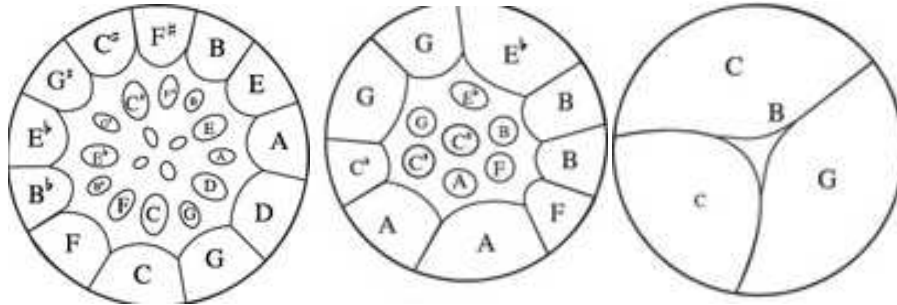


FIGURE 2.1 – Patterns des futs des trois différents *Pans* étudiés (de gauche à droite : *Tenor*, *Second*, *Bass*).

L'excitation de la structure est réalisée via un système électromagnétique (bobine + aimant) (fig. 2.2). L'aimant adhère à la structure tout en étant placé au centre du champ magnétique créé par une bobine circulaire parcourue par un courant d'intensité  $I$ . Le système exciteur produit ainsi une force ponctuelle, proportionnelle à l'intensité du courant à la fréquence imposée par le générateur.

Le signal d'excitation engendré, placé en un point  $x_q$ , est un sinus glissant parcourant la plage de fréquences  $\Omega = [0 : 4000]$  Hertz.





FIGURE 2.2 – Analyse modale expérimentale du *Tenor* : à gauche, excitation sinusoïdale du *Steelpan* par un système électromagnétique ; à droite mesure de la vibration au vibromètre LASER.

En chaque point du maillage  $x_p$ , on mesure la vitesse de déplacement à l'aide d'un vibromètre laser à balayage (fig. 2.2). La FRF mesurée est donc :

$$H_{pq}(\Omega) = \frac{v(x_p)}{F(x_q)} \quad (2.12)$$

L'extraction des données par le logiciel *Polytech Scanner Vibrometer* permet de tracer le spectre fréquentiel soit en un point particulier, soit moyennée sur l'ensemble des  $P$  points du maillage. Il est calculé par la TFTD du signal via l'algorithme FFT (*fast fourier transform*) selon les paramètres suivant :

| Paramètres                         | Valeur  |
|------------------------------------|---------|
| Fréquence maximale de l'excitation | 4 kHz   |
| Recouvrement                       | 75 %    |
| Pas de temps                       | 800 ms  |
| Résolution fréquentielle           | 1.25 Hz |

En sélectionnant les fréquences de résonance du spectre, on peut visualiser les déformées opérationnelles associées, qui sont supposées correspondre aux déformées modales de la structure.

### 2.1.3 Résultats

#### Déformation de la structure complète

On s'intéresse dans un premier temps à la réponse vibratoire de la structure considérée dans son ensemble. Les résultats qui suivent proviennent du *tenor* excité sur la note B4. La FRF est moyennée sur l'ensemble des points du maillage.

L'amplitude de la FRF présente de nombreux pics (fig.2.3). Ceux-ci sont clairement discernables dans la partie basse du spectre alors que les hautes fréquences montrent une densité spectrale plus importante.

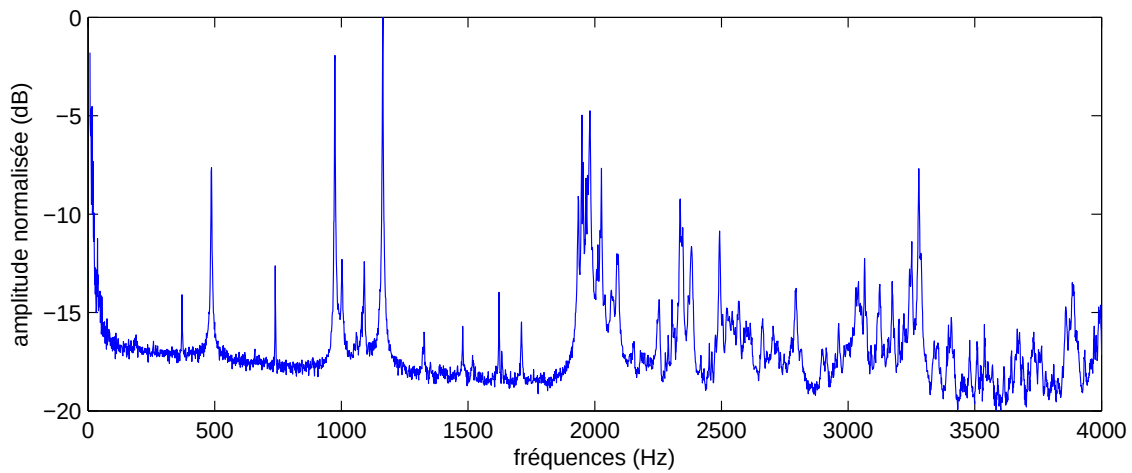


FIGURE 2.3 – FRF d'un *tenor* maillé sur l'ensemble de sa surface, excité ponctuellement par un système (bobine+aimant) sur la note B4.

On peut ainsi identifier expérimentalement les fréquences des premiers modes propres de la structure. Pour chaque fréquence relevée, on visualise les déformations de la structure (fig. 2.4). Le *Steelpan* présente des modes localisés. Les déformations de plus grande énergie sont concentrées sur la note excitée et sur les notes alentours accordées de manière harmonique. Dans le cas du *tenor*, deux notes consécutives sont accordées en quinte (par exemple :  $F\#$  -  $B$  -  $E$ ). On remarque que pour certaines fréquences, plusieurs notes entrent en résonance selon des géométries de modes différentes.



## Focalisation : vibration de la note excitée

Une nouvelle note du même instrument (le D4 du *Tenor*) est excitée par le même système d'excitation (bobine + aimant).

Lorsque l'on se concentre sur la réponse vibratoire de la note excitée, en relevant le spectre mesuré au point d'excitation, on peut voir que les premières fréquences sont en rapport quasi harmonique. C'est à dire que si l'on appelle  $f_1$  la fréquence du premier maximum de la FRF,  $f_2$  et  $f_3$  sont telles que  $f_2 \approx 2f_1$  (octave) et  $f_3 \approx 3f_1$  (quinte) (fig. 2.5).

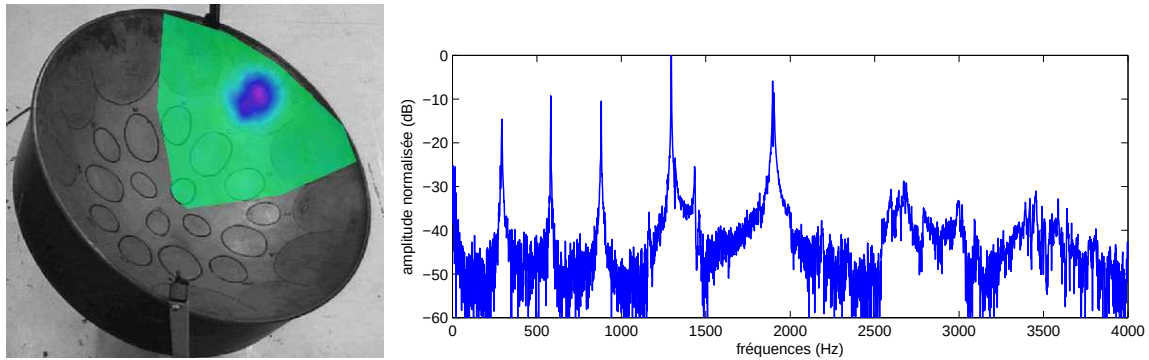


FIGURE 2.5 – *Tenor* D4 : Analyse Modale localisée : visualisation de la déformée du mode 1 ( $f = 295.5\text{Hz}$ ). Observation de la FRF au point d'excitation.

La visualisation des déformées montre que le premier mode (0,0) déforme la note tel un dôme, de sorte à observer un ventre de vibration. Le second (0,1) présente une ligne nodale sur laquelle l'amplitude de déformation est nulle de part et d'autre les ventres vibrent en opposition de phase. Le mode 3 (1,0) est le complémentaire du mode 2, la ligne nodale est à la perpendiculaire (fig. 2.6).

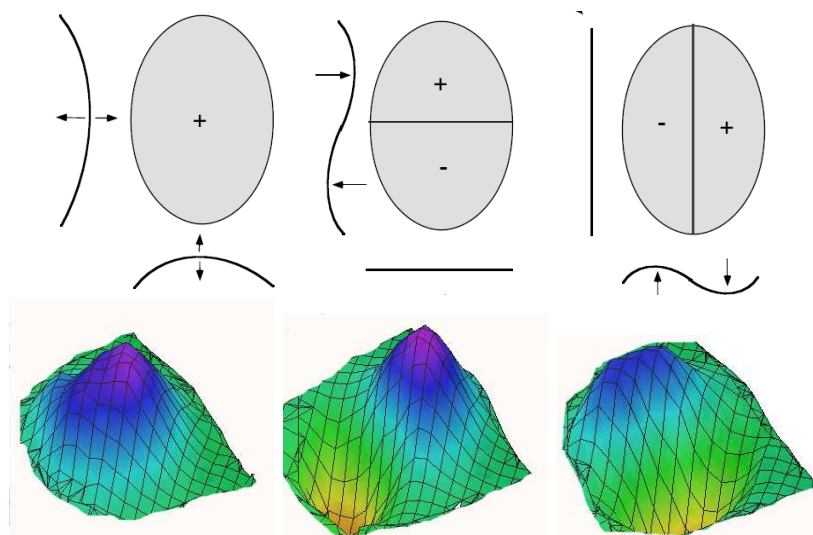


FIGURE 2.6 – Géométrie des trois premières déformées modales d'une note de *Steelpan*. Visualisation 3D par le logiciel *Polytech Scanner Vibrometer*.

## Généralisation aux trois instruments étudiés

Les déformées à ces trois premières fréquences se retrouvent de manière récurrente sur l'ensemble des notes des trois instruments étudiés (voir annexe). Les modes supérieurs présentent des géométries plus complexes et des fréquences plus aléatoirement réparties sur le spectre. Les fréquences et les déformées de note particulières des trois *Steelpan* sont référencées dans le tableau (fig. 2.7).

| <i>Tenor</i> |       | <i>Second</i> |       | <i>Six Bass</i> |       |
|--------------|-------|---------------|-------|-----------------|-------|
| D4           |       | G3            |       | C2              |       |
| f (Hz)       | mode  | f (Hz)        | mode  | f (Hz)          | mode  |
| 295.5        | (0,0) | 193.8         | (0,0) | 57.5            | (0,0) |
| 582.5        | (0,1) | 391.3         | (0,1) | 198.8           | (0,1) |
| 881.3        | (1,0) | 791.3         | (1,0) | 257.5           | (1,0) |
| 1296         | (0,2) | 975           | (0,2) | 332.5           | (1,1) |
| 1436         | (1,1) | 1158          | (1,1) | 462.5           | (/,/) |
| 1903         | (0,3) | 1300          | (0,3) | 528.8           | (/,/) |
| 2191         | (3,0) | 1530          | (2,0) | 623.8           | (/,/) |

FIGURE 2.7 – Fréquences propres et modes propres des trois *Steelpan*s étudiés. NB : La notation (n,m) représente le nombre de lignes nodales horizontales et verticales que présente le mode de la note. Lorsque la déformée est plus complexe et difficilement identifiable, elle est notée (/,/).

Il est à noter que lors de la fabrication, le *tuner* se concentre sur l'accord des trois premiers partiels (fondamentale, tierce et quinte) où chacun des partiels équivaut à une fréquence propre donc est aussi associé à un mode de vibration. Le quatrième partiel est accordé, dans la mesure du possible, à la double octave.

Lorsque l'on trace les rapports de fréquences, on remarque effectivement que les premiers modes présentent des liens harmoniques quasi parfaits ce qui est moins vérifié pour les modes supérieurs.

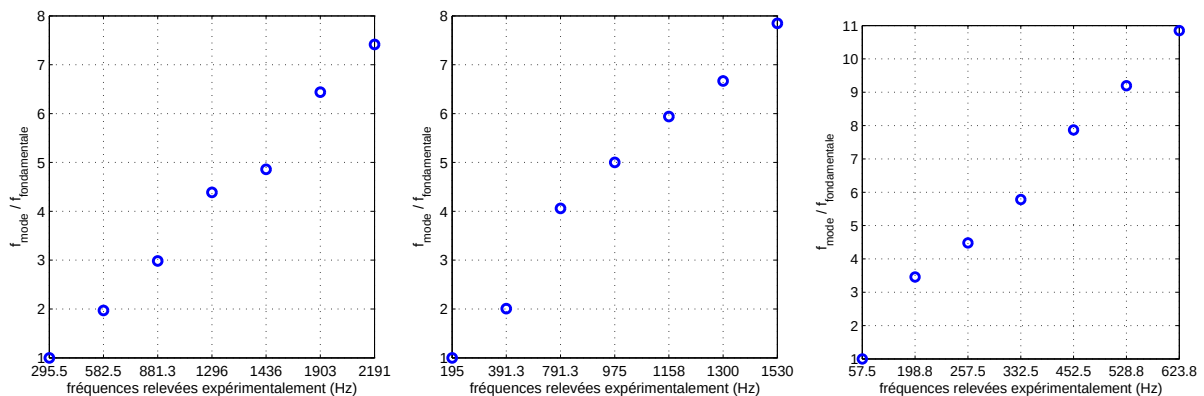


FIGURE 2.8 – Accord des partiels d'une note de chacun des trois *Steelpan*s : fréquences relatives des premiers modes par rapport à la fréquence fondamentale. Cas du *Tenor* D4, *Double Second* G3 et *Six Bass* C2.



Par la suite, les expériences ont continué à être menées sur les trois instruments, mais dans un soucis de synthèse, les résultats présentés seront ceux d'une note d'un *Steelpan* en particulier : le G3 du *Double second* (fig. 2.9).

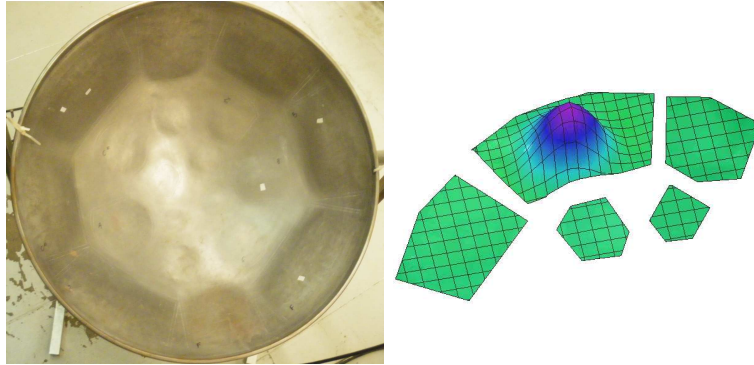


FIGURE 2.9 – *Double second* - excitation placée en G3 : photographie de l'instrument et visualisation de la première déformée modale (fréquence fondamentale = 193.8 Hertz).

## 2.2 Analyse en régime libre : comportement en condition de jeu

En conditions normales de jeu, le musicien fait en sorte de frapper la note en son centre. La force qu'il impose dépend surtout de la phrase musicale qu'il interprète. Néanmoins, il a conscience de modifier le timbre selon si la frappe est douce ou forte. Comme dans bon nombre d'instruments de musique, l'"agressivité" du son peut être maîtrisée par le geste.

On place alors le *Steelpan* dans des conditions expérimentales semblables, la main du musicien vient frapper la note à l'aide du *stick* adapté à l'instrument considéré. Suite à l'impact, dès que le *stick* a quitté la surface de la note, celle-ci oscille de manière libre, sans aucune force extérieure susceptible d'entretenir la vibration.

Le son délivré par un *Steelpan* peut être divisé en deux phases temporelles [1]. La première est plutôt courte. Elle décrit le temps correspondant au contact entre le *stick* et la note. Les oscillations libres débutent au moment où le *stick* quitte la note et se terminent avec la fin du son.

### 2.2.1 Montage et acquisition

Plusieurs types d'excitation ont été menées : différentes forces de frappes localisées en différents points d'une même note. Des capteurs, disposés sur la surface de la note, mesuraient les vibrations de la note excitée (fig. 2.10). Un accéléromètre était fixé au moyen de cire d'abeille, un vibromètre laser mesurait la vitesse de déplacement en un autre point fixe, et un microphone était placé à environ 20 centimètres au dessus de l'instrument. L'emplacement des capteurs a été choisi en veillant à ne pas être positionné sur une ligne nodale afin de mesurer un maximum de modes différents. L'acquisition des signaux temporels et fréquentiels était réalisée grâce au logiciel *Smart Office* qui permet une exportation vers le logiciel *Matlab* pour le traitement des données (fig. 2.11).

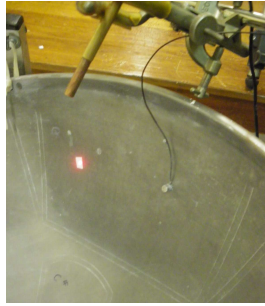


FIGURE 2.10 – Positionnement des capteurs sur la surface de la note : microphone, accéléromètre, vibromètre laser.

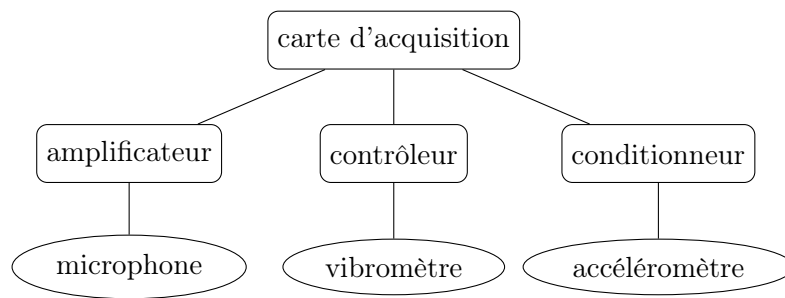


FIGURE 2.11 – Chaîne de montage pour l'acquisition des données via *Smart Office*.

### 2.2.2 Influence de la localisation de l'impact

L'analyse modale vue précédemment, a permis d'observer les déformées des modes propres. Dans le cadre des vibrations linéaires, un mode ne peut être excité que s'il ne présente pas de point nodal au point d'excitation.

En frappant une note en différents points, on s'aperçoit que le timbre peut être modifié. Cela signifie que les fréquences présentes dans le spectre n'ont pas la même contribution. Selon la localisation de l'impact les modes ne vibrent pas à la même amplitude.

Des analyses précédentes, on a sélectionné les deux premiers modes de vibration pour en extraire l'amplitude des déformées associées. On voit sur la figure (fig. 2.12) que le mode 1 présente un maximum au centre de la note alors que le mode 2 présente un noeud au centre et deux ventres en opposition de phase de part et d'autres dont les maxima sont situés plus en périphérie.

L'expérience consistait à effectuer une même intensité de frappe en deux points : un situé approximativement au centre et un sur la périphérie de la note . Lorsque l'on compare les spectres en ces deux points (fig. 2.13), on voit que le mode 1 est quasi inexistant lorsque l'on frappe sur le bord de la note. L'amplitude des FRF montre une différence de 40 dB pour le mode 1 entre les deux points d'impact.

Ce phénomène se perçoit très distinctement. Quand on frappe le bord de la note d'un *Steelpan*, on entend uniquement la fréquence du mode 2. La note est excitée à l'octave.

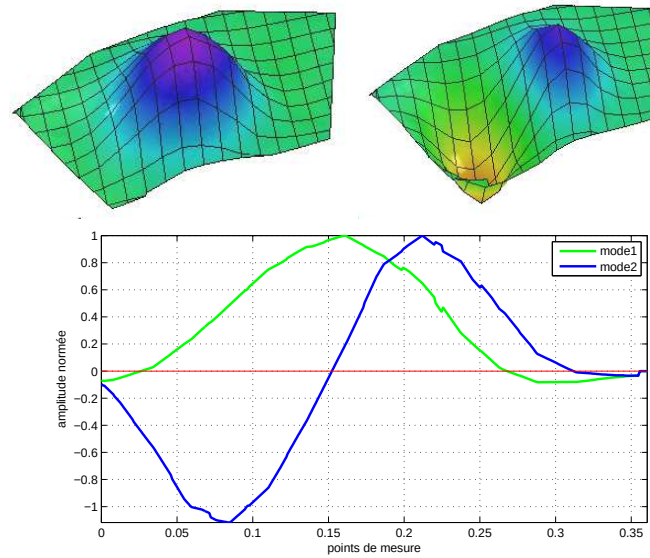


FIGURE 2.12 – *Double Second G3* : influence de la géométrie des modes 1 et 2 sur le spectre : en haut, déformées modales issues de l'analyse linéaire, en bas amplitude de ces déformées.

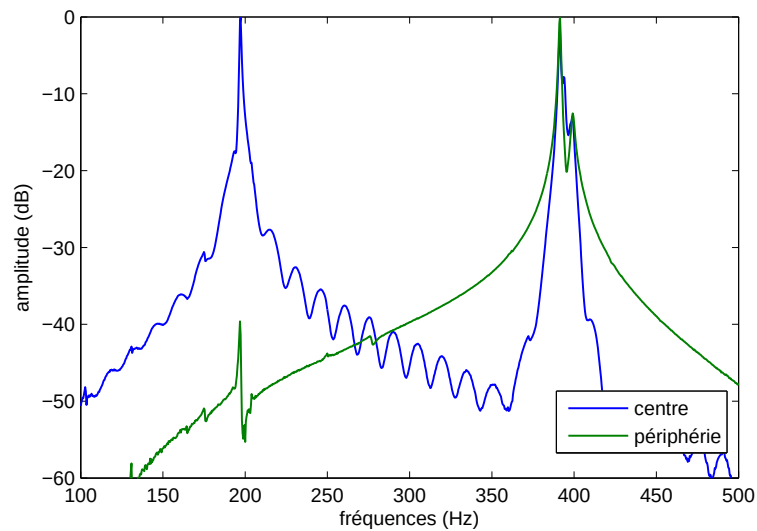


FIGURE 2.13 – *Double Second G3* : influence de la géométrie des modes 1 et 2 sur le spectre : spectre centrée autour des fréquences propres  $f_1$  et  $f_2$ .



### 2.2.3 Influence de la force de frappe

Pour trois intensités de frappe, on trace l'évolution temporelle et fréquentielle du signal mesuré (fig. 2.14).

L'enveloppe temporelle d'une vibration de *Steelpan* présente, comme toute percussion, une attaque franche. Le maximum du signal est atteint très rapidement. S'en suit aussitôt la phase de décroissance, qui, pour une frappe douce, décroît progressivement avec une allure exponentielle et pour des attaques plus fortes, présente des regains d'amplitude ressemblant à des battements. Cette modulation d'amplitude est d'autant plus marquée que la frappe est intense.

Le spectre est réparti sur une large bande de fréquences ( $[0\ 3000]$  Hz). L'énergie principale reste néanmoins concentrée sur les premières composantes. Dans le cas d'une perturbation de très faible amplitude, deux raies spectrales sont présentes. En augmentant la force de l'impact, on peut voir d'une part un enrichissement du spectre dans les hautes fréquences et d'autre part un échange d'énergie entre le premier et le deuxième partiel ( $f_1 = 193.8$  Hz,  $f_2 = 391.3$  Hz). Dès que l'un atteint son maximum, l'autre est à son minimum. Ces instants de transfert d'énergie correspondent aux minima du battement dû à la modulation d'amplitude. Cela entraîne de subtiles variations du timbre caractéristiques de ce type de percussions.

### 2.2.4 Évolution temporelle des deux premiers partiels

À partir des mesures précédentes, on a extrait par filtrage linéaire<sup>1</sup> l'évolution temporelle des partiels 1 et 2 pour les cas de frappes "douce" et "très forte" (fig. 2.14). On a vu auparavant que la géométrie des modes correspondants est telle qu'au centre, le premier (0,0) possède un ventre tandis que le second (0,1) présente une ligne nodale. Malgré cela, un impact au centre, sollicite le mode 2 (fig. 2.15). Pour une faible intensité, son amplitude est de l'ordre de grandeur de celle du mode 1, alors que lorsque la frappe est plus forte elle gagne en amplitude. On retrouve également le phénomène de modulation d'amplitude observé au paragraphe précédent.

Lorsque l'on sort du cadre des vibrations linéaires, c'est à dire quand l'amplitude devient grande par rapport à l'épaisseur de la structure, on observe donc des interactions entre les modes propres. Frapper une note, avec une intensité suffisante, provoque un transfert d'énergie du mode 1 vers le mode 2.

---

1. Utilisation de programmes Matlab implémentés par B. David de l'ENST-ParisTech

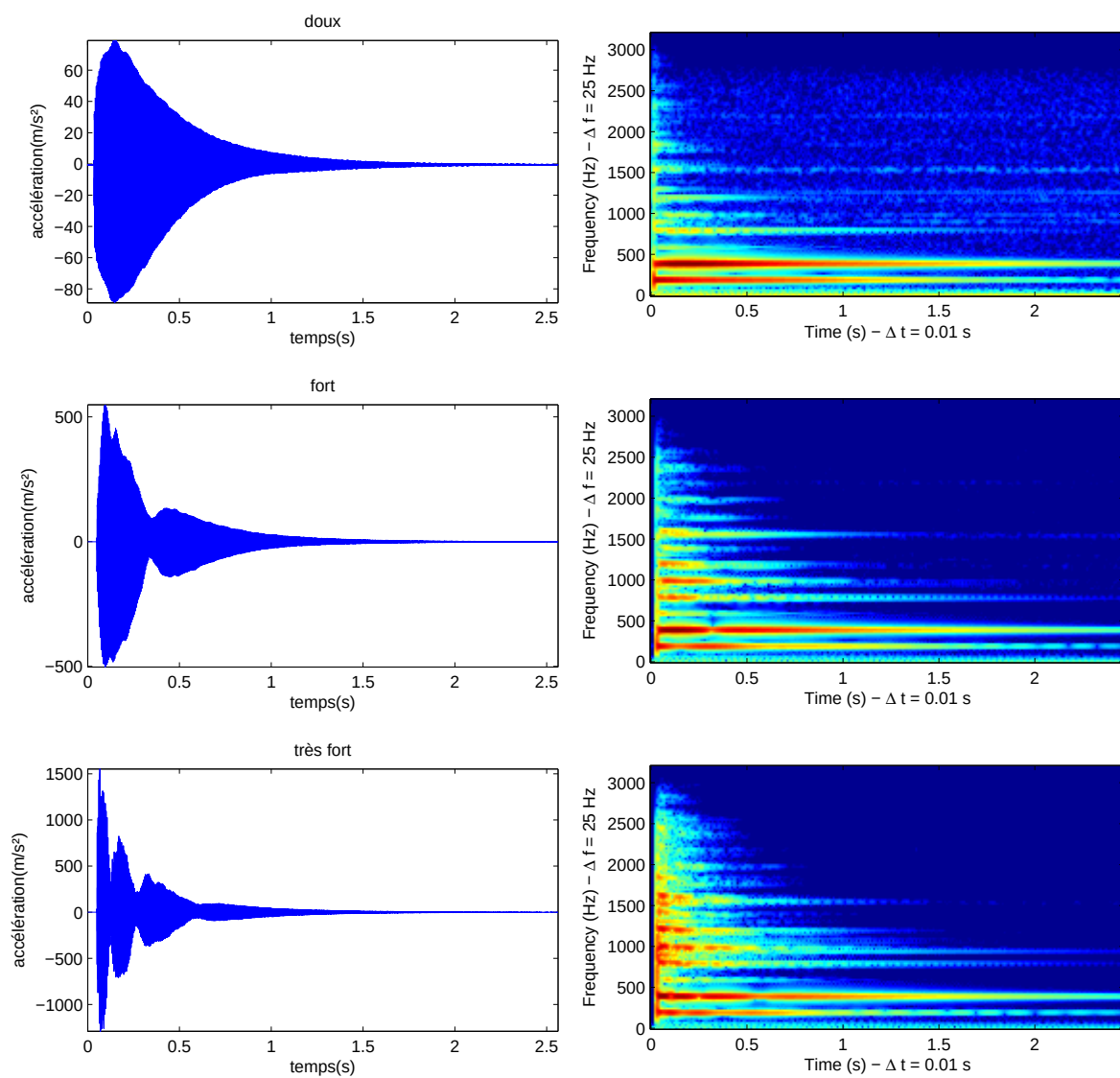


FIGURE 2.14 – *Double Second G3* : note frappée en son centre selon trois forces de frappe.

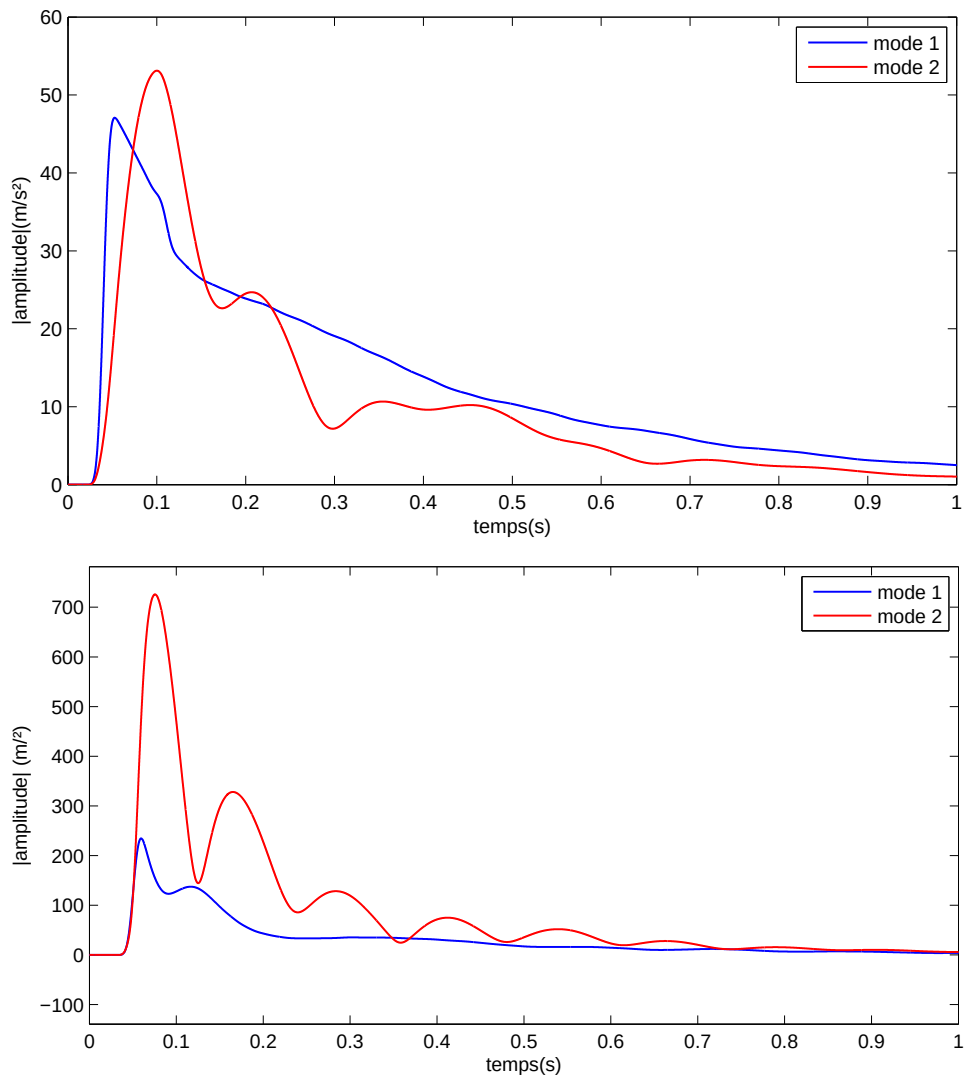


FIGURE 2.15 – *Double Second G3* : évolution temporelle de l'amplitude des deux premiers modes selon une frappe douce et une frappe très forte.

## 2.3 Conclusion partielle

Le *Steelpan* est une structure qui présente une réponse vibratoire complexe. C'est une structure à géométrie sphérique sur laquelle sont façonnés des sous-ensembles en forme de dôme qui constituent différentes notes accordées. Ces notes sont délimitées et séparées les unes des autres par un anneau poinçonné appelé *grooves*. Pour caractériser son comportement vibratoire, on a réalisé des expériences selon deux types d'excitation : une excitation sinusoïdale pour l'analyse modale et une excitation de type impulsion pour l'analyse des oscillations libres.

L'analyse modale a permis de déterminer les paramètres linéaires du système : tels que les fréquences de résonances et les déformées modales associées aux modes de vibrations de la structure.

- À l'intérieur du bidon, les notes sont agencées de sorte à ce qu'elles soient en relation harmonique. Les octaves sont alignées de l'extérieur vers le centre et deux notes consécutives sont souvent en relation de quinte. Cela implique l'existence de fréquences de résonance communes entre deux notes. Pour une fréquence d'excitation donnée, on a pu observer que plusieurs notes étaient sollicitées et présentaient des déformations différentes.
- En réponse à une excitation extérieure, le mouvement reste confiné autour du point d'application. Les modes de la structure, dans son ensemble, sont des modes localisés.
- On s'est alors concentré sur la déformation d'une note particulière, celle sur laquelle était appliquée l'excitation. Sa réponse fréquentielle a montré qu'elle possède de nombreux modes de vibrations, dont les premières fréquences sont en relation quasi harmonique, soit rapport quasi entier par rapport à la fréquence fondamentale (fréquence du mode 1). On a également identifié les déformées de ces premiers modes dont l'ordre d'apparition se trouve être le même sur l'ensemble des notes quelque soit le *Steelpan* étudié ((0,0) - (0,1) - (1,0) pour les trois premiers).

L'analyse des oscillations libres d'une note de la structure a permis de mettre en évidence un comportement non linéaire de l'instrument. Les deux premiers modes, de déformée (0,0) et (0,1), interagissent par transfert d'énergie du mode 1 vers le mode 2. On a remarqué que ce phénomène était responsable de modulation d'amplitude dans les signaux temporels d'autant plus présents que l'impact était intense. Ce couplage 1 : 2 est déjà présent avec frappe douce. Il est facilité par le rapport harmonique accordé. Comme cela sera montré dans la suite du rapport, quand on a une résonance 1 : 2 et que l'on excite le mode de basse fréquence, le couplage vers le mode 2 est immédiat.

Ces réponses sont caractéristiques des premiers effets non linéaires que l'on observe théoriquement sur des oscillateurs non linéaires couplés. On va alors chercher à modéliser ce couplage en considérant qu'une note, qui est en forme de dôme, peut être vue comme une coque mince à géométrie quasi sphérique.

## Chapitre 3

# Vibrations de systèmes non linéaires type coques minces

Des non linéarités dans les vibrations des *Steelpan*s ont été observées au chapitre précédent. Notamment, on a montré que le contenu fréquentiel de la réponse de la structure dépend de l'intensité de la frappe et qu'il existe aussi des échanges d'énergie entre deux partiels de rapport harmonique ( $\omega_2 \approx 2\omega_1$ ).

Ces phénomènes sont caractéristiques des vibrations non linéaires de structures minces. Ici, le non linéaire est de type géométrique. Il provient de grands déplacements de la structure [13] [22]. Ce chapitre présente de manière théorique l'établissement des équations de vibrations de structures minces, de type coques, soumises à de grands déplacements (de l'ordre de l'épaisseur). L'écriture générale du modèle sera résolue dans des cas simples par projection modale tronquée. On comparera alors les résultats obtenus par l'expérience dans le cas d'une note de *Steelpan* soumise à des oscillations forcées de grandes amplitudes.

### 3.1 Analyse non linéaire

Compte tenu de la géométrie compliquée des *Steelpan*s, il n'existe pas de modèle analytique réaliste capable de reproduire quantitativement les comportements vibratoires observés. Il faudrait, pour cela, avoir recours à une modélisation numérique, par exemple par la méthode des éléments finis. Dans le cadre non linéaire, selon l'auteur, seuls des modèles simplifiés par A.Achong ont été publiés [21]. Ils proposent de modéliser simplement une note, sous la forme d'une calotte sphérique, en vibrations non linéaires, encastrée au bord.

Ici, seul un modèle théorique qualitatif est proposé. Il est résolu par projection modale. Puis, par troncature, des modèles simplifiés sont proposés, en vue de les utiliser dans le dernier chapitre pour expliquer certains résultats expérimentaux.

#### 3.1.1 Cadre général, non linéarités géométriques

Lorsqu'une structure mécanique mince est sujette à des sollicitations créant de grands déplacements, de l'ordre de son épaisseur, des non linéarités liées à des effets géométriques apparaissent. Dans ce cas, la relation de déformation du déplacement n'est plus linéarisable, bien que le matériau reste élastique linéaire. Un modèle linéaire ne permet plus de rendre compte des observations de manière satisfaisante. On relâche donc l'hypothèse des petites perturbations considérées lors des problèmes mécaniques linéaires.

De manière générale, le déplacement transversal  $w$  d'une structure mince occupant un domaine  $\mathcal{D}$  de frontière  $\partial\mathcal{D}$  et soumise à une pression extérieure de contact  $p$ , est régi par les équations non linéaires de vibrations :

$$\begin{cases} \ddot{w}(x, t) + \mathcal{L}(w(x, t)) + \mathcal{N}_2(w(x, t)) + \mathcal{N}_3(w(x, t)) = p(x, t) & \forall t, \forall x \in \mathcal{D} \\ \mathcal{B}(w(x, t)) = 0 & \forall \vec{x} \in \partial\mathcal{D} \end{cases} \quad (3.1)$$

où :  $t$  et  $x$  sont respectivement les variables de temps et d'espace, et  $\mathcal{L}$  est l'opérateur linéaire,  $\mathcal{N}_2$  l'opérateur non linéaire quadratique,  $\mathcal{N}_3$  l'opérateur non linéaire cubique et  $\mathcal{B}$  représente les conditions aux limites du problème posé.

Naturellement, le problème redevient linéaire lorsque l'on pose  $\mathcal{N}_i = 0$ .

### 3.1.2 Cas particulier : équations non linéaires de coques sphériques

Pour illustrer l'équation (eq. 3.1), des modèles analytiques existent dans le cas de géométrie simple. Par exemple, dans le cas d'une calotte sphérique de rayon de courbure  $R$  et de diamètre extérieur  $2a$ , si  $R \gg 2a$  et que l'épaisseur  $h$  est faible (fig. 3.1), alors les équations dynamiques (eq. 3.1) s'écrivent [25] [22] :

$$D\Delta\Delta w + \frac{1}{R}\Delta F + \rho h\ddot{w} = \mathcal{L}(w, F) + p \quad (3.2a)$$

$$\Delta\Delta F - \frac{Eh}{R}\Delta w = -\frac{Eh}{2}\mathcal{L}(w, w) \quad (3.2b)$$

où :  $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$  est la rigidité de flexion,  $F$  est une fonction représentant le chargement du plan moyen,  $\Delta$  le Laplacien, et  $\mathcal{L}$  l'opérateur quadratique bilinéaire définis par :

$$\Delta(\cdot) = (\cdot)_{,rr} + \frac{1}{r}(\cdot)_{,r} + \frac{1}{r^2}(\cdot)_{,\theta\theta}$$

et

$$\mathcal{L}(w, F) = w_{,rr} \left( \frac{F_{,r}}{r} + \frac{F_{,\theta\theta}}{r^2} \right) + F_{,rr} \left( \frac{w_{,r}}{r} + \frac{w_{,\theta\theta}}{r^2} \right) - 2 \left( \frac{w_{,r\theta}}{r} - \frac{w_{,\theta}}{r^2} \right) \left( \frac{F_{,r\theta}}{r} - \frac{F_{,\theta}}{r^2} \right)$$

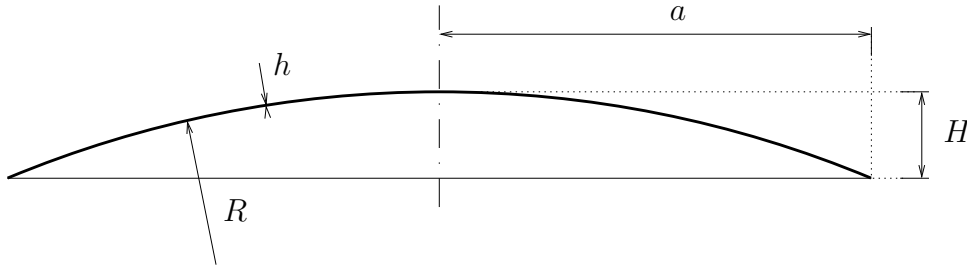


FIGURE 3.1 – Dessin d'une coque mince sphérique.

Nous pouvons remarquer que dans le cas d'une plaque, le rayon de courbure tend vers l'infini, les équations du mouvement (eq. 3.2) deviennent [21] :

$$\rho h\ddot{w} + D\Delta\Delta w = \mathcal{L}(w, F) - c\dot{w} + p \quad (3.3a)$$

$$\Delta\Delta F = -\frac{Eh}{2}\mathcal{L}(w, w) \quad (3.3b)$$

On retrouve alors le terme d'inertie  $\rho h\ddot{w}$ , une raideur linéaire  $D\Delta\Delta w$  et  $\Delta\Delta F$ , et les termes de couplages non linéaires  $\mathcal{L}(w, F)$  et  $-\frac{Eh}{2}\mathcal{L}(w, w)$ .

Ces équations montrent que dans le cas d'une structure plane,  $F$  est proportionnelle à  $w^2$ . Le terme  $\mathcal{L}(w, F)$  crée un terme non linéaire cubique.

Si maintenant la structure est incurvée (cas des coques en général et du *Steelpan* en particulier), il y a en plus un couplage linéaire membrane/flexion qui produit d'autres termes non linéaires quadratiques.

### 3.1.3 Discrétisation du problème : couplage non linéaire

On commence par calculer les modes propres  $(\Phi_i(x), \omega_i)$  du problème linéaire associé au problème non linéaire que l'on cherche à résoudre. Par exemple, pour les équations (eq. 3.2), il s'agit de résoudre :

$$\begin{cases} \ddot{w} + \mathcal{K}(w(x, t)) = 0 \\ \mathcal{B}(w(x, t)) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mathcal{K}(\Phi) - \omega^2 \Phi = 0 \\ \mathcal{B}(\Phi) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Les  $\Phi_i(x)$  formant une base de l'espace des solutions, on cherche  $w(x, t)$  sous la forme :

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^N \Phi_k(x) q_k(t) \quad (3.5)$$

On reporte ce développement dans les équations du mouvement et on obtient :

$$\ddot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) + \epsilon_q \sum_{i,j=1}^N \beta_{ij}^k q_i(t) q_j(t) + \epsilon_c \sum_{i,j,l=1}^N \Gamma_{ijl}^k q_i(t) q_j(t) q_l(t) = Q_i(t) \quad (3.6)$$

où on a ajouté un terme d'amortissement visqueux linéaire de facteur  $\xi_k$ .  $\omega_k$  est la pulsation propre du mode  $k$ .

Dans le cas de la structure plane, les  $\beta_{ij}^k$  sont tous nuls. Les non linéarités sont cubiques uniquement. Autrement dit, les  $\beta_{ij}^k$  proviennent de la courbure de la structure. Dans notre cadre d'étude centré sur les *Steelpan*s, les  $\beta_{ij}^k$  sont non nuls. Un modèle réaliste doit donc inclure les termes quadratiques.

On remarque dans l'équation (eq. 3.6) que les termes de couplages non linéaires sont affectés de coefficients  $\epsilon$  qui apparaissent en adimensionnant les équations. On peut montrer que  $\epsilon_c$  est proportionnel à  $\epsilon_q^2$ , ce qui prouve que les termes non linéaires cubiques sont d'un ordre de grandeur inférieur aux termes quadratiques lorsque  $\epsilon_c$  et  $\epsilon_q^2$  sont petits.

La formulation du problème est ici de dimension  $N$ , incluant des non linéarités géométriques. La projection modale fait apparaître des coefficients de couplage entre les modes des différents oscillateurs du système :  $\beta_{ij}^k$  dû à la courbure et au non linéaire géométrique et  $\Gamma_{ijl}^k$  dû au non linéaire géométrique.

## 3.2 Troncature et comportements non linéaires

De manière générale, on cherche à réduire ce système, qui est extrêmement complexe à résoudre, en limitant le nombre de degrés de libertés [25]. On se place dans le cadre d'un système non conservatif à  $N$  degrés de liberté. L'amortissement modal  $\mu_k$ , considéré ici, correspond à celui du mode linéaire associé à un oscillateur  $k$  du système.

Le système est soumis à une excitation extérieure sinusoïdale dont l'expression est du type :

$$Q(t) = F_k \cos \Omega t \quad (3.7)$$

où  $k$  est l'oscillateur sur lequel est appliqué le forçage et  $\Omega$  la fréquence d'excitation choisie.

### 3.2.1 Modèle à un degré de liberté

On se restreint, dans un premier temps, à un seul mode de vibration, soit un système à un seul degré de liberté. L'équation du mouvement (eq. 3.6), munie du terme d'amortissement visqueux  $\mu$  proportionnel à la vitesse, et simplifiée avec  $N = 1$ , s'écrit :

$$\ddot{q} + 2\mu\dot{q} + \omega_0^2 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 = F \cos \Omega t \quad (3.8)$$

où  $\alpha_2 = \epsilon_q \beta$  et  $\alpha_3 = \epsilon_c \Gamma$  sont les coefficients quadratiques et cubiques du système.

#### Influence des coefficients cubiques

Si, dans un premier temps on néglige les non linéarités quadratiques (cas des plaques), on obtient alors l'équation (3.9) appelée équation de Duffing :

$$\ddot{q} + 2\mu\dot{q} + \omega_0^2 q + \epsilon \alpha_3 q^3 = F \cos \Omega t \quad (3.9)$$

où :  $\epsilon$  est un petit paramètre [13].

Ce type de système peut se résoudre par la méthode des échelles multiples (voir annexe), qui consiste à introduire plusieurs échelles de temps :

$$T_n = \epsilon_n t, n \in N \quad (3.10)$$

et chercher la solution sous la forme du développement :

$$q(t) = q_0(T_0, T_1, \dots) + \epsilon q_1(T_0, T_1, \dots) + \epsilon^2 q_2(T_0, T_1, \dots) \quad (3.11)$$

On fait varier la fréquence de forçage  $\Omega$  autour de la fréquence de résonance du système  $\omega_0$ , soit :

$$\Omega = \omega_0 + \epsilon \sigma \quad (3.12)$$

où  $\sigma$  est le paramètre que l'on fait varier et appelé désaccord externe.

En première approximation et en régime permanent,  $q(t)$  (eq. 3.9) est de la forme :

$$q(t) = a \cos(\Omega t - \gamma) + O(\epsilon) \quad (3.13)$$

ou encore, l'expression du déplacement devient :

$$w = a \phi_0 \cos(\Omega t - \gamma) \quad (3.14)$$



La résolution du système permet de trouver une solution pour l'amplitude  $a$  telle que [13] :

$$a^2[\mu^2 + (\sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha_3}{\omega_0} a^2)^2] = \frac{F^2}{4\omega_0^2} \quad (3.15)$$

Une étude de stabilité des solutions d'un tel oscillateur permet de montrer qu'il existe des solutions stables et instables (respectivement tracées en traits pleins et pointillés sur la figure (fig. 3.2)). En régime permanent, le système se stabilise sur l'une des solutions stables en fonction des conditions initiales [20]. On peut alors observer des phénomènes de saut d'une solution stable à l'autre lorsque la fréquence d'excitation varie lentement. Ceci implique un comportement d'hystérésis selon si l'on parcourt la plage de fréquences de manière croissante ou décroissante.

D'autre part, quand on fait varier l'amplitude de la force d'excitation, on peut voir que la courbe de réponse tend à s'incurver. On a donc une dépendance de la fréquence de résonance en fonction de l'amplitude du forçage.

Le coefficient non linéaire cubique ( $\alpha_3$ ) est responsable du côté dont la courbe est incurvée. Pour  $\alpha_3 = 0$ , on se situe dans le cas linéaire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par la fréquence de résonance. Pour  $\alpha_3 > 0$  la courbe s'incline vers la droite, le comportement de la solution est raidissant (*hardening*) ; inversement, pour  $\alpha_3 < 0$ , la courbe est incurvée vers la gauche, le comportement est assouplissant (*softening*).

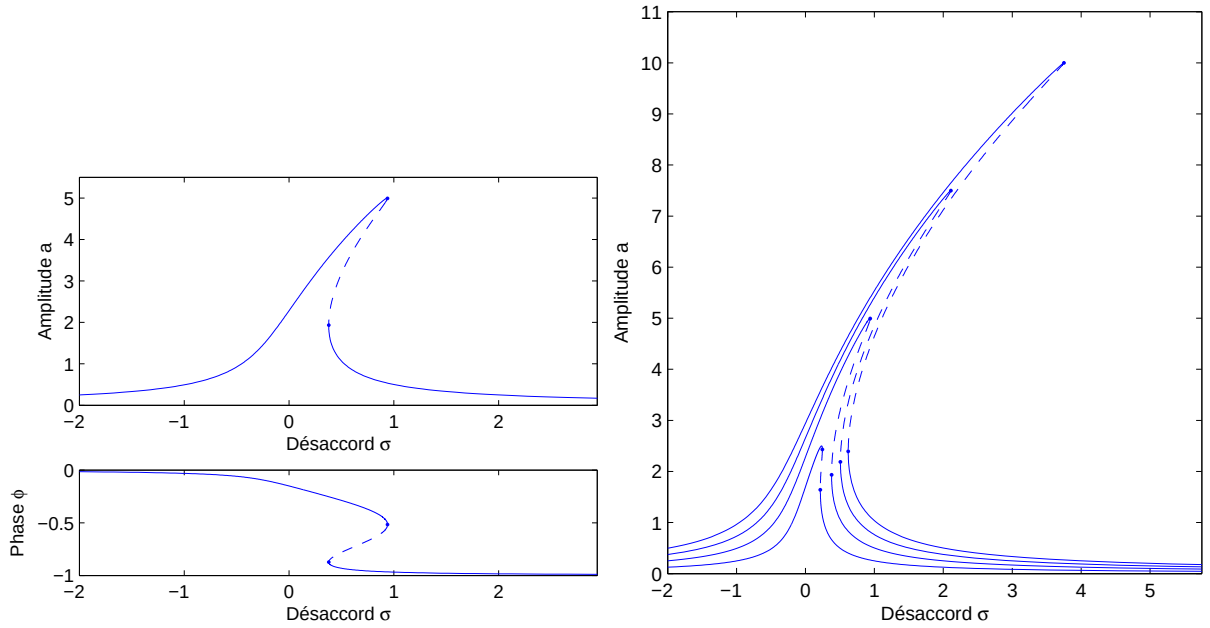


FIGURE 3.2 – À gauche : amplitude et phase d'un oscillateur de Duffing forcé par une excitation sinusoïdale. Paramètres :  $\alpha_3 = 0.1$  ;  $\mu = 0.1$  ;  $f = 1$ . À droite : amplitude solution soumise à différentes amplitudes de forçage. Paramètres :  $\alpha_3 = 0.1$  ;  $\mu = 0.1$  ;  $f = 0.5, 1, 1.5, 2$ .

L'approximation du déplacement, au second ordre, donne :

$$q = a \cos(\Omega t - \gamma) + \epsilon \frac{\alpha_3 a^3}{32\omega_0^2} \cos(3\Omega - 3\gamma) + O(\epsilon^2) \quad (3.16)$$

On constate alors que le non linéaire entraîne une distorsion du signal en ajoutant des composantes fréquentielles de fréquence  $3\Omega, 5\Omega, \dots$ , soient des harmoniques impairs.

### Ajout de non linéarités quadratiques

Dans le cas d'une géométrie de coques, on a vu que la courbure de la structure impose la présence de termes non linéaires quadratiques. En restant à un seul degré de liberté, l'équation de Duffing se voit affectée d'un nouveau terme non linéaire :

$$\ddot{q} + 2\mu\dot{q} + \omega_0^2 q + \alpha_2 q^2 + \alpha_3 q^3 = F \cos \Omega t \quad (3.17)$$

Une nouvelle approximation permet d'exprimer le déplacement [13] :

$$q = a \cos(\Omega t - \gamma) + \frac{1}{2} \epsilon \alpha_2 \omega_0^2 a^2 \left[ -1 - \frac{1}{3} \cos(2\Omega t - 2\gamma) \right] + O(\epsilon^2) \quad (3.18)$$

On montre que l'on obtient une relation entre les coefficients cubiques et quadratiques telle que l'on peut poser  $\alpha = \alpha_3 \frac{10}{9} - \alpha_2^2 \omega_0^{-2}$ .

Lorsque  $\alpha_3 = 0$ ,  $\alpha < 0$ ; les non linéarités quadratiques incurvent la courbe de réponse en fréquence de manière *soft*.

Quelque soit  $\alpha_3 > \frac{10}{9} \alpha_2^2 \omega_0^{-2}$ ; les non linéarités ont également un effet *soft*.

Enfin, si  $\alpha_3 = \frac{10}{9} \alpha_2^2 \omega_0^{-2}$ ; les non linéarités quadratiques et cubiques s'annulent respectivement, la réponse redevient celle d'un système linéaire [13] (fig. 3.3).

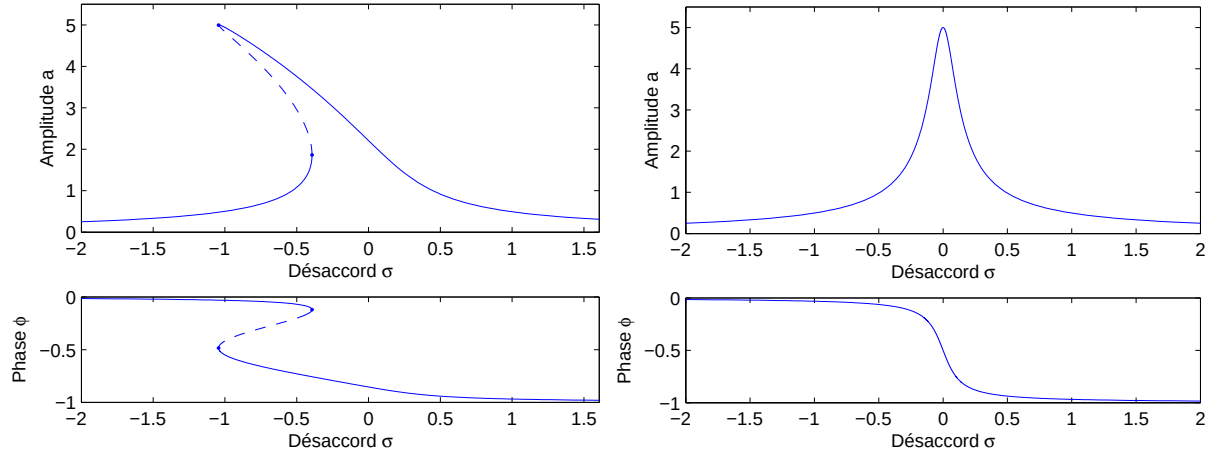


FIGURE 3.3 – Équation de duffing : influence des coefficients non linéaires cubiques et quadratiques. Paramètres : pour la courbe de gauche  $\alpha_2 = 1$ ;  $\alpha_3 = 10/9$ ;  $\mu = 0.1$ ;  $F = 1$ , pour la courbe de droite (courbe linéaire)  $\alpha_2 = 1$ ;  $\alpha_3 = 1$ ;  $\mu = 0.1$ ;  $F = 1$ .

Comme dans le cas précédent, l'approximation de la solution (eq. 3.18) introduit des termes harmoniques. La présence des coefficients quadratiques, dans les équations, conduit à ce que cette fois tous les multiples de la fréquence d'excitation soit représentés ( $\Omega, 2\Omega, \dots$ ).

### 3.3 Expérience : *Steelpan* soumis à des oscillations forcées

On va maintenant chercher à caractériser, de manière expérimentale, le comportement non linéaire du *Steelpan*. L'analyse linéaire nous avait permis d'identifier la valeur des fréquences propres des modes de vibrations de l'instrument. On place maintenant le *Steelpan* dans des conditions d'oscillations forcées autour de ces fréquences de résonances.

#### 3.3.1 Montage : excitation de la structure et acquisitions

On conserve le système d'excitation (bobine + aimant), utilisé lors de l'analyse modale. On fait varier lentement la fréquence d'excitation  $\Omega$  autour des fréquences propres  $\omega_k$  du système.

Le vibromètre laser est placé en un point fixe de la surface de la note excitée. Un amplificateur à verrouillage de phase a été utilisé à la fois pour générer une sinusoïde de référence dans la bande de fréquence d'excitation voulue et pour quantifier amplitude et phase du signal de réponse mesuré par le vibromètre à la fréquence d'excitation et aux fréquences multiples (quatre premiers harmoniques). (fig. 3.4). Un algorithme *Matlab* a été mis en place afin de commander le générateur de sinusoïde via l'interface *RS232* et de récupérer les données de mesure.

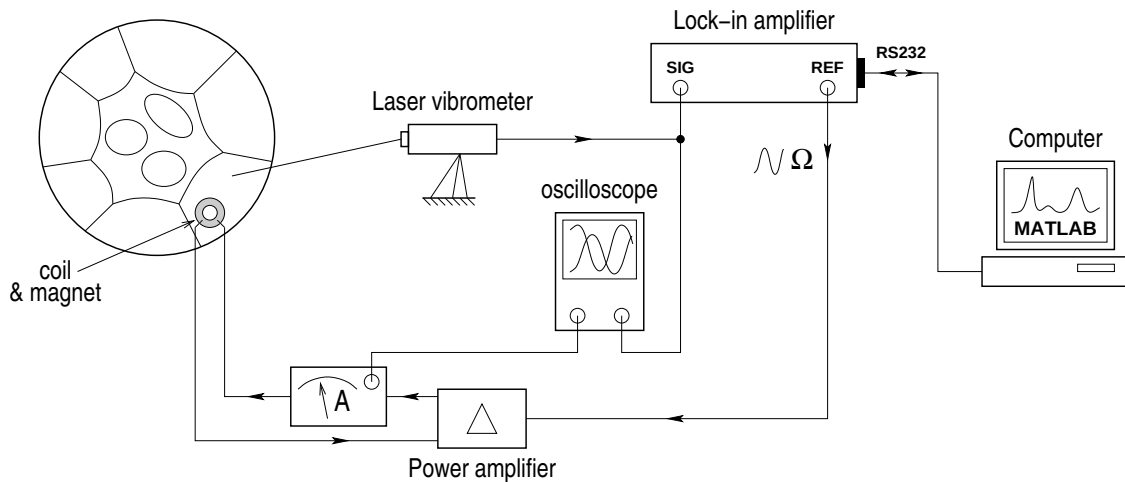


FIGURE 3.4 – Schéma de montage de l'expérience en oscillations forcées.

#### 3.3.2 Résultats : mise en évidence de phénomènes non linéaires

Les expériences ont confirmé qu'une note de *Steelpan* placée dans les conditions d'oscillations forcées avait un comportement vibratoire typiquement non linéaire.

La courbe expérimentale (fig. 3.5) montre la réponse mesurée en un point de la note B3 du *Double second* lorsqu'on l'excitait autour de la fréquence de résonance de son mode 3 selon trois intensités différentes de forçage.

On retrouve une courbe linéaire (symétrique par rapport à la fréquence de résonance) pour un faible forçage, qui tend à s'incurver vers la gauche lorsque l'on augmente l'intensité (comportement *soft*). On voit que la courbe d'amplitude tend à s'incurver de manière à pouvoir présenter

un phénomène de saut pour un forçage encore plus intense. Seulement, une des limite de l'expérience était que l'amplificateur du système d'excitation arrivait à saturation pour des intensités trop importantes. On observe également un changement de phase au moment de la résonance.

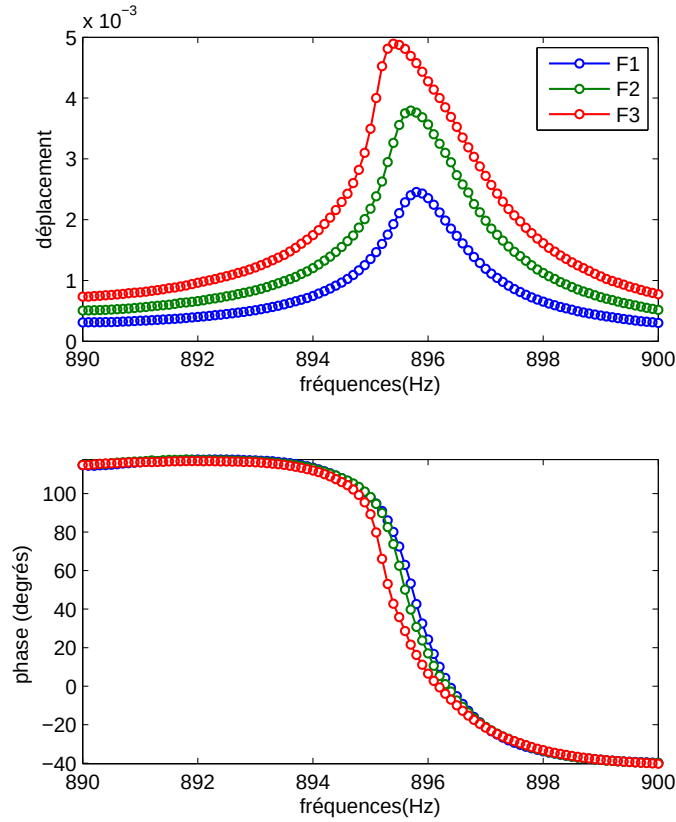


FIGURE 3.5 – *Double Second B3* : excitation autour de la fréquence propre du mode 3 : amplitude et phase.

Quand on place l'excitation autour des résonances des mode 1 et 2 (de la note G3 du *Double second*), la courbe de résonance est semblable à celle des systèmes non linéaires à deux degrés de liberté présentant un couplage fort entre ses deux oscillateurs (fig. 3.6). La réduction du modèle à un seul mode n'est donc pas suffisante à la représentation de la structure étudiée.

On peut aussi observer un phénomène de saut entre les différentes solutions stables. Le chemin emprunté n'est pas le même entre le balayage croissant et décroissant de la fréquence d'excitation. D'autre part il apparaît une zone d'instabilité (aux alentours de 193 Hertz), responsable d'un battement dans la solution temporelle. Dans cette plage de fréquences, le *Steelpan* passe d'un régime périodique à un régime quasi périodique.

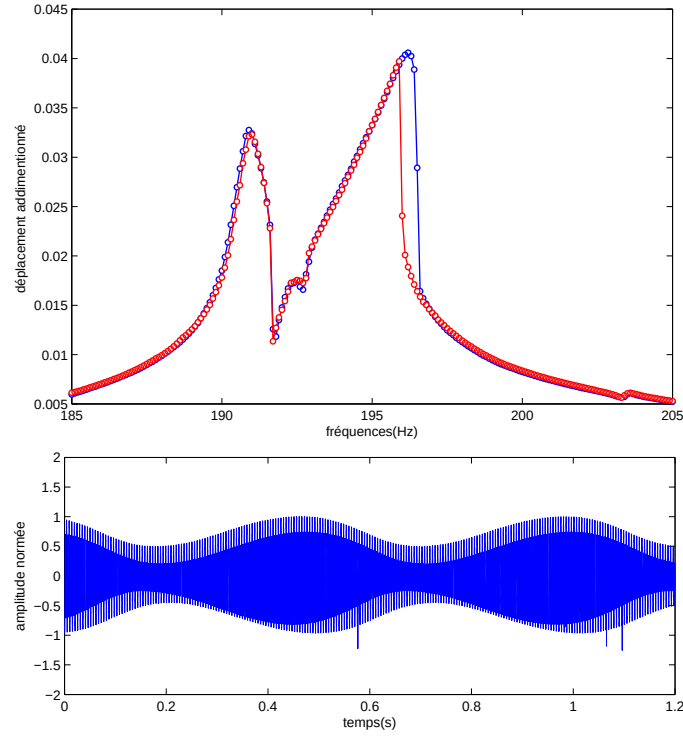


FIGURE 3.6 – *Double Second G3* : résonance autour du mode 1 - couplage intermodal. En haut, fréquence d'excitation croissante en bleu et décroissante en rouge. En bas, fréquence d'excitation située dans la zone instable, enregistrement de la réponse temporelle : visualisation d'un battement.

Un autre phénomène typique des systèmes non linéaires a été observé au cours des expériences : les résonances super-harmoniques. Cela consiste à exciter la système hors d'une résonance mais de parvenir à la solliciter lorsque fréquence d'excitation et fréquence propre sont en rapport  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{1}{3}$ . Dans le cas des *Steelpans* on a majoritairement relevé le cas des super-harmoniques pour  $\Omega \approx \frac{\omega_k}{2}$ .

La figure (fig. 3.7), montre le cas où le premier mode de vibration (de la note G3) est excité à sa fréquence moitié. La fréquence d'excitation balaie une plage de fréquences aux alentours de  $\Omega \approx \frac{\omega_1}{2}$  et on relève l'amplitude des quatres premiers harmoniques ( $\Omega \approx \frac{\omega_1}{2}$ ,  $2\Omega \approx \omega_1$ ,  $3\Omega \approx \frac{3\omega_1}{2}$  et  $4\Omega \approx 2\omega_1 \approx \omega_2$ ). On remarque que les harmoniques 2 et 4 ( $2\Omega$  et  $4\Omega$ ), correspondant aux fréquences des modes 1 et 2, présentent des amplitudes de résonances non négligeables alors que le système réagit peu aux harmoniques 1 et 3 ( $\Omega$  et  $3\Omega$ ).

### 3.3.3 Conclusion partielle

La théorie des vibrations des coques soumises à de grandes amplitudes nous a permis de mettre en évidence des phénomènes typiques de systèmes oscillants non linéaires comme la dépendance de la fréquence de résonance en fonction de l'amplitude de forçage, l'existence de solutions instables entraînant des sauts qui permettent le passage d'une solution stable à une autre, ainsi que de la distorsion harmonique qui enrichit le signal par l'apparition de composantes fréquentielles harmoniques.

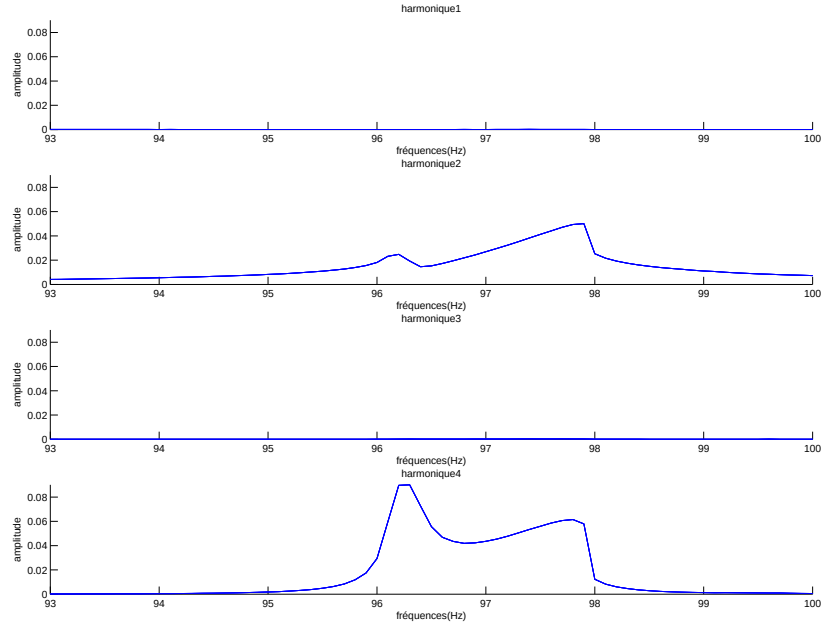


FIGURE 3.7 – *Double Second G3*, mode 1 : résonance super harmonique  $\Omega \approx \omega_1/2$ .

Les *Steelpan*s présentent ces phénomènes lorsqu'ils sont soumis à des oscillations forcées. Il est donc nécessaire de considérer la non linéarité géométrique dans la caractérisation de ce type de structure.

On a également constaté qu'un modèle à un seul oscillateur ne permettait pas de rendre compte du couplage entre les deux premiers modes que l'on avait d'abord observé lors des analyses en oscillations libres et que l'on vient de confirmer par l'expérience en oscillations forcées. Les résultats obtenus, sont semblables à la théorie comprenant deux oscillateurs couplés par les non linéarités quadratiques. Une modélisation du couplage est alors envisagée.

## Chapitre 4

# Modèle simple d'une note de *Steelpan*, cas d'une résonance 1 : 2

Pour terminer cette caractérisation vibratoire des *Steelpan*s, on concentre notre problème sur l'échange d'énergie entre les modes 1 et 2. Cette résonance interne est possible car les fréquences associées sont en relation harmonique ( $f_2 \approx 2f_1$ ).

Dans le cadre théorique, chacun des modes est un oscillateur, le système non linéaire sera donc limité à deux degrés de liberté. La géométrie (de type coque) impose des coefficients non linéaires quadratiques dans le modèle. Les résultats théoriques seront comparés aux courbes expérimentales dans le but d'identifier ces coefficients.

### 4.1 Théorie non linéaire

Lors des analyses modales linéaires, on a pu observer qu'il existait un rapport de fréquence double entre les deux premiers modes de vibration d'une note d'un *Steelpan*. Ces fréquences sont accordées le plus justement possible par le *tuner*. Soit  $f_1 \approx 2f_2$ .

Afin de représenter l'interaction que cela implique lorsque l'instrument est soumis à des vibrations grandes amplitudes, on affine le modèle non linéaire du chapitre précédent, en considérant un degré de liberté supplémentaire. Chacun des oscillateurs du système représente un des deux modes considérés.

#### 4.1.1 Équations de couplage

La modélisation de la structure, vue comme un système à seulement deux degrés de liberté, permet de décrire le déplacement comme la somme des contributions spatiales et temporelles de chacun des modes considérés :

$$w(x, t) = \Phi_1(x)q_1(t) + \Phi_2(x)q_2(t) \quad (4.1)$$

Conservant les équations du mouvement, dans le cas des coques minces, on peut, en première approximation, ne conserver que les termes quadratiques. Le nouveau système s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\mu_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \epsilon_q(\beta_{11}q_1^2 + \beta_{12}q_1q_2 + \beta_{13}q_2^2) &= F_1 \cos \Omega t \\ \ddot{q}_2 + 2\mu_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \epsilon_q(\beta_{21}q_1^2 + \beta_{22}q_1q_2 + \beta_{23}q_2^2) &= F_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (4.2)$$

où :  $\mu_i = \xi_i \omega_i$  est un paramètre d'amortissement fluide.

Des termes de couplages quadratiques  $\beta_{ij}$  entre les deux oscillateurs apparaissent. Si l'on injecte de l'énergie sur l'oscillateur 1 alors l'oscillateur 2 va répondre avec une amplitude de même ordre de grandeur. Ce phénomène est appelé résonance interne entre les modes 1 et 2 (notée résonance 1 : 2). Aussi, parmi les termes de couplage, certains sont responsables des couplages forts entre  $q_1$  et  $q_2$ . En ne conservant que les couplages forts, le système simplifié s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\mu_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \alpha_1 q_1 q_2 &= F_1 \cos \Omega t \\ \ddot{q}_2 + 2\mu_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \alpha_2 q_1^2 &= F_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (4.3)$$

où :

- $\alpha_1 = \epsilon_q \beta_{12}$  : coefficient non linéaire quadratique du terme résonant de l'équation 1.
- $\alpha_2 = \epsilon_q \beta_{21}$  : coefficient non linéaire quadratique du terme résonant de l'équation 2.

La résonance 1 : 2 est possible lorsque les fréquences propres des oscillateurs 1 et 2 sont en relation quasi harmonique. Soit :

$$\omega_2 \approx 2\omega_1 \quad (4.4)$$

ou encore

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon\sigma_1 \quad (4.5)$$

où :  $\sigma_1$  est le paramètre de désaccord interne entre les fréquences  $f_i = \omega_i/2\pi$ , et  $\epsilon$  est un paramètre qui rend le désaccord faible.

#### 4.1.2 Résolution analytique

Deux cas se présentent pour résoudre ce type de système, suivant si l'on place l'excitation de forçage sur l'oscillateur 1 ou sur l'oscillateur 2. La résolution par la méthode des échelles multiples, ainsi que la définition des paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont détaillés en annexe.

On se place dans le premier cas, où la fréquence d'excitation est proche de la fréquence propre du mode 1, soit  $\Omega \approx \omega_1$ . Alors le système à résoudre est :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\mu_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \alpha_1 q_1 q_2 &= F_1 \cos \Omega t \\ \ddot{q}_2 + 2\mu_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \alpha_2 q_1^2 &= 0 \end{cases} \quad (4.6)$$

On fait l'hypothèse que chacun des modes ne subit la contribution que d'une seule harmonique, alors :

$$\begin{cases} q_1 \approx a_1 \cos(\Omega t - \gamma_1) \\ q_2 \approx a_2 \cos(2\Omega t - \gamma_2 - 2\gamma_1) \end{cases} \quad (4.7)$$

Calculs faits, les amplitudes peuvent être exprimées en fonction des paramètres du système :

$$a_1 = \sqrt{\frac{4\omega_2 a_2}{\alpha_2 \Gamma}} \quad (4.8a)$$

$$a_2^3 + a_2^2 \frac{8\omega_1 \Gamma}{\alpha_1} [\mu_1 \mu_2 + \sigma_2 (\sigma_1 - 2\sigma_2)] + a_2 \frac{16\omega_1^2}{\alpha_1^2} [\mu_1^2 + \sigma_2^2] = \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \frac{\Gamma}{\omega_2} f_1^2 \quad (4.8b)$$

$$\text{avec } \Gamma = \frac{1}{\sqrt{(\sigma_1 - 2\sigma_2)^2 + \mu_2^2}} \quad (4.8c)$$



Le déplacement est donc de la forme :

$$w(x, t) = \Phi_1(x)a_1 \cos(\Omega t - \gamma_1) + \Phi_2(x)a_2 \cos(2\Omega t - \gamma_2 - 2\gamma_1) \quad (4.9)$$

avec  $a_1$  et  $a_2$  définis par les équations (eq. 4.8).

Dans le cas où c'est l'oscillateur 2 qui est excité directement, soit  $\Omega \approx \omega_2$ , le système à considérer est :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + 2\mu_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \alpha_1 q_1 q_2 = 0 \\ \ddot{q}_2 + 2\mu_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \alpha_2 q_1^2 = F_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (4.10)$$

Après hypothèse de contribution des harmoniques sur les modes, on obtient :

$$\begin{cases} q_1 \approx a_1 \cos(\frac{\Omega}{2}t - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}) \\ q_2 \approx a_2 \cos(\Omega t - \gamma_1) \end{cases} \quad (4.11)$$

et les amplitudes solutions sont :

$$a_1 = 2\sqrt{-\Gamma_1 \pm \sqrt{\frac{F^2}{4\alpha_2^2} - \Gamma_2^2}} \quad (4.12a)$$

$$a_2 = \frac{2\omega_1}{\alpha_1} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4\mu_1^2} \quad (4.12b)$$

$$\text{avec } \Gamma_1 = \frac{2\omega_1\omega_2}{\alpha_1\alpha_2} [2\mu_1\mu_2 - \sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (4.12c)$$

$$\text{et } \Gamma_2 = \frac{2\omega_1\omega_2}{\alpha_1\alpha_2} [2\mu_1\sigma_2 - \mu_2(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (4.12d)$$

Dans ce cas, le déplacement est :

$$w(x, t) = \Phi_1(x)a_1 \cos(\frac{\Omega}{2}t - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}) + \Phi_2(x)a_2 \cos(\Omega t - \gamma_1) \quad (4.13)$$

avec  $a_1$  et  $a_2$  définis par (eq. 4.12).

La figure (fig. 4.1) montre les courbes représentatives des amplitudes  $a_1$  et  $a_2$  des oscillateurs couplés en fonction du paramètre de désaccord  $\sigma_2$  dans les deux cas d'excitation ( $\Omega \approx \omega_1$  et  $\Omega \approx \omega_2$ ). Selon les valeurs des paramètres, on peut montrer qu'il existe des solutions stables (traits pleins) et des solutions instables (pointillés) qui vont entraîner des sauts d'amplitude dans la vibration notamment aux moments des transferts passant d'une solution stable d'un mode à la solution stable de l'autre.

## 4.2 Expérience : recalage et identification des coefficients non linéaires quadratiques

Pour pouvoir identifier expérimentalement chacune des inconnues des équations des amplitudes exprimées précédemment, on mesure les amplitudes de vibrations des deux modes, ainsi que celles de leurs harmoniques nécessaires à la comparaison théorie/expérience.

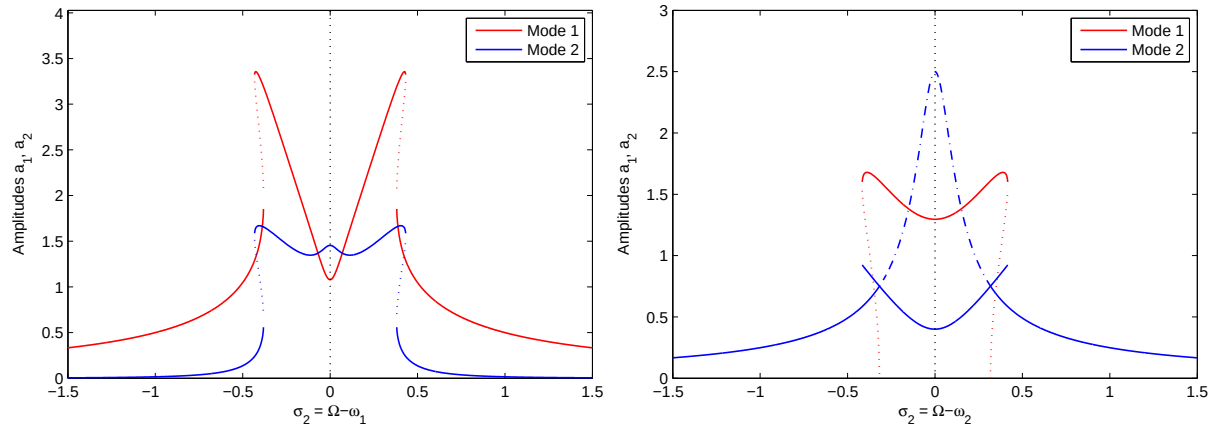


FIGURE 4.1 – Amplitudes théoriques, solutions du système couplé à deux degrés de liberté. À gauche  $\Omega \approx \omega_1$ . À droite  $\Omega \approx \omega_2$ . Paramètres :  $\sigma_1 = 0$  ;  $\mu_1 = 0.1$  ;  $\mu_2 = 0.1$  ;  $\alpha_1 = 1$  ;  $\alpha_2 = 1$  ;  $F = 1$ .

#### 4.2.1 Montage Expérimental

On place l'instrument (de nouveau la note G3 du *Double second*) sous une excitation sinusoïdale. On fait varier progressivement la fréquence du générateur de courant, et on vient mesurer, au vibromètre laser placé en un point fixe de la note excitée, la vitesse du déplacement autour de la fréquence propre des deux modes. Les équations (eq. 4.7 et 4.11) montrent qu'il est nécessaire, dans le premier cas ( $\Omega \approx \omega_1$ ) de mesurer aux alentours de  $\Omega$  et de  $2\Omega$ , soit les harmoniques 1 et 2 du signal d'excitation. Cette expérience est identique à celle réalisée dans le chapitre précédent (fig. 3.4). Alors que dans le second cas ( $\Omega \approx \omega_2$ ), c'est aux fréquences  $\Omega$  et de  $\Omega/2$ , soient les harmoniques 1 et 1/2 de l'excitation. Pour cela, nous avons mis en place un montage expérimental composé de deux amplificateurs à verrouillage de phase (fig. 4.2). Le premier génère une sinusoïde à la fréquence d'excitation et le second permet la mesure des amplitudes des harmoniques souhaitées grâce à son générateur interne de référence.

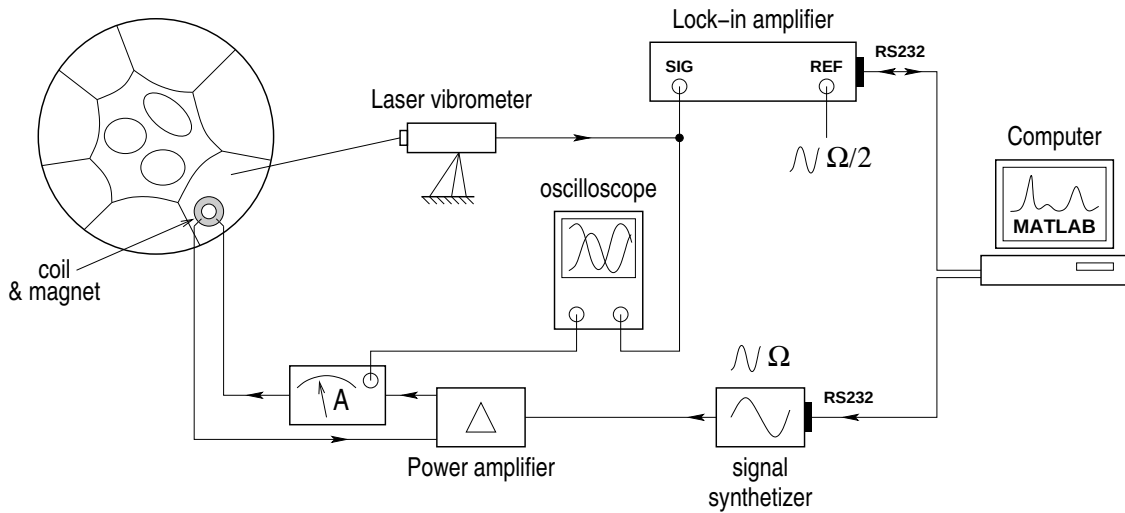


FIGURE 4.2 – Montage expérimental : mesure de la vibration du couplage.

### 4.2.2 Comparaison entre expérience et théorie

Dans le but de comparer nos mesures à la théorie établie plus haut, il est nécessaire d'ajuster et de fixer certains paramètres expérimentaux.

Pour bien comparer théorie et expérience, on choisit d'adimensionner les équations :

$$\begin{cases} w(x, t) = \Phi_1(x)q_1(t) + \Phi_2(x)q_2(t) \\ \ddot{q}_1 + 2\mu_1\dot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \alpha_1 q_1 q_2 = F_1 \cos \Omega t \\ \ddot{q}_2 + 2\mu_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \alpha_2 q_1^2 = F_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (4.14)$$

On définit les adimensionnements suivants :

$$\bar{w} = w/w_0, \bar{q}_1 = q_1/w_0, \bar{q}_2 = q_2/w_0, \bar{t} = t/T_0 \text{ et } \omega = T_0\omega \quad (4.15)$$

On obtient alors exactement le même système que précédemment avec :

$$\begin{cases} (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2) = T_0^2 \omega_0 (\alpha_1, \alpha_2) \\ (\bar{F}_1, \bar{F}_2) = \frac{T_0^2}{\omega_0} (F_1, F_2) \end{cases} \quad (4.16)$$

Pratiquement, on veut que les variables soient proches de 1. Pour cela, on choisit :

$$\begin{cases} w_0 = 1mm \\ T_0 = \frac{1}{\omega_1} = \frac{1}{2\pi f_1} \end{cases} \quad (4.17)$$

de sorte que,

$$\bar{\omega}_1 = \omega_1 T_0 = 1 \text{ et } \bar{\omega}_2 = \omega_2 / \omega_1 \quad (4.18)$$

Le déplacement mesuré s'écrit :

$$\bar{w} = \bar{w}_1 \cos(\bar{\Omega}t + \phi_1) + \bar{w}_2 \cos(2\bar{\Omega}t + \phi_1) \quad (4.19)$$

avec

$$\bar{w}_1 = \frac{v_1}{\omega_0 2\pi f_{exc}} \bar{w}_2 = \frac{v_2}{\omega_0 2\pi f_{exc}} \quad (4.20)$$

où :  $(v_1, v_2)$  sont les amplitudes des harmoniques 1 et 2 du signal de vitesse mesuré.

On cherchera, par la suite, à comparer les amplitudes  $\bar{w}_1$  et  $\bar{w}_2$  mesurées expérimentalement aux amplitudes des déplacements théoriques  $\Phi_1 a_1$  et  $\Phi_2 a_2$  solutions du système couplé (eq. 4.2), compte tenu de (eq. 4.9 et 4.13). Pour cela, les paramètres à déterminer sont :

- $\omega_1$  et  $\omega_2$  : les fréquences propres des modes 1 et 2
- $\xi_1$  et  $\xi_2$  : les coefficients d'amortissement tels que  $\mu_i = \omega_i \xi_i$
- $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  : l'amplitude des déformées modales associées aux modes
- $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  : les coefficients non linéaires quadratiques donnant lieu au couplage
- $F_1$  et  $F_2$  : l'amplitude de forçage imposée aux oscillateurs.

### 4.2.3 Paramètres déterminés par l'étude linéaire

Les analyses modales, vues au chapitre 2, permettent d'ores et déjà d'identifier un certain nombre de paramètres. En effet, le système linéaire associé est :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + 2\mu_1 \dot{q}_1 = F_1 \cos \Omega t \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + 2\mu_2 \dot{q}_2 = F_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (4.21)$$

Avec une amplitude d'excitation  $F_1 = F_2$  suffisamment faible, pour se placer dans le cadre linéaire, on remarque que les oscillateurs sont découplés. Le premier entre en résonance lorsque  $\Omega = \omega_1$  et le second lorsque  $\Omega = \omega_2$ .

Le logiciel *Modan* a été utilisé pour déterminer les paramètres d'amortissement. À partir de la fonction de réponse en fréquence et du maillage défini, il permet une interpolation sur une bande fréquentielle choisie. Pour la partie du spectre sélectionnée, on peut extraire un lissage de la courbe par la somme des résonances associées aux déformées opérationnelles (fig. 4.3) ainsi que la valeur des fréquences propres et des amortissements modaux associés.

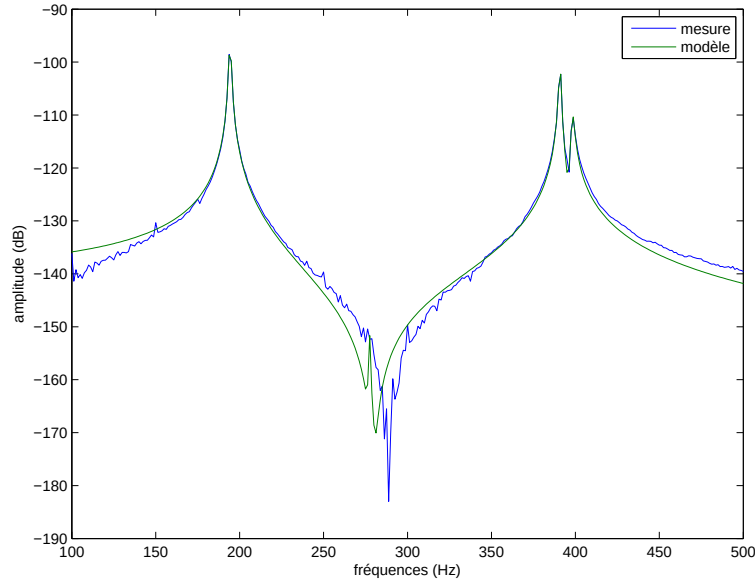


FIGURE 4.3 – *Double Second G3* : détermination des amortissements modaux des deux premiers modes. Visualisation des FRF au point d'excitation. Valeurs obtenues :  $\omega_1 = 194.32$  Hz /  $\xi_1 = 0.0024$  et  $\omega_2 = 390.82$  Hz /  $\xi_2 = 0.0014$ .

L'amplitude spatiale relative entre les déformées modales peut aussi être déterminée par l'analyse modale linéaire (fig. 4.4). Pour cela, on trace, grâce au logiciel d'acquisition *Polytech Scanner Vibrometer*, l'amplitude de la déformée sur une droite passant par le point de mesure.

Les paramètres restants,  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  seront ajustés en cherchant à superposer modèles théoriques et courbes expérimentales.

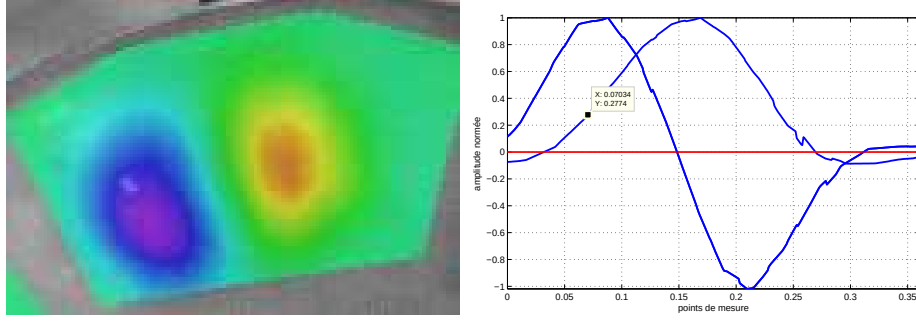


FIGURE 4.4 – *Double Second* G3 : amplitude des déformées des modes 1 et 2. Valeurs obtenues :  $\Phi_1 = 0.27$   $\Phi_2 = 0.97$ .

| Paramètres fixés             | mode 1    | mode 2    |
|------------------------------|-----------|-----------|
| Fréquences propres linéaires | 194.32 Hz | 390.82 Hz |
| Amortissement modal          | 0.24%     | 0.14 %    |
| Déformée modale relative     | 0.27      | 0.97      |

FIGURE 4.5 – Récapitulatif des paramètres fixés par l'analyse linéaire.

Avant cela, les simulations numériques nous montrent que les extrêma des courbes dépendent des valeurs des fréquences propres que l'on insère au modèle (fig. 4.6). Dans le cas de l'excitation à  $\Omega \approx \omega_1$ , le minimum de l'amplitude de  $a_1$  est très proche de  $\omega_2/2$ . Dans le cas de l'excitation à  $\Omega \approx \omega_2$ , le minimum de  $a_1$  est proche de  $2\omega_1$ . Les fréquences propres déterminées par l'analyse modale devront également être affinées avec le recalage modèle/expérience.

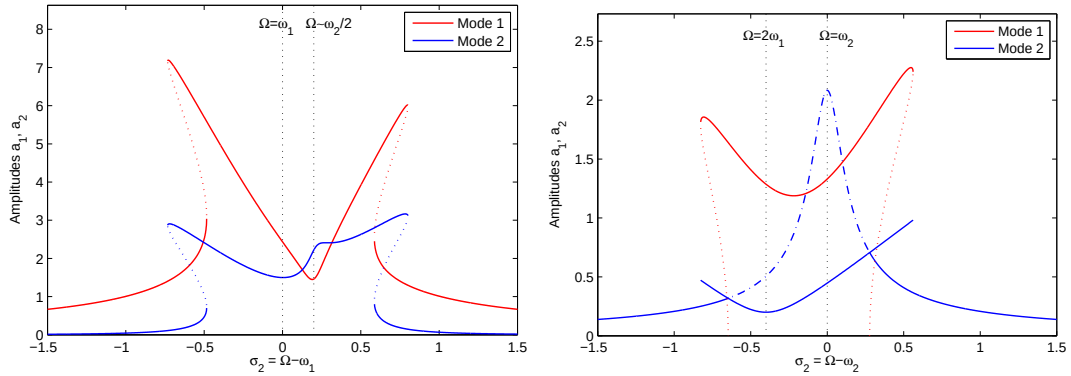


FIGURE 4.6 – Courbes théorique : Recalage des fréquences de résonance. Paramètres :  $\omega_1 = 1$  ;  $\sigma_1 = .4$  ;  $\mu_1 = .1$  ;  $\mu_2 = .1$  ;  $\alpha_1 = 2$  ;  $\alpha_2 = 1$  ;  $F_1 = F_2 = 1$ .

#### 4.2.4 Résultats

Après avoir entré les paramètres fixés par l'analyse linéaire dans le modèle à deux degrés de liberté, on peut donc ajuster peu à peu la valeur des coefficients non linéaires, les valeurs de forçage et des fréquences propres jusqu'à superposition des courbes. (fig. 4.6).

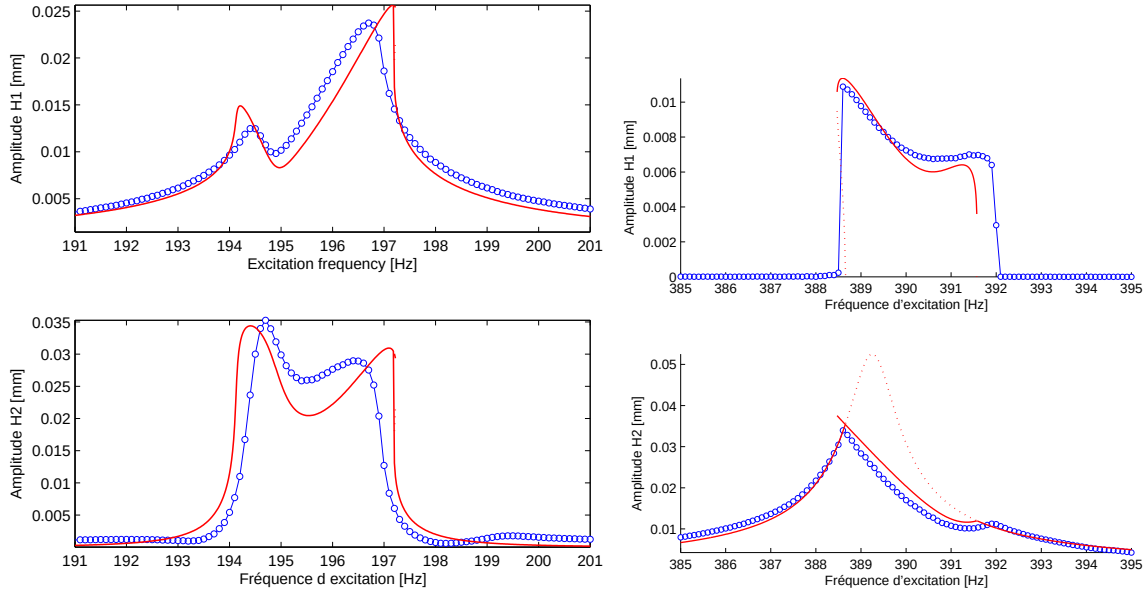


FIGURE 4.7 – Recalage théorie/expérience : identification des coefficients non linéaires. À gauche, excitation proche du mode 1 : harmoniques 1 et 2 ( $\Omega \approx \omega_1$  et  $2\Omega \approx \omega_2$ ). À droite, excitation proche du mode 2 : harmoniques 1/2 et 1 ( $\Omega/2 \approx \omega_1$  et  $\Omega \approx \omega_2$ ). Paramètres :  $f_1 = 195.9$   $2f_1 = 389.8$ ;  $f_2 = 389.25$   $f_2/2 = 195.675$ ;  $\alpha_1 = .8$ ;  $\alpha_2 = .65$ ;  $F_1 = F_2 = 0.00060$ . Désaccord calculé :  $\sigma_1 = -0.01$ .

On obtient alors les valeurs des coefficients non linéaires propres au couplage de ces deux modes. Le modèle paraît valide, on identifie un jeu de paramètres qui permet d'ajuster l'ensemble des quatres amplitudes de vibration :

| Paramètres                              | mode 1    | mode 2    |
|-----------------------------------------|-----------|-----------|
| Fréquences propres linéaires            | 194.32 Hz | 390.82 Hz |
| Freq Res pour $\Omega \approx \omega_1$ | 195.9 Hz  | 389.8 Hz  |
| Freq Res pour $\Omega \approx \omega_2$ | 195.7 Hz  | 389.25 Hz |
| Amortissement modal                     | 0.24 %    | 0.14 %    |
| Déformée modale relative                | 0.27      | 0.97      |
| Coefficients quadratiques $\alpha$      | 0.8       | 0.65      |

En conservant l'ensemble de ces paramètres, on cherche maintenant à comparer le modèle à l'expérience pour plusieurs intensités de forçage. La courbe présentée (fig. 4.8) est celle du forçage lorsque sa fréquence est proche du deuxième mode ( $\Omega \approx \omega_2$ ). Le recalage donne des résultats tout à fait satisfaisants. On s'aperçoit que cela n'est possible que si l'on ajuste des fréquences de résonances des deux modes, mais les variations restent faibles (de l'ordre de quelques dixièmes de Hertz). D'autre part, on remarque que le forçage  $F$  appliqué aux oscillateurs du modèle théorique est proportionnel au courant  $I$  imposé expérimentalement, à un coefficient  $k$  près :

| Forçage                      | Unité            | Courbe 1   | Courbe 2  | Courbe 3  | Courbe 4  |
|------------------------------|------------------|------------|-----------|-----------|-----------|
| Forçage Expérimental(I)      | (A)              | 0.5        | 1         | 1.5       | 2         |
| Modèle $F = F_1 = F_2$       |                  | 0.00019    | 0.00035   | 0.00058   | 0.00070   |
| Coeff $k = F/I$              | $\times 10^{-3}$ | 0.38       | 0.35      | 0.38      | 0.35      |
| Fréquence mode 1             | (Hz)             | 195.67     | 196.05    | 196       | 195.75    |
| Fréquence mode 2             | (Hz)             | 390.25     | 390       | 389.6     | 389.3     |
| Désaccord calculé $\sigma_1$ | (rad/s)          | -0.0056216 | -0.010712 | -0.012245 | -0.011239 |

### 4.3 Modèle en oscillations libres

Afin d'utiliser les paramètres de notre modèle recalés sur les expériences en régime forcé, on s'est intéressé, dans un tout dernier temps, à simuler la réponse temporelle du même système couplé à deux degrés de liberté (eq. 4.14) contenant les coefficients non linéaires  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  (fig. 4.9).

On retrouve l'allure des résultats que l'on avait obtenus expérimentalement lors de l'étude en oscillations libres (fig. 2.14 2.15). La note du *Steelpan* était en condition de jeu, percutée au moyen d'un *stick*. On observe très distinctement l'augmentation du transfert d'énergie en fonction de l'amplitude du forçage (différentes conditions initiales imposées au modèle en oscillations libres). Le mode 2 gagne d'autant plus d'énergie que la note est fortement excitée. Aussi la période de battement diminue avec l'intensité de la frappe. L'enveloppe temporelle présente une très faible modulation d'amplitude pour de faibles conditions initiales.

Enfin, d'un point de vue quantitatif, modèle et expérience s'accordent sur les ordres de grandeur à la fois des amplitudes et des périodes de battement entre les modes.

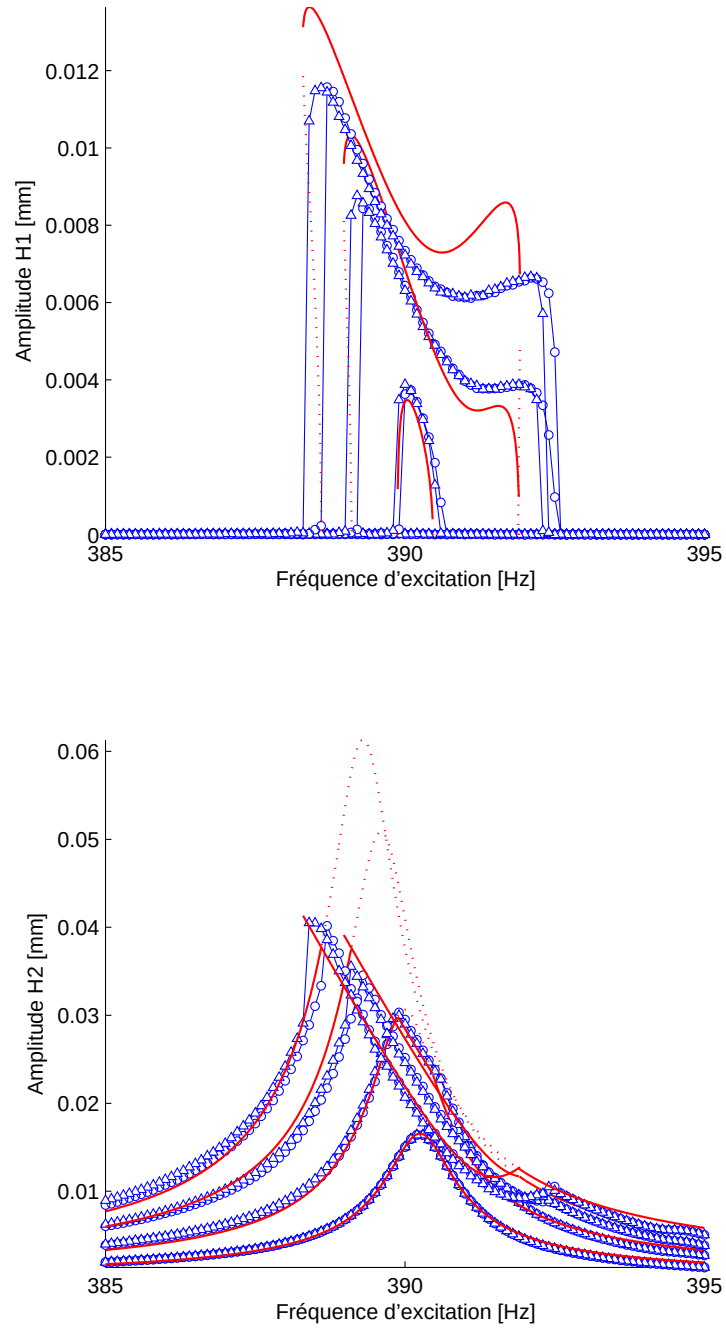


FIGURE 4.8 – *Double Second G3* : Recalage du modèle - Excitation proche de la fréquence de résonance du mode 2 pour quatre forçages différents (courbes 1, 2, 3 et 4).



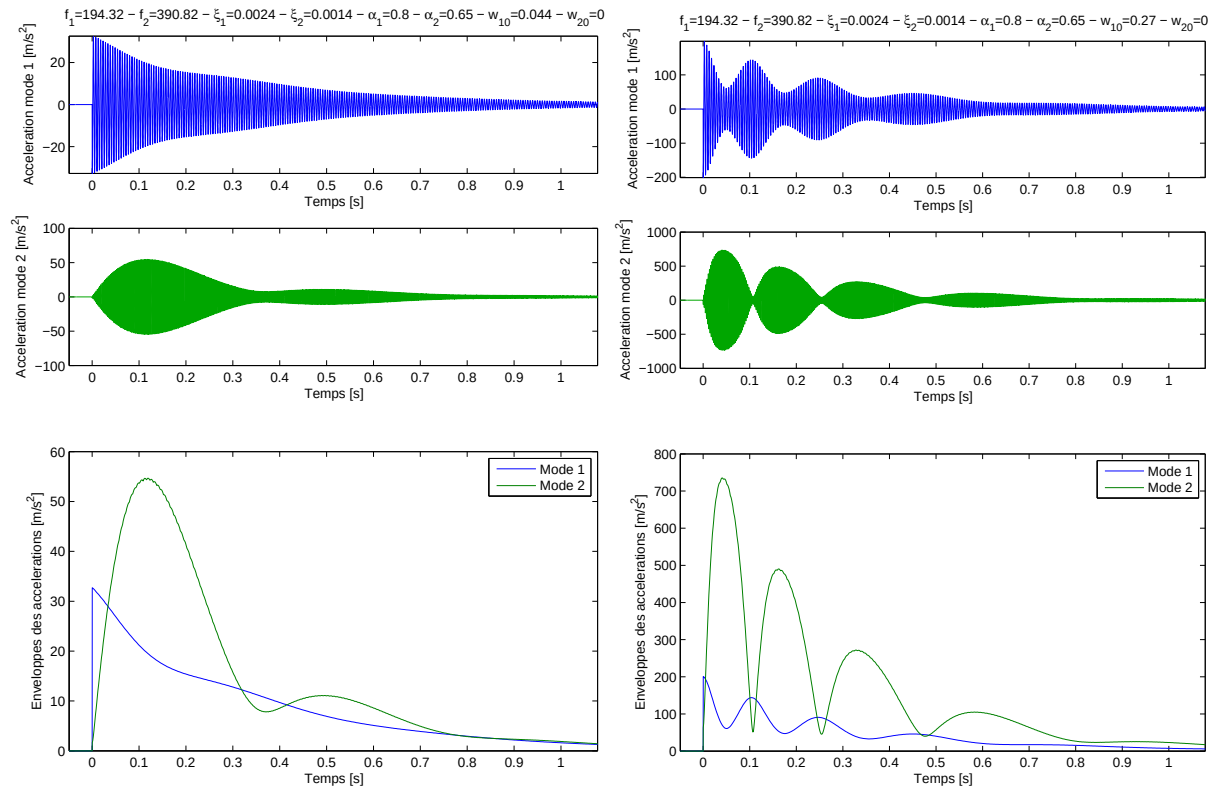


FIGURE 4.9 – Simulation numérique d'un modèle 2 DDL en oscillations libres pour différentes conditions initiales de position du mode 1 : à gauche  $w_1(t=0) = 0.0044$ , à droite  $w_1(t=0) = 0.27$ . Observation du couplage non linéaire entre les modes 1 et 2.

## 4.4 Conclusion partielle

Ce dernier chapitre rend compte de l'établissement d'un modèle caractérisant le comportement non linéaire du *Steelpan*. On a mis en évidence un couplage non linéaire fort qui existe entre les deux premiers modes propres d'une note par la théorie des vibrations de coques. La fréquence du partiel 2 est accordée de manière à être le double de celle du partiel 1 (accordage à l'octave) ce qui favorise le phénomène de résonance 1 : 2. Ce couplage d'un oscillateur à l'autre est possible via des coefficients, dits non linéaires, qui permettent un transfert de l'énergie entre les modes.

L'ensemble des paramètres a été identifié par l'expérience, ce qui a permis de soumettre le modèle à différents types d'excitation. On a alors observé que le modèle, établi dans le cadre des oscillations forcées, lorsqu'il était placé dans un cas d'oscillations libres, donnait des résultats très proches de l'expérience.

# Conclusion

Les expériences que l'on a réalisées nous ont amené à placer le *Steelpan* dans des conditions d'excitation différentes. Sujet à des vibrations linéaires (de faible amplitude), sa caractéristique première est de présenter des modes localisés à des endroits précis de la surface totale (au voisinage de l'excitation).

En conditions de jeu, le *Steelpan* présente un caractère non linéaire : le spectre s'enrichit en fonction de la force de frappe. Le principal couplage mis en évidence est un transfert d'énergie entre le premier et le second mode de chacune des notes de l'instrument, accordées en relation d'octave.

Un modèle théorique simple basé sur la théorie des vibrations des coques minces a permis de confirmer le caractère non linéaire évoqué ci-dessus. Le couplage modélisé est dû à l'existence de coefficients non linéaires qui favorisent les interactions intermodales. On a pu identifier les paramètres d'un modèle à deux degrés de liberté représentatifs du couplage 1 : 2, par comparaison expérimentales dans le cadre des oscillations forcées. Les paramètres ont pu être appréciés par un modèle du couplage en oscillations libres, également en adéquation avec l'expérience. On a remarqué que, de manière générale, les non linéarités étaient présentes même pour de faibles amplitudes d'excitation.

Néanmoins, notre modèle établi pour la résonance 1 : 2 ne permet aucune anticipation sur la valeur des coefficients. Dans le but d'établir un modèle prédictif, il est nécessaire de considérer deux caractéristiques importantes. D'une part, la géométrie fine de l'instrument (une calotte sphérique munie de dômes locaux) doit être prise en compte, pour en particulier bien prédire les modes de vibration localisés. D'autre part, les déformations plastiques et les traitements thermiques que l'instrument subit lors de sa fabrication conduisent à un état initial qu'il est nécessaire de modéliser, notamment pour prédire les précontraintes imposées au métal. On peut également se questionner sur la condition minimale de courbure à partir de laquelle les modes propres se localisent. En effet, lors de sa fabrication, avant que les notes soient dessinées et martelées, le *Steelpan* n'est qu'un bidon de pétrole embouti. Cette structure, de géométrie plus simple que l'instrument final, se déformerait de manière globale (géométrie de type cymbale).

Un autre point qu'il serait intéressant d'étudier, est le couplage inter-note et celui des notes avec la jupe de l'instrument. L'organisation des *patterns* est telle que, pour des raisons d'abord musicales, deux notes voisines sont en relations harmoniques. Par exemple pour le *tenor*, ou encore sur le *six bass* deux notes consécutives sont en relation de quinte. Les spectres fréquentiels comportent donc des fréquences communes. Les analyses modales ont montré que les déformées locales pouvaient solliciter, pour des fréquences particulières, différents modes de différentes notes.

## Annexe A

### *Patterns* de *Pans* standards

Depuis la fabrication des premiers *Steelpans*, les techniques ont évolué. Ceci a donné aux *turners* de plus larges possibilités notamment dans le choix de l'agencement des notes au sein des instruments. De nouveaux *steelpans* ont dernièrement été créés ce qui permet aux *steelbands* de s'enrichir considérablement. A titre indicatif, sont montrés ci-après des *patterns* standards entrant dans la composition d'un orchestre (images provenant de : <http://www.tassoononline.ca>).

rappel : notation musicale : anglais/français

| GB | A  | B  | C  | D  | E  | F  | G   |
|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| Fr | la | si | do | ré | mi | fa | sol |

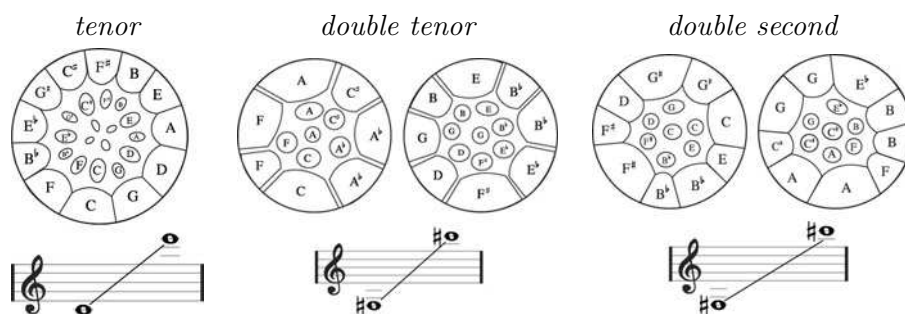


FIGURE A.1 – Instruments représentant la ligne mélodique.

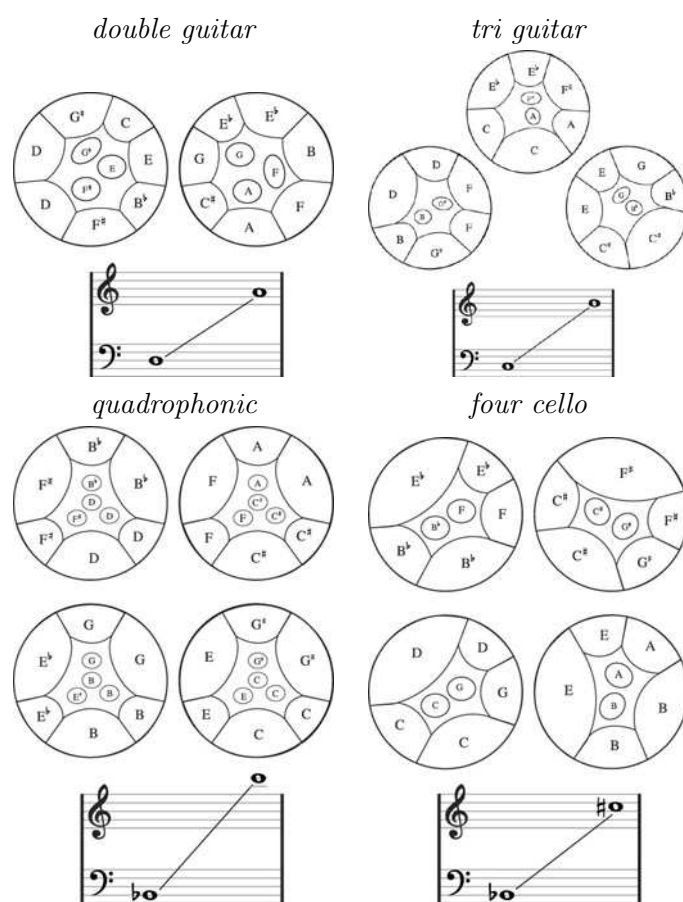


FIGURE A.2 – Instruments représentant l’accompagnement rythmique et harmonique.

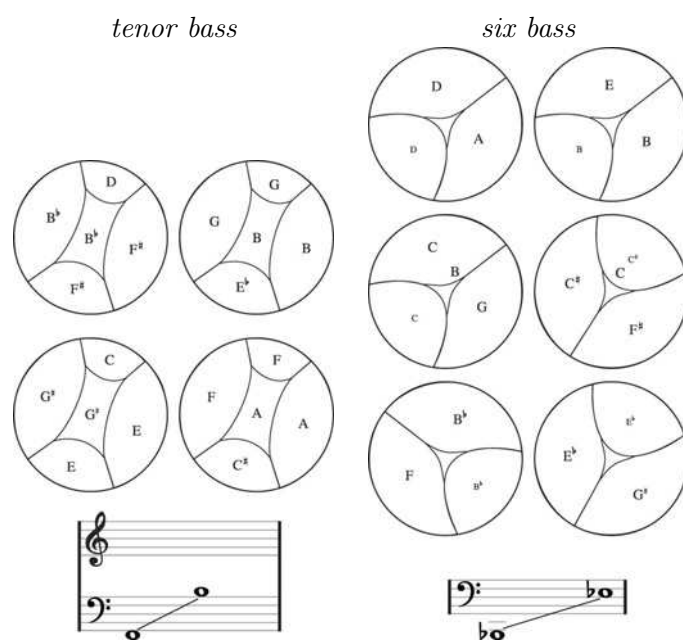


FIGURE A.3 – Instruments représentant la ligne de basse.

## Annexe B

# Visualisation de quelques déformées modales

Pour cette étude, des analyses modales ont été réalisées sur trois *Steelpans* différents : le *Tenor*, le *Double second* et le *Six bass*. Une excitation sinusoïdale était placée sur une note particulière. Ayant observé des modes très localisés autour de la note excitée, pour caractériser ses vibrations, le maillage des mesures a été restreint à son voisinage proche.

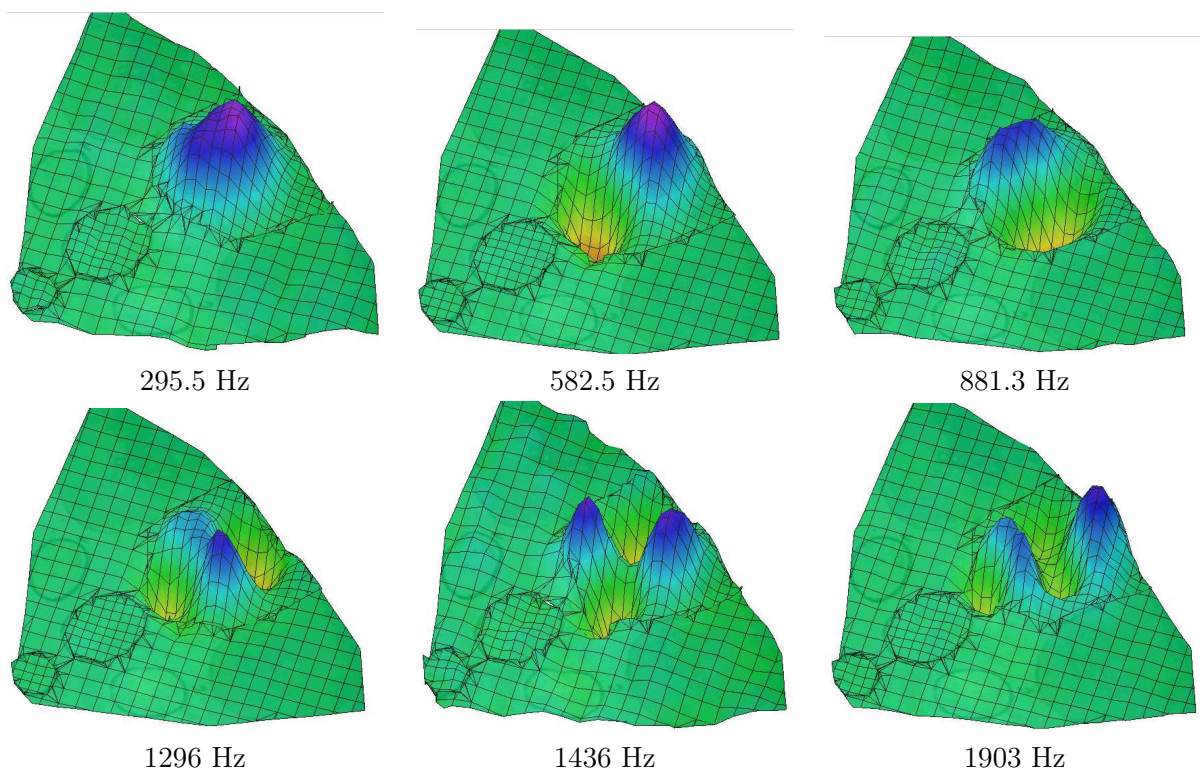


FIGURE B.1 – *Tenor* excité sur la note D4.

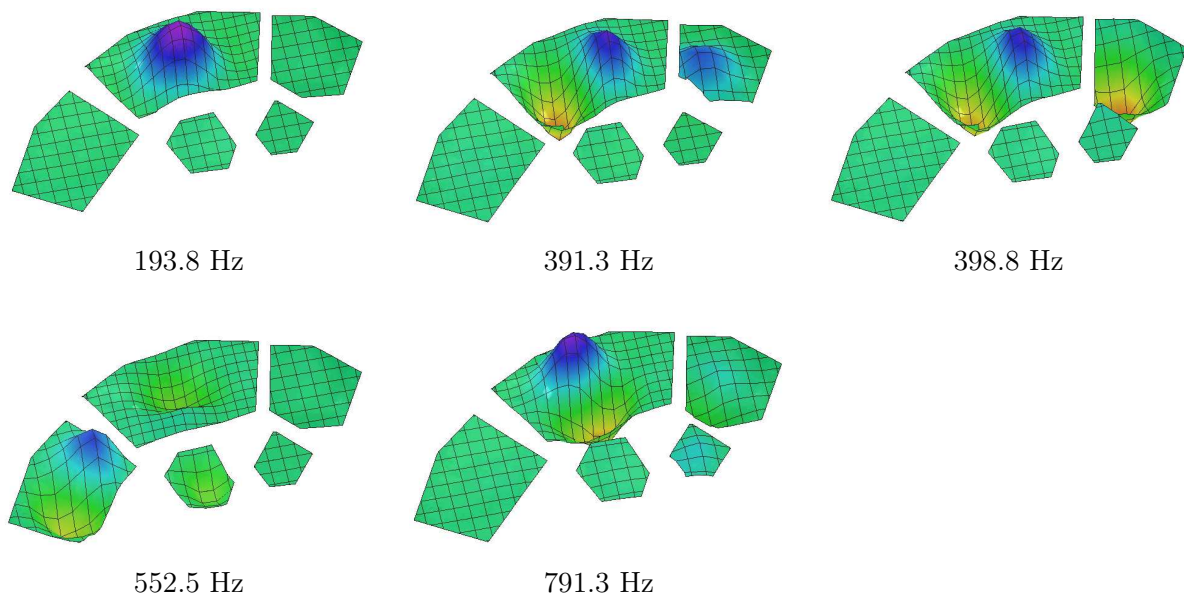


FIGURE B.2 – *Double Second* excité sur la note G3.

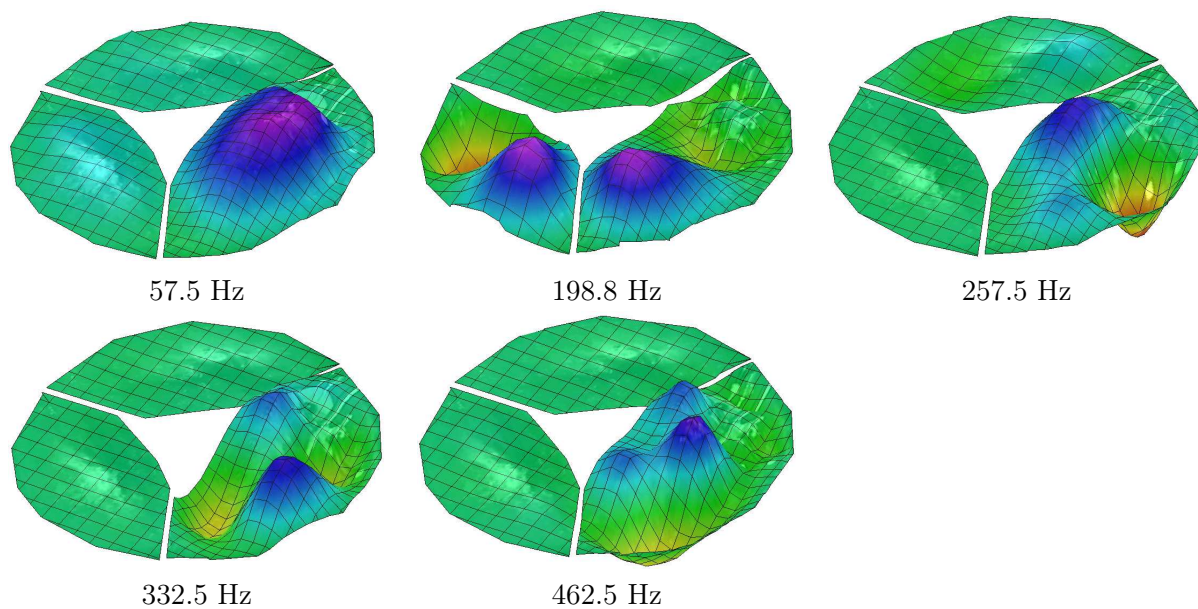


FIGURE B.3 – *Six bass* excité sur la note C2.

## Annexe C

# Résolution des systèmes non linéaires par la méthode des échelles multiples

On a pu voir, dans le chapitre 3, qu'un système discret à  $N$  degrés de liberté, amorti, soumis à une excitation sinusoïdale et présentant des termes non linéaires cubiques et quadratiques est régi par l'équation :

$$\ddot{q}_k + 2\mu_k \dot{q}_k + \omega_k^2 q_k + \epsilon_q \sum_{i,j=1}^N \beta_{ij}^k q_i q_j + \epsilon_c \sum_{i,j,l=1}^N \Gamma_{ijl}^k q_i q_j(t) q_l = F_k \cos \Omega t \quad (\text{C.1})$$

où : pour un oscillateur  $k$  du système,  $q_k$  est la solution temporelle du déplacement de la structure,  $\omega_k$  est sa fréquence propre,  $\mu_k$  est l'amortissement visqueux,  $\epsilon_q \beta^k$  et  $\epsilon_c \Gamma^k$  sont les coefficients non linéaires, respectivement quadratiques et cubiques, adimensionnés et  $F_k$  est l'amplitude de la force imposée. Enfin,  $\Omega$  est la fréquence d'excitation imposée au système.

La résolution de ce type de système nécessite une réduction du nombre de degrés de liberté afin de simplifier les calculs analytiques. Lorsque les non linéarités sont faibles, la fréquence de forçage est proche de celle d'un des modes propres de vibration. Il est donc apprécié de tronquer le système en ne conservant uniquement l'équation gouvernant le mode excité [7].

### C.1 Système à un degré de liberté : non linéarités cubiques

Limitée à un seul degré de liberté ( $k = 1$ ) et ne conservant que les termes de non linéarité cubique, l'équation de vibration devient :

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = \epsilon [-\alpha_3 q^3 - 2\mu \dot{q} + F \cos \Omega t] \quad (\text{C.2})$$

où  $\alpha_3 = \epsilon_c \Gamma$ .

La méthode des échelles multiples permet de traiter les termes du membre de droite de l'équation précédente comme une perturbation du problème conservatif représenté par le membre de gauche. [24].

On définit plusieurs échelles de temps :

$$T_n = \epsilon^n t, n \geq 0 \quad (\text{C.3})$$

La solution est développée en puissance de  $\epsilon$  :

$$q(t; \epsilon) = q_0(T_0, T_1, ..) + \epsilon q_1(T_0, T_1, ...) + \epsilon^2 q_2(T_0, T_1, ..) + ... \quad (\text{C.4})$$



Nous nous limiterons, dans cet exemple, à l'ordre  $\epsilon$ .

On se place dans le cas où l'excitation est proche de la fréquence de résonance du système :

$$\Omega = \omega_0 + \epsilon\sigma \quad (\text{C.5})$$

où  $\sigma$  est appelé paramètre de désaccord

En injectant la solution développée dans (C.2), on obtient :

à l'ordre 0 :  $\epsilon^0 = 1$  :

$$D_0^2 q_0 + \omega_0^2 q_0 = 0 \quad (\text{C.6})$$

à l'ordre 1 :  $\epsilon^1 = \epsilon$  :

$$D_0^2 q_1 + \omega_0^2 q_1 = -2D_0 D_1 q_0 - \alpha_3 q_0 - 2\mu D_0 q_0 + F \cos(\omega_0 T_0 + \sigma T_1) \quad (\text{C.7})$$

où, les opérateurs de dérivations sont notés  $D_n$  tels que :  $D_n = \partial(\cdot)/\partial T_n$ , soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial}{\partial T_1} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

La solution du système, sous sa forme complexe, s'écrit :

$$q_0(t) = A(T_1)e^{j\omega_0 T_0} + A^*(T_1)e^{-j\omega_0 T_0} \quad (\text{C.9})$$

Après injection de l'expression de la solution sous sa forme complexe (C.9) et élimination des termes séculaires dans l'équation obtenue à l'ordre  $\epsilon$  (C.7), on obtient la condition de solvabilité suivante [13] :

$$2j\omega_0(A' + \mu A) + 3\alpha_3 A^2 \bar{A} - \frac{1}{2} F e^{j\sigma T_1} = 0 \quad (\text{C.10})$$

Ceci se résout en utilisant la forme polaire de l'amplitude, soit :

$$A(T_1) = \frac{a}{2} e^{j\theta} \quad (\text{C.11})$$

Après séparation des termes réels et imaginaires, et en introduisant le changement de variable  $\gamma = \sigma T_1 - \theta$  (qui permet de rendre le système autonome), on trouve finalement :

$$\begin{cases} a' &= -\mu a + \frac{1}{2} \frac{F}{\omega_0} \sin \gamma \\ a\gamma' &= \sigma a - \frac{3}{8} \frac{\alpha_3}{\omega_0} a^3 + \frac{1}{2} \frac{F}{\omega_0} \cos \gamma \end{cases} \quad (\text{C.12})$$

La solution stable de ce système apparaît lorsque  $a' = 0$  et  $\gamma' = 0$ . On obtient alors une solution pour l'amplitude  $a$  qui est fonction du paramètre de désaccord  $\sigma$  et de l'amplitude de forçage  $F$  [13] :

$$a^2 [\mu^2 + (\sigma - \frac{3}{8} \frac{\alpha_3}{\omega_0} a^2)^2] = \frac{F^2}{4\omega_0^2} \quad (\text{C.13})$$

En première approximation, le déplacement  $q$  est de la forme :  $q = a \cos(\omega_0 t + \theta) + O(\epsilon)$ , alors la solution stable nous permet d'exprimer  $q$  tel que :

$$q = a \cos(\omega_0 t + \epsilon \sigma t - \gamma) + O(\epsilon) = a \cos(\Omega t - \gamma) + O(\epsilon) \quad (\text{C.14})$$

$$q = a \cos(\Omega t - \gamma) + O(\epsilon) \quad (\text{C.15})$$

où :  $a$  dépend du paramètre de désaccord externe.

## C.2 Système non linéaire à 2 degrés de liberté : non linéarités quadratiques

Cette dernière partie rend compte des calculs établis pour déterminer l'expression des amplitudes  $a_1$  et  $a_2$ , utilisées dans le cadre du modèle non linéaire à 2 degrés de liberté du chapitre 4. Ce type de résolution est autrement détaillée dans [7] [13] et [22].

Un système à deux degrés de liberté comportant des termes non linéaires fait apparaître des couplages forts entre les différents oscillateurs responsables de transferts d'énergie d'un mode à l'autre appelés résonances internes :

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \epsilon(\alpha_1 q_1 q_2 + 2\mu_1 \dot{q}_1) &= F_1 \cos \Omega t \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \epsilon(\alpha_2 q_1^2 + 2\mu_2 \dot{q}_2) &= F_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

où :

- $q_k$  : Déplacement de l'oscillateur  $i$
- $\omega_i$  : Pulsation propre en régime linéaire
- $\epsilon$  : Petit paramètre permettant l'application de la méthode des échelles multiples
- $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  : Coefficients assurant le couplage quadratique
- $\mu_i = \xi_i \omega_i$  : Paramètre d'amortissement fluide.

On se place donc dans le cas où le système présente une résonance interne de sorte que l'on puisse poser :

$$\omega_2 = 2\omega_1 + \epsilon\sigma_1 \quad (\text{C.17})$$

où  $\sigma_1$  est le paramètre de désaccord interne.

Le forçage des oscillations se fera autour de la fréquence de résonance d'un mode en particulier avec comme fréquence d'excitation :

$$\Omega = \omega_i + \epsilon\sigma_2 \quad (\text{C.18})$$

où  $\sigma_2$  est le paramètre de désaccord externe.

### Résolution par la méthode des échelles multiples

On cherche les amplitudes  $a_1$  et  $a_2$  des déplacements  $q_1$  et  $q_2$  en fonction de la fréquence de forçage, soit en fonction du paramètre de désaccord externe  $\sigma_2$ .

Comme précédemment, pour résoudre le système (C.16) par la méthode des échelles multiples, on commence par définir les échelles de temps :

$$T_n = \epsilon^n t \quad (\text{C.19})$$

Les solutions sont développées en puissance de  $\epsilon$  :

$$q_1(t) = q_{10}(T_0, T_1) + \epsilon q_{11}(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \quad (\text{C.20a})$$

$$q_2(t) = q_{20}(T_0, T_1) + \epsilon q_{21}(T_0, T_1) + O(\epsilon^2) \quad (\text{C.20b})$$

Les opérateurs de dérivations sont notés  $D_n$  tels que :

$$D_n = \frac{\partial}{\partial T_n} \quad (\text{C.21})$$

soit :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{\partial}{\partial T_1} \end{cases} \quad (\text{C.22})$$

**Forçage autour du premier mode :  $\Omega \approx \omega_1$**

On va forcer le premier oscillateur en excitant autour de sa fréquence de résonance. On choisit :  $\Omega \approx \omega_1$  de telle sorte que :

$$\Omega = \omega_1 + \epsilon \sigma_2 \quad (\text{C.23})$$

Les forçages considérés sont :

$$\begin{cases} F_1 = \epsilon f_1 \\ F_2 = f_2 \end{cases} \quad (\text{C.24})$$

À l'ordre  $\epsilon^0 = 1$  le système de départ, des deux oscillateurs couplés (C.16), s'écrit :

$$\begin{cases} D_0^2 q_{10} + \omega_1^2 q_{10} = 0 \\ D_0^2 q_{20} + \omega_2^2 q_{20} = f_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{C.25})$$

À l'ordre  $\epsilon$ , il devient :

$$\begin{cases} D_0^2 q_{11} + \omega_1^2 q_{11} = -2D_0 D_1 q_{10} - \alpha_1 q_{10} q_{20} - 2\mu_1 D_0 q_{10} + f_1 \cos \Omega t \\ D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = -2D_0 D_1 q_{20} - \alpha_2 q_{10}^2 - 2\mu_2 D_0 q_{20} \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

Avec les solutions du système sous la forme :

$$\begin{cases} q_{10}(t) = A_1(T_1) e^{j\omega_1 t} + A_1^*(T_1) e^{-j\omega_1 t} \\ q_{20}(t) = A_2(T_1) e^{j\omega_2 t} + A_2^*(T_1) e^{-j\omega_2 t} \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

et d'après l'expression des paramètres de désaccord (C.17 et C.23), avec le forçage sous la forme :

$$f_1 \cos \Omega t = \frac{f_1}{2} e^{j(\omega_1 T_0 + \sigma_2 T_1)} \quad (\text{C.28})$$

l'ordre  $\epsilon$  devient :

$$\begin{cases} D_0^2 q_{11} + \omega_1^2 q_{11} = & -2D_0 D_1 [A_1(T_1) e^{j\omega_1 t} + A_1^*(T_1) e^{-j\omega_1 t}] \\ & -\alpha_1 [A_1(T_1) e^{j\omega_1 t} + A_1^*(T_1) e^{-j\omega_1 t}] [A_2(T_1) e^{j\omega_2 t} + A_2^*(T_1) e^{-j\omega_2 t}] \\ & -2\mu_1 D_0 [A_1(T_1) e^{j\omega_1 t} + A_1^*(T_1) e^{-j\omega_1 t}] \\ & + \frac{f_1}{2} e^{j\omega_1 T_0} e^{j\sigma_2 T_1} \\ D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = & -2D_0 D_1 [A_2(T_1) e^{j\omega_2 t} + A_2^*(T_1) e^{-j\omega_2 t}] \\ & -\alpha_2 [A_1(T_1) e^{j\omega_1 t} + A_1^*(T_1) e^{-j\omega_1 t}]^2 \\ & -2\mu_2 [D_0 A_2(T_1) e^{j\omega_2 t} + A_2^*(T_1) e^{-j\omega_2 t}] \end{cases} \quad (\text{C.29})$$

avec :

$$D_i = \frac{\partial}{\partial T_i} \quad (\text{C.30})$$

on obtient :

$$\begin{cases} D_0^2 q_{11} + \omega_1^2 q_{11} = & -2j\omega_1[A_1' + \mu_1 A_1]e^{j\omega_1 T_0} \\ & -\alpha_1[A_1 A_2 e^{j(\omega_1 + \omega_2)T_0} + A_1^* A_2 e^{j(\omega_2 - \omega_1)T_0}] \\ & + \frac{f_1}{2} e^{j\sigma_2 T_1} e^{j\omega_1 T_0} + cc \\ D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = & -2j\omega_2[A_2' + \mu_2 A_2]e^{j\omega_2 T_0} \\ & -\alpha_2[A_1^2 e^{j2\omega_1 T_0} + 2A_1 A_1^*] + cc \end{cases} \quad (\text{C.31})$$

où :  $cc$  est le complexe conjugué du terme précédent.

Condition de solvabilité :

On cherche les conditions pour que la solution ne contienne aucun terme séculaire (terme susceptible de croître indéfiniment en fonction du temps) entraînant la divergence de la solution (soit, ici, les termes en  $e^{j\omega_1 T_0}$ ).

Avec (C.17), on remarque que l'on a les relations de fréquences suivantes :

$$\omega_1 + \omega_2 = 3\omega_1 + \epsilon\sigma_1 \quad (\text{C.32a})$$

$$\omega_2 - \omega_1 = \omega_1 + \epsilon\sigma_1 \quad (\text{C.32b})$$

$$2\omega_1 = \omega_2 - \epsilon\sigma_1 \quad (\text{C.32c})$$

alors la condition de solvabilité se résume à :

$$\begin{cases} -2j\omega_1(A_1' + \mu_1 A_1) - \alpha_1 A_1^* A_2 e^{j\sigma_1 T_1} + \frac{f_1}{2} e^{j\sigma_2 T_1} & = 0 \\ -2j\omega_2(A_2' + \mu_2 A_2) - \alpha_2 A_1^2 e^{-j\sigma_1 T_1} & = 0 \end{cases} \quad (\text{C.33})$$

On résout ce système en utilisant la forme polaire des amplitudes ...

$$\begin{cases} A_1(T_1) = \frac{a_1}{2} e^{j\theta_1} \\ A_2(T_1) = \frac{a_2}{2} e^{j\theta_2} \end{cases} \quad (\text{C.34})$$

où  $a_i$  est l'amplitude qui dépend de  $T_1$  et  $\theta_i$  la phase qui dépend également de  $T_1$

... qui une fois placées dans le système précédent, donnent le système qui gouverne l'évolution des amplitudes et des phases de la réponse à l'échelle de temps  $T_1$  : c'est à dire les évolutions lentes du système.

On obtient alors :

$$\begin{cases} a_1' + ja_1\theta_1' = -\mu_1 a_1 + \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} (-\sin \gamma_2 + j \cos \gamma_2) - \frac{f_1}{2\omega_1} (-\sin \gamma_1 + j \cos \gamma_1) \\ a_2' + ja_2\theta_2' = -\mu_2 a_2 + \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} (\sin \gamma_2 + j \cos \gamma_2) \end{cases} \quad (\text{C.35})$$

où :

$$\gamma_1 = \sigma_2 T_1 - \theta_1 \quad (\text{C.36a})$$

$$\gamma_2 = \sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1 \quad (\text{C.36b})$$

en séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient un système de quatre équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1' = -\mu_1 a_1 - \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin \gamma_2 + \frac{f_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1 \\ a_1 \theta_1' = \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \cos \gamma_2 - \frac{f_1}{2\omega_1} \cos \gamma_1 \\ a_2' = -\mu_2 a_2 + \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \sin \gamma_2 \\ a_2 \theta_2' = \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \cos \gamma_2 \end{array} \right. \quad (\text{C.37})$$

Résolution :

On introduit un changement de variables pour que le système devienne autonome, soit de la forme  $\dot{X} = f(X)$ , pour que les membres de droite ne dépendent plus de  $T_1$  :

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial T_1} = \sigma_2 - \frac{\partial \theta_1}{\partial T_1} \quad (\text{C.38a})$$

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial T_1} = \sigma_1 + \frac{\partial \theta_2}{\partial T_1} - 2 \frac{\partial \theta_1}{\partial T_1} \quad (\text{C.38b})$$

Les solutions qui nous intéressent dans le cadre du régime forcé, sont les solutions stationnaires du système, c'est à dire lorsque l'on annule les dérivées en temps : ce sont les relations de points fixes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1' = 0 = -\mu_1 a_1 - \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin \gamma_2 + \frac{f_1}{2\omega_1} \sin \gamma_1 \\ \gamma_1' = 0 = \sigma_2 - \frac{\alpha_1 a_2}{4\omega_1} \cos \gamma_2 + \frac{f_1}{2\omega_1 a_1} \cos \gamma_1 \\ a_2' = 0 = -\mu_2 a_2 + \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \sin \gamma_2 \\ \gamma_2' = 0 = \sigma_1 + \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos \gamma_2 - \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos \gamma_2 + \frac{f_1}{\omega_1 a_1} \cos \gamma_1 \end{array} \right. \quad (\text{C.39})$$

avec l'équation 3 du système (C.39) et avec l'opération (eq4 - 2 eq2), on obtient :

$$\sin \gamma_2 = \frac{4\omega_2 \mu_2 a_2}{\alpha_2 a_1^2} \quad (\text{C.40a})$$

$$\cos \gamma_2 = -\frac{4\omega_2 (\sigma_1 - 2\sigma_2) a_2}{\alpha_{21} a_1^2} \quad (\text{C.40b})$$

Et avec  $\cos^2 \gamma_2 + \sin^2 \gamma_2 = 1$ , on trouve :

$$a_1 = \sqrt{\frac{4\omega_2 a_2}{\alpha_2 \Gamma}} \quad (\text{C.41})$$

$$\text{où } \Gamma = \frac{1}{\sqrt{(\sigma_1 - 2\sigma_2)^2 + \mu_2^2}}$$

d'autre part, les équations (eq1 eq2 de C.39) permettent d'obtenir les relations :

$$\sin \gamma_1 = \frac{2\omega_1 a_1}{f_1} \left( \mu_1 + \frac{\alpha_{12} a_2}{4\omega_1} \sin \gamma_2 \right) \quad (\text{C.42a})$$

$$\cos \gamma_1 = \frac{2\omega_1 a_1}{f_1} \left( \frac{\alpha_{12} a_2}{4\omega_1} \cos \gamma_2 - \sigma_2 \right) \quad (\text{C.42b})$$

de même que précédemment, avec la relation  $\cos^2 \gamma_1 + \sin^2 \gamma_1 = 1$  et avec l'expression (C.41) on obtient le polynôme de degré 3 :

$$a_2^3 + a_2^2 \frac{8\omega_1}{\alpha_1} [\mu_1 \sin \gamma_2 - \sigma_2 \cos \gamma_2] + a_2 \frac{16\omega_1^2}{\alpha_1^2} [\mu_1^2 + \sigma_2^2] = \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \frac{\Gamma}{\omega_2} f_1^2 \quad (\text{C.43})$$

ou encore avec (C.40) :

$$a_2^3 + a_2^2 \frac{8\omega_1 \Gamma}{\alpha_1} [\mu_1 \mu_2 + \sigma_2 (\sigma_1 - 2\sigma_2)] + a_2 \frac{16\omega_1^2}{\alpha_{12}^2} [\mu_1^2 + \sigma_2^2] = \frac{\alpha_2}{\alpha_{12}^2} \frac{\Gamma}{\omega_2} f_1^2 \quad (\text{C.44})$$

**Forçage autour du deuxième mode :  $\Omega \approx \omega_2$**

On choisit maintenant  $\Omega \approx \omega_2$  de telle sorte que :

$$\Omega = \omega_2 + \epsilon \sigma_2 \quad (\text{C.45})$$

et un forçage d'expression :

$$\begin{cases} F_1 = f_1 \\ F_2 = \epsilon f_2 \end{cases} \quad (\text{C.46})$$

dans l'équation (C.16)

A l'ordre 1 on trouve :

$$\begin{cases} D_0^2 q_{10} + \omega_1^2 q_{10} = f_1 \\ D_0^2 q_{20} + \omega_2^2 q_{20} = 0 \end{cases} \quad (\text{C.47})$$

A l'ordre  $\epsilon$  on trouve :

$$\begin{cases} D_0^2 q_{11} + \omega_1^2 q_{11} = -2D_0 D_1 q_{10} - \alpha_1 q_{10} q_{20} - 2\mu_1 D_0 q_{10} \\ D_0^2 q_{21} + \omega_2^2 q_{21} = -2D_0 D_1 q_{20} - \alpha_2 q_{10}^2 - 2\mu_2 D_0 q_{20} + f_2 \cos \Omega t \end{cases} \quad (\text{C.48})$$

Condition de solvabilité :

$$\begin{cases} -2j\omega_1 \left( \frac{\partial A_1}{\partial T_1} + \mu_1 A_1 \right) - \alpha_1 A_1^* A_2 e^{j\sigma_1 T_1} & = 0 \\ -2j\omega_2 \left( \frac{\partial A_2}{\partial T_1} + \mu_2 A_2 \right) - \alpha_2 A_1^2 e^{j\sigma_1 T_1} + \frac{F}{2} e^{j\sigma_2 T_1} & = 0 \end{cases} \quad (\text{C.49})$$

avec la forme polaire des amplitudes, les évolutions lentes du système sont régies par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_1}{\partial T_1} = -\mu_1 a_1 - \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin(\sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1) \\ a_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial T_1} = \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \cos(\sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1) \\ \frac{\partial a_2}{\partial T_2} = -\mu_2 a_2 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \sin(\sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1) + \frac{F}{2\omega_2} \sin(\sigma_2 T_1 - \theta_2) \\ a_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial T_2} = \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \cos(\sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1) + \frac{F}{2\omega_2} \cos(\sigma_2 T_1 - \theta_2) \end{array} \right. \quad (\text{C.50})$$

Et avec le changement de variables qui cette fois est :

$$\gamma_1 = \sigma_2 T_1 - \theta_2 \quad (\text{C.51a})$$

$$\gamma_2 = \sigma_1 T_1 + \theta_2 - 2\theta_1 \quad (\text{C.51b})$$

le système devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial a_1}{\partial T_1} = -\mu_1 a_1 - \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin \gamma_2 \\ \frac{\partial \gamma_1}{\partial T_1} = \sigma_2 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos \gamma_2 + \frac{F}{2\omega_2 a_2} \cos \gamma_1 \\ \frac{\partial a_2}{\partial T_2} = -\mu_2 a_2 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \sin \gamma_2 + \frac{F}{2\omega_2} \sin \gamma_1 \\ \frac{\partial \gamma_2}{\partial T_2} = \sigma_1 - \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos \gamma_2 + \frac{\alpha_2 a_2^2}{4\omega_2 a_2} \cos \gamma_2 - \frac{F}{2\omega_2 a_2} \cos \gamma_1 \end{array} \right. \quad (\text{C.52})$$

Les relations de points fixes sont, dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\mu_1 a_1 - \frac{\alpha_1 a_1 a_2}{4\omega_1} \sin \gamma_2 \\ 0 = \sigma_2 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2 a_2} \cos \gamma_2 + \frac{F}{2\omega_2 a_2} \cos \gamma_1 \\ 0 = -\mu_2 a_2 - \frac{\alpha_2 a_1^2}{4\omega_2} \sin \gamma_2 + \frac{F}{2\omega_2} \sin \gamma_1 \\ 0 = \frac{\partial \gamma_2}{\partial T_2} = \sigma_1 - \frac{\alpha_1 a_2}{2\omega_1} \cos \gamma_2 + \frac{\alpha_2 a_2^2}{4\omega_2 a_2} \cos \gamma_2 - \frac{F}{2\omega_2 a_2} \cos \gamma_1 \end{array} \right. \quad (\text{C.53})$$

Lorsque l'on pose  $a_1 = 0$  et que l'on considère les deux équations centrales, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \sigma_2 + \frac{F}{2\omega_2 a_2} \cos \gamma_1 \\ 0 = -\mu_2 a_2 + \frac{F}{2\omega_2} \sin \gamma_1 \end{array} \right. \quad (\text{C.54})$$

On trouve alors l'expression de l'amplitude  $a_2$  du deuxième oscillateur :

$$a_2 = \frac{F}{2\omega_2 \sqrt{\sigma_2^2 + \mu_2^2}} \quad (\text{C.55})$$



Finalement, amplitudes ( $a_i$ ) et phases ( $\theta_i$ ) de la solution sont obtenues en combinant les solutions sous les formes (C.27) et (C.34) et en tenant compte des définitions de :  $T_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , on obtient :

$$\begin{cases} q_{10} = a_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) &= a_1 \cos(\frac{\Omega t - \gamma_1 - \gamma_2}{2}) \\ q_{20} = a_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) &= a_2 \cos(\Omega t - \gamma_1) \end{cases} \quad (\text{C.56})$$

En résolvant le système de points fixes (C.53), on trouve finalement :

$$a_1 = 2 \sqrt{-\Gamma_1 \pm \sqrt{\frac{F^2}{4\beta_{21}^2} - \Gamma_2^2}} \quad (\text{C.57a})$$

$$a_2 = \frac{2\omega_1}{\beta_{12}} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2 + 4\mu_1^2} \quad (\text{C.57b})$$

avec :

$$\Gamma_1 = \frac{2\omega_1\omega_2}{\beta_{12}\beta_{21}} [2\mu_1\mu_2 - \sigma_2(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (\text{C.58a})$$

$$\Gamma_2 = \frac{2\omega_1\omega_2}{\beta_{12}\beta_{21}} [2\mu_1\sigma_2 - \mu_2(\sigma_1 + \sigma_2)] \quad (\text{C.58b})$$

# Bibliographie

- [1] A. Achong : The Steelpan as a system of non-linear mode localized oscillators, I : Theory, simulations, experiments and bifurcations. *Journal of Sound and Vibration*, 197(4), 471-487, 1996.
- [2] A. Achong, K. A. Sinanan-Singh : The Steelpan as a system of non-linear mode localized oscillators, II : Coupled sub-systems, simulations and experiments. *Journal of Sound and Vibration* 203(4), 547-561, 1997.
- [3] A. Achong : The Steelpan as a system of non-linear mode localized oscillators, III : The inverse problem - parameters estimation. *Journal of Sound and Vibration* 212(4), 623-635, 1998.
- [4] A. Achong, Non-linear analysis of compressively/thermally stressed elastic shell structures on the steelpan and the underlying theory of the tuning process. *Journal of Sound and Vibration* 222(4), 597-620, 1999.
- [5] A. Achong : Mode locking on the non-linear notes of the steelpan. *Journal of Sound and Vibration*, 266(1), 193-197, 2003.
- [6] C. Camier : Modélisation et étude numérique des vibrations non-linéaires de plaques circulaires minces imparfaites. Application aux cymbales. *Thèse de doctorat de l'école Polytechnique* 2009.
- [7] A. Chaigne, J. Kergomard : *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [8] P. Gaillard : Etude de la perception des transitoires d'attaque des sons de steeldrums : particularités acoustiques, transformation par synthèse et catégorisation. *Thèse de doctorat de l'université Toulouse II le Mirail*, 2000.
- [9] A. Helmlinger : Mémoire et jeu d'ensemble - La mémorisation du répertoire musical dans les steelbands de Trinidad et Tobago. *Thèse de doctorat de l'université Paris X Nanterre*, 2005.
- [10] U. Kronman, E. Jansson : Acoustics of the steelpan : Tone generation and tuning an introductory study of methods for measurements *Dept. Fir Speech, Music and Hearing, Journal : STL-QPSR*, Vol.29, Num.4, 059-073, 1988.
- [11] U. Kronman : Steel Pan Tuning, a Handbook for Steel Pan Making and Tuning ed. Musik-museets, 1991.
- [12] B. Copeland, A. Morrison, T.D. Rossing : Sound radiation from Caribbean steelpans *J. Acoust. Soc. of Am.* 117(1) , 2005.
- [13] A.H. Nayfeh, D.T. Mook : *Nonlinear oscillations*. John Wiley & sons, New-York, 1979.
- [14] L.E. Murr, E. Ferreyra, J.G. Maladonado, E.A. Trillo, S. Pappu, C. Kennedy, J. de Alpa, M. Posada, D. P. Russel, J. L. White : Materials science and metallurgy of the Caribbean steel drum. *Journal of Materials Science* 34, 967-979, 1999.
- [15] F. Pérignon : Vibrations forcées de structures minces, élastiques, non-linéaires. *Thèse de doctorat de l'université de la méditerranée (Aix-Marseille II)*, 2004.

- [16] T.D. Rossing, U.J. Hansen, D.S. Hampton : Vibrational mode shapes in Caribbean steelpans. I. Tenor and double second. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108(2), 803-812, 2000.
- [17] T.D. Rossing, U.J. Hansen : Vibrational mode shapes in Caribbean steelpans. II. cello and bass. *Applied Acoustics* 65, 1233-1247, 2004.
- [18] T.D. Rossing, D.S. Hampton, U.J. Hansen : Music from oil drums : the acoustics of the steelpan. *Physics Today*, March, 1996.
- [19] T.D. Rossing, U.J. Hansen, D.S. Hampton : Vibrational modes shapes in Caribbean steelpans. I. Tenor and double second. *Journal of the Acoustical Society of America*, 108, 803-812, 2000.
- [20] O. Thomas : Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion. *Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie*, 2001.
- [21] O. Thomas, S. Bilbao : Geometrically nonlinear flexural vibrations of plates : In-plane boundary conditions and come symmetry properties. *Journal Sound of Vibration*, 315 , 526-590, 2008.
- [22] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne : Non-linear vibrations of free edge thin spherical shells : modal interaction rules and 1 :1 :2 internal resonance. *International Journal of Solids and Structures* 42,3339-3373, 2005.
- [23] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne : Nonlinear behavior of gongs through the dynamics of simple rods systems. *Acoust. Sci. & Tech.* 26, 5, 2005.
- [24] C. Touzé : Analyse et modélisation de signaux vibratoires et acoustiques chaotiques - Application aux instruments de percussion non-linéaires. *Thèse de doctorat de l'université Paris VI*, 2000.
- [25] C. Touzé, Vibrations non-linéaires géométriques de structures minces - Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos. *Synthèse des activités scientifiques en vue de l'obtention du diplôme d'habilitation à diriger les recherches*, 2009.
- [26] C. Valette : Oscillateurs mécaniques simples, Ondes et vibrations, Mécanique des vibrations. *Support de cours du DEA Atiam - Université Paris VI*, 2000.
- [27] D.Verba : Les steelbands de Trinidad ou comment le social saisit la musique. *Interseções, Revista de estudos interdisciplinares, Université de Rio de Janeiro* p.111-131, 2000.