

# Rapport de stage de Master 2 SAR ATIAM

Thomas Hézard

thomas.hezard@ircam.fr, 01 44 78 43 02

30 juin 2010

**Sujet :** Ondes découplées et ondes progressives dans les tubes acoustiques à section variable pour la représentation en guides d'ondes.

**Etudiant :** Thomas Hézard  
Master 2 Informatique - spécialité SAR - parcours ATIAM  
thomas.hezard@ircam.fr, 06 67 06 43 03

**Laboratoire d'accueil :** IRCAM - CNRS UMR 9912  
Equipe Analyse-Synthèse  
1, place Igor Stravinsky,  
75004 Paris

**Encadrant :** Thomas Hélie, CR1 CNRS à l'IRCAM  
thomas.helie@ircam.fr, 01 44 78 48 24

**Enseignant référent :** Emmanuel Saint-James  
emmanuel.saint-james@lip6.fr







# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
Contexte et état de l'art	3
Problème posé	4
<b>I Étude des ondes découplées se propageant dans le milieu</b>	<b>5</b>
1 Ondes découplées dans les tubes droits	6
2 Modèle considéré dans les tubes courbes	7
2.1 Définitions de fonctions de base . . . . .	7
2.2 Modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne . . . . .	7
2.3 Paramétrisation du rayon . . . . .	8
3 Ondes découplées dans les tubes courbes avec le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne	9
<b>II Changement de variables en ondes découplées informées par la géométrie</b>	<b>13</b>
4 Adimensionnement, convention axiale et convention "tronçon"	14
4.1 Notations . . . . .	14
4.2 Adimensionnement . . . . .	14
4.2.1 Variables géométriques . . . . .	14
4.2.2 Variables acoustiques . . . . .	15
4.2.3 Modèle de Webster-Lokshin . . . . .	16
4.3 Convention axiale et convention "tronçon" . . . . .	16
5 Profils physiquement réalistes	17
6 Résolution et diagonalisation de la matrice de passage	17
6.1 Résolution du modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne . . . . .	17
6.2 Recherche d'ondes découplées . . . . .	18
6.2.1 Démarche adoptée . . . . .	18
6.2.2 Recherche des valeurs propres . . . . .	19
6.2.3 Paramétrisation des espaces propres . . . . .	20
6.3 Interprétation des valeurs propres . . . . .	21
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>36</b>

## Table des figures

1	Propagation d'ondes découplées dans un tube droit . . . . .	7
2	Fonctions $S^+$ et $S^-$ pour $\Upsilon < 0$ (en haut), $\Upsilon = 0$ (au milieu) et $\Upsilon > 0$ (en bas) .	10
3	Tube courbe . . . . .	11
4	Tube à rayon négatif . . . . .	12
5	Convention axiale . . . . .	16
6	Convention tronçon . . . . .	16
7	Décomposition en quadripôles . . . . .	22

# Introduction

## Contexte et état de l'art

La modélisation physique des instruments de musique a un intérêt majeur en synthèse sonore. En effet, elle permet de reproduire le comportement complet de l'instrument, incluant par exemple les transitoires d'attaque, de façon naturelle. Si la modélisation physique n'est pas une idée nouvelle, les avancées récentes dans ce domaine ont montré l'importance et l'intérêt de cet outil de modélisation comme en témoigne le nombre croissant de logiciels musicaux utilisant ce type de simulation.

Nous nous intéressons ici à la modélisation physique des tubes acoustiques pour la simulation réaliste des instruments à vent, et plus précisément des cuivres. Deux hypothèses historiques précèdent l'ensemble des travaux présentés ici : l'influence de l'enroulement de l'instrument est négligé et les tubes déroulés sont considérés comme axisymétriques. Ainsi un tube acoustique est entièrement décrit par son profil (aussi appelé "perce") : le relevé du rayon du tube le long de son axe de symétrie.

Historiquement, les premiers modèles

Des travaux réalisés à l'IRCAM ont permis d'aboutir à des modèles réalistes et efficaces de propagation dans les instruments à vent basés le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne [1]. Contrairement aux modèles précédents, ces modèles introduisent la prise en compte de la courbure des tubes et des pertes visco-thermique à la paroi interne du tube. Dans le domaine de Laplace, le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne peut s'écrire de la façon suivante

$$\begin{cases} \left[ \left( \left( \frac{s}{c_0} \right)^2 + 2\varepsilon(\ell) \left( \frac{s}{c_0} \right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell) \right) - \partial_\ell^2 \right] \{ R(\ell) P(\ell, s) \} = 0 \\ \rho_0 s \frac{U(\ell, s)}{S(\ell)} + \partial_\ell P(\ell, s) = 0 \end{cases}$$

où  $P(\ell, s)$  est la pression à l'intérieur du tube,  $U(\ell, s)$  est un débit acoustique,  $R(\ell)$  est le rayon du tube,  $S(\ell) = \pi R(\ell)^2$  est la surface interne,  $\varepsilon(\ell)$  quantifie les pertes visco-thermique et  $\Upsilon(\ell) = R''(\ell)/R(\ell)$  quantifie la concavité ou la convexité du tube.  $\rho_0$  et  $c_0$  sont respectivement la densité de l'air et la vitesse du son. Comme nous le verrons plus loin, pour des paramètres  $\varepsilon(\ell)$  et  $\Upsilon(\ell)$  constants, ce modèle a été résolu sous la forme de matrice de transfert acoustique.

Les guides d'onde [2, 3, 4] sont des structures bien adaptées à la synthèse temps-réel et des premiers résultats aboutissant à des structure de Kelly-Lochbaume pour les tubes courbes ont été trouvés [5, 6]. Une étude plus récente a permis de mettre en oeuvre des structures en guides d'onde basées sur ces modèles et bien adaptées à la synthèse sonore temps-réel [6]. Ces modèles sont basés sur une décomposition en quadripôles de transfert des matrices de transfert acoustique solutions du modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne.

L'étude présentée ici se place, entre autres, dans le cadre d'un travail sur des outils informatiques pour la lutherie. En effet, des travaux récents ont permis de mettre en oeuvre des premiers outils permettant l'estimation d'un modèle géométrique d'un profil d'instrument quelconque permettant la résolution du modèle de Webster-Lokshin [7] (joint à la fin de ce document). Ainsi, il est aujourd'hui possible, à partir du relevé de la perce d'un instrument existant ou bien du tracé de la perce d'un instrument avant sa première fabrication, de calculer des paramètres acoustiques tels que impédance et transmittance ou d'obtenir une version simulable en temps-réel de l'instrument.

## Problème posé

Cependant, la décomposition en structures de type “guides d’ondes” pour la simulation temps-réel n’est pas encore aujourd’hui complètement opérationnelle. Il a en effet été observé, pour les tubes concaves, des instabilités locales qui rendent la simulation numérique impossible [8, 9, 10]. Se pose alors la question de la décomposition à utiliser (il en existe une infinité) afin de d’obtenir

1. une structure de type guide d’ondes
2. une structure simulable à faible coût
3. une structure stable en tout point après décomposition

Ce problème a aussi été mis en évidence dans le cas des cônes [11] et une solution par réalisation minimale est proposée dans [12].

Une première solution à ce problème d’instabilité a été trouvée (ou plutôt une infinité de solutions paramètres) basés sur des considérations purement “traitement de signal” [6, chap. 4]. Cette solution amène à des structures qui fonctionnent dans la plupart des cas mais elle possède cependant des limites qui sont encore floues et ne prennent pas du tout en compte des considérations “physiques” pour expliquer le problème d’instabilité et le résoudre.

L’étude présentée ici concerne le choix de décomposition à utiliser pour assurer la prise en compte des conditions à vérifier pour que le problème soit bien posé et qu’aucune fonction “non-physique” ne vienne perturber la décomposition en quadripôles. Nous espérons que cette démarche pourra nous conduire à une décomposition stable en tout point. La suite du travail consiste à chercher, à partir de cette structure décomposée stable, une structure simulable à faible coût.

Ce document est organisé de la façon suivante. Après une étude d’un cas simple et connu (ondes planes se propageant dans un tube droit idéal sans pertes), nous tentons une interprétation de l’apparition des instabilités dans la décomposition existante basée sur des considérations de transport d’ondes acoustiques. Une fois cette interprétation mise en place, nous pourrions étudier le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne en injectant de l’information géométrique dans la résolution afin d’assurer que le problème posé et les fonctions de transmissions et de réflexions mises en jeu correspondent bien à des fonctions réalistes d’un point de vue physique afin de définir de nouveaux types d’ondes progressives [13] informées par la géométrie dans les cônes.

Première partie

# Étude des ondes découplées se propageant dans le milieu

Dans un premier temps, nous étudions un cas simple connu, celui des ondes planes se propageant dans un tube droit sans pertes, afin de poser le problème de façon claire et de comprendre le sens acoustique des quantités mises en jeu dans la méthode.

Dans un deuxième temps, à la lumière des informations apportées par la première étude, nous essayons d'interpréter les instabilités qui apparaissent dans la décomposition guidée d'ondes afin de trouver des conditions physiques qui nous amèneront à une nouvelle famille de décompositions paramétrées.



# 1 Ondes découplées dans les tubes droits

Considérons en premier lieu un problème de propagation acoustique linéaire dans un tube droit sans pertes. Nous savons que les ondes se propageant dans ce tube sont des ondes planes. Les équations d'Euler et de la conservation de la masse peuvent donc s'écrire sous la forme

$$\partial_x \mathbf{X}_p + \mathbf{M}_p \partial_t \mathbf{X}_p = 0, \quad (1)$$

où  $x$  est la variable spatiale qui décrit l'axe de symétrie du tube et où le vecteur d'état acoustique  $\mathbf{X}_p$  et la matrice  $\mathbf{M}_p$  sont donnés par les expressions

$$\mathbf{X}_p = \begin{bmatrix} P \\ V \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{M}_p = \begin{bmatrix} 0 & \rho_0 \\ \frac{1}{\rho_0 c_0^2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$(4)$$

où  $\rho_0$  est la densité de l'air,  $c_0$  la célérité du son dans le milieu,  $P$  la pression acoustique et  $V$  la vitesse. Pour trouver des ondes découplées localement (i.e. en tout point du volume), il suffit de diagonaliser la matrice  $\mathbf{M}_p$ . Les valeurs propres calculées sont les suivantes :

$$\lambda^+ = \frac{1}{c_0} \text{ et } \lambda^- = -\frac{1}{c_0} \quad (5)$$

Nous avons deux valeurs propres de multiplicité 1 donc la matrice de passage possède deux degrés de liberté. Un choix classique permet d'obtenir la matrice de passage

$$\mathbf{P}_p = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{2}{\rho_0 c_0} & -\frac{2}{\rho_0 c_0} \end{bmatrix} \quad (6)$$

et son inverse

$$\mathbf{P}_p^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_0 c_0 \\ 1 & -\rho_0 c_0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

On peut donc mettre l'équation (1) sous la forme

$$\partial_x \mathbf{Y}_p + \begin{bmatrix} \frac{1}{c_0} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{c_0} \end{bmatrix} \partial_t \mathbf{Y}_p = 0. \quad (8)$$

où  $\mathbf{Y}_p$  est le vecteur des ondes progressives découplées se propageant dans le tube. On retrouve les ondes classiques

$$p^+ = P + ZV \quad (9)$$

$$p^- = P - ZV \quad (10)$$

avec  $Z = \rho_0 c_0$  qui définit l'impédance caractéristique du milieu de propagation.

Un autre interprétation de ce résultat est que l'opérateur d'Alembertien peut s'écrire, pour ce cas des ondes planes dans le domaine de Laplace,

$$\Delta - \frac{1}{c^2} s^2 = \left( \partial_x - \frac{1}{c} s \right) \left( \partial_x + \frac{1}{c} s \right) \quad (11)$$

Les valeurs propres prennent alors un sens de "propagateur". Autrement dit, d'un point de vue "guides d'ondes", on pourra écrire ce problème sous la forme présentée en figure 1.  $D_p(s) = e^{s - \frac{s}{c_0}} = 1$  est le propagateur dans le cas des ondes planes.

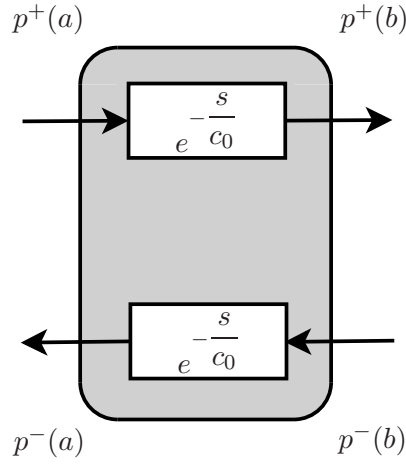


FIGURE 1 – Propagation d’ondes découplées dans un tube droit

## 2 Modèle considéré dans les tubes courbes

### 2.1 Définitions de fonctions de base

Comme nous allons le voir par la suite, plusieurs fonctions jouent un rôle prépondérant dans le problème et apparaissent à de nombreuses reprises, tant dans les formules liées à la géométrie que dans celles liées à l’acoustique et à la propagation des ondes dans le tube.

$$\phi_1 : x \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \phi_2 : x \mapsto \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{(2k+1)!} \quad (12)$$

sont analytiques sur  $\mathbb{C}$  donc  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  et développables en série entière avec un rayon de convergence infini.

$$\Phi : x \mapsto \frac{\phi_1(x)}{\phi_2(x)}. \quad (13)$$

Remarque : ces fonctions peuvent s’écrire (indépendamment du choix de  $\sqrt{\cdot}$ )

$$\begin{aligned} \phi_1(x) &= \cosh(\sqrt{x}) \quad , \\ \phi_2(x) &= \begin{cases} \frac{\sinh(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad . \\ \Phi(x) &= \frac{\sqrt{x}}{\tanh(x)} \end{aligned}$$

### 2.2 Modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne

Le premier modèle de tube acoustique à dépendance mono-spatiale fut établi par Lagrange [14] et Bernoulli [15]. Cette équation est dite “de Webster” [16] et a été abondamment étudiée [17]. Pour les pertes, les premières études ont été initiées par Kirchhoff [18]. On pourra retrouver l’ensemble de ces éléments bibliographique dans [19] et aussi dans [7] (joint à la fin de ce document).

Les effets de courbure et de pertes sont finalement regroupés dans le modèle dit “de Webster-Lokshin” à dépendance en l’abscisse curviligne [1, 20].

Soit un profil de tube  $z \mapsto r(z)$ . Le passage en abscisse curviligne s'écrit en mesurant la longueur de la paroi depuis  $z = 0$ ,  $L(z) = \int_0^z \sqrt{1 + r'(w)^2} dw$ . On note l'abscisse curviligne  $\ell = L(z)$  et on a alors

$$R(L(z)) = r(z) \text{ et } R(\ell) = r(L^{-1}(\ell)). \quad (14)$$

En notant  $P(\ell, t)$  la pression dans le tube à l'abscisse  $\ell$  et à l'instant  $t$ , l'équation de Webster-Lokshin, établi dans [1], s'écrit

$$\left( \partial_\ell^2 + 2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell - \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 - \frac{2\varepsilon(\ell)}{c_0^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} \right) P(\ell, t) = 0 \quad (15)$$

où  $c_0$  est la vitesse du son et  $\varepsilon(\ell) = \kappa_0 \frac{\sqrt{1 - R'(\ell)^2}}{R(\ell)}$  quantifie les effets visco-thermiques ( $\kappa_0 \approx 3 \times 10^{-4} m^{1/2}$  dans l'air). Cette équation est appelé Webster en raison de la présence du terme  $2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell$  et Lokshin en raison de la présence du terme  $\frac{2\varepsilon(\ell)}{c_0^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}}$ .

Le modèle de Webster-Lokshin complet s'écrit

$$\left( \partial_\ell^2 - \Gamma(s)^2 \right) [R(\ell)P(\ell, t)] = 0 \quad (16)$$

$$\rho \partial_t \frac{U(\ell, t)}{S(\ell)} + \partial_\ell P(\ell, t) = 0 \quad (17)$$

où

$$\Gamma(s)^2 = \frac{1}{c_0^2} \partial_t^2 + \frac{2\varepsilon(\ell)}{c_0^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell) \quad (18)$$

avec  $\Upsilon(\ell) = \frac{R''(\ell)}{R(\ell)}$ ,  $S(\ell) = \pi R(\ell)^2$  et  $U(\ell, t) = S(\ell)V(\ell, t)$  définit un débit acoustique.

*Remarque : la fonction  $\Gamma$  est définie comme une racine complexe. L'analyse complexe et notamment les racines complexes posent plusieurs problèmes théoriques que nous n'aborderont pas ici. Nous considérerons dans ce document que les fonctions définies avec des racines complexes ne posent aucun problème de définition sur  $\mathbb{C}_0^+$  (le demi-plan droit de Laplace).*

On obtient par ailleurs l'expression de l'énergie acoustique

$$e_{ac}(\ell, t) = \pi R(\ell, t)^2 \left( \frac{\rho}{2} V(\ell, t)^2 + \frac{1}{2\rho c^2} P(\ell, t)^2 \right). \quad (19)$$

et on montre que le modèle sans pertes ( $\varepsilon = 0$ ) est conservatif. Pour la cas avec pertes, il faut mener l'étude en utilisant les énergies acoustiques étendues [21, 22].

### 2.3 Paramétrisation du rayon

Le modèle (16-17) peut être résolu analytiquement dans le cas où les paramètres  $\Upsilon(\ell)$  et  $\varepsilon(\ell)$  sont constants. L'équation

$$R''(\ell) - \Upsilon R(\ell) = 0 \quad (20)$$

se résout de façon classique selon la valeur de  $\Upsilon$

$$\Upsilon < 0 \quad : \quad R(\ell) = A \cos(\sqrt{-\Upsilon} \ell) + B \sin(\sqrt{-\Upsilon} \ell) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad (21)$$

$$\Upsilon = 0 \quad : \quad R(\ell) = A + B\ell \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2, \quad (22)$$

$$\Upsilon > 0 \quad : \quad R(\ell) = A \cosh(\sqrt{\Upsilon} \ell) + B \sinh(\sqrt{\Upsilon} \ell) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2. \quad (23)$$

Cependant, nous pouvons regrouper ces écritures à l'aide des fonctions  $C$  et  $S$

$$\begin{cases} C & : (\ell, \Upsilon) \mapsto \phi_1(\Upsilon \ell^2) \\ S & : (\ell, \Upsilon) \mapsto x\phi_2(\Upsilon \ell^2) \end{cases} , \quad (24)$$

$$R(\ell) = AC(x, \Upsilon) + BS(x, \Upsilon) \quad (25)$$

Ceci définit une famille de tubes paramétrés pour lesquels le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne peut être résolu analytiquement. De plus, si on considère des tronçons de tube de longueur  $L$  sur l'intervalle  $\ell \in [-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ , alors les fonctions  $C$  et  $S$  définissent une base orthogonale de l'espace des solutions de (20). Ce paramétrage présente toutefois un inconvénient : si le paramètre  $\Upsilon$  définit la "courbure" du tube, il est bien difficile de donner un sens aux paramètres  $A$  et  $B$ .

Les fonctions

$$\begin{aligned} S^l & : (\ell, \Upsilon) \mapsto -\frac{\sinh\left(\sqrt{\Upsilon}\left(x - \frac{L}{2}\right)\right)}{\sinh\left(L\sqrt{\Upsilon}\right)} \\ S^r & : (\ell, \Upsilon) \mapsto \frac{\sinh\left(\sqrt{\Upsilon}\left(x + \frac{L}{2}\right)\right)}{\sinh\left(L\sqrt{\Upsilon}\right)} \end{aligned} \quad (26)$$

définissent une base de l'espace des solutions de (20). De plus, comme  $S^l(-\frac{L}{2}) = 1$ ,  $S^l(\frac{L}{2}) = 0$ ,  $S^r(-\frac{L}{2}) = 0$  et  $S^r(\frac{L}{2}) = 1$ , le rayon peut s'écrire

$$R(\ell) = R_l S^l(\ell, \Upsilon) + R_r S^r(\ell, \Upsilon) \quad (27)$$

où  $R_l$  est le rayon à l'extrémité gauche du tube et  $R_r$  le rayon à l'extrémité droite. Ce paramétrage, qui fait apparaître les rayons aux extrémités du profil, a beaucoup plus de sens quant à la géométrie du profil. La figure 2 présente l'influence de  $\Upsilon$  sur les fonctions  $S^l$  et  $S^r$ . Une courbure positive correspond donc à des tubes convexes, une courbure nulle à des tubes droits ou coniques et une courbure négative à des tubes concaves.

### 3 Ondes découplées dans les tubes courbes avec le modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne

Dans le cas où  $\Upsilon$  et  $\varepsilon$  sont constants, une résolution du modèle (16-17) est donnée en représentation guides d'ondes sous la forme d'une décomposition en de a matrice de transfert acoustique en une succession de quadripôles de transfert [6]. Cette vision est tout à fait adaptée à la simulation temps-réel (le travail d'implémentation a d'ailleurs déjà été en partie mis en oeuvre [23]). Cependant, elle pose des problèmes de stabilité dans le cas où le paramètre  $\Upsilon$  devient négatif. Nous allons tenter ici d'expliquer pourquoi de façon résumée et pragmatique en nous basant sur une interprétation physique de la décomposition en quadripôles présentée dans [6].

Prenons le cas d'un tronçon de tube courbe donné par les paramètres  $\Upsilon = 4$ ,  $R_l = 0.1$  et  $R_r = 0.2$  :

$$R(\ell) = 0.1 S^l(\ell, 4) + 0.2 S^r(\ell, 4) \quad \forall \ell \in [0, L] . \quad (28)$$

Ce tube est tracé en figure 3.

La décomposition est basée sur l'idée de simuler les réflexions internes aux extrémités comme étant celles du tube semi-infini ayant le même paramètre  $\Upsilon$  mais aux extrémités jusqu'à l'infini. Autrement dit, la réflexion interne vu depuis l'intérieur du tube du côté droit est celle du tube décrit par le rayon  $R(\ell) = 0.1 S^l(\ell, 4) + 0.2 S^r(\ell, 4) \quad \forall \ell \in [0, \infty]$  et la réflexion interne vu depuis

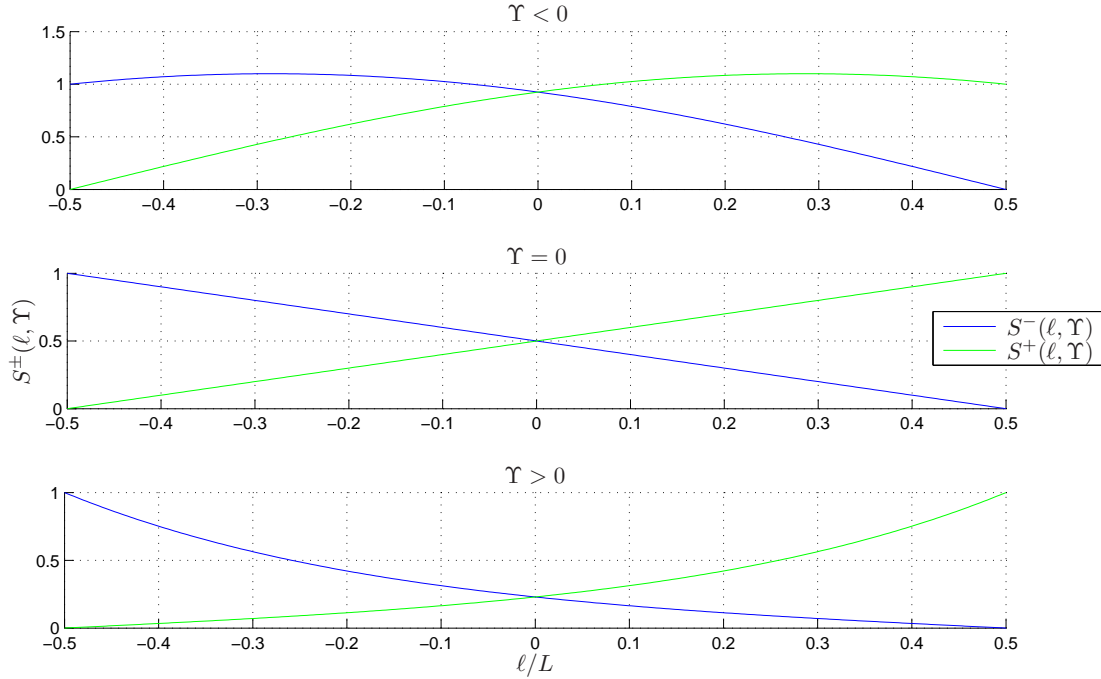


FIGURE 2 – Fonctions  $S^+$  et  $S^-$  pour  $\Upsilon < 0$  (en haut),  $\Upsilon = 0$  (au milieu) et  $\Upsilon > 0$  (en bas)

l'intérieur du tube du côté gauche est celle du tube décrit par le rayon  $R(\ell) = 0.1 S^l(\ell, 4) + 0.2 S^r(\ell, 4) \forall \ell \in [-\infty, L]$ .

Ceci ne pose pas de problème tant que  $\Upsilon$  est positif, le rayon tend vers  $\infty$  en  $\pm\infty$ . En revanche, lorsque  $\Upsilon$  devient négatif, comme le montre les équations (21-23) le rayon ne s'exprime plus à l'aide des fonctions cosh et sinh mais à l'aide des fonctions cos et sin. Ceci implique que le rayon peut s'annuler lorsque la longueur devient trop grande ou que  $\Upsilon$  devient trop négatif comme l'illustre la figure 4. On peut d'ailleurs définir une longueur critique d'un tronçon de tube pour un  $\Upsilon$  donné (ou un  $\Upsilon$  critique pour une longueur donnée) au-delà de laquelle le rayon s'annule dans son véritable ensemble de définition. Cette valeur est précisément  $L_{crit} = \frac{\pi}{\sqrt{|\Upsilon|}}$ .

Comme on considère des tubes semi-infinis, les réflexions simulent forcément ces "rayons négatifs" quand  $\Upsilon$  est négatif. Ceci n'a évidemment aucun sens physique et on ne peut pas s'attendre à des comportements naturels avec de telles considérations.

Une précédente étude [6] a montré que, quand  $\Upsilon$  est négatif, les passages par 0 successifs du rayon jusqu'à l'infini provoquent l'apparition d'un continuum de pôles sur la partie positive de l'axe réel pour les fonctions de réflexion internes dans la décomposition en quadripôles de transfert. Ceci explique donc l'apparition des instabilités dans cette décomposition.

Il est toutefois possible de donner une autre interprétation des instabilités qui apparaissent dans la décomposition en quadripôles. En effet,  $\Gamma(s)$  étant un opérateur uniquement temporel (il ne fait pas apparaître de dérivée selon  $\ell$ ) on peut écrire une sorte de d'Alembertien étendu pour le modèle de Webster-Lokshin :

$$\partial_\ell^2 - \Gamma(s)^2 = (\partial_\ell - \Gamma(s))(\partial_\ell + \Gamma(s)) \quad (29)$$

L'opérateur de transport pour le modèle de Webster-Lokshin est alors

$$D(s) = e^{s - \Gamma(s)}. \quad (30)$$

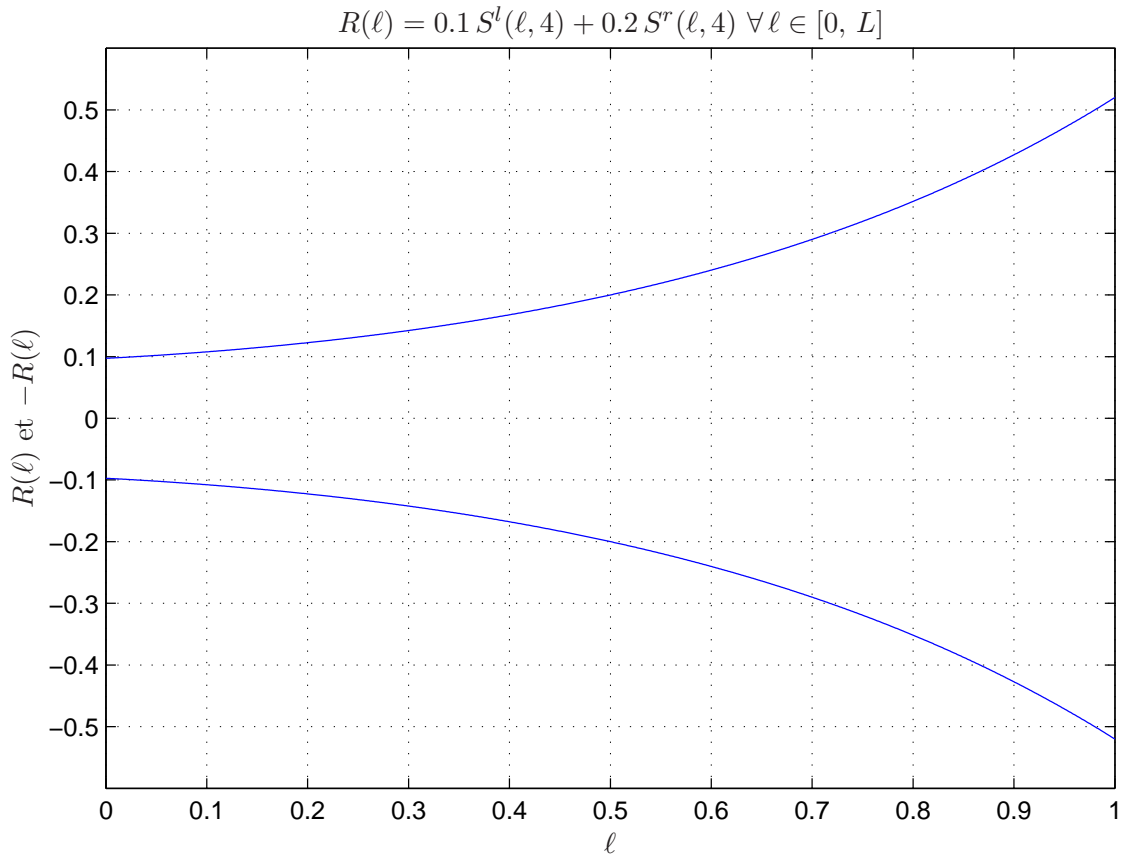


FIGURE 3 – Tube courbe

D'après ce que l'on a dit précédemment, on peut interpréter ce résultat comme le fait que l'on ramène des réflexions liées à des tubes semi-infinis à l'intérieur même du propagateur d'où les instabilités dans le cas  $\Upsilon < 0$ . De plus, d'un point de vue plus "traitement de signal", nous verrons plus tard que le propagateur est lui-même un filtre instable dans le cas  $\Upsilon < 0$ .

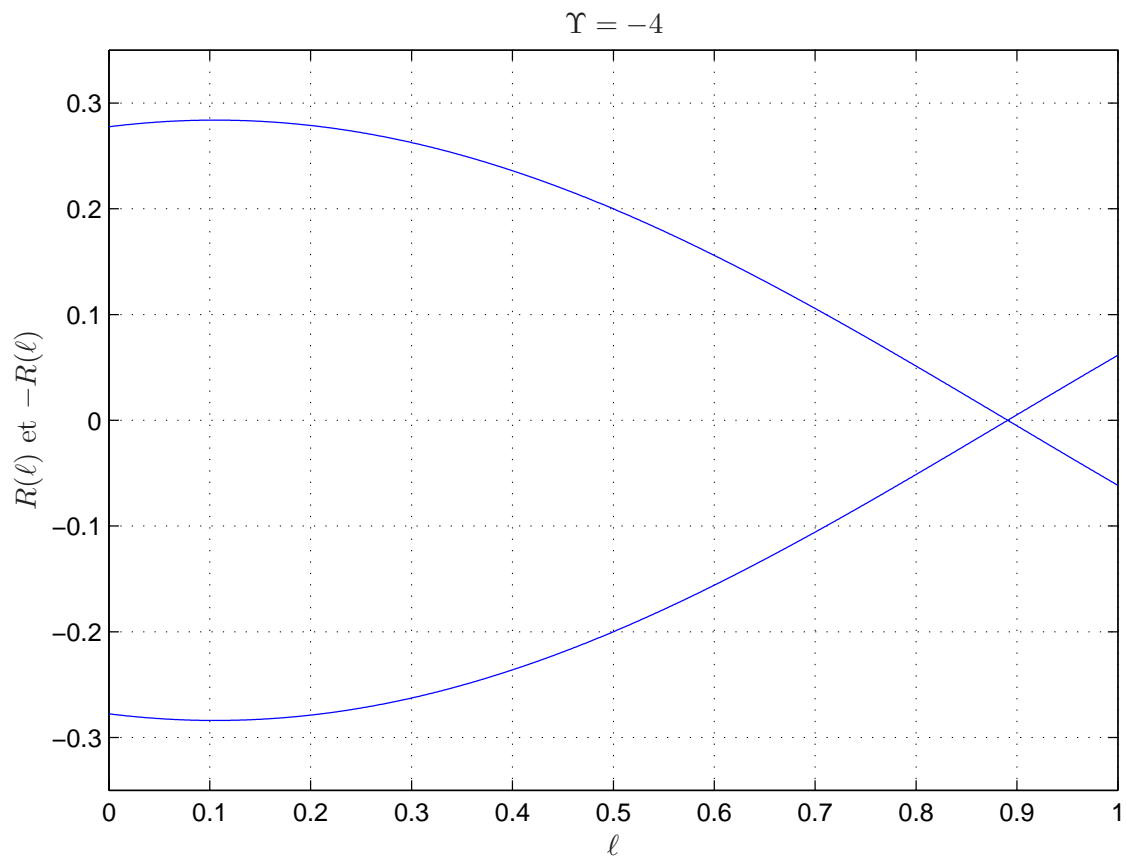


FIGURE 4 – Tube à rayon négatif

## Deuxième partie

# Changement de variables en ondes découplées informées par la géométrie

L'objectif de cette partie est de définir de nouvelles ondes découplées, se propageant dans les tubes, informées par la géométrie. Ce travail se divise en deux grandes étapes. La première consiste à trouver des conditions sur les paramètres géométriques qui assurent que le profil de tube sur lequel nous travaillons est physiquement réaliste. Ensuite, nous souhaitons injecter ces conditions dans la matrice de transfert acoustique solution du modèle de Webster-Lokshin avant de diagonaliser cette dernière. Ainsi, nous espérons trouver de nouvelles définitions d'ondes progressives découplées à l'intérieur d'un tube courbe dans lesquelles sont "inscrites" les conditions physiques de réalisme du tube. Nous devrions de cette façon éviter les problèmes liés à la longueur critique présentés en partie I.

Une étape préliminaire consiste à définir des quantités adimensionnées invariantes par symétrie (invariante par inversion entrée/sortie). Les formules de passage principales entre les variables dimensionnées et les variables adimensionnées sont données en section 4, des formules plus détaillées sont fournies en annexe.



## 4 Adimensionnement, convention axiale et convention “tronçon”

### 4.1 Notations

A l'exception de quelques variables qui possèdent un nom différent en version dimensionnée et en version adimensionnée, les notations suivantes sont respectées dans le reste du document :

- les variables et les paramètres dimensionnés sont notés avec un  $\tilde{\phantom{x}}$ ,
- les variables et les paramètres adimensionnés sont notés sans  $\tilde{\phantom{x}}$ ,
- les variables dépendant de la variable spatiale sont notés, en convention axiale,  $A(\ell)$  ou  $A(x)$ ,
- les variables dépendant de la variable spatiale sont notés, en convention tronçon,  $A_l$  ou  $A_r$ .

### 4.2 Adimensionnement

L'adimensionnement des variables nous permet de faire disparaître toutes les constantes des équations du modèle et ainsi de garder uniquement les quantités essentielles à la compréhension physique des phénomènes mis en jeu. L'adimensionnement touche tous les types de variables du problème : variables géométriques, variables de Kirchhoff, fonctions d'ondes etc. Comme nous le verrons tout au long de cette section, la valeur clé pour l'adimensionnement est la longueur  $L$  du tube considéré. Ainsi, l'adimensionnement est propre à un tronçon et lors de la connexion de tronçons les uns aux autres, il faudra prendre soin de redimensionner les variables.

#### 4.2.1 Variables géométriques

Soit un tronçon de tube de longueur  $L$  décrit par sa perçe  $R(\ell)$ ,  $\ell \in [a, b]$  (on a  $L = b - a$ ). La variable spatiale indépendante adimensionnée est notée  $x$  et l'adimensionnement se résume à la transformation

$$\ell \in [a, b] \mapsto x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]. \quad (31)$$

Les formules de passage entre la variable  $x$  et la variable  $\ell$  s'écrivent alors

$$x = \mathcal{X}(\ell) = \frac{\ell - \frac{a+b}{2}}{L}, \quad (32)$$

$$\ell = \mathcal{L}(x) = Lx + \frac{a+b}{2}. \quad (33)$$

Dans le cas  $a = -\frac{L}{2}$ ,  $b = \frac{L}{2}$ , les formules de passage deviennent simplement

$$x = \mathcal{X}(\ell) = \frac{\ell}{L}, \quad (34)$$

$$\ell = \mathcal{L}(x) = Lx. \quad (35)$$

Le rayon  $\tilde{R}(\ell)$  est adimensionné de la façon suivante

$$\begin{aligned} R(x) &= \frac{1}{L} \tilde{R}(\mathcal{L}(x)), \\ \tilde{R}(\ell) &= L R(\mathcal{X}(\ell)). \end{aligned} \quad (36)$$

L'adimensionnement des paramètres géométriques est alors immédiat :

$$\begin{aligned}
R_{r/l} &= \frac{1}{L} \tilde{R}_{r/L}, \\
\tilde{R}_{r/l} &= L R_{r/L}, \\
\Upsilon &= L^2 \tilde{\Upsilon}, \\
\tilde{\Upsilon} &= \frac{1}{L^2} \Upsilon,
\end{aligned} \tag{37}$$

et on a

$$\begin{aligned}
S_{\Upsilon}^{-}(x) &= \tilde{S}_{\tilde{\Upsilon}}^{-}(\mathcal{L}(x)) = -\frac{\sinh\left(\sqrt{\Upsilon}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)}{\sinh\left(\sqrt{\Upsilon}\right)}, \\
S_{\Upsilon}^{+}(x) &= \tilde{S}_{\tilde{\Upsilon}}^{+}(\mathcal{L}(x)) = \frac{\sinh\left(\sqrt{\Upsilon}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sinh\left(\sqrt{\Upsilon}\right)}, \\
R(x) &= \frac{1}{L} \tilde{R}(\mathcal{L}(x)) = R_l S_{\Upsilon}^{-}(x) + R_r S_{\Upsilon}^{+}(x).
\end{aligned} \tag{38}$$

L'adimensionnement du paramétrage initial du rayon est donné en annexe.

#### 4.2.2 Variables acoustiques

L'adimensionnement dans le domaine temporel (et dans le domaine de Laplace) est effectué par rapport au temps de propagation d'une onde sonore dans un tube de longueur  $L$  :

$$\begin{aligned}
t &= \frac{c_0}{L} \tilde{t}, \quad s = \frac{L}{c_0} \tilde{s}, \\
\tilde{t} &= \frac{L}{c_0} t, \quad \tilde{s} = \frac{c_0}{L} s.
\end{aligned} \tag{39}$$

On en déduit l'adimensionnement du paramètre  $\tilde{\varepsilon}$  et de la fonction  $\tilde{\Gamma}(\tilde{s})$

$$\varepsilon = \sqrt{L} \tilde{\varepsilon}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{L}} \varepsilon, \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= L \tilde{\Gamma}\left(\frac{c_0}{L} s\right) = \sqrt{s^2 + \Upsilon + 2\varepsilon s^{\frac{3}{2}}}, \\
\tilde{\Gamma}(\tilde{s}) &= \frac{1}{L} \Gamma\left(\frac{L}{c_0} \tilde{s}\right) = \sqrt{\left(\frac{\tilde{s}}{c_0}\right)^2 + \tilde{\Upsilon} + 2\varepsilon \left(\frac{\tilde{s}}{c_0}\right)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Les variables de Kirchhoff sont adimensionnées respectivement par rapport à la pression de référence  $\rho_0 c_0^2$  et au débit de référence  $c_0 \tilde{S}(\ell)$  (où  $\tilde{S}(\ell) = \pi \tilde{R}(\ell)^2$ )

$$\begin{aligned}
P(x, t) &= \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \tilde{P}\left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t\right) & U(x, t) &= \frac{1}{c_0 \tilde{S}(\mathcal{L}(x))} \tilde{U}\left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t\right) \\
\tilde{P}(\ell, t) &= \rho_0 c_0^2 P\left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t\right) & \tilde{U}(\ell, t) &= c_0 L^2 \tilde{S}(\mathcal{X}(\ell)) U\left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t\right)
\end{aligned} \tag{42}$$

L'adimensionnement des différentes variables d'ondes définies dans [6] est explicité en annexe.

### 4.2.3 Modèle de Webster-Lokshin

En variables adimensionnées, le modèle de Webster-Lokshin s'écrit

$$\begin{cases} \left[ s^2 + \Upsilon + 2\varepsilon s^{\frac{3}{2}} - \partial_x^2 \right] \left( R(x)P(x, s) \right) = 0 \\ sU(x, s) + \partial_x P(x, s) = 0 \end{cases}$$

Nous avons bien réussi à faire disparaître toutes les constantes physiques du problème. Nous allons donc pouvoir nous concentrer sur la compréhension physique des phénomènes et la recherche d'ondes découplées informées par la géométrie. Cependant, nous devons d'abord aborder ce que nous avons appelé la "convention tronçon".

### 4.3 Convention axiale et convention "tronçon"

La convention axiale est en fait celle qui est implicitement utilisée dans la partie I. Considérer un tronçon de tube en convention axiale consiste à définir une extrémité comme étant l'entrée et l'autre comme étant la sortie et à considérer les différentes variables et fonctions le long du tube. On écrit par exemple  $P(x, t)$  ou  $\sigma(x)$  pour  $x \in [-1/2, 1/2]$ . L'inconvénient de ce paradigme est que les expressions des variables et des matrices de transfert acoustiques se voient modifiées lorsque l'on retourne le tube (l'entrée devient la sortie et vice-versa, transformation que l'on peut symboliser par la symétrie  $x \mapsto -x$ ) alors que le tube est le même. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre l'exemple du débit acoustique : si l'on retourne le tube et que l'on garde la même convention alors  $U(x)$  devient à  $-U(-x)$  et non  $U(-x)$ .

La convention appelée "convention tronçon" permet de définir des variables et des matrices de transfert acoustiques qui ne sont pas modifiées par la symétrie  $x \mapsto -x$ . Pour cela, nous ne considérons plus les variables et les fonctions pour  $x \in [-1/2, 1/2]$  mais uniquement aux extrémités du tronçon car ce sont ces dernières qui nous intéressent pour établir les matrices de transfert. Les variables au point  $x = -1/2$  sont notées avec un indice  ${}_l$  (pour left) et les variables au point  $x = 1/2$  sont notées avec un indice  ${}_r$  (pour right). En convention tronçon, la symétrie  $x \mapsto -x$  revient alors simplement à inverser les indices  ${}_l$  et  ${}_r$  dans les différentes fonctions, variables et matrices de passage.

La convention tronçon repose sur un principe simple : les quantités dirigées sont orientées vers l'intérieur du tube. Ainsi le débit à l'extrémité gauche du tube n'est pas modifié entre la convention axiale et la convention tronçon,  $U_l = U(-1/2)$ , mais le débit à l'extrémité droite du tube se transforme en son opposée,  $U_r = -U(1/2)$ . De même pour les pentes normalisées  $\sigma_l$  et  $\sigma_r$ . Les variables d'ondes ne sont plus notées  $\phi^+$  ou  $\phi^-$  mais  $\phi^{in}$  ou  $\phi^{out}$ .

Les figures 5 et 6 illustrent comment les variables de Kirchhoff et les variables d'ondes sphériques présentées en partie I sont modifiées entre la convention axiale et la convention tronçon. Les formules de passage en convention axiale et en convention tronçon sont indiquées ci-après.

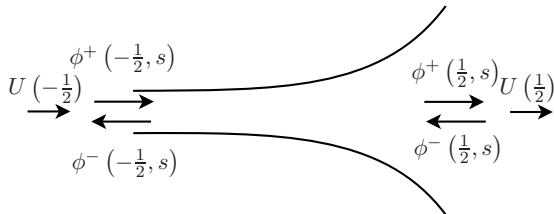


FIGURE 5 – Convention axiale

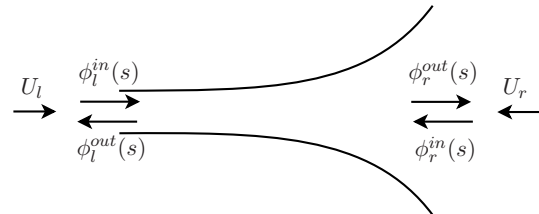


FIGURE 6 – Convention tronçon

$$\sigma(\ell) = \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \qquad \sigma_l = \frac{R'(-\frac{1}{2})}{R(-\frac{1}{2})} \quad , \quad \sigma_r = -\frac{R'(\frac{1}{2})}{R(\frac{1}{2})}$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} &= \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \phi_{l/r}^{in} \\ \phi_{l/r}^{out} \end{bmatrix} &= \frac{R_{l/r}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} &= \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} &= \frac{1}{R_{l/r}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{l/r}^{in} \\ \phi_{l/r}^{out} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 5 Profils physiquement réalistes

Considérons le tube défini par le rayon :  $R(z) = R_l S_{\Upsilon}^-(x) + R_r S_{\Upsilon}^+(x)$ . Nous l'avons évoqué en partie I, la première condition pour que le tube soit physiquement réaliste est bien sûr la positivité stricte du rayon.

**Théorème 5.1 (Positivité du rayon)**

$$R(x) > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} R_l > 0 \\ R_r > 0 \end{cases} \quad (43)$$

**Preuve 5.1 (Positivité du rayon)**

$$\begin{aligned} R(x) > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] &\Rightarrow \begin{cases} R(-\frac{1}{2}) > 0 \\ R(\frac{1}{2}) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_l > 0 \\ R_r > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} R_l > 0 \\ R_r > 0 \end{cases} &\Rightarrow R(x) = R_l S^-(x) + R_r S^+(x) > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ &\text{car } S^-(x) > 0 \text{ et } S^+(x) > 0 \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

La description de la perce en abscisse curviligne fait apparaître des propriétés inhabituelles. En effet, une pente verticale correspond à  $R'(\ell) = 1$ , on a donc la condition suivante :

$$|R'(\ell)| \leq 1 \quad (44)$$

Cette condition ne nous a pas encore mené à des conditions convaincantes et n'est pas exploitée pour l'instant.

Par ailleurs, nous avons vu en partie I l'existence d'une longueur critique ou d'un

## 6 Résolution et diagonalisation de la matrice de passage

### 6.1 Résolution du modèle de Webster-Lokshin à abscisse curviligne

La résolution de (16-17) sous forme de matrice de transfert est donnée dans [1] et peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} \tilde{P}_r(\tilde{s}) \\ \tilde{U}_r(\tilde{s}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L}{\tilde{R}_r} & 0 \\ 0 & -\frac{\pi \tilde{R}_r}{\rho \tilde{s}} \end{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{r,l}(\tilde{s}) \begin{bmatrix} \frac{\tilde{R}_l}{L} & 0 \\ 0 & \frac{\rho \tilde{s}}{\pi \tilde{R}_l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{P}_l(\tilde{s}) \\ \tilde{U}_l(\tilde{s}) \end{bmatrix} \quad (45)$$

où

$$\tilde{\mathbf{Q}}(\tilde{s}) = \begin{bmatrix} [1, \sigma_l] \mathbf{\Delta}(\tilde{s}) & [0, -1] \mathbf{\Delta}(\tilde{s}) \\ [-(\sigma_l + \sigma_r), -\sigma_r \sigma_l - L^2 \tilde{\Gamma}(\tilde{s})^2] \mathbf{\Delta}(\tilde{s}) & [1, \sigma_r] \mathbf{\Delta}(\tilde{s}) \end{bmatrix} \quad (46)$$

avec  $\mathbf{\Delta}(\tilde{s}) = \begin{bmatrix} \phi_1(L\tilde{\Gamma}(\tilde{s})) \\ \phi_2(L\tilde{\Gamma}(\tilde{s})) \end{bmatrix}$

En variables adimensionnées, la matrice de transfert devient

$$\begin{bmatrix} P_r(s) \\ U_r(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_r s} \end{bmatrix} \mathbf{Q}(s) \begin{bmatrix} R_l & 0 \\ 0 & R_l s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_l(s) \\ U_l(s) \end{bmatrix} \quad (47)$$

où

$$\mathbf{Q}(s) = \begin{bmatrix} [1, \sigma_l] \mathbf{\Delta}(s) & [0, -1] \mathbf{\Delta}(s) \\ [-(\sigma_l + \sigma_r), -\sigma_r \sigma_l - \Gamma(s)^2] \mathbf{\Delta}(s) & [1, \sigma_r] \mathbf{\Delta}(s) \end{bmatrix} \quad (48)$$

avec  $\mathbf{\Delta}(s) = \begin{bmatrix} \phi_1(\Gamma(s)) \\ \phi_2(\Gamma(s)) \end{bmatrix}$

Les paramètres  $\sigma_l$ ,  $\sigma_r$  et  $\Upsilon$  sont liés. En effet, en écrivant la définition de  $\sigma_l$  et de  $\sigma_r$ , on montre que

$$\sigma_r + \sigma_l = -(\sigma_r \sigma_l + \Upsilon) \frac{\phi_2(\Upsilon)}{\phi_1(\Upsilon)}. \quad (49)$$

On peut donc réécrire la matrice  $\mathbf{Q}(s)$  afin de séparer les effets des paramètres  $\sigma_l$  et  $\sigma_r$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(s) &= \mathbf{Q}_0(s) + \sigma_l \mathbf{Q}_l(s) + \sigma_r \mathbf{Q}_r(s), \\ \mathbf{Q}_0(s) &= \begin{bmatrix} [1, 0] \mathbf{\Delta}(s) & [0, -1] \mathbf{\Delta}(s) \\ [0, \Upsilon - \Gamma(s)^2] \mathbf{\Delta}(s) & [1, 0] \mathbf{\Delta}(s) \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_l(s) &= \begin{bmatrix} [0, 1] \mathbf{\Delta}(s) & 0 \\ [-1, \Phi(\Upsilon)] \mathbf{\Delta}(s) & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{Q}_r(s) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ [-1, \Phi(\Upsilon)] \mathbf{\Delta}(s) & [0, 1] \mathbf{\Delta}(s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (50)$$

## 6.2 Recherche d'ondes découplées

Dans cette section, la dépendance en la variable de Laplace  $s$  est omise afin d'alléger les notations.

### 6.2.1 Démarche adoptée

Comme nous l'avons dit en introduction de cette partie, le but est ici de trouver des ondes progressives découplées informées par la géométrie. Pour cela, il nous injecter la condition (43) dans (50) avant la diagonalisation. Ceci est fait en utilisant le logarithme du rapport  $Rr/Rl$  (que l'on nomme  $\theta$ ). En effet, la condition (43) implique la réalité de cette quantité. De plus, ce rapport nous permet de distinguer les informations liée à la géométrie et celles liées à l'orientation : le signe de  $\theta$  nous indique l'orientation du tube alors que  $|\theta|$  nous donne une information sur la géométrie invariante par symétrie.

Pour bien comprendre cette étape, il est nécessaire de se demander à quoi correspond physiquement la diagonalisation de la matrice  $\mathbf{Q}$ . Comme l'indique (47), la matrice  $\mathbf{Q}$  est la matrice de

transfert acoustique entre les états acoustiques aux extrémités du tubes. Cet état acoustique est un vecteur contenant la pression normalisée par la longueur du tronçon et la dérivée temporelle d'une quantité de mouvement.

Par définition, la diagonalisation d'une matrice  $\mathbf{M}$  revient à trouver les valeurs propres  $\lambda$  pour lesquels

$$\exists \mathbf{X} \neq 0 / \mathbf{M}\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X}.$$

Dans notre cas, diagonaliser  $\mathbf{Q}$  revient donc à chercher une combinaison linéaire de  $P$  et de  $U$  (à la normalisation par  $R$  ou  $R_s$  près) qui est inchangée (qui garde les mêmes proportions) lorsqu'elle parcourt le tronçon de tube :

$$\mathbf{X} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \mathbf{X} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

### 6.2.2 Recherche des valeurs propres

On pose

$$\theta = \ln \left( \frac{R_r}{R_l} \right), \quad \rho = \sqrt{R_r R_l} \text{ et } F(\theta, \Upsilon) = \frac{\phi_1(\theta^2) - \phi_1(\Upsilon)}{\phi_2(\Upsilon)} \quad (51)$$

On a alors  $R_l = \rho e^{-\theta/2}$ ,  $R_r = \rho e^{\theta/2}$  et  $R_r = e^\theta R_l$ . De plus, par définition,

$$\begin{cases} \sigma_l = \sqrt{\Upsilon} \frac{R_r - R_l \cosh(\sqrt{\Upsilon})}{R_l \sinh(\sqrt{\Upsilon})}, \\ \sigma_r = \sqrt{\Upsilon} \frac{R_l - R_r \cosh(\sqrt{\Upsilon})}{R_r \sinh(\sqrt{\Upsilon})}. \end{cases} \quad (52)$$

On en déduit

$$\begin{cases} \sigma_l = \frac{e^\theta}{\phi_2(\Upsilon)} - \Phi(\Upsilon) = F(\theta, \Upsilon) + \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)}, \\ \sigma_r = \frac{e^{-\theta}}{\phi_2(\Upsilon)} - \Phi(\Upsilon) = F(\theta, \Upsilon) - \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)}. \end{cases} \quad (53)$$

En injectant (53) dans (50), on obtient une nouvelle expression de la matrice  $\mathbf{Q}_{r,l}(s)$ , uniquement en fonction des paramètres  $\theta$  et  $\Upsilon$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{1,1} &= \phi_1(\Gamma^2) + \left( F(\theta, \Upsilon) + \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} \right) \phi_2(\Gamma^2) \\ \mathbf{Q}_{1,2} &= -\phi_2(\Gamma^2) \\ \mathbf{Q}_{2,1} &= -2F(\theta, \Upsilon)\phi_1(\Gamma^2) + \left( \left( \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} \right)^2 - F(\theta, \Upsilon)^2 - \Gamma^2 \right) \phi_2(\Gamma^2) \\ \mathbf{Q}_{2,2} &= \phi_1(\Gamma^2) + \left( F(\theta, \Upsilon) - \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} \right) \phi_2(\Gamma^2) \end{aligned} \quad (54)$$

On montre alors que

$$\det(\mathbf{Q}) = 1 \quad (55)$$

Le polynôme caractéristique associé à cette matrice est

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2b'\lambda + 1 \text{ avec } b' = \phi_1(\Gamma^2) + F(\theta, \Upsilon)\phi_2(\Gamma^2) \quad (56)$$

et les valeurs propre de la matrice de transfert acoustique sont donc

$$\begin{aligned}\lambda_r &= b' \left( 1 - \sqrt{\frac{b'^2 - 1}{b'^2}} \right) \text{ et} \\ \lambda_l &= b' \left( 1 + \sqrt{\frac{b'^2 - 1}{b'^2}} \right).\end{aligned}\tag{57}$$

Comme  $\det \mathbf{Q} = 1$ , on sait que  $\lambda_l = \lambda_r^{-1}$ . Il existe un matrice de passage  $\mathbf{P}$  telle que

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 \\ 0 & \lambda_r^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}.\tag{58}$$

Ces valeurs propres et la matrice de passage qui leur est associée définissent un nouveau type d'ondes progressives découplées qui se propagent à l'intérieur d'un tube acoustique à  $\Upsilon$  constant avec prise en compte des pertes visco-thermique.

La diagonalisation de la matrice de transfert acoustique s'écrit donc :

$$\begin{bmatrix} P_r \\ U_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_r} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_{rs}} \end{bmatrix} \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda_r & 0 \\ 0 & \lambda_l \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} R_l & 0 \\ 0 & R_{ls} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_l \\ U_l \end{bmatrix}\tag{59}$$

### 6.2.3 Paramétrisation des espaces propres

Pour trouver les vecteurs propres associés à chaque valeur propre, on résout

$$\mathbf{Q} \begin{bmatrix} \alpha_{l/r} \\ \beta_{l/r} \end{bmatrix} = \lambda_{l/r} \begin{bmatrix} \alpha_{l/r} \\ \beta_{l/r} \end{bmatrix}\tag{60}$$

Comme la diagonalisation fait apparaître deux valeurs propres de multiplicité 1, la matrice de passage possède deux degrés de liberté que l'on note  $\alpha$  et  $\beta$ . On obtient alors la matrice de passage

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha \left( \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} - K \right) & \beta \left( \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} + K \right) \end{bmatrix}\tag{61}$$

avec

$$K = \frac{b'}{\phi_2(\Gamma^2)} \sqrt{\frac{b'^2 - 1}{b'^2}}\tag{62}$$

et son inverse

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2\alpha\beta K} \begin{bmatrix} \left( \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} + k \right) \beta & -\beta \\ \left( -\frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)} + k \right) \alpha & \alpha \end{bmatrix}.\tag{63}$$

On définit de plus

$$a = \frac{\sinh(\theta)}{\phi_2(\Upsilon)}\tag{64}$$

Nous avons donc trouvé un paramétrage de la matrice de passage liée aux valeurs propres définies ci-dessus.

Nous pouvons maintenant étudier et interpréter les valeurs propres et le paramétrage de la matrice de passage.

### 6.3 Interprétation des valeurs propres

Comme nous l'avons vu dans la première partie, les valeurs propres de la matrice diagonalisée ont un lien très étroit avec les propagateurs des ondes découplés. On peut ainsi définir une nouvelle décomposition en quadripôles à partir de (59,61-63). Cette décomposition est présentée en figure 7.

Plusieurs remarques sont à faire au sujet de cette décomposition. Premièrement, il apparaît tout de suite que nous avons perdu l'invariance par changement d'orientation. Une étude sur  $\alpha$  et  $\beta$  sera donc nécessaire pour tenter de faire réapparaître cette symétrie. De plus, la définition ne peut par définition pas être mise en place si les variables d'entrée ne sont pas du même type (nous avons ici  $P_l$  et  $U_r$ ). Il serait donc sûrement judicieux de modifier cette décomposition en quadripôles en l'exprimant, par exemple, avec les variables d'ondes  $(p^+, p^-)$  ou  $(\phi^+, \phi^-)$  définies dans [6]. Malheureusement, je n'ai pas eu le temps aujourd'hui d'étudier plus en profondeur cette décomposition. Nous pouvons cependant évoquer plusieurs idées pour résoudre les degrés de liberté :

- $\det(\mathbf{P}) = 0$  devrait pouvoir simplifier considérablement l'expression des matrices  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}^{-1}$ ,
- il faudra poser les équations de raccordement de deux tronçons afin de s'assurer, par exemple, de la simplification dans le cas où on raccorde deux tronçons ayant le même paramètre  $\Upsilon$  et avec une régularité  $\mathcal{C}^1$  (il faut retrouver les quadripôles correspondant à un tronçon ayant le même  $\Upsilon$  dont la longueur est la somme des longueurs des deux premiers tronçons).

Ces travaux n'ont pu être réalisés aujourd'hui par manque de temps mais nous espérons qu'ils donnent des résultats très satisfaisants.

Nous avons en revanche étudié d'un peu plus près les valeurs propres et les propagateurs qui ont été trouvés dans cette étude. Afin de présenter les propagateurs, les pages suivantes présentent une série de courbes qui permettent de comparer le propagateur  $D(s)$  30 précédemment utilisé avec le nouveau propagateur déduit des valeurs propres que nous avons trouvé :

$$D_n(s) = e^s \lambda_r(s). \quad (65)$$

Les pages suivantes présentent le tracé du rayon, les modules et phases de  $D(s)$  dans le domaine de Laplace et les modules et phases de  $D_n(s)$  dans le domaine de Laplace pour plusieurs jeux de paramètres  $\Upsilon$ ,  $\theta$  et  $\varepsilon$ .

Sur chaque double page, les figures sont présentés comme suit

- De droite à gauche :  $\Upsilon = 10, 10 - 1 - 5$ .
- De haut en bas : rayon du tronçon, module de  $D(s)$ , phase de  $D(s)$ , module de  $D_n(s)$ , phase de  $D_n(s)$ .

Les doubles pages pages sont dans cet ordre :

- $\varepsilon = 0, Rr/Rl = 1,$
- $\varepsilon = 0, Rr/Rl = 2,$
- $\varepsilon = 0, Rr/Rl = 10,$
- $\varepsilon = 0.1, Rr/Rl = 1,$
- $\varepsilon = 0.1, Rr/Rl = 2,$
- $\varepsilon = 0.1, Rr/Rl = 10.$

Les codes couleurs sont les suivants :

- Pour les modules, l'échelle va de 0 à 2, du bleu foncé au rouge. Tout ce qui est supérieur à 2 est rouge foncé. Cette coloration ne permet pas de différencier les pics d'amplitude supérieur à 2 mais en revanche, elle est très adaptée pour repérer le passage au-dessus ou en-dessous de 1.



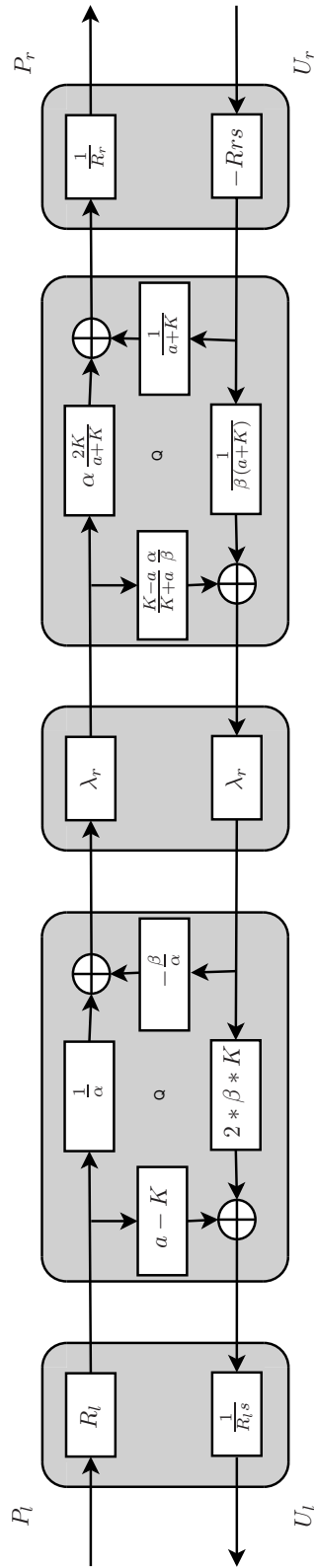
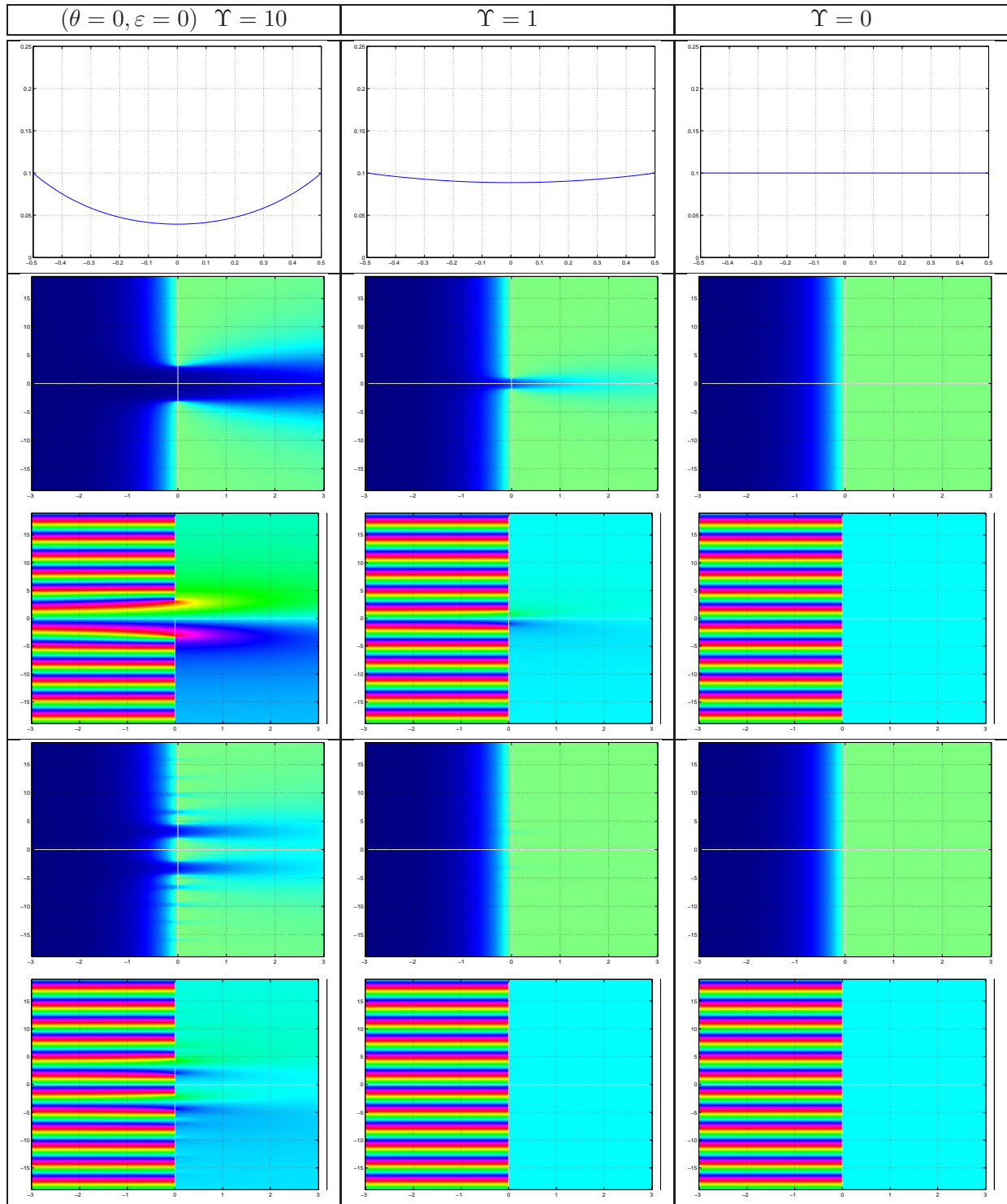
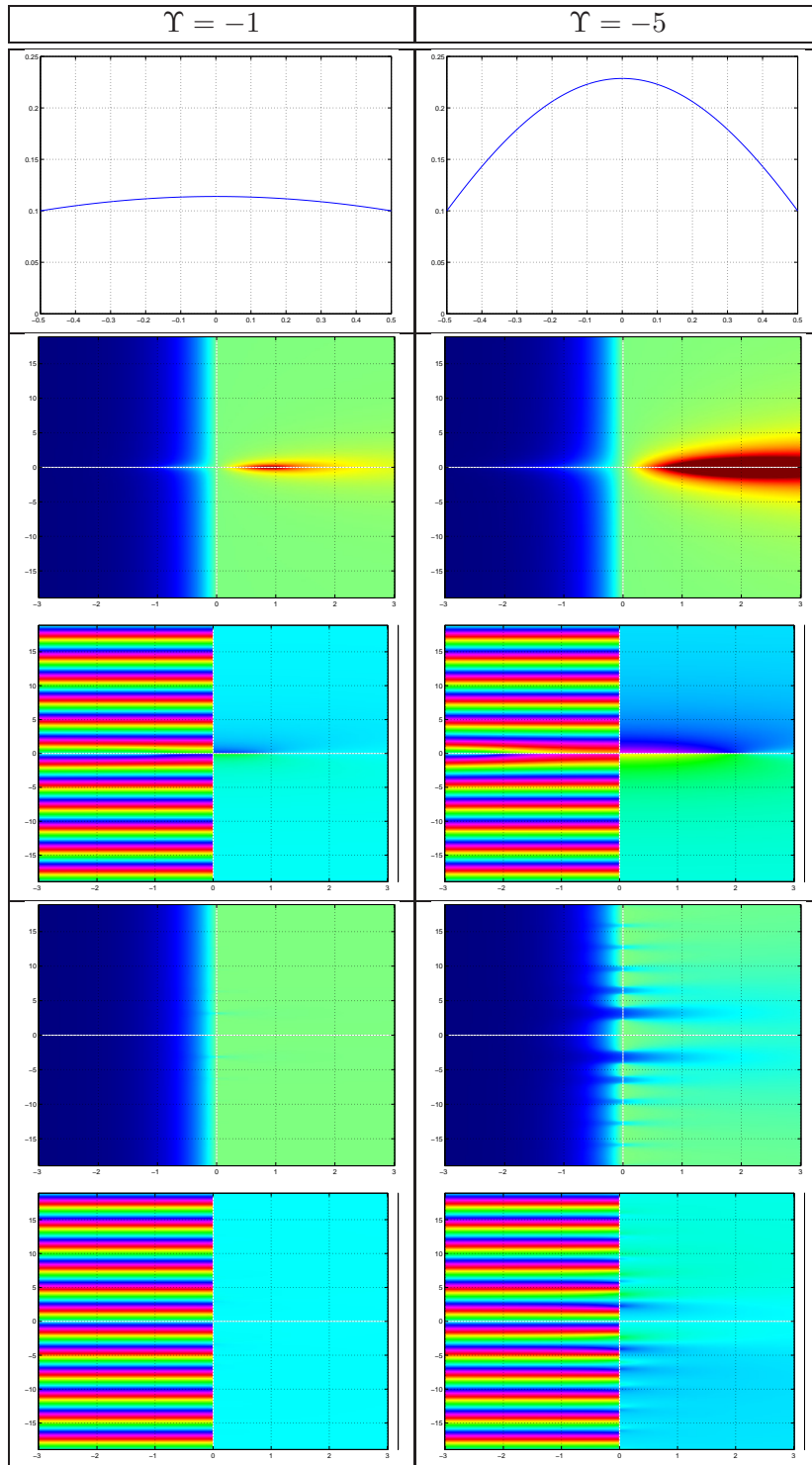
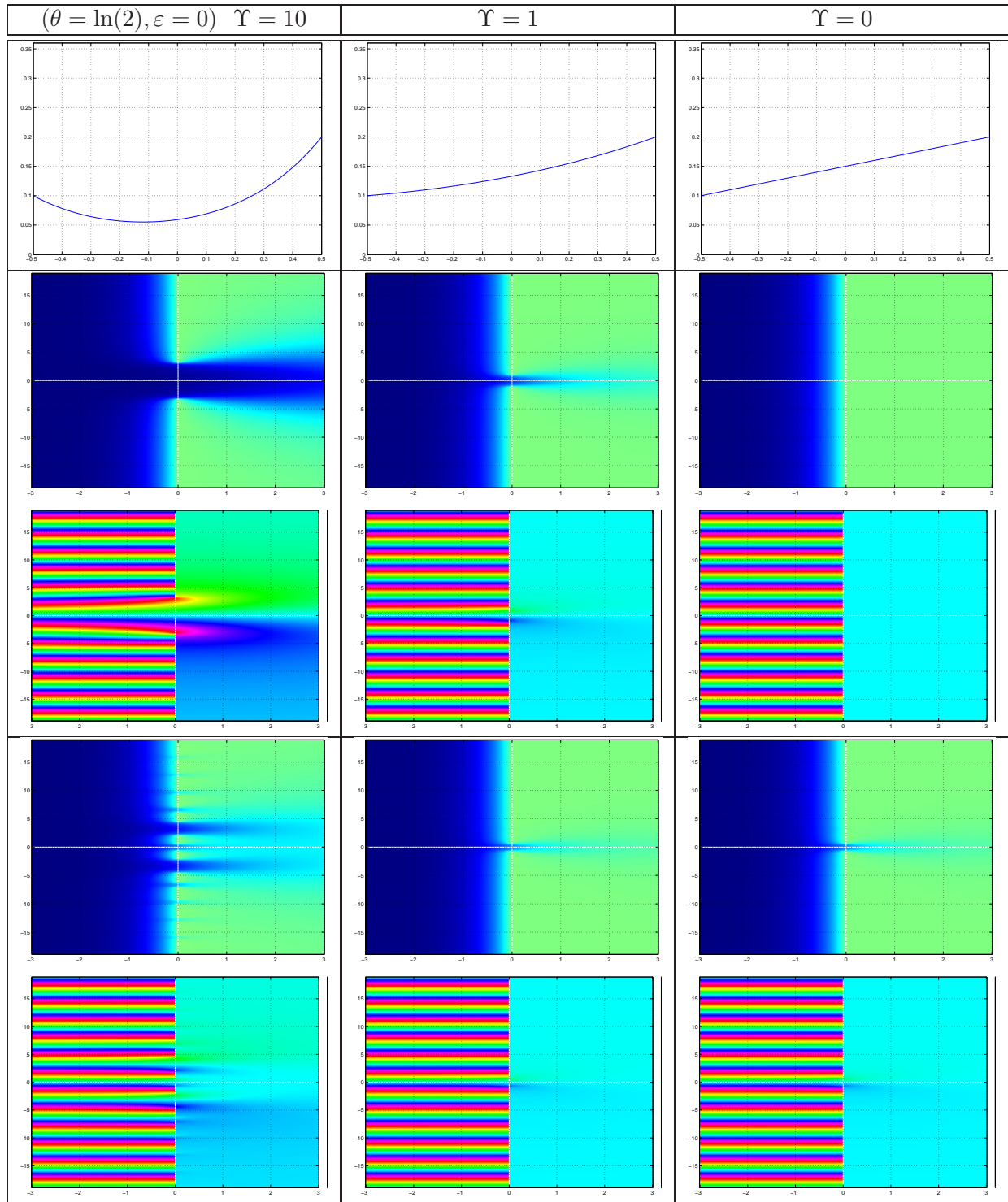


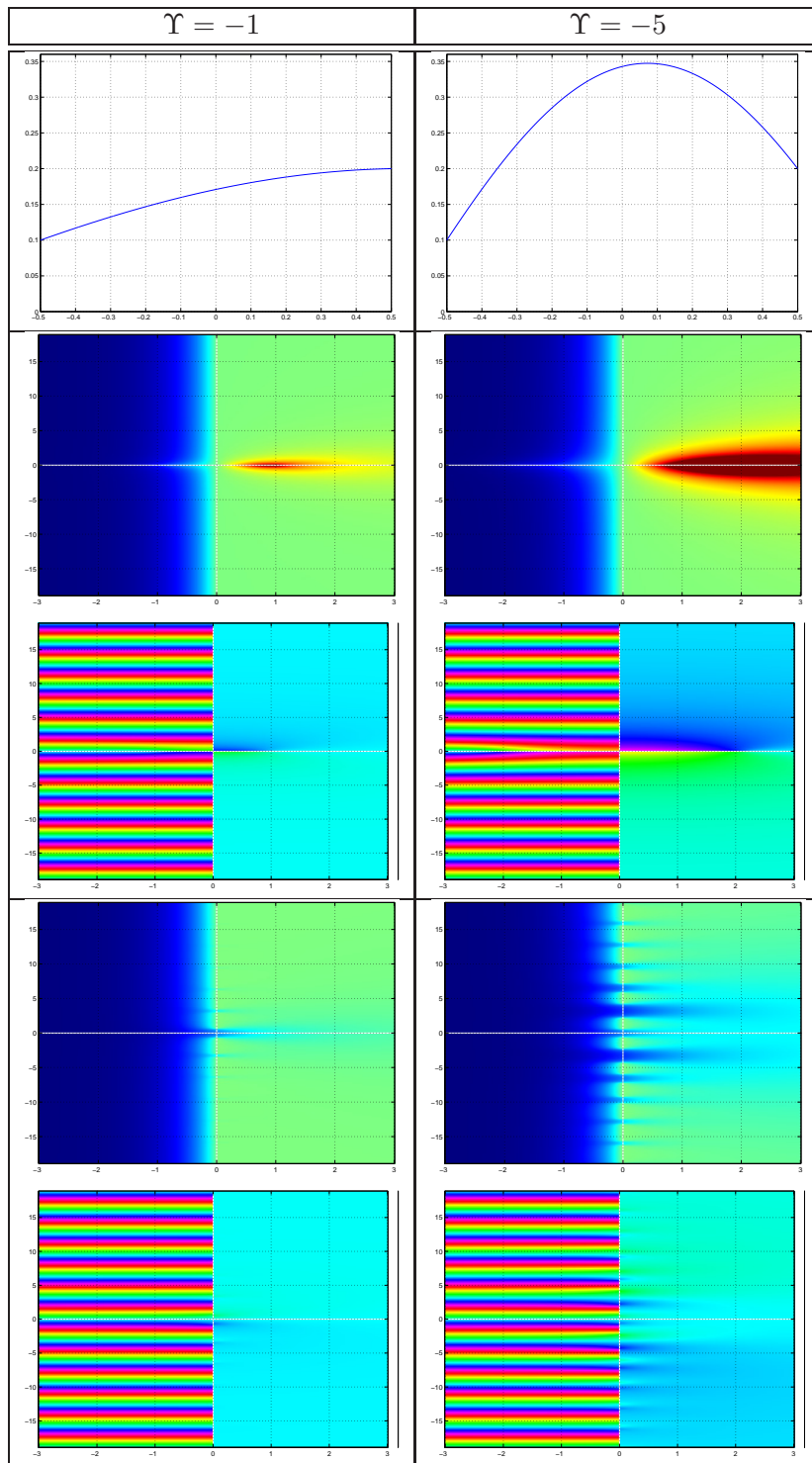
FIGURE 7 – Décomposition en quadripôles

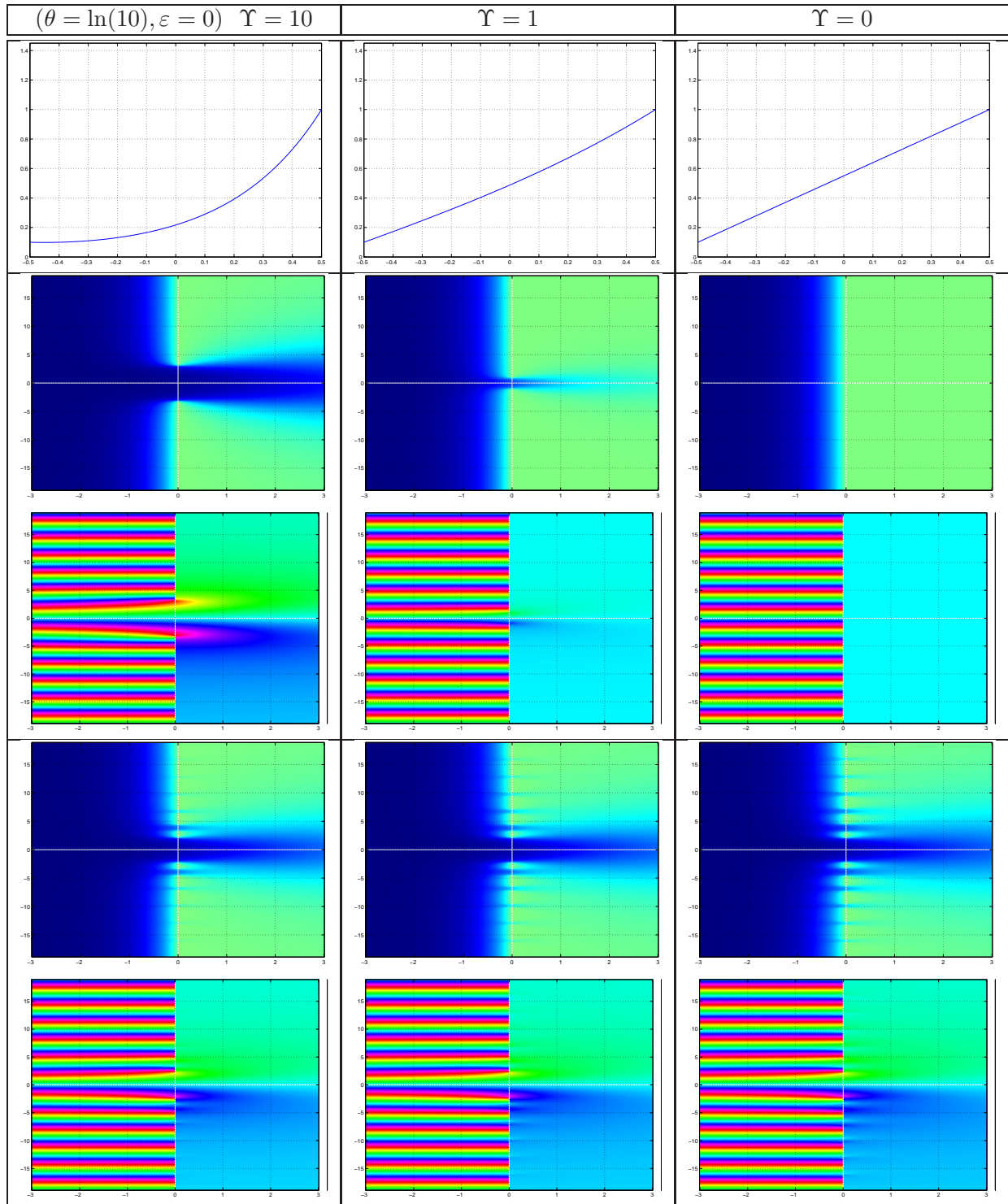
- Pour les phases, l'échelle est circulaire : les couleurs correspondantes à  $-\pi$  et  $\pi$  sont rouges. Les couleurs se déroulent ensuite en passant par le bleu clair pour une phase nulle.

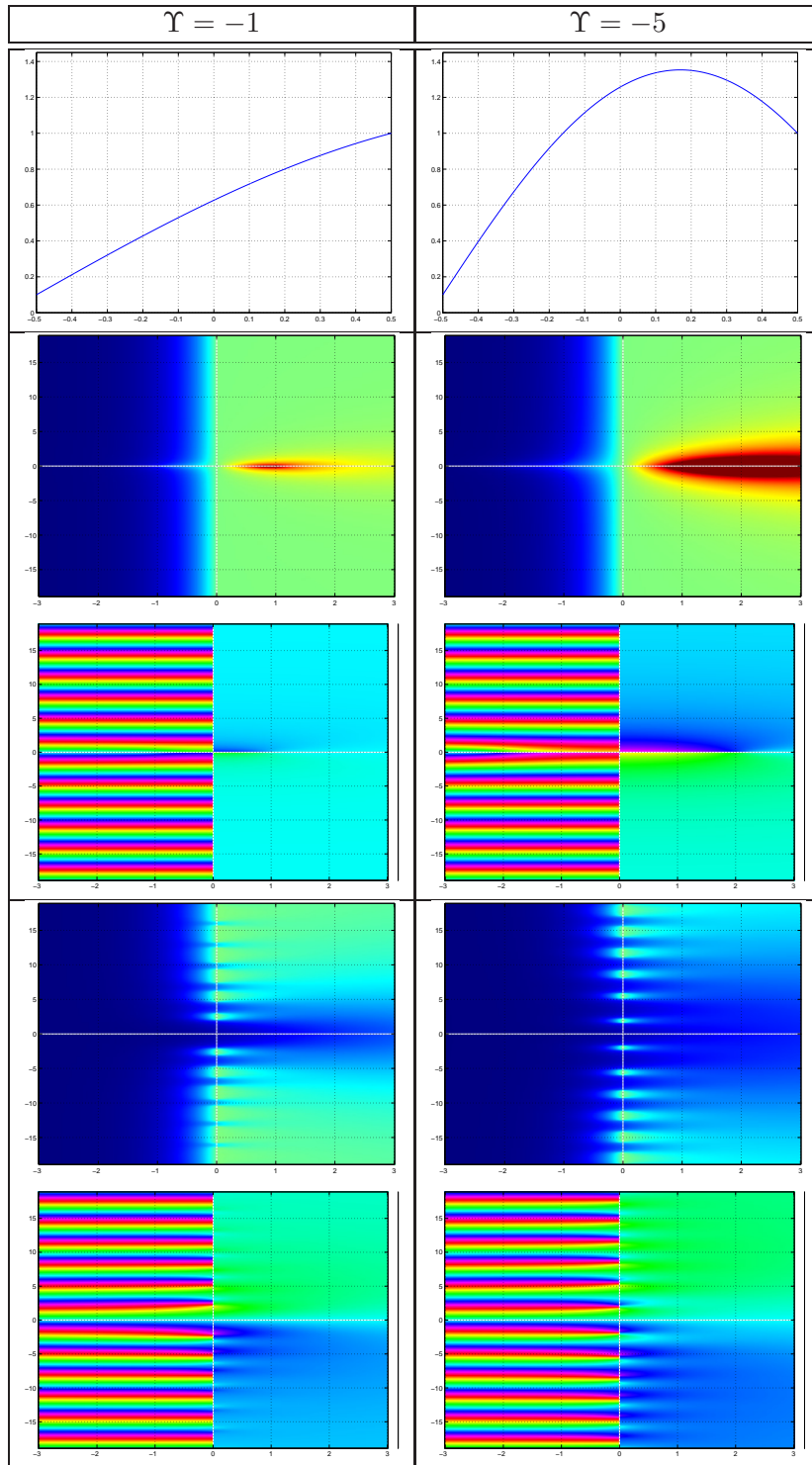


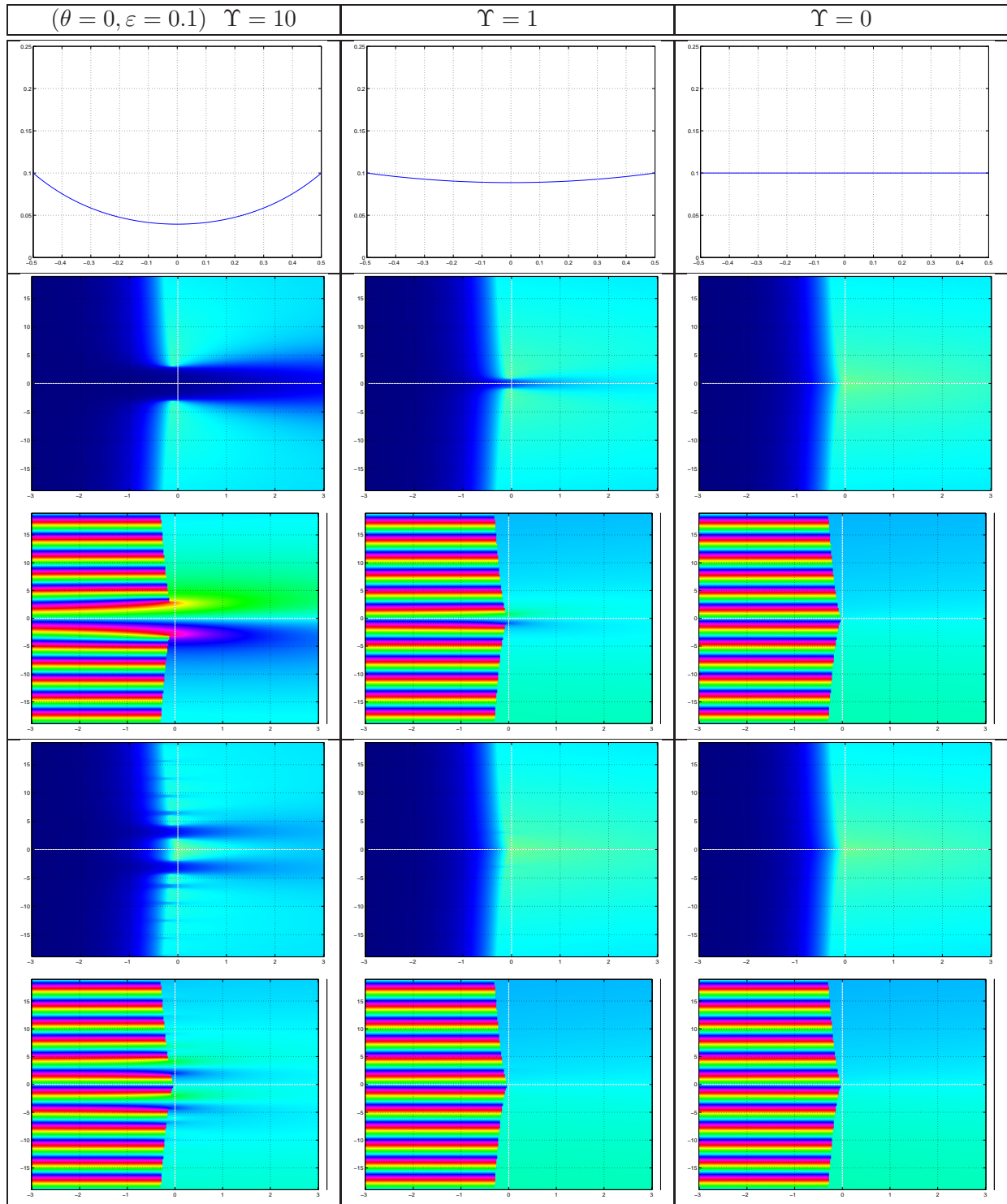




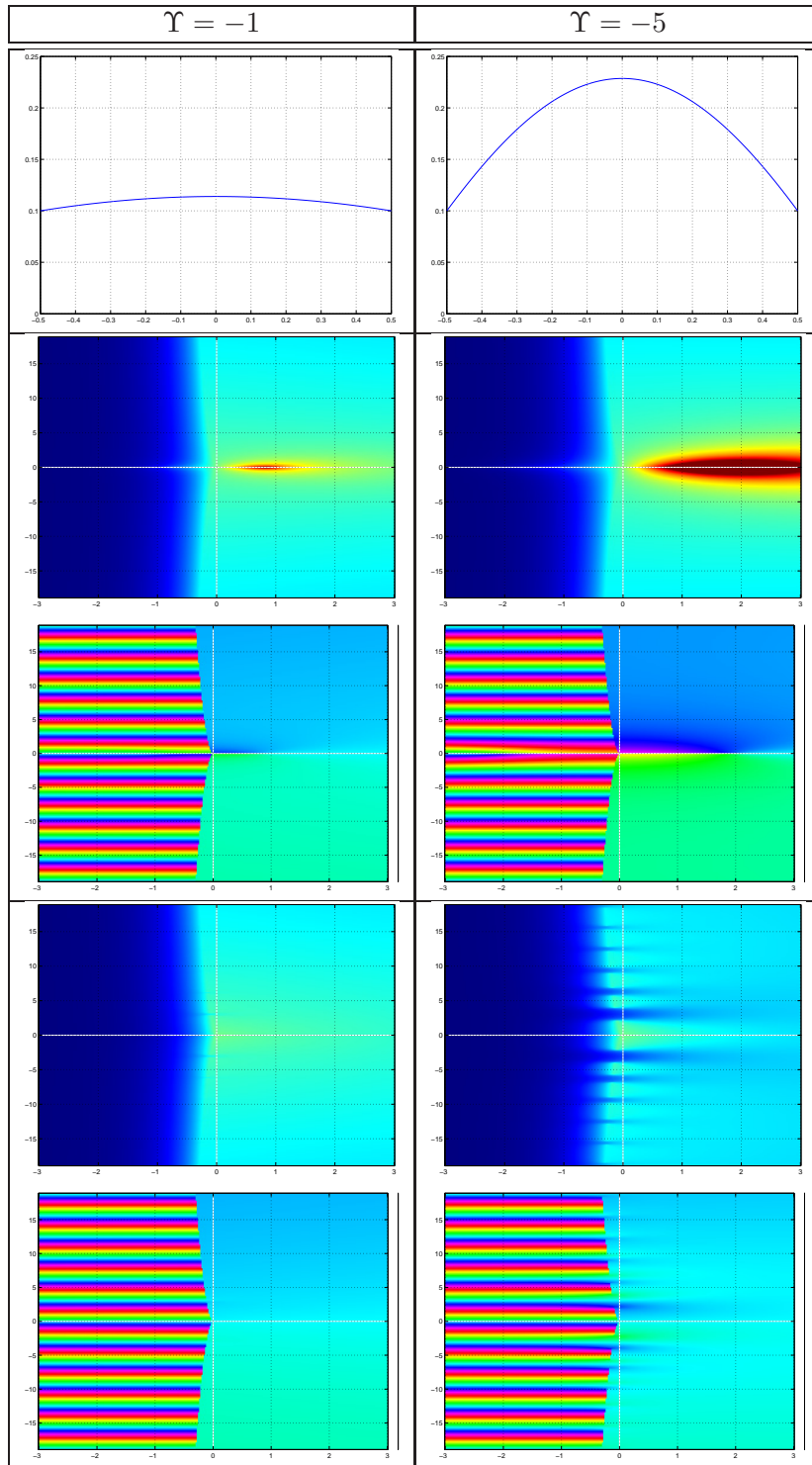


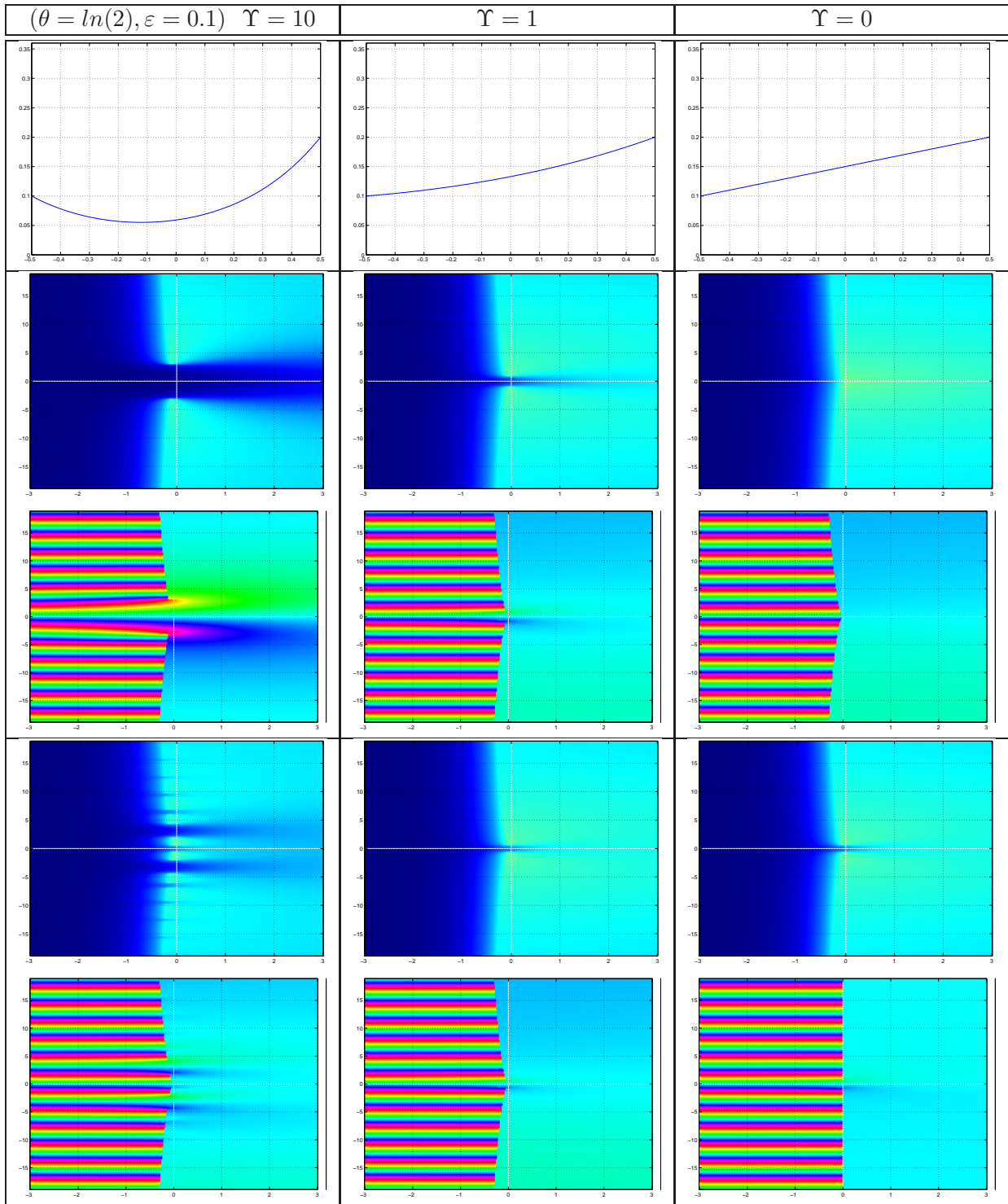


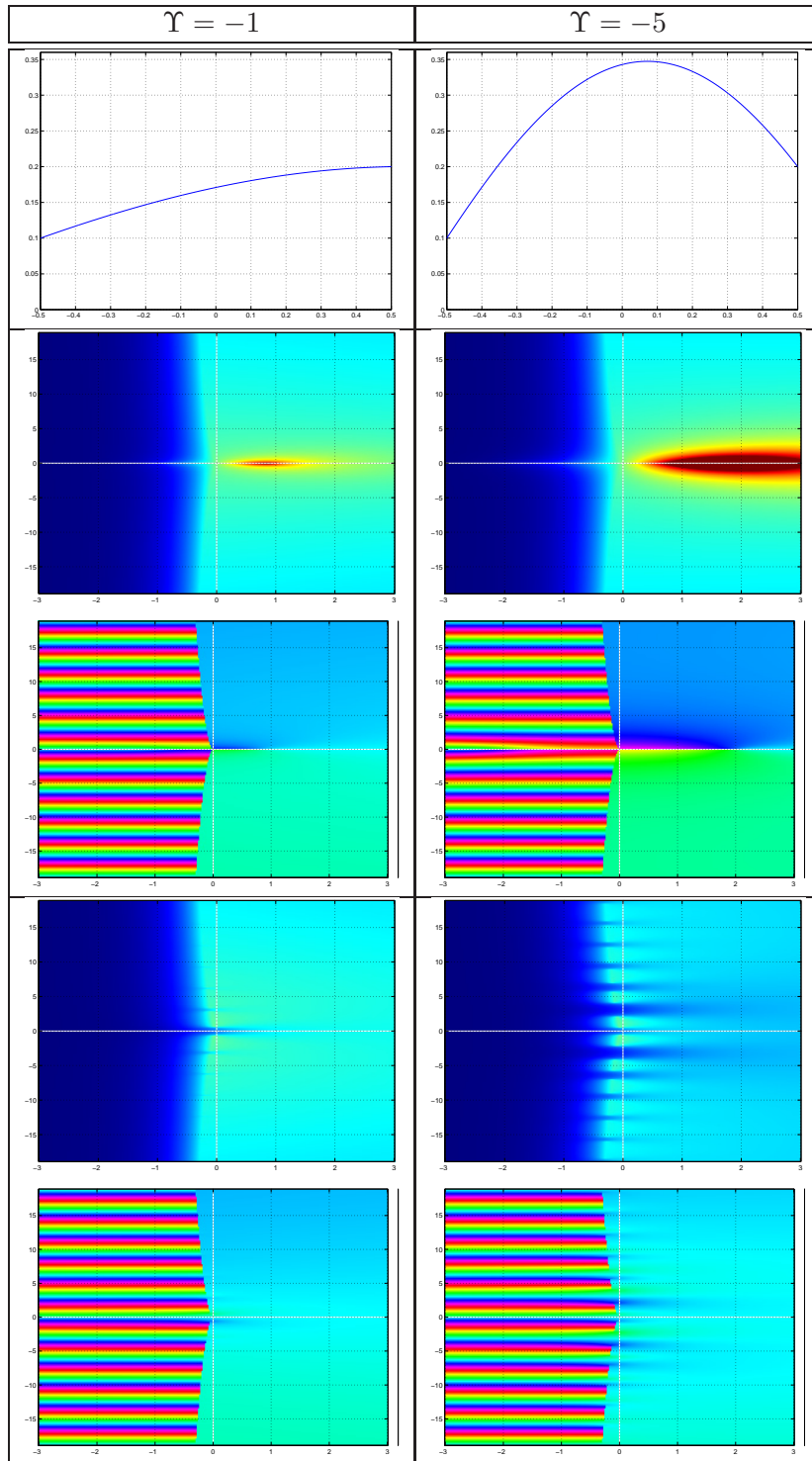


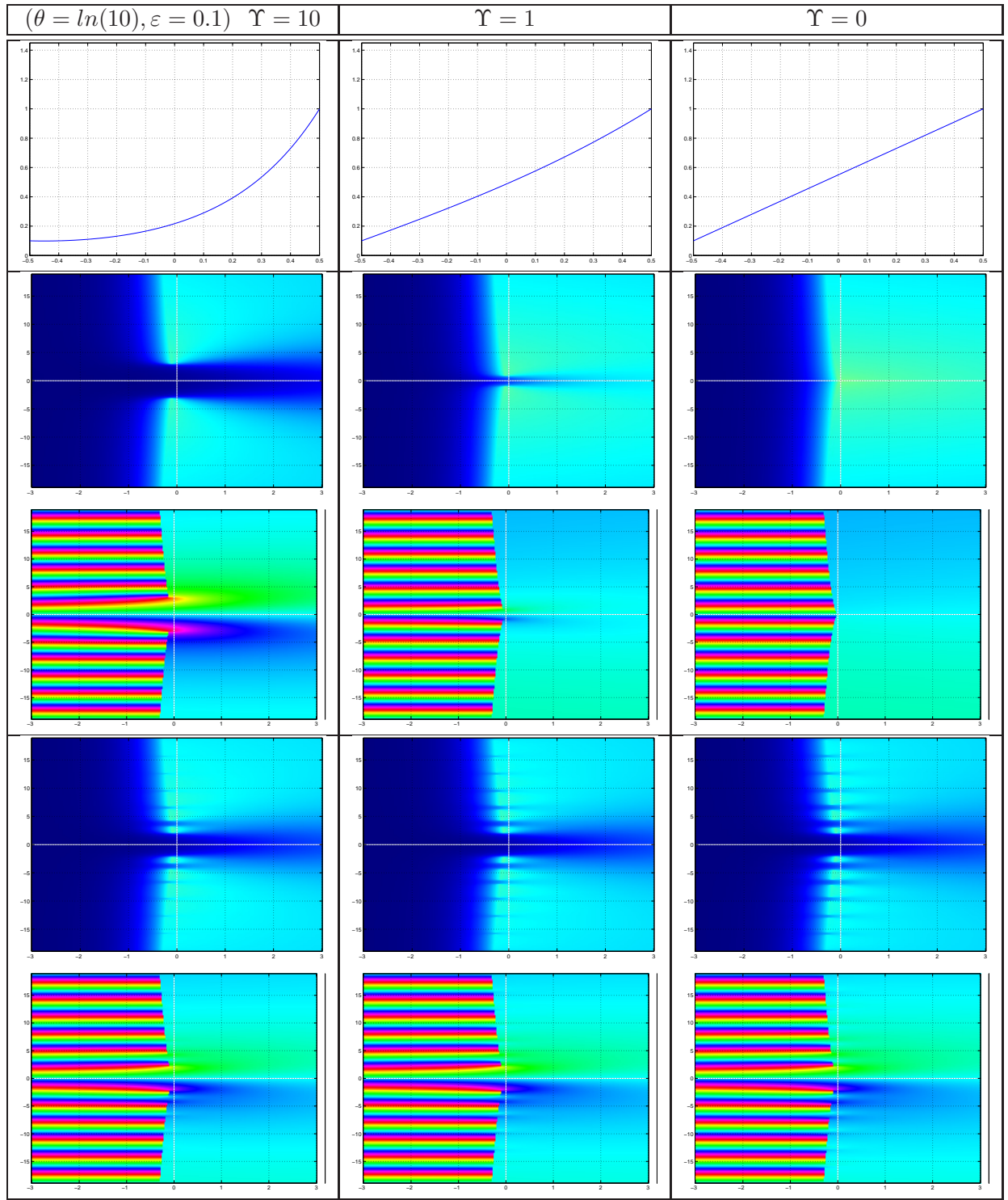


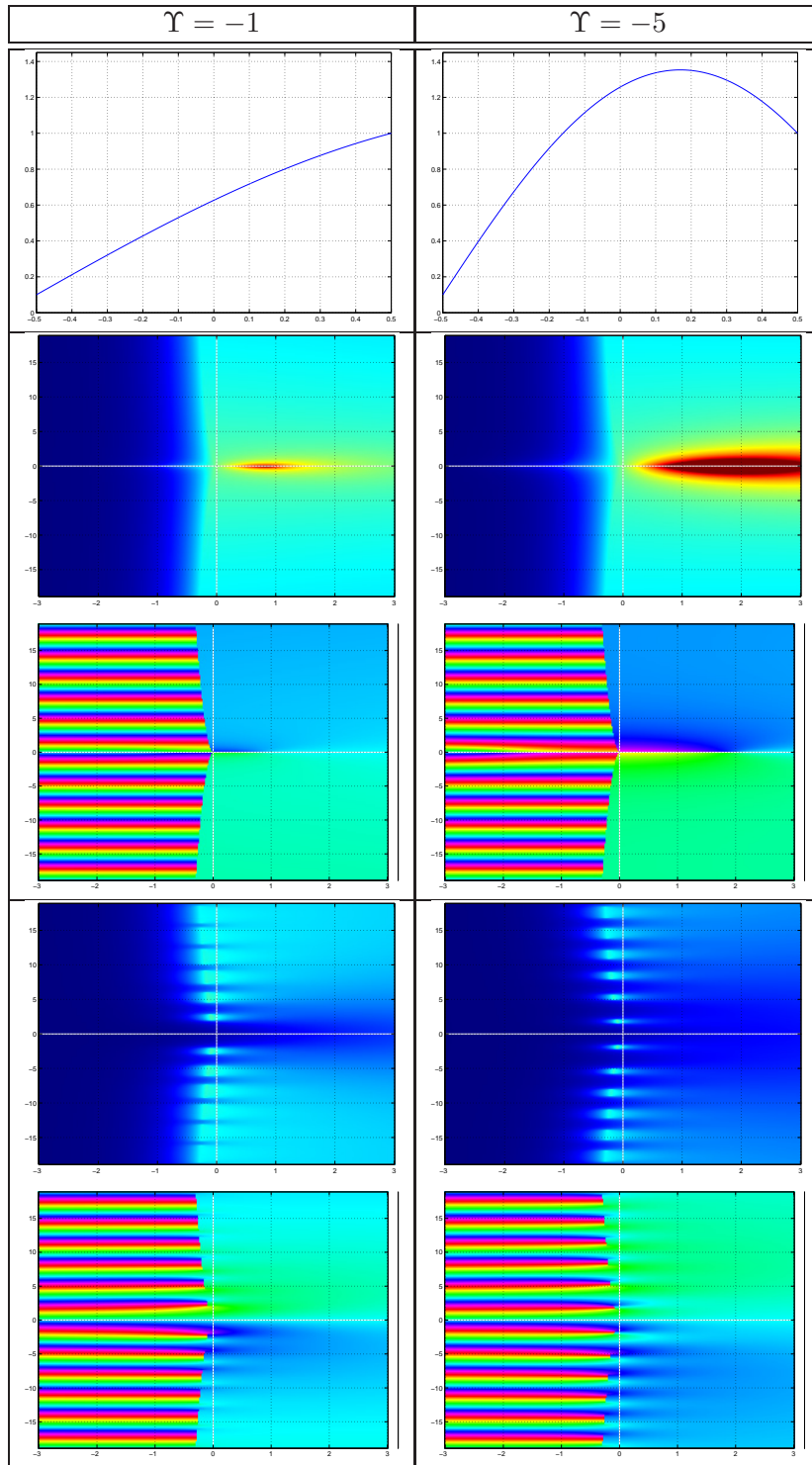












Ces nombreuses figures nous donnent de précieux renseignements sur l'intérêt des propagateurs que nous avons trouvé. Rappelons qu'en raison de la présence de racine complexe, nous nous bornons pour l'instant à considérer les fonctions sur le demi-plan droit de Laplace. Une étude plus approfondie permettrait de tirer de nombreuses informations de la partie des courbes sur  $\mathbb{C}_0^-$ .

En premier lieu, il est bon de souligner que, dans le cas des tubes droits (avec ou sans pertes), nous retrouvons le propagateur unitaire défini en section 1.

Ensuite, nous pouvons remarquer que les propagateurs ont, dans tous les cas, l'heureuse

propriété d’avoir un module inférieur à 1. Ainsi, les propagateurs en eux-mêmes sont stables, contrairement aux propagateurs initiaux qui présentent un pôle très important dans  $\mathbb{C}_0^+$ . On remarque aussi les coupures dans les diagrammes de phase de  $e^{s-\Gamma(s)}$ . Ce résultat en soit est déjà un très grand progrès dans la décomposition en ondes découplées, il nous assure la stabilité lors du transport.

Enfin, on remarque une structure de modes “en creux” (module plus petit que 1), notamment pour les valeurs de  $|\Upsilon|$  grandes. Une première interprétation, pour les courbes avec  $\Upsilon < 0$ , est que nous avons réussi à isoler ce qui est souvent appelé dans la littérature les “modes capturés” des tubes concaves. Cependant, on remarque que ces modes sont aussi présents pour les  $\Upsilon > 0$ . Cette interprétation est donc à modérer et il est nécessaire d’effectuer une recherche plus approfondie pour bien comprendre la nature de ces modes.

# Conclusion et perspectives

Nous avons réussi pendant ce stage à mettre à jour un nouveau type d'ondes découplées. Ces ondes intègrent une condition géométrique de réalisabilité du tube : la positivité du rayon. Ainsi, nous pensons pouvoir supprimer le problème existant précédemment lié à des changements de signe virtuels du tube dans les fonctions de réflexions internes. Un premier résultat nous confirme que les propagateurs trouvés sont intéressants car, contrairement aux propagateurs précédents, ils sont stables quelque soit les valeurs de paramètres.

Il reste cependant de nombreux points à approfondir.

Premièrement, l'interprétation des nouveaux propagateurs n'est pas encore très clair et une recherche approfondie dans ce sens sera nécessaire pour continuer le processus de compréhension des phénomènes physiques mis en jeu.

Au delà de la compréhension physique, l'étude est loin d'être finie. Nous avons mis en oeuvre une famille de matrices de transfert paramétrées par deux degrés de liberté et il sera nécessaire d'étudier ces paramètres afin de retrouver, d'une part, une expression de matrice de transfert symétrique par changement d'orientation du tube, et d'autre part, d'étudier la stabilité et la passivité des fonctions de réflexions internes [24, 25]. Car la stabilité des propagateurs n'implique pas forcément la stabilité des fonctions de réflexions internes.

Une fois la stabilité et la passivité des fonctions de réflexions internes assurées, il restera plusieurs étapes avant d'arriver à une véritable structure guides d'ondes stables et faible coût.

La première consiste en l'approximation des différentes fonctions de transfert qui contiennent des coupures (continuum de pôles) en fonctions contenant un ensemble fini de pôles (représentations intégrales) comme cela a déjà été fait dans [1, 6]. La deuxième consiste en la discrétisation du système complet nécessaire pour la simulation temps-réel.

Plusieurs de ces étapes faisaient parties de mes objectifs initiaux pour ce stage. J'ai passé du temps sur une première étude de la paramétrisation des fonctions de réflexions internes définies initialement qui n'a malheureusement pas abouti et je me suis finalement dirigé vers la solution de la diagonalisation de la matrice  $\mathbf{Q}$  assez tard. Ceci dit, les premiers résultats trouvés sur les propagateurs sont plutôt encourageants et j'ai bon espoir que ces travaux servent de point de départ à une recherche approfondie qui permettra enfin de trouver une solution de simulation stable à faible coût des tubes acoustiques.

## Références

- [1] Thomas Hélie. *Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion*. Thèse de doctorat, Université de Paris XI - Orsay, Paris, 2002.
- [2] J. O. Smith. Physical modeling synthesis update. *Computer Music Journal*, 20(2) :44–56, 1996. MIT Press.
- [3] J.L. Kelly and Lochbaum C.C. Speech synthesis. In *Proc. 4th Int. Cong. Acoust.*, pages 1–4, 1962.
- [4] G. P. Scavone. *An Acoustic Analysis of Single-Reed Woodwind Instruments with an Emphasis on Design and Performance Issues and Digital Waveguide Modeling Techniques*. PhD thesis, Music Dept., Stanford University, 1997.
- [5] Th. Hélie, R. Mignot, and D. Matignon. Waveguide modeling of lossy flared acoustic pipes : Derivation of a Kelly-Lochbaum structure for real-time simulations. In *IEEE WASPAA*, pages 267–270, Mohonk, USA, 2007.
- [6] Rémi Mignot. *Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent*. Thèse de doctorat, Edite de Paris - Telecom ParisTech, Paris, 2009.
- [7] Thomas Hélie, Thomas Hézard, and Rémi Mignot. Représentation géométrique optimale de la perce de cuivres pour la calcul d'impédance d'entrée et de transmittance, et pour l'aide à la lutherie. In *Actes du 10ème Congrès Français d'Acoustique*, 2010.
- [8] D. P. Berners. *Acoustics and signal processing techniques for physical modeling of brass instruments*. PhD thesis, Stanford University, 1999.
- [9] E. Ducasse. *Modélisation et simulation dans le domaine temporel d'instruments à vent à anche simple en situation de jeu : méthodes et modèls*. PhD thesis, Université du Maine, 2001.
- [10] E. Ducasse. An alternative to the traveling-wave approach for use in two-port descriptions of acoustic bores. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112 :3031–3041, 2002.
- [11] J. Gilbert, J. Kergomard, and J. D. Polack. On the reflection functions associated with discontinuities in conical bores. *J. Acoust. Soc. Am.*, 04, 1990.
- [12] Rémi Mignot, Thomas Hélie, and Denis Matignon. Stable realization of a delay system modeling a convergent acoustic cone. In *Mediterranean Conference on Control and Automation*, pages 1574–1579, Ajaccio, France, 2008.
- [13] Thomas Hélie. Ondes découplées et ondes progressives pour les problèmes monodimensionnels d'acoustique linéaire. In *CFA*, Tours, France, 2006.
- [14] J. L. Lagrange. Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son. Misc. Taurinensia (Mélanges Phil. Math., Soc. Roy. Turin), 1760-1761.
- [15] D. Bernoulli. Sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgues différemment construits. Mém. Acad. Sci. (Paris), 1764.
- [16] A. G. Webster. Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, 5 :275–282, 1919. Errata, *ibid.* **6**, p.320 (1920).
- [17] E. Eisner. Complete solutions of the Webster horn equation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 41(4) :1126–1146, 1967.
- [18] G. Kirchhoff. Ueber die einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung. *Annalen der Physik Leipzig*, 134, 1868. (English version : R. B. Lindsay, ed., *Physical Acoustics*, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, 1974).



- [19] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [20] T. Hélié. Unidimensional models of acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Am.*, 114 :2633–2647, 2003.
- [21] H. Haddar, Th. Hélié, and D. Matignon. A webster-lokshin model for waves with viscothermal losses and impedance boundary conditions : strong solutions. pages 66–71, 2003.
- [22] D. Matignon. Asymptotic stability of the Webster-Lokshin model. In *Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS)*, pages 11 p. CD–Rom, Kyoto, Japan, jul 2006. (invited session).
- [23] Thomas Hézard. *Construction de famille d'instruments à vent virtuels*. Projet de fin d'études d'ingénieur, Ecole Nationale Supérieure de l'Electronique et de ses Applications, Cergy-Pontoise, 2009.
- [24] S. Bilbao. *Waves and Scattering Methods for Numerical Simulation*. John Wiley and Sons, 2004.
- [25] Alfred Fettweis. Wave digital filters : Theory and practice. In *Proc. of the IEEE*, volume 74, pages 270 – 327, 1986.

# Annexe

Sont présentés ici les nombreux calculs effectués pendant ce travail de stage à partir des travaux présentés dans la thèse de Rémi Mignot. Ces différentes expressions ont été obtenues dans le cadre de plusieurs pistes explorées pour la résolution du problème posé. Un grand nombre de ces pistes ont été infructueuses et n'ont pas été présentées dans le présent document. Néanmoins, nous tenons à intégrer ces expressions dans ce document car elles pourront être utilisées dans la continuité de ces travaux.

## 1 Algèbre générale

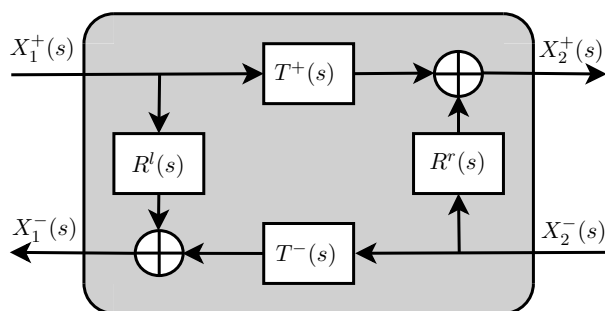


FIGURE 1 – Quadripôle

$$\begin{bmatrix} X_1^- \\ X_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^+ \\ X_2^- \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} X_2^+ \\ X_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1^+ \\ X_1^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= R^l & , & \quad A_{12} = T^- & , & \quad A_{21} = T^+ & , & \quad A_{22} = R^r \\ B_{11} &= \frac{T^+T^- - R^lR^r}{T^-} & , & \quad B_{12} = \frac{R^r}{T^-} & , & \quad B_{21} = -\frac{R^l}{T^-} & , & \quad B_{22} = \frac{1}{T^-} \\ A_{11} &= -\frac{B_{21}}{B_{22}} & , & \quad A_{12} = \frac{1}{B_{22}} & , & \quad A_{21} = \frac{B_{11}B_{22} - B_{12}B_{21}}{B_{22}} & , & \quad A_{22} = \frac{B_{12}}{B_{22}} \\ B_{11} &= \frac{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}}{A_{12}} & , & \quad B_{12} = \frac{A_{22}}{A_{12}} & , & \quad B_{21} = -\frac{A_{11}}{A_{12}} & , & \quad B_{22} = \frac{1}{A_{12}} \end{aligned}$$

## 2 Adimensionnement

$$\ell \in [a, b] \mapsto x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$L = b - a$$

On donnera une version simplifiée des formules de passage avec  $a = -\frac{L}{2}$  et  $b = \frac{L}{2}$ .  
Les paramètres dimensionnés sont notés avec un  $\tilde{\phantom{x}}$ .

### 2.1 Paramètres géométriques dépendant de la translation

#### 2.1.1 Cas général

$x = \mathcal{X}(\ell) = \frac{\ell - \frac{a+b}{2}}{L}$
$\ell = \mathcal{L}(x) = Lx + \frac{a+b}{2}$

$A = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{a+b}{2L} \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}$	$B = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \tilde{\Upsilon} & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathbf{U}}$
$\tilde{A} = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & -\frac{a+b}{2} \end{pmatrix} \mathbf{U}$	$\tilde{B} = \mathbf{V}^T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\Upsilon}{L} & 0 \end{pmatrix} \mathbf{U}$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \phi_1 \left( \tilde{\Upsilon} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \\ \phi_2 \left( \tilde{\Upsilon} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 \left( \frac{\Upsilon}{L^2} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \\ \phi_2 \left( \frac{\Upsilon}{L^2} \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}$$

#### 2.1.2 Cas particulier $a = -\frac{L}{2}$ et $b = \frac{L}{2}$

$x = \mathcal{X}(\ell) = \frac{\ell}{L}$
$\ell = \mathcal{L}(x) = Lx$

$A = \frac{1}{L} \tilde{A}$	$B = \tilde{B}$
$\tilde{A} = LA$	$\tilde{B} = B$

## 2.2 Variables et fonctions de base

### 2.2.1 Variables indépendantes et coefficients

$t = \frac{c_0}{L} \tilde{t}$	$s = \frac{L}{c_0} \tilde{s}$	$\Upsilon = L^2 \tilde{\Upsilon}$	$\varepsilon = \sqrt{L} \tilde{\varepsilon}$
$\tilde{t} = \frac{L}{c_0} t$	$\tilde{s} = \frac{c_0}{L} s$	$\tilde{\Upsilon} = \frac{1}{L^2} \Upsilon$	$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{L}} \varepsilon$

### 2.2.2 Rayons, pentes et surfaces

$R(x) = \frac{1}{L} \tilde{R}(\mathcal{L}(x))$	$\frac{dR}{dx}(x) = \frac{1}{L} \frac{d\tilde{R}}{d\mathcal{L}}(\mathcal{L}(x)) = \frac{d\tilde{R}}{d\ell}(\ell)$
$\tilde{R}(\ell) = LR(\mathcal{X}(\ell))$	$\frac{d\tilde{R}}{d\ell}(\ell) = L \frac{dR}{d\mathcal{L}}(\mathcal{X}(\ell)) = \frac{dR}{dx}(x)$

$\sigma(x) = L\zeta(\mathcal{L}(x)) = \frac{R'(x)}{R(x)}$	$S(x) = \pi R(x)^2 = \frac{1}{L^2} \tilde{S}(\mathcal{L}(x))$
$\zeta(\ell) = \frac{1}{L} \sigma(\mathcal{X}(\ell)) = \frac{\tilde{R}'(\ell)}{\tilde{R}(\ell)}$	$\tilde{S}(\ell) = \pi \tilde{R}(\ell)^2 = L^2 S(\mathcal{X}(\ell))$

$$C_\Upsilon : z \mapsto \cosh(\sqrt{\Upsilon} z)$$

$$S_\Upsilon : z \mapsto \frac{\sinh(\sqrt{\Upsilon} z)}{\sqrt{\Upsilon}}$$

$$\tilde{R}(\ell) = LR(\mathcal{X}(\ell)) = \tilde{A} C_{\tilde{\Upsilon}}(\ell) + \tilde{B} S_{\tilde{\Upsilon}}(\ell)$$

$$\tilde{R}'(\ell) = \frac{d\tilde{R}}{d\ell}(\ell) = L \frac{dR}{d\mathcal{L}}(\mathcal{X}(\ell)) = \tilde{A} \tilde{\Upsilon} S_{\tilde{\Upsilon}}(\ell) + \tilde{B} C_{\tilde{\Upsilon}}(\ell)$$

$$R(x) = \frac{1}{L} \tilde{R}(\mathcal{L}(x)) = A C_\Upsilon(x) + B S_\Upsilon(x)$$

$$R'(x) = \frac{dR}{dx}(x) = \frac{1}{L} \frac{d\tilde{R}}{d\mathcal{L}}(\mathcal{L}(x)) = A \Upsilon S_\Upsilon(x) + B C_\Upsilon(x)$$

### 2.2.3 Autres fonctions

$\Gamma(s) = L\tilde{\Gamma}\left(\frac{c_0}{L}s\right) = \sqrt{s^2 + \Upsilon}$	$e_{ac}(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2 L^2} \tilde{e}_{ac}\left(\mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0}t\right)$
$\tilde{\Gamma}(\tilde{s}) = \frac{1}{L} \Gamma\left(\frac{L}{c_0}\tilde{s}\right) = \sqrt{\left(\frac{\tilde{s}}{c_0}\right)^2 + \tilde{\Upsilon}}$	$\tilde{e}_{ac}(\ell, \tilde{t}) = \rho_0 c_0^2 L^2 e_{ac}\left(\mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L}\tilde{t}\right)$

## 2.3 Variables d'états

### 2.3.1 Variables de Kirchoff

$P(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \tilde{P} \left( \mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right)$	$U(x, t) = \frac{1}{c_0 S(\mathcal{L}(x))} \tilde{U} \left( \mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right)$
$\tilde{P}(\ell, t) = \rho_0 c_0^2 P \left( \mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right)$	$\tilde{U}(\ell, t) = c_0 L^2 \tilde{S}(\mathcal{X}(\ell)) U \left( \mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right)$

$$\begin{cases} \partial_x^2 P(x, t) + 2 \frac{R'(x)}{R(x)} \partial_x P(x, t) - \partial_t^2 P(x, t) = 0 \\ \partial_t U(x, t) + \partial_x P(x, t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[ s^2 + \Upsilon - \partial_x^2 \right] \left( R(x) P(x, s) \right) = 0 \\ s U(x, s) + \partial_x P(x, s) = 0 \end{cases}$$

$$e_{ac}(x, t) = \pi R(x)^2 \frac{P(x, t)^2 + U(x, t)^2}{2}$$

### 2.3.2 Variables de type ondes planes $p^\pm$

$p^\pm(x, t) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \tilde{p}^\pm \left( \mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right)$
$\tilde{p}^\pm(\ell, t) = \rho_0 c_0^2 p^\pm \left( \mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right)$

$$\begin{bmatrix} p^+(x, s) \\ p^-(x, s) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & S(x)/S_c \\ 1 & -S(x)/S_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ S_c/S(x) & -S_c/S(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^+(x, s) \\ p^-(x, s) \end{bmatrix}$$

$$e_{ac}(x, t) = \frac{1}{2} R(x)^2 \left[ \left( 1 + \frac{R_c^2}{R(x)^2} \right) \left( p^+(x, t)^2 + p^-(x, t)^2 \right) + 2 \left( 1 - \frac{R_c^2}{R(x)^2} \right) p^+(x, t) p^-(x, t) \right]$$

### 2.3.3 Variables de type ondes sphériques $\phi^\pm$

$\phi^\pm(x, t) = \frac{1}{L \rho_0 c_0^2} \tilde{\phi}^\pm \left( \mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right)$
$\tilde{\phi}^\pm(\ell, t) = L \rho_0 c_0^2 \phi^\pm \left( \mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right)$

$$\begin{bmatrix} \phi^+(x, s) \\ \phi^-(x, s) \end{bmatrix} = \frac{R(x)}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix} = \frac{1}{R(x)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+(x, s) \\ \phi^-(x, s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} (s + \partial_x) \phi^+(x, s) = \sigma(x) \phi^-(x, s) \\ (s - \partial_x) \phi^-(x, s) = -\sigma(x) \phi^+(x, s) \end{cases}$$

$$e_{ac}(x, t) = \pi \left( \phi^+(x, t)^2 + \phi^-(x, t)^2 \right)$$

### 2.3.4 Variables de type ondes sphériques $\psi^\pm$

$\psi^\pm(x, t) = \frac{1}{L\rho_0 c_0^2} \tilde{\psi}^\pm \left( \mathcal{L}(x), \frac{L}{c_0} t \right)$
$\tilde{\psi}^\pm(\ell, t) = L\rho_0 c_0^2 \psi^\pm \left( \mathcal{X}(\ell), \frac{c_0}{L} t \right)$

$$\begin{bmatrix} \psi^+(x, s) \\ \psi^-(x, s) \end{bmatrix} = \frac{R(x)}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix} + \frac{R'(x)}{2s} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} P(x, s)$$

$$\begin{bmatrix} P(x, s) \\ U(x, s) \end{bmatrix} = \frac{1}{R(x)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^+(x, s) \\ \psi^-(x, s) \end{bmatrix} + \frac{R'(x)}{sR(x)^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \psi(x, s)$$

$$\begin{cases} (s + \partial_x) \psi^+(x, s) = -\frac{\Upsilon}{2s} \psi(x, s) \\ (s - \partial_x) \psi^+(x, s) = -\frac{\Upsilon}{2s} \psi(x, s) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} e_{ac}(x, t) &= \frac{1}{2} \rho_0 c_0^2 \pi L^2 \left[ \left( 1 + \left( 1 + \frac{\sigma(x)}{t} \right)^2 \right) \psi^+(x, t)^2 + \left( 1 + \left( 1 - \frac{\sigma(x)}{t} \right)^2 \right) \psi^-(x, t)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left( 2 - \left( \frac{\sigma(x)}{t} \right)^2 \right) \psi^+(x, t) \psi^-(x, t) \right] \end{aligned}$$

### 3 Convention “tronçon”

#### 3.1 Présentation de la convention “tronçon”

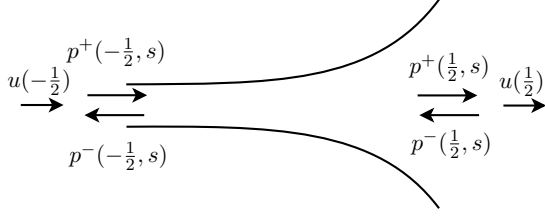


FIGURE 2 – Convention axiale

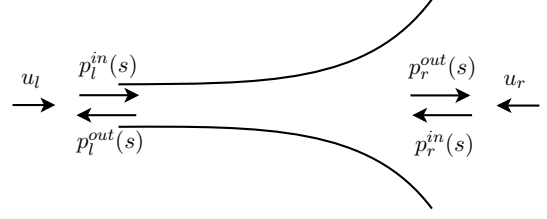


FIGURE 3 – Convention tronçon

$$\sigma(\ell) = \frac{R'(\ell)}{R(\ell)}$$

$$\sigma_l = \frac{R'(-\frac{1}{2})}{R(-\frac{1}{2})} \quad , \quad \sigma_r = -\frac{R'(\frac{1}{2})}{R(\frac{1}{2})}$$

$$\begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & S/S_c \\ 1 & -S/S_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{l/r}^{in} \\ p_{l/r}^{out} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & S_{l/r}/S_c \\ 1 & -S_{l/r}/S_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ S_c/S & -S_c/S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^+ \\ p^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ S_c/S_{l/r} & -S_c/S_{l/r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{l/r}^{in} \\ p_{l/r}^{out} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix} = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \phi_{l/r}^{in} \\ \phi_{l/r}^{out} \end{bmatrix} = \frac{R_{l/r}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi^+ \\ \phi^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{l/r}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{l/r}^{in} \\ \phi_{l/r}^{out} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{bmatrix} = \frac{R}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} + \frac{R'}{2s} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} P$$

$$\begin{bmatrix} \psi_{l/r}^{in} \\ \psi_{l/r}^{out} \end{bmatrix} = \frac{R_{l/r}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} + \frac{R'_{l/r}}{2s} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} P_{l/r}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ U \end{bmatrix} = \frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi^+ \\ \psi^- \end{bmatrix} + \frac{R'}{sR^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \psi$$

$$\begin{bmatrix} P_{l/r} \\ U_{l/r} \end{bmatrix} = \frac{1}{R_{l/r}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{l/r}^{in} \\ \psi_{l/r}^{out} \end{bmatrix} + \frac{R'_{l/r}}{sR_{l/r}^2} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_{l/r}}{R'_{l/r}/R_{l/r}} \end{bmatrix} \psi_{l/r}$$

### 3.2 Fonctions et paramètres de base

$$C_\Gamma(s) = \cosh(\Gamma(s))$$

$$S_\Gamma(s) = \frac{\sinh(\Gamma(s))}{\Gamma(s)}$$

$$T(s) = e^{-\Gamma(s)} = D(s)e^{-s} = T^+(s) = T^-(s)$$

$$D(s) = e^{s-\Gamma(s)}$$

$$R(s) = \frac{s - \Gamma(s)}{s + \Gamma(s)}$$

$$R_{le}(s) = T_{le}(s) - 1 = \frac{s - \Gamma(s) - \sigma_l}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} = \frac{2s}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} - 1$$

$$R_{re}(s) = T_{re}(s) - 1 = \frac{s - \Gamma(s) - \sigma_r}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} = \frac{2s}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} - 1$$

$$R_{li}(s) = T_{li}(s) - 1 = -\frac{s - \Gamma(s) + \sigma_l}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} = \frac{2\Gamma(s)}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} - 1$$

$$R_{ri}(s) = T_{ri}(s) - 1 = -\frac{s - \Gamma(s) + \sigma_r}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} = \frac{2\Gamma(s)}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} - 1$$

$$k_l = \frac{S_c - S_l}{S_c + S_l} = -\frac{Z_c - Z_l}{Z_c + Z_l}$$

$$k_r = \frac{S_c - S_r}{S_c + S_r} = -\frac{Z_c - Z_r}{Z_c + Z_r}$$

$$R_l^s(s) = -\frac{\sigma_l}{2s + \sigma_l}$$

$$R_r^s(s) = -\frac{\sigma_r}{2s + \sigma_r}$$

$$\sigma_l = \frac{R'(-\frac{1}{2})}{R(-\frac{1}{2})}$$

$$\sigma_r = -\frac{R'(\frac{1}{2})}{R(\frac{1}{2})}$$



### 3.3 Quadripôles de conversion

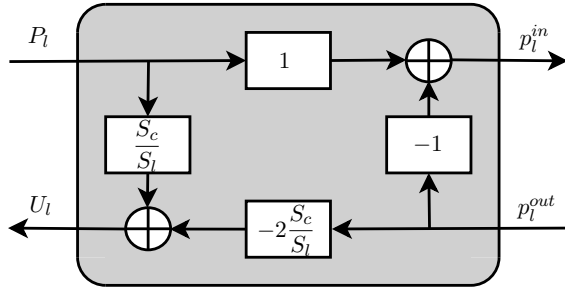


FIGURE 4 - Quadripôle de conversion  $(P_l, U_l) \leftrightarrow (p_l^{in}, p_l^{out})$

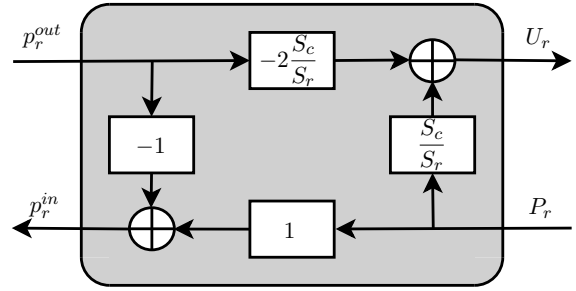


FIGURE 5 - Quadripôle de conversion  $(p_r^{in}, p_r^{out}) \leftrightarrow (P_r, U_r)$

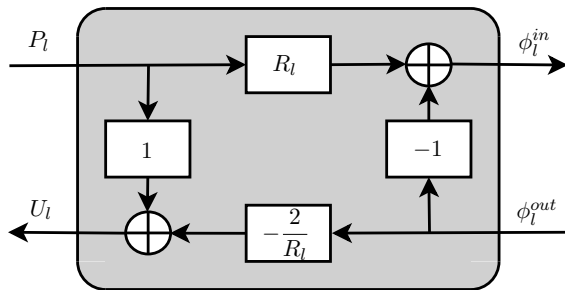


FIGURE 6 - Quadripôle de conversion  $(P_l, U_l) \leftrightarrow (\phi_l^{in}, \phi_l^{out})$

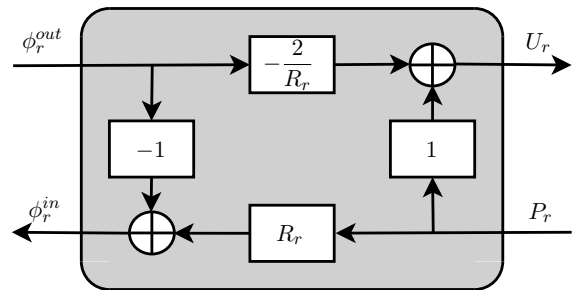


FIGURE 7 - Quadripôle de conversion  $(\phi_r^{in}, \phi_r^{out}) \leftrightarrow (P_r, U_r)$

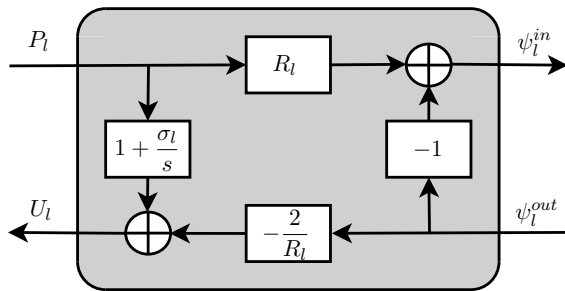


FIGURE 8 - Quadripôle de conversion  $(P_l, U_l) \leftrightarrow (\psi_l^{in}, \psi_l^{out})$

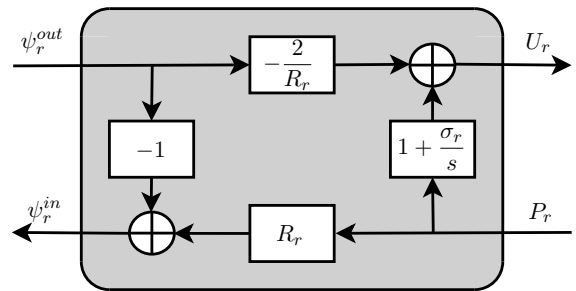


FIGURE 9 - Quadripôle de conversion  $(\psi_r^{in}, \psi_r^{out}) \leftrightarrow (P_r, U_r)$

### 3.4 Fonctions de transfert

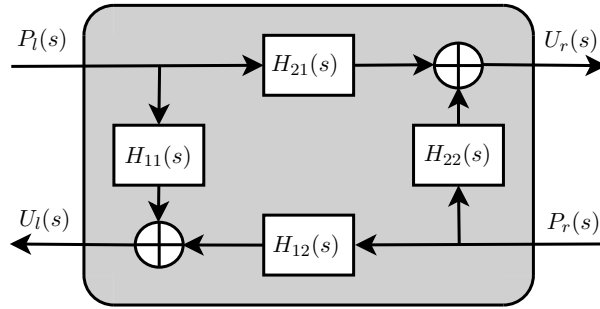


FIGURE 10 – Quadripôle en variables  $(P, U)$

**Fonctions de transfert en variables  $(P, U)$**  Voir figure 10

$$\begin{aligned}
 H_{11}(s) &= \frac{1}{s} \frac{C_\Gamma(s) + \sigma_l S_\Gamma(s)}{S_\Gamma(s)} \\
 H_{22}(s) &= -\frac{1}{s} \frac{C_\Gamma(s) + \sigma_r S_\Gamma(s)}{S_\Gamma(s)} \\
 H_{12}(s) &= -\left(\frac{R_l}{R_r}\right)^3 \frac{1}{s} \frac{1}{S_\Gamma(s)} \\
 H_{21}(s) &= \left(\frac{R_r}{R_l}\right)^3 \frac{1}{s} \frac{1}{S_\Gamma(s)}
 \end{aligned}$$

**Fonctions de transfert en variables  $(p^{in}, p^{out})$**  Voir figure 11

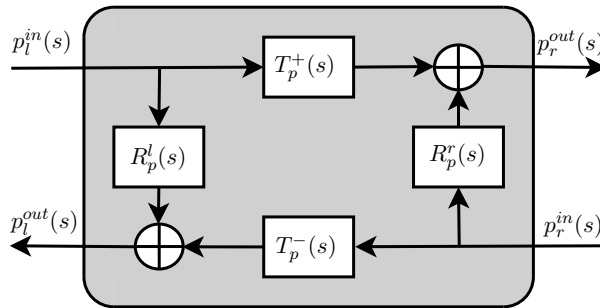


FIGURE 11 – Quadripôle en variables  $(p^{in}, p^{out})$

$$\begin{aligned}
 T_p^+ &= \frac{R_l}{R_r} ((1 + k_l)(1 - k_r)T_\phi) / d_p \\
 T_p^- &= \frac{R_r}{R_l} ((1 - k_l)(1 + k_r)T_\phi) / d_p \\
 R_p^l &= (k_l + k_l k_r R_\phi^r + k_r R_\phi^l R_\phi^r + R_\phi^l - k_r T_\phi^2) / d_p \\
 R_p^r &= (k_r + k_r k_l R_\phi^l + k_l R_\phi^r R_\phi^l + R_\phi^r - k_l T_\phi^2) / d_p \\
 d_p &= 1 + (k_l R_\phi^l + k_r R_\phi^r + k_l k_r R_\phi^l R_\phi^r - k_l k_r T_\phi^2)
 \end{aligned}$$

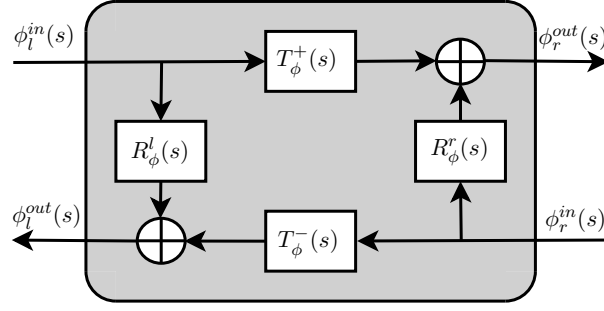


FIGURE 12 – Quadripôle en variable  $(\phi^{in}, \phi^{out})$

**Fonctions de transfert en variables  $(\phi^{in}, \phi^{out})$**  Voir figure 12

$$T_\phi(s) = \left[ \left( 1 + \frac{\sigma_l + \sigma_r}{2s} \right) C_\Gamma(s) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma(s)^2}{s} + s + \left( \frac{\sigma_l \sigma_r}{s} + \sigma_l + \sigma_r \right) \right) S_\Gamma(s) \right]^{-1}$$

$$R_\phi^l(s) = \left[ - \left( \frac{\sigma_l + \sigma_r}{s} \right) C_\Gamma(s) - \left( \frac{\Gamma(s)^2}{s} - s + \left( \frac{\sigma_l \sigma_r}{s} + \sigma_l - \sigma_r \right) \right) S_\Gamma(s) \right] \frac{T_\phi(s)}{2}$$

$$R_\phi^r(s) = \left[ - \left( \frac{\sigma_l + \sigma_r}{s} \right) C_\Gamma(s) - \left( \frac{\Gamma(s)^2}{s} - s + \left( \frac{\sigma_l \sigma_r}{s} - \sigma_l + \sigma_r \right) \right) S_\Gamma(s) \right] \frac{T_\phi(s)}{2}$$

$$T_\phi^+ = \frac{T_{le} T_{ri} T^+}{1 - R_{ri} R_{li} T^- T^+}$$

$$T_\phi^- = \frac{T_{re} T_{li} T^-}{1 - R_{ri} R_{li} T^- T^+}$$

$$R_\phi^l = R_{le} + \frac{R_{ri} T_{le} T_{li} T^+ T^-}{1 - R_{ri} R_{li} T^- T^+}$$

$$R_\phi^r = R_{re} + \frac{R_{li} T_{re} T_{ri} T^+ T^-}{1 - R_{ri} R_{li} T^- T^+}$$

$$R_\phi^l = \left( (1 - R_r^s R_\psi) R_l^s + (1 + 2R_l^s) (R_\psi + R_r^s (T_\psi^2 - R_\psi^2)) \right) / d_\phi$$

$$R_\phi^r = \left( (1 - R_l^s R_\psi) R_r^s + (1 + 2R_r^s) (R_\psi + R_l^s (T_\psi^2 - R_\psi^2)) \right) / d_\phi$$

$$T_\phi = \left( (1 + R_l^s) (1 + R_r^s) T_\psi \right) / d_\phi$$

$$d_\phi = 1 - (R_l^s R_\psi + R_r^s R_\psi - R_l^s R_r^s R_\psi^2 + R_l^s R_r^s T_\psi^2)$$

**Fonctions de transfert en variables  $(\psi^{in}, \psi^{out})$**  Voir figure 13

$$T_\psi^+(s) = T_\psi^-(s) = T_\psi(s) = \left[ C_\Gamma(s) + \frac{1}{2} \left( \frac{\Gamma(s)^2}{s} + s \right) S_\Gamma(s) \right]^{-1}$$

$$R_\psi^l(s) = R_\psi^r(s) = R_\psi(s) = \frac{1}{2} \left( - \frac{\Gamma(s)^2}{s} + s \right) S_\Gamma(s) T_\psi(s)$$

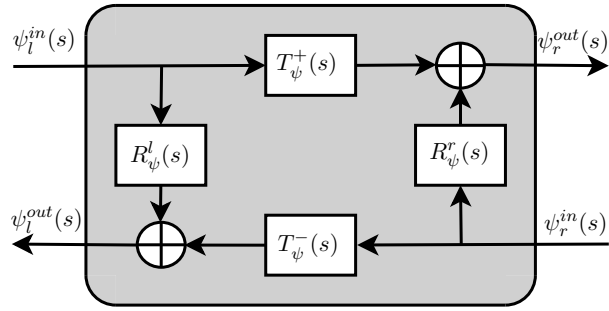


FIGURE 13 – Quadripôle en variables  $(\psi^{in}, \psi^{out})$

$$T_\psi = \frac{(1 - R^2)T}{1 - R^2T^2} = D_\psi e^{-s} = \frac{(1 - R^2)D}{1 - R^2T^2} e^{-s}$$

$$R_\psi = \frac{(1 - T^2)R}{1 - R^2T^2}$$

## 4 Connexion de deux tubes

### 4.1 Connexion à régularité au moins $\mathcal{C}^1$

Voir figures 14 et 15.

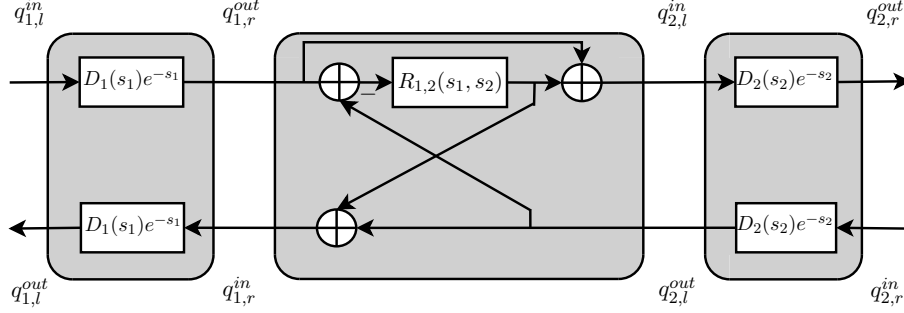


FIGURE 14 – Concaténation à régularité au moins  $\mathcal{C}^1$

$$D_k(s_k) = e^{s_k} - \Gamma_k(s_k)$$

$$\Gamma_k(s_k) = \sqrt{s_k^2 + \Upsilon_k \left( +2\varepsilon_k s_k^{\frac{3}{2}} \right)}$$

$$R_{1,2}(s_1, s_2) = \frac{s_2 \Gamma_1(s_1) - s_1 \Gamma_2(s_2)}{s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)}$$

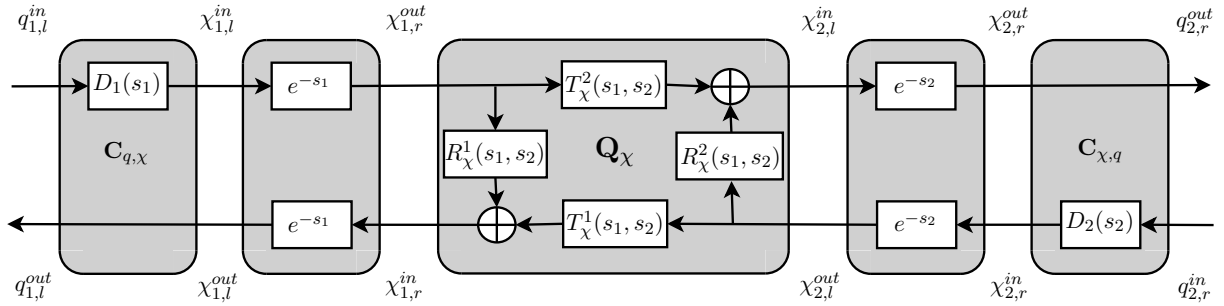


FIGURE 15 – Concaténation à régularité au moins  $\mathcal{C}^1$

$$T_{\chi}^1(s_1, s_2) = D_1(s_1)(1 - R_{1,2}(s_1, s_2)) = \frac{L_2}{L_1} \frac{2s_1 \Gamma_2(s_2)}{s_1 \Gamma_2(s_2) + s_2 \Gamma_1(s_1)} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$T_{\chi}^2(s_1, s_2) = D_2(s_2)(1 + R_{1,2}(s_1, s_2)) = \frac{L_1}{L_2} \frac{2s_2 \Gamma_1(s_1)}{s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

$$R_{\chi}^1(s_1, s_2) = D_1(s_1)R_{1,2}(s_1, s_2) = \frac{s_2 \Gamma_1(s_1) - s_1 \Gamma_2(s_2)}{s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$R_{\chi}^2(s_1, s_2) = -D_2(s_2)R_{1,2}(s_1, s_2) = \frac{s_1 \Gamma_2(s_2) - s_2 \Gamma_1(s_1)}{s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

## 4.2 Connexion à régularité au moins $\mathcal{C}^0$

Voir figures 16 et 17.

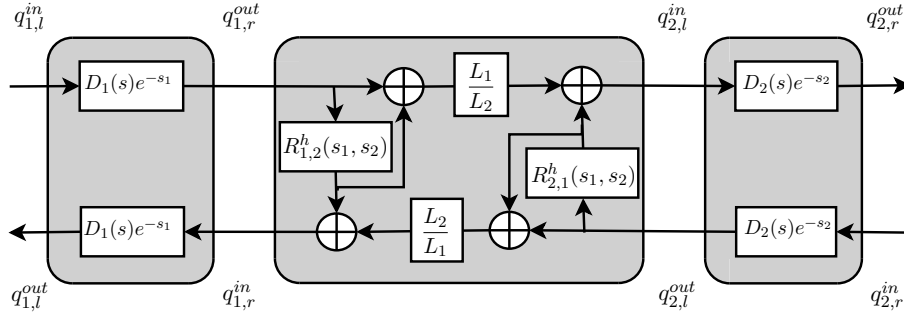


FIGURE 16 – Concaténation à régularité au moins  $\mathcal{C}^0$

$$D_k(s_k) = e^{s_k} - \Gamma_k(s_k)$$

$$\Gamma_k(s_k) = \sqrt{s_k^2 + \Upsilon_k \left( +2\varepsilon_k s_k^{\frac{3}{2}} \right)}$$

$$R_k^h(s_1, s_2) = \frac{\beta_k (s_2 \Gamma_1(s_1) - s_1 \Gamma_2(s_2)) - (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})}$$

avec  $\beta_{1,2} = 1$  et  $\beta_{2,1} = -1$ .

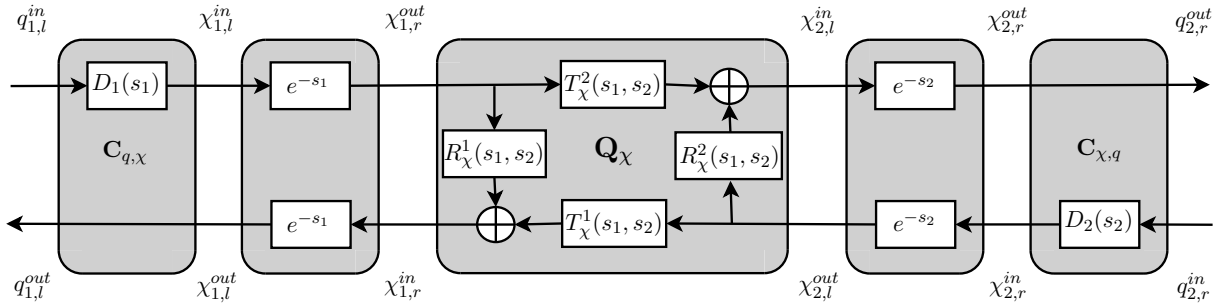


FIGURE 17 – Concaténation à régularité au moins  $\mathcal{C}^0$

$$T_{\chi}^1(s_1, s_2) = D_1(s_1)(1 - R_{2,1}^j(s_1, s_2)) = \frac{L_2}{L_1} \frac{2s_1 \Gamma_2(s_2)}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$T_{\chi}^2(s_1, s_2) = D_2(s_2)(1 + R_{1,2}^j(s_1, s_2)) = \frac{L_1}{L_2} \frac{2s_2 \Gamma_1(s_1)}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

$$R_{\chi}^1(s_1, s_2) = D_1(s_1) R_{1,2}^h(s_1, s_2) = \frac{(s_2 \Gamma_1(s_1) - s_1 \Gamma_2(s_2)) - (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$R_{\chi}^2(s_1, s_2) = D_2(s_2) R_{2,1}^h(s_1, s_2) = \frac{(s_1 \Gamma_2(s_2) - s_2 \Gamma_1(s_1)) - (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})}{(s_2 \Gamma_1(s_1) + s_1 \Gamma_2(s_2)) + (s_2 \sigma_{1,r} + s_1 \sigma_{2,l})} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

### 4.3 Connexion à régularité quelconque

Voir figures 18 et 19.

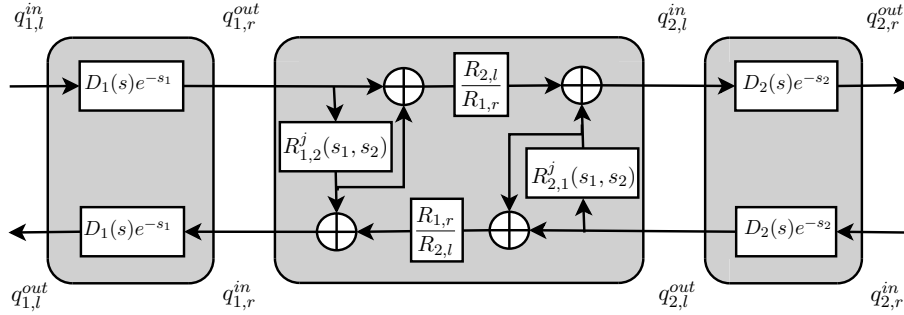


FIGURE 18 – Concaténation à régularité quelconque

$$D_k(s_k) = e^{s_k} - \Gamma_k(s_k)$$

$$\Gamma_k(s_k) = \sqrt{s_k^2 + \Upsilon_k \left( +2\varepsilon_k s_k^{\frac{3}{2}} \right)}$$

$$R_k^j(s_1, s_2) = \frac{\beta_k (s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) - s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) - (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})}$$

avec  $\beta_{1,2} = 1$  et  $\beta_{2,1} = -1$ .

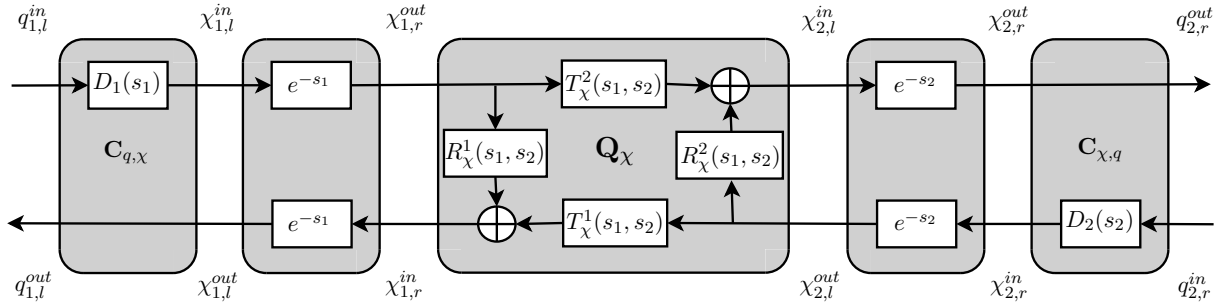


FIGURE 19 – Concaténation à régularité quelconque

$$T_\chi^1(s_1, s_2) = D_1(s_1)(1 - R_{2,1}^j(s_1, s_2))$$

$$= \frac{R_{1,r}}{R_{2,l}} \frac{2s_1 \Gamma_2(s_2) S_{2,l}}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$T_\chi^2(s_1, s_2) = D_2(s_2)(1 + R_{1,2}^j(s_1, s_2))$$

$$= \frac{R_{2,l}}{R_{1,r}} \frac{2s_2 \Gamma_1(s_1) S_{1,r}}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

$$R_\chi^1(s_1, s_2) = D_1(s_1) R_{1,2}^j(s_1, s_2)$$

$$= \frac{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) - s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) - (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})} e^{s_1 - \Gamma_1(s_1)}$$

$$R_\chi^2(s_1, s_2) = D_2(s_2) R_{2,1}^j(s_1, s_2)$$

$$= \frac{(s_1 S_{2,r} \Gamma_2(s_2) - s_2 S_{1,l} \Gamma_1(s_1)) - (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})}{(s_2 S_{1,r} \Gamma_1(s_1) + s_1 S_{2,l} \Gamma_2(s_2)) + (s_2 S_{1,r} \sigma_{1,r} + s_1 S_{2,l} \sigma_{2,l})} e^{s_2 - \Gamma_2(s_2)}$$

## 5 Connection avec une impédance passive

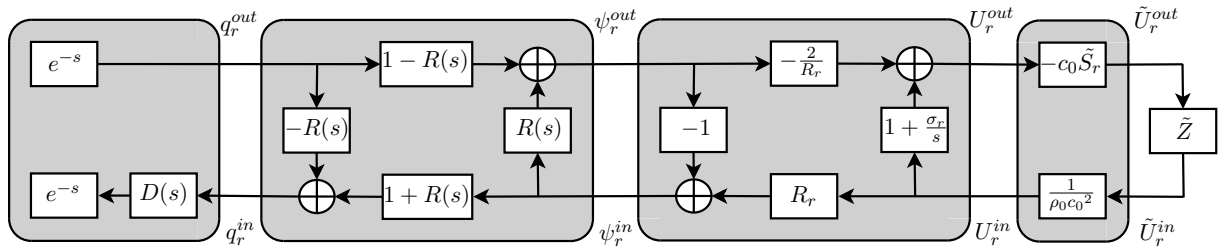


FIGURE 20 – Concaténation avec une impédance passive

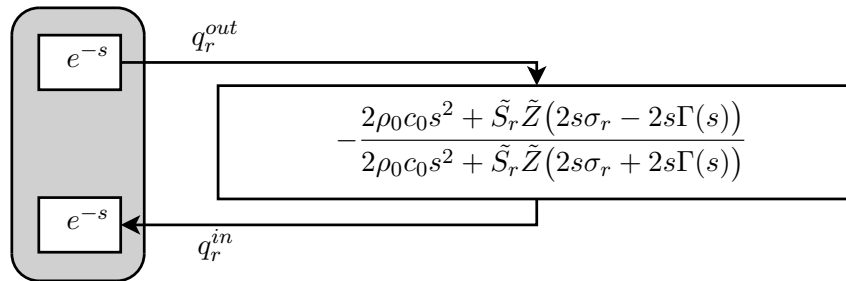


FIGURE 21 – Concaténation avec une impédance passive



## 6 Forme standard réduite et applications

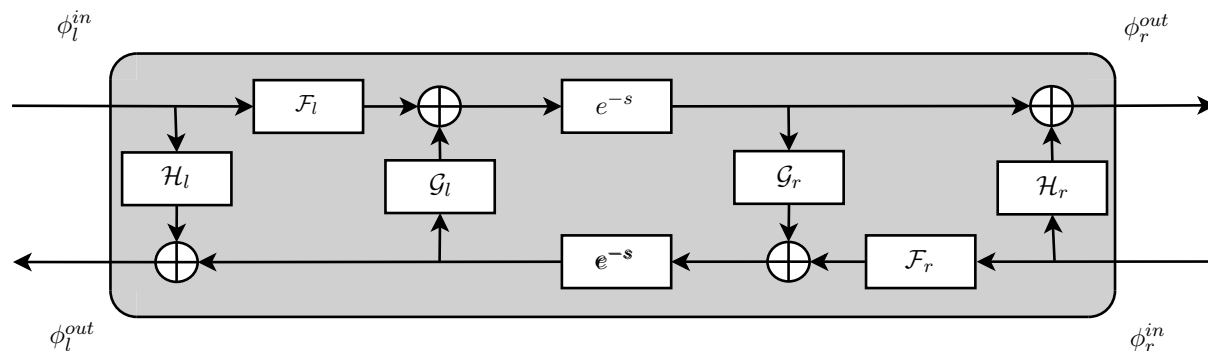


FIGURE 22 – Forme standard réduite

### 6.1 Expression des fonctions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_l(s) &= R_\phi^l(s) - D_\phi^+(s)\mathcal{G}_r(s)e^{-2s} \\ \mathcal{H}_r(s) &= R_\phi^r(s) - D_\phi^-(s)\mathcal{G}_l(s)e^{-2s} \\ \mathcal{F}_l(s) &= D_\phi^+(s)(1 - \mathcal{G}_l(s)\mathcal{G}_r(s)e^{-2s}) \\ \mathcal{F}_r(s) &= D_\phi^-(s)(1 - \mathcal{G}_l(s)\mathcal{G}_r(s)e^{-2s})\end{aligned}$$

### 6.2 Forme “décomposée” : Guide d’onde

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_l(s) &= R_{le}(s) &= \frac{s - \Gamma(s) - \sigma_l}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} \\ \mathcal{H}_r(s) &= R_{re}(s) &= \frac{s - \Gamma(s) - \sigma_r}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} \\ \mathcal{F}_l(s) &= D(s)(1 + R_{ri}(s))(1 + R_{le}(s)) &= e^{s-\Gamma(s)} \left( \frac{2\Gamma(s)}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} \right) \left( \frac{2s}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} \right) \\ \mathcal{F}_r(s) &= D(s)(1 + R_{li}(s))(1 + R_{re}(s)) &= e^{s-\Gamma(s)} \left( \frac{2\Gamma(s)}{s + \Gamma(s) + \sigma_l} \right) \left( \frac{2s}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} \right) \\ \mathcal{G}_l(s) &= \frac{R_{li}(s)(1 + R_{ri}(s))}{1 + R_{li}(s)} D(s) &= -e^{s-\Gamma(s)} \frac{s - \Gamma(s) + \sigma_l}{s + \Gamma(s) + \sigma_r} \\ \mathcal{G}_r(s) &= \frac{R_{ri}(s)(1 + R_{li}(s))}{1 + R_{ri}(s)} D(s) &= -e^{s-\Gamma(s)} \frac{s - \Gamma(s) + \sigma_r}{s + \Gamma(s) + \sigma_l}\end{aligned}$$

### 6.3 Formes standards équivalentes et connexions

Les trois formes standards fig. 23, fig. 24 et fig. 25 sont équivalentes.

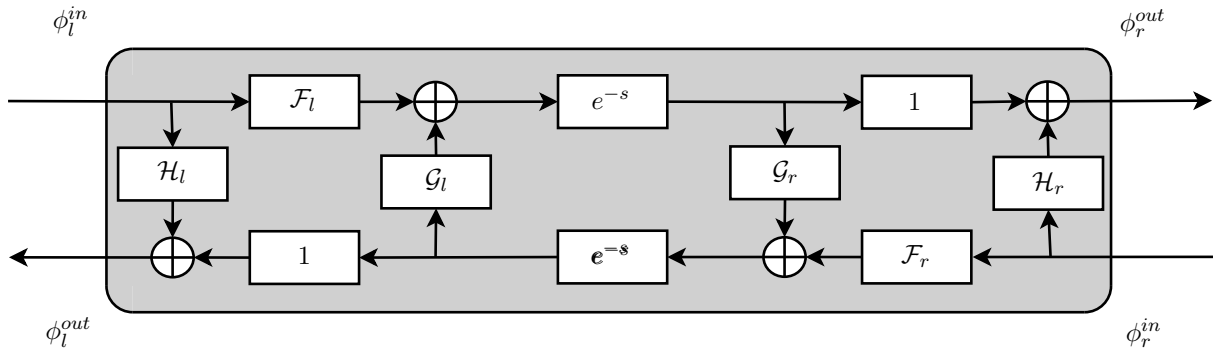


FIGURE 23 – Forme standard 1

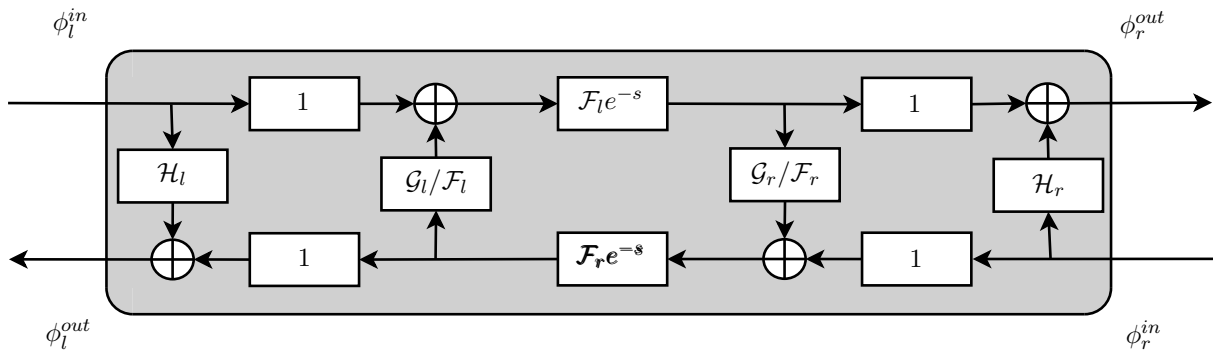


FIGURE 24 – Forme standard 2

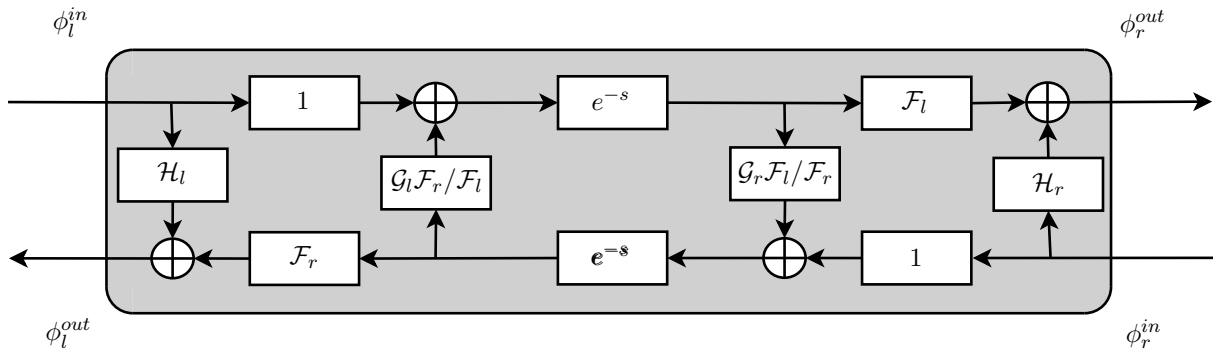


FIGURE 25 – Forme standard 3

### 6.3.1 Connexion (au moins $\mathcal{C}^0$ ) de 2 formes standards 1

Les systèmes des figures 26 et 27 sont équivalents.

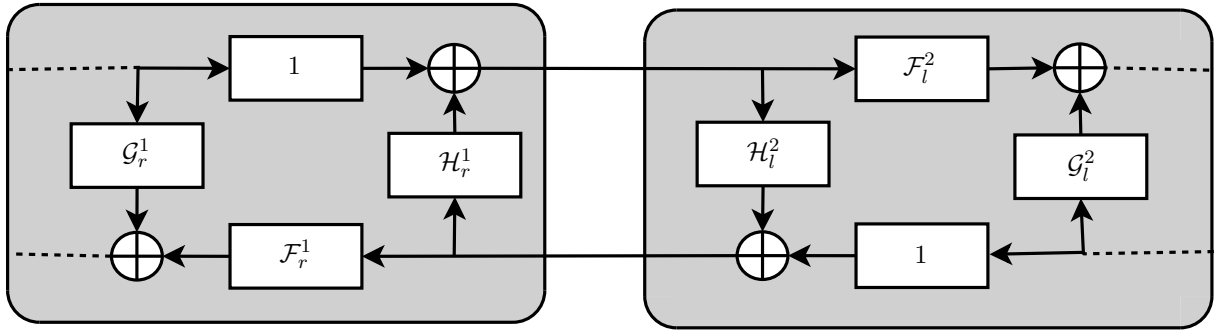


FIGURE 26 – Connexion standard 1

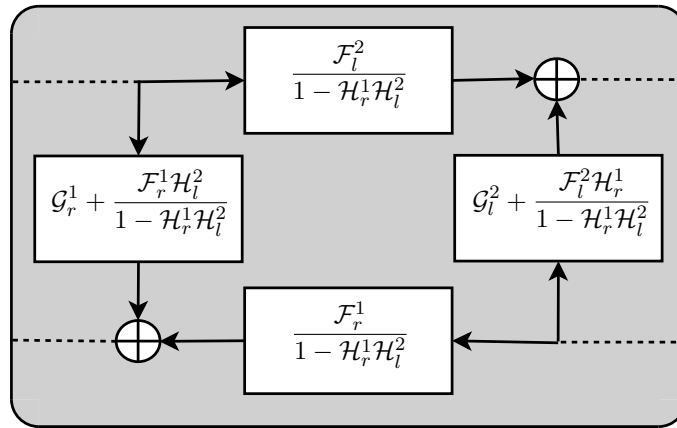


FIGURE 27 – Connexion standard 1

### 6.3.2 Connexion (au moins $\mathcal{C}^0$ ) de 2 formes standards 2

Les systèmes des figures 28 et 29 sont équivalents.

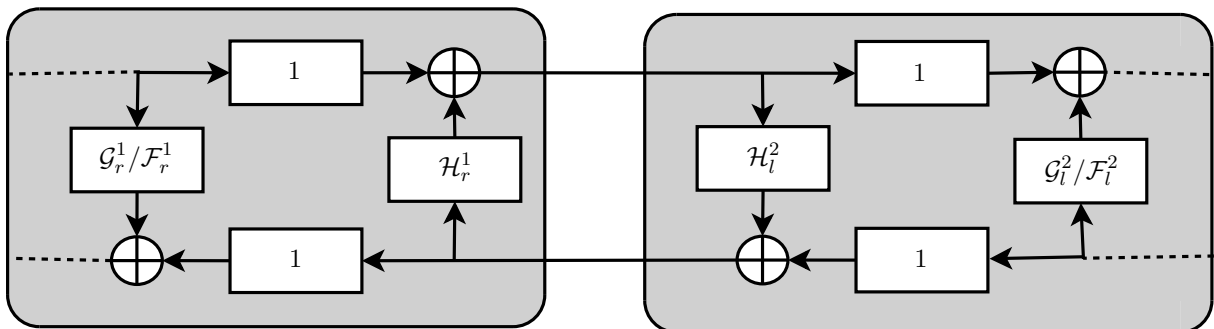


FIGURE 28 – Connexion standard 2

### 6.3.3 Connexion (au moins $\mathcal{C}^0$ ) de 2 formes standards 3

Les systèmes des figures 30 et 31 sont équivalents.

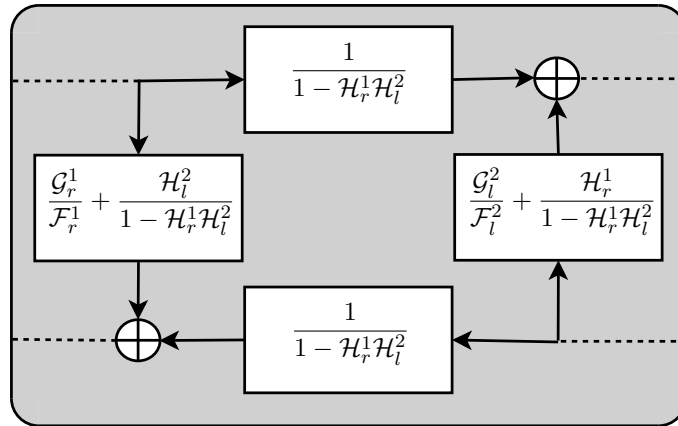


FIGURE 29 – Connexion standard 2

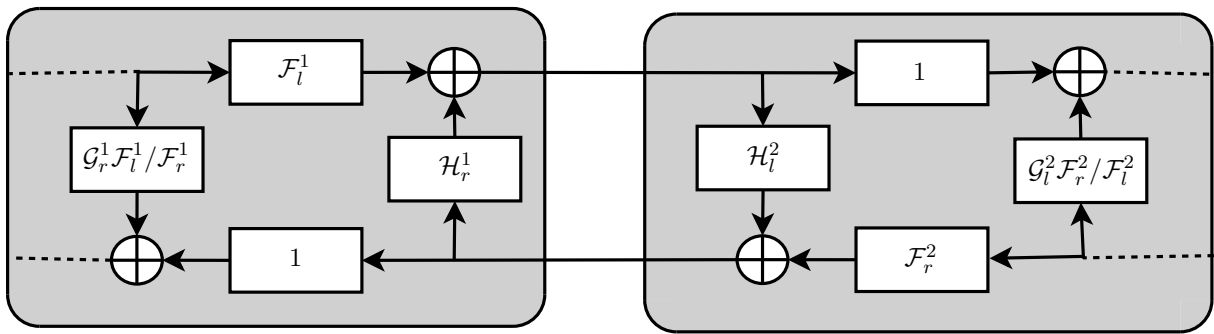


FIGURE 30 – Connexion standard 3

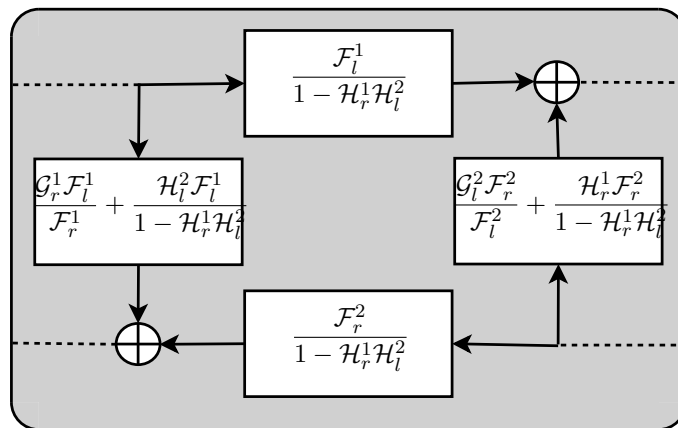


FIGURE 31 – Connexion standard 3

# 10ème Congrès Français d'Acoustique

Lyon, 12-16 Avril 2010

## Représentation géométrique optimale de la perce de cuivres pour le calcul d'impédance d'entrée et de transmittance, et pour l'aide à la lutherie

Thomas Hélie, Thomas Hézard, Rémi Mignot

CNRS UMR 9912 - IRCAM, 1 place Igor Stravinsky, F-75004 Paris,

{thomas.helie,thomas.hezard,remi.mignot}@ircam.fr

Dans cet article, nous nous intéressons à représenter efficacement l'acoustique de tubes à symétrie axiale ayant une perce  $\mathcal{C}^1$ , c'est-à-dire, continue et à dérivée continue. Pour ce faire, nous nous appuyons sur un modèle 1D proche de l'équation des pavillons mais plus raffiné (l'équation dite de "Webster-Lokshin" à abscisse curviligne) ainsi que des modèles simplifiés d'embouchure et de rayonnement à calotte sphérique pour les pavillons. Le modèle de propagation inclut l'effet des pertes visco-thermiques sous l'hypothèse des tubes acoustiques larges (impédance de paroi équivalente de Cremer). De plus, il repose sur des approximations sur la géométrie des isobares plus faibles (quasi-sphéricité au voisinage de la paroi) que les approximations usuelles (ondes planes ou sphériques). Une résolution exacte du modèle de propagation est possible lorsque ses coefficients ( $\Upsilon$  quantifiant l'évasement du profil et  $\varepsilon$  quantifiant les pertes) sont constants. Les profils géométriques admissibles définissent des tronçons. Le profil complet est réalisé par leur concaténation en imposant que leur jonction soit de régularité  $C^1$ . Si la longueur totale est fixée, un tel profil de  $N$  tronçons possède exactement  $2N + 1$  paramètres libres ( $N$  paramètres  $\Upsilon$ ,  $N - 1$  longueurs, et 2 coefficients libres). Un algorithme qui optimise ces paramètres pour tout profil donné a été construit. Il permet d'obtenir des descriptions fidèles d'une perce cible, préservant la régularité  $C^1$ , par un nombre réduit de tronçons (comparativement aux représentations en tubes droits ou coniques). Un formalisme classique en matrices de transfert permet de fournir l'impédance d'entrée et la transmittance de l'instrument. Ce travail est présenté de la façon suivante. Après quelques rappels historiques, nous présentons le modèle acoustique. Puis, nous introduisons une famille de profils paramétrés permettant la résolution exacte des matrices de transfert acoustiques. Nous construisons un algorithme pour estimer les paramètres correspondant à un profil cible. Enfin, nous testons cet algorithme et reconstruisons les impédances d'entrée. Nous comparons ces résultats à des mesures et à ceux obtenus par d'autres méthodes (concaténation de tubes droits, coniques, ou intégration numérique spatiale du modèle original).

## 1 Sur les équations des pavillons

### 1.1 Historique abrégé et contexte

**Modèle 1D et géométrie** Le premier modèle de tube acoustique à dépendance mono-spatiale fut établi par Lagrange [1] et Bernoulli [2]. Cette équation dite "de Webster" [3], abondamment étudiée [4], repose sur des hypothèses qui ont été périodiquement révisées.

Ainsi, pour assurer l'orthogonalité des fronts d'ondes à la paroi, Lambert [5] et Weibel [6] réfutent l'hypothèse initiale d'ondes planes et postulent leur sphéricité. La quasi-sphéricité est validée expérimentalement dans les pavillons aux basses fréquences par Benade et Janson [7]. Puis, Putland [8] montre qu'une propagation à dépendance mono-spatiale ne peut être gouvernée que par une équation de Webster, pour "une certaine coordonnée", et que les ondes planes, cylindriques ou sphériques seules peuvent respecter une telle propriété.

Malgré cette restriction, des raffinements de modèles 1D ont encore été recherchés car ils permettent des calculs d'impédance aisés et la plage fréquentielle non perturbée par les modes transverses reste intéressante pour bon nombre d'instruments à vent. Ainsi, [9] suppose des fronts d'ondes en ellipsoïdes. Dans [10], un modèle exact

est établi dans la carte des isobares, à partir duquel une équation de Webster est obtenue en supposant uniquement la quasi-sphéricité des isobares au voisinage de la paroi (hypothèse retenue dans cet article).

**Pertes visco-thermiques** Un autre raffinement est la modélisation des pertes visco-thermiques aux parois. Kirchhoff introduit l'effet de conduction thermique et étend la théorie de Stokes. Il fournit de premières solutions simples dans l'espace libre et dans un tube. Il donne la formule de dispersion générale exacte pour un cylindre lorsque le problème est à symétrie de révolution [11] (en l'absence de symétrie, une version exacte généralisée est établie dans [12, éq. (56)]).

Certaines simplifications sont aussi proposées. Ainsi, la théorie de Zwikker et Kosten (cf. e.g. [13, p210]) est établie en séparant les effets de couches limites visqueuses et thermiques dans les équations de départ. Les conditions de validité de cette théorie sont données dans [14, 15] qui exhibent un lien plus direct avec l'équation de dispersion de Kirchhoff. De plus, Cremer établit l'admittance équivalente d'un écran plan réfléchissant des ondes planes pour un angle d'incidence donné [16]. Ce résultat coïncide avec celui de Kirchhoff pour un guide à

section rectangulaire large (épaisseur des couches limites faibles devant les longueurs du rectangle).

Pour ces simplifications, les équations de propagation incluent un terme avec une dérivée temporelle fractionnaire (voir l'équation de Lokshin [17, 18] et aussi [19]). Des solutions exactes de l'équation de Lokshin ont été données par Matignon [20, 21] et mettent en lumière un effet de mémoire longue. La prise en compte de pertes dans l'équation des pavillons établie dans [10] fait apparaître un terme similaire.

**Contexte et approche** Le modèle considéré ici repose sur l'hypothèse de quasi-sphéricité des isobares au voisinage de parois à admittance de Cremer. Les étapes pour son établissement sont données ci-dessous.

## 1.2 Equation des ondes et isobares

Dans le système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , les isobares d'un problème à symétrie d'axe (Oz) ont des descriptions paramétriques (localement au moins) de la forme  $r = f(s, u, t)$ ,  $z = g(s, u, t)$  et  $\theta \in [0, 2\pi[$ , où  $s$  indexe une isobare,  $u$  est une coordonnée libre. Puisque le niveau de pression ne dépend spatialement que de  $s$ , la carte dynamique  $(f, g)$  satisfait l'équation implicite

$$\exists p \mid P(z = f(s, u, t), r = g(s, u, t), t) = p(s, t).$$

En exploitant cette équation et le changement de coordonnées  $(z, r, t) \rightarrow (s, u, t)$ , l'équation des ondes  $(\partial_z^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \partial_r^2 - \frac{1}{c^2}\partial_t^2)P(z, r, t) = 0$  se réécrit exactement

$$\left(\alpha(s, u, t)\partial_s^2 + \beta(s, u, t)\partial_s + \gamma(s, u, t)\partial_s\partial_t + \frac{1}{c^2}\partial_t^2\right)p(s, t) = 0, \quad (1)$$

où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des expressions (détaillées dans [22, 10]) de  $f, g$  et leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 en  $s, u, t$ .

En appliquant la dérivation  $\partial_u^k$  pour  $k = 1, 2, 3$  à cette dernière équation, on trouve que, pour tout  $s, u, t$ ,

$$\begin{pmatrix} \partial_u\alpha & \partial_u\beta & \partial_u\gamma \\ \partial_u^2\alpha & \partial_u^2\beta & \partial_u^2\gamma \\ \partial_u^3\alpha & \partial_u^3\beta & \partial_u^3\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s^2 p \\ \partial_s p \\ \partial_s\partial_t p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La nullité du déterminant de la matrice  $3 \times 3$  fournit donc une condition nécessaire, purement géométrique, pour que la carte isobare corresponde à une propagation.

Dans le cas statique ( $\partial_t f = \partial_t g = 0$ ), une étude similaire montre que les seules cartes admissibles correspondent aux cas connus : ondes planes, cylindriques, sphériques, cartes modales associées à un nombre d'onde  $k_0$  réel (oscillation infinie) ou bien imaginaire pur (onde exponentielle non oscillante). Dans le cas modal, on déduit de l'équation isobare l'invariant géométrique

$$\partial_s \ln \left( g^2 \frac{(\partial_s f)^2 + (\partial_s g)^2}{(\partial_u f)^2 + (\partial_u g)^2} \right) + 2 \left( (\partial_s f)^2 + (\partial_s g)^2 \right) s k_0^2 = 0,$$

si on choisit l'index  $s$  égal au niveau de la déformée modale (voir [10] pour plus de détails). Ainsi, aucune carte statique ne peut porter une propagation 1D non modale si le tube n'est ni droit, ni conique.

## 1.3 Approximation 1D pour paroi idéale

Une paroi idéalement immobile et rigide appartient aux lignes de champ de pression (cf. [22, p33] pour les cas dégénérés). En choisissant  $u$  orthogonale à  $s$ , il existe donc  $(f, g)$  et  $w$  tels que  $f(s, u = w, t) = F(s)$ ,  $g(s, u = w, t) = R(s)$  où  $F, R$  est une paramétrisation de la paroi. En évaluant (1) en  $u = w$ , on trouve les coefficients exacts  $\alpha(s, w, t) = 1/(F'(s)^2 + R'(s)^2)$ ,  $\beta(s, w, t) = 0$  et

$$\frac{\gamma(s, w, t)}{\alpha(s, w, t)} = \frac{d}{ds} \left( \ln \left| \frac{R(s)}{F'(s)} \right| \right) + \partial_s \ln |\partial_u g(s, u = w, t)|. \quad (2)$$

La seule information géométrique manquante pour obtenir un modèle 1D via (1) est donc le second terme de (2) qui met en jeu une dérivée d'ordre 1 en  $u$  (variation de la ligne de champ lorsqu'on s'éloigne de la paroi).

Pour assurer la compatibilité avec des isobares (i) planes dans les tubes droits, (ii) sphériques dans les cônes, (iii) orthogonales à la paroi, (iv) quasi-sphériques dans les pavillons [7], (v) sans les supposer figées, on retient l'hypothèse suivante : à la paroi, une isobare s'éloigne lentement de son approximation sphérique tangente. Plus précisément, en notant  $\zeta(s, u, t)$  l'écart relatif (cf. [22]), on a  $\partial_u^k \zeta(s, u = w, t) = 0$  pour  $k = 0$  (contact) et  $k = 1$  (tangence). En supposant la validité pour  $k = 2$  (éloignement plus lent qu'une parabole), on obtient que  $\frac{\gamma(s, w, t)}{\alpha(s, w, t)} = 2 \frac{R'(s)}{R(s)}$ . Ceci conduit à l'équation de Webster

$$\left( \partial_\ell^2 + 2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) p(\ell, t) = 0, \quad (3)$$

si  $s = \ell$  est l'abscisse curviligne mesurant la longueur sur la paroi ( $\alpha(s, u = w, t) = 1$ ).

## 1.4 Paroi à admittance de Cremer

En présence de pertes visco-thermiques, l'orthogonalité des isobares à la paroi n'est plus valide. Si les couches limites sont d'épaisseur faible devant  $R(\ell)$  et le rayon de courbure de ce profil, cette perturbation peut être estimée en approchant l'action de la paroi par son admittance de Cremer [16]. L'hypothèse de coïncidence locale à l'ordre 2 de l'isobare et sa sphère tangente conduit à une version perturbée de (3) donnée par [22, 10]

$$\left( \partial_\ell^2 + 2 \frac{R'(\ell)}{R(\ell)} \partial_\ell - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \frac{2\varepsilon(\ell)}{c^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} \right) p(\ell, t) = 0, \quad (4)$$

où  $\partial_t^{\frac{3}{2}}$  est une dérivée fractionnaire [20] et  $\varepsilon(\ell) = \kappa_0 \frac{\sqrt{1-R'(\ell)^2}}{R(\ell)}$  quantifie les effets visco-thermiques ( $\kappa_0 = \sqrt{l_v} + (\gamma - 1)\sqrt{l_h} \approx 3 \times 10^{-4} \text{ m}^{1/2}$  dans l'air). Cette équation est dite de Webster (cas  $\varepsilon = 0$ )-Lokshin (cas  $R' = 0$ ).

## 1.5 Modèle complet, propriétés, validité

On considère ici la propagation dans l'espace des isobares redressées, sous l'hypothèse de leur quasi-sphéricité à la paroi, avec pertes, modélisée par

$$\left( \partial_\ell^2 - \left[ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 + \frac{2\varepsilon(\ell)}{c^{\frac{3}{2}}} \partial_t^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell) \right] \right) [R(\ell) p(\ell, t)] = 0 \quad (5)$$

$$\rho \partial_t v(\ell, t) + \partial_\ell p(\ell, t) = 0 \quad (6)$$

où  $\Upsilon = R''/R$ . Si  $R$  est deux fois dérivable, (5) équivaut à (4). Hors de la couche limite, la vitesse particulière est colinéaire au gradient de pression : elle satisfait l'équation d'Euler dont on tire (6) après projection.

### Propriétés du changement de coordonnée $z \rightarrow \ell$

Pour une description de perce  $z \mapsto r(z)$ , la longueur de la paroi mesurée depuis  $z = 0$  est  $L(z) = \int_0^z \sqrt{1 + r'(z)^2} dz$  dont on tire  $R(\ell) = r(L^{-1}(\ell))$ . En dérivant l'expression  $R(L(z)) = r(z)$ , on trouve que  $R'(L(z)) = r'(z)/\sqrt{1 + r'(z)^2}$ . On a donc les propriétés suivantes, inhabituelles pour (3-6) : (i)  $|R'(\ell)| \leq 1$ ; (ii)  $R'(\ell) = 1$  correspond à une pente verticale. Notons qu'un tube droit reconduit bien aux équations gouvernant les ondes planes ( $R'/R = 0$ ,  $\ell = z$ ), et un cône reconduit aux ondes sphériques ( $2R'/R = 2/\ell$ ). Si une perce finit par une pente verticale, le modèle opère un recollage naturel avec une solution en ondes sphériques.

**Validité** Le modèle sans perte (3) est exact si  $\Upsilon = 0$ . Il fournit une approximation intéressante si  $|\Upsilon|$  est suffisamment faible ou si les fréquences sont suffisamment basses (voir [23] pour une analyse précise). L'hypothèse 1D est conditionnée par l'absence de modes transverses, qu'on caractérise par

$$f < K^+ (R_{max})^{-1} \text{ avec } K^+ = \frac{1.84c}{2\pi} \approx 631.8 \text{ m.s}^{-1}.$$

Le modèle des pertes suppose que l'épaisseur des couches limites est faible devant le rayon  $R$  et le rayon de courbure  $R_c$  donné par  $\frac{(1+R'(z)^2)^{\frac{3}{2}}}{R''(z)}$  si  $s = z$  et par  $\frac{\sqrt{1-R'(\ell)^2}}{R''(\ell)}$  si  $s = \ell$ . La condition la plus contraignante vient de la couche visqueuse. Elle se traduit par (cf. e.g. [13, p212])

$$f > K^- (R_{min})^{-2} \text{ avec } K^- = \frac{\mu}{2\pi\rho} \approx 2.39 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}.$$

## 2 Solutions exactes pour des géométries paramétrées

### 2.1 Propagation à coefficients constants

**Profils admissibles et régularité** Dans le domaine de Laplace (variable  $s$ ) et pour des conditions initiales nulles, les équations (5-6) se récrivent

$$\left[ \left( \left( \frac{s}{c} \right)^2 + 2\varepsilon(\ell) \left( \frac{s}{c} \right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon(\ell) \right) - \partial_\ell^2 \right] \left\{ R(\ell) P(\ell, s) \right\} = 0, \quad (7)$$

$$\rho s \frac{U(\ell, s)}{S(\ell)} + \partial_\ell P(\ell, s) = 0, \quad (8)$$

où  $U(\ell, s) = S(\ell) V(\ell)$  avec  $S(\ell) = \pi R(\ell)^2$ . Ces équations se résolvent analytiquement si  $\varepsilon$  et  $\Upsilon$  sont constants.

Puisque  $R''(\ell) - \Upsilon(\ell)R(\ell) = 0$ , les profils à  $\Upsilon$  constant sont de la forme (avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ )

$$R(\ell) = A \cos(\sqrt{-\Upsilon}\ell) + B \sin(\sqrt{-\Upsilon}\ell), \quad \text{si } \Upsilon < 0,$$

$$R(\ell) = A + B\ell, \quad \text{si } \Upsilon = 0,$$

$$R(\ell) = A \cosh(\sqrt{\Upsilon}\ell) + B \sinh(\sqrt{\Upsilon}\ell), \quad \text{si } \Upsilon > 0.$$

Ces familles peuvent être décrites par la forme unifiée

$$R(\ell) = A C_\Upsilon(\ell) + B S_\Upsilon(\ell), \quad (9)$$

1. Remarque : on vérifie que  $\varepsilon(\ell) = \kappa_0 R_c(\ell)\Upsilon(\ell)$  (si  $\Upsilon \neq 0$ ).

où  $(\Upsilon, \ell) \mapsto C_\Upsilon(\ell) = \phi_1(\Upsilon \ell^2)$  et  $(\Upsilon, \ell) \mapsto S_\Upsilon(\ell) = \ell \phi_2(\Upsilon \ell^2)$  sont des fonctions infiniment dérivables, construites à partir des fonctions analytiques sur  $\mathbb{C}$

$$\phi_1 : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(2k)!} \quad \left( = \cosh \sqrt{z} \right),$$

$$\phi_2 : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{(2k+1)!} \quad \left( = \frac{\sinh \sqrt{z}}{\sqrt{z}} \text{ pour } z \neq 0 \right).$$

Excepté le cas où  $R$  est constant, cette famille de profils ne conduit pas à une fonction  $\varepsilon$  constante. Aussi, pour un intervalle  $[0, L]$  suffisamment court, on approche  $\varepsilon$  par sa valeur moyenne  $\varepsilon(\ell) \approx \frac{1}{L} \int_0^L \varepsilon(\ell) d\ell$ . Ceci définit un tronçon dont le profil géométrique est décrit par les 4 paramètres  $\{A, B, \Upsilon, L\}$  et dans lequel la propagation est caractérisée par les constantes  $\Upsilon$ ,  $\varepsilon$  et  $c$ .

### Matrice de transfert acoustique d'un tronçon

En notant  $X_\ell(s) = [P(\ell, s), U(\ell, s)]^T$ , une résolution analytique de (7-8) avec  $\Upsilon$  et  $\varepsilon$  constants sur  $[a, b]$  conduit à

$$X_b(s) = \mathbf{T}_{b,a}(s) X_a(s),$$

où  $\mathbf{T}_{b,a}(s) = \text{diag}\left(\frac{L}{R(b)}, \frac{\pi R(b)}{\rho s}\right) \mathbf{M}_{b,a}(s) \text{diag}\left(\frac{R(a)}{L}, \frac{\rho s}{\pi R(a)}\right)$  est une matrice de déterminant 1 et, en notant  $\Delta(z) = [\cosh z, (\sinh z)/z]^T$ ,

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{11} = [1, \sigma_a] \Delta(L\Gamma(s)),$$

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{12} = [0, -1] \Delta(L\Gamma(s)),$$

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{21} = [\sigma_b - \sigma_a, \sigma_a \sigma_b - (L\Gamma(s))^2] \Delta(L\Gamma(s)),$$

$$[\mathbf{M}_{b,a}(s)]_{22} = [1, -\sigma_b] \Delta(L\Gamma(s)),$$

où  $\Gamma(s)$  est une racine carrée de  $\left(\frac{s}{c}\right)^2 + 2\varepsilon\left(\frac{s}{c}\right)^{\frac{3}{2}} + \Upsilon$ ,  $\sigma_\ell = \frac{R'(\ell)}{R(\ell)/L}$  définit une *pente normalisée* avec  $L = b - a$ .

### 2.2 Jonctions de tronçons à régularité $\mathcal{C}^1$

#### Concaténation de tronçons et contraintes de régularité

Nous considérons la jonction à régularité  $\mathcal{C}^1$  de  $N$  tronçons de longueurs  $L_n$  (paramètres laissés libres). Le profil complet décrit par les  $4N$  paramètres  $\{A_n, B_n, \Upsilon_n, L_n\}_{n \in [1, N]}$  est donné par

$$R(\ell) = \sum_{n=1}^N R_n(\ell) \mathbf{1}_{[\ell_{n-1}, \ell_n]}(\ell), \quad \forall \ell \in [0, \ell_N] \quad (10)$$

avec  $R_n(\ell) = A_n C_{\Upsilon_n}(\ell) + B_n S_{\Upsilon_n}(\ell)$  et  $\{\ell_n = \sum_{k=1}^n L_k\}_{0 \leq n \leq N}$  où  $\ell_1, \dots, \ell_{N-1}$  sont les abscisses des points de raccordement entre tronçons.

La condition de régularité  $\mathcal{C}^1$  aux jonctions s'exprime par les  $2(N-1)$  contraintes d'égalité suivantes :

$$\forall n \in [1, N-1], \quad \begin{cases} R_n(\ell_n) = R_{n+1}(\ell_n), \\ R'_n(\ell_n) = R'_{n+1}(\ell_n). \end{cases} \quad (11)$$

On remarque que  $R$  est linéaire en les paramètres  $A_n$  et  $B_n$ . L'ensemble de ces équations forme donc un système linéaire (de dimension  $2(N-1)$ ) en les  $(2N)$  paramètres  $\{A_n, B_n\}_{1 \leq n \leq N}$ . En faisant le choix de représenter les deux degrés de liberté par  $\{A_1, B_1\}$ , la résolution analytique du système conduit à des solutions de la forme  $[A_n, B_n]^T = \mathbf{Q}_n [A_1, B_1]^T$  pour  $2 \leq n \leq N$  (cf. [24]).

Le nombre de degrés de liberté d'un tel profil à  $N$  tronçons vaut donc  $4N - 2(N - 1) = 2N + 2$ . Avec les choix faits ci-dessus, les paramètres libres sont  $A_1$ ,  $B_1$  et  $\{\Upsilon_n, L_n\}_{1 \leq n \leq N}$ .

**Matrice de transfert globale** Du point de vue acoustique, le raccord de deux tronçons est réalisé en écrivant la continuité de l'état acoustique  $X_\ell$  à la jonction. Cette continuité fait sens au moins dès que<sup>2</sup> le raccord est à régularité  $\mathcal{C}^1$ . En itérant ce procédé pour raccorder successivement les tronçons, on trouve que  $X_{\ell_N}(s) = \mathbf{T}_{\ell_N, \ell_0}(s) X_{\ell_0}(s)$  avec

$$\mathbf{T}_{\ell_N, \ell_0} = \mathbf{T}_{\ell_N, \ell_{N-1}} \mathbf{T}_{\ell_{N-1}, \ell_{N-2}} \cdots \mathbf{T}_{\ell_1, \ell_0}. \quad (12)$$

On retrouve le formalisme standard en produits de matrices de transfert comme dans le cas du raccordement de tubes droits sous l'hypothèse d'ondes planes (cf. e.g. [13, p.293]).

### 3 Estimation de la géométrie

On s'intéresse ici à un profil de régularité  $\mathcal{C}^1$ , de longueur  $L$ , pour lequel  $\Upsilon$  n'est pas constant a priori.

#### 3.1 Cible et objectif

En pratique, une perce est généralement décrite par un relevé de  $M + 1$  points, de la forme  $(z_m, \mathcal{T}(z_m))$  ou  $(\ell_m, \underline{R}(\ell_m))$ . Souvent, le maillage spatial n'est pas régulier : le fabricant ou le luthier ajustent la finesse du pas du relevé pour que son interpolation affine par morceaux fournisse une description suffisamment fidèle pour reproduire la perce. Pour ce choix d'interpolation, les conversions exactes  $z \leftrightarrow \ell$  sont immédiates et préservent le type d'interpolation. Mais, la régularité  $\mathcal{C}^1$  est perdue.

On considère ici qu'on dispose d'une telle interpolation  $\ell \mapsto \underline{R}(\ell)$ , affine par morceaux, continue, construite à partir d'un relevé de points d'un profil cible à régularité initialement  $\mathcal{C}^1$ . L'objectif est de représenter le profil original par le modèle (10-11) avec un nombre  $N$  de tronçons significativement inférieur à  $M$ , visant à

1. régénérer une version  $\mathcal{C}^1$  du profil,
2. disposer d'une description du profil fiable et à peu de paramètres,
3. profiter du formalisme (12) avec la précision offerte par le modèle de Webster-Lokshin,
4. disposer d'une description analytique à peu de paramètres de l'acoustique du résonateur.

#### 3.2 Distance et paramètres libres

A la différence des splines dont les paramètres sont contrôlés par les points de jonctions (de "tronçons polynomiaux"), on souhaite rendre, globalement sur  $\ell \in [0, L]$ , la cible interpolée  $\underline{R}$  et le modèle  $R$  aussi proches que possible. On choisit de mesurer cette proximité sur  $[0, L]$  par la déviation quadratique moyenne standard

$$d_L(\underline{R}, R) = \frac{1}{L} \int_0^L (\underline{R}(\ell) - R(\ell))^2 d\ell.$$

2. Voir [22, p.66] pour une discussion de la compatibilité de cette hypothèse avec celle de quasi-sphéricité des isobares.

Puisque  $\underline{R}$  est affine par morceaux et  $R$  de la forme (9) par morceaux, cette intégrale s'exprime analytiquement en fonction de  $(\ell_m, \underline{R}(\ell_m))_{0 \leq m \leq M}$  et des paramètres du modèle  $R$  à  $N$  tronçons (10-11). Cette expression est utilisée pour éviter le calcul numérique de l'intégrale et accélérer significativement l'algorithme d'optimisation.

Parmi les  $2N+2$  paramètres libres du modèle  $R$ , une partie peut être réservée pour minimiser  $d_L(\underline{R}, R)$  et une autre pour résoudre de nouvelles contraintes telles que

$$\mathbf{1} \text{ préservation de la longueur totale : } \sum_{n=1}^N L_n = L.$$

$\mathbf{k}$  ( $0 \leq k \leq 4$ ) conditions aux extrémités de la forme  $F(\ell_c) = \underline{F}(\ell_c)$  avec  $F = R$  ou  $R'$  et  $\ell_c = 0$  ou  $L$ .

Le nombre de degrés de liberté de  $R$  devient  $2N+1-k$ .

Une manière simple de contraindre la longueur totale est de remplacer  $L_N$  par  $L - \sum_{n=1}^{N-1} L_n$  dans  $R$ . Une manière simple d'imposer deux conditions aux extrémités ( $k=2$ ) est de résoudre le problème linéaire associé, en les paramètres  $\{A_1, B_1\}$ . Dans ce cas, les  $2N-1$  paramètres libres restants sont donnés par le vecteur

$$\theta = [\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_N, L_1, \dots, L_{N-1}]^T,$$

dont dépend le profil modèle qu'on note alors  $R_\theta$  et le critère associé à minimiser est donné par

$$\mathcal{C}_L(\theta) = d_L(\underline{R}, R_\theta).$$

Dans la suite, nous considérons ce cas avec les contraintes d'égalité  $\underline{R}(0) = R(0)$  et  $\underline{R}'(0) = R'(0)$ .

#### 3.3 Algorithme

La minimisation de  $\mathcal{C}_L$  est un problème non linéaire et non convexe. Pour obtenir une solution satisfaisante à partir d'algorithmes d'optimisation numérique standard<sup>3</sup>, nous adoptons la solution pragmatique suivante.

##### Initialisation :

- Initialiser  $\theta$  par  $\Upsilon_1 = \dots = \Upsilon_N = 0$  et  $L_1 = \dots = L_N = L/N$  de sorte que  $\ell_n = nL/N$  (ou valeurs données par l'utilisateur, cf. perspectives),
- Minimiser  $\mathcal{C}_{\ell_1}(\theta)$  en  $\Upsilon_1$ ; mettre à jour  $\theta$  ( $[\theta]_1 \leftarrow \Upsilon_1^*$ ).

**Itérations pour n allant de 2 à N :** Minimisation de  $\mathcal{C}_{\ell_n}(\theta)$  selon

1. la variable  $\Upsilon_n$  (*mise à jour de  $\theta$* ),
2. puis, les variables  $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n$  (*idem*),
3. puis, les variables  $\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_n, L_1, \dots, L_{n-1}$  avec  $L_n = \ell_n - \sum_{k=1}^{n-1} L_k$  (*idem*).

En pratique, ces étapes conduisent à une solution proche de l'optimum global. Si l'on souhaite avoir des contraintes à droite ( $\underline{F}(L) = F(L)$ ), on ajoute une dernière étape. Le modèle n'étant linéaire en aucun des paramètres  $[\theta]_k$ , la résolution du lagrangien associé serait délicate. On pénalise le critère en ajoutant des termes du type  $\epsilon(\underline{F}(L) - F(L))^2$ . On fait croître  $\epsilon > 0$  jusqu'à ce que l'erreur commise sur la contrainte soit plus faible qu'un seuil fixé.

3. Ici, nous avons utilisé les fonctions (sous Matlab) `fminbnd` pour les optimisations selon une variable et `fminsearch` pour les optimisations selon plusieurs variables.



## 4 Applications et comparaisons

Nous considérons les trois profils cibles suivants :  $R_1(\ell) = 0.3\ell^3 - 0.45\ell^2 + 0.194\ell + 0.0075$ ,  $R_2(\ell) = 0.0025 + \ell^4$  polynômes à partir desquels les descriptions  $\underline{R}_1$  et  $\underline{R}_2$  affines par morceaux sont générées (pas de 1 mm) et la description  $\underline{R}_3$  d'un trombone à partir d'un relevé de perce<sup>4</sup>. Ces profils tracés en figure 1 satisfont  $|\underline{R}'_k| < 1$ .

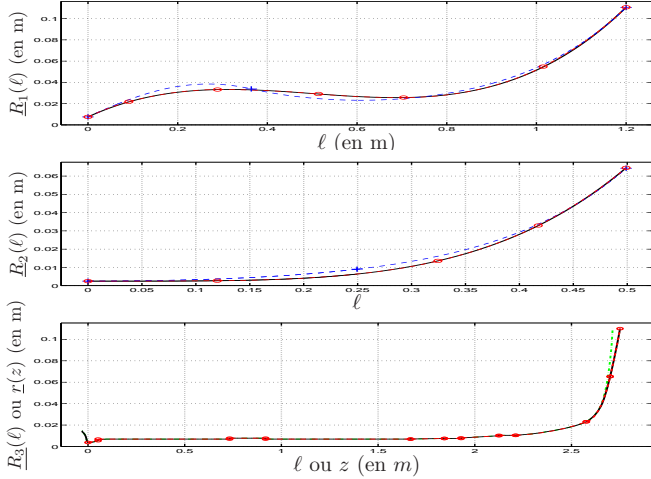


FIGURE 1 – Profils de test  $\underline{R}_k$  (-). Pour  $\underline{R}_1$  et  $\underline{R}_2$  : exemples d'approximation optimale avec 2 et 4 ou 6 tronçons (- - + et - - o). Perce originale  $r_3(z)$  (- - -),  $\underline{R}_3(\ell)$  (-) et approximation avec 11 tronçons (- - o).

**Profil  $\underline{R}_1$**  Sur la figure 1, on peut observer les résultats de l'algorithme (avec les 4 contraintes aux extrémités) pour  $N = 2$  et  $N = 4$  ou  $N = 6$  tronçons (les jonctions sont localisés par les marqueurs + ou o).

Pour illustrer les performances de l'algorithme, la figure 2 présente les erreurs normalisées moyennes (-o)  $E_2^{moy} = \sqrt{d_L(\underline{R}_1, \underline{R}_1)} / \|\underline{R}_1\|_2$  et maximales (-o)  $E_2^{max} = \max_{\ell \in [0, L]} |\underline{R}_1(\ell) - R(\ell)| / \|\underline{R}_1\|_2$  pour  $N \in \{3, 4, 5, 6\}$ , avec contrainte sur  $R(\ell)$  et  $R'(\ell)$ .

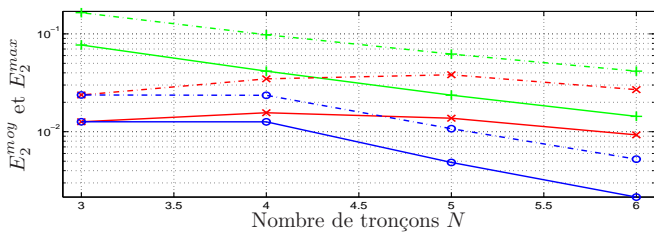


FIGURE 2 – Profil  $\underline{R}_1$  : erreurs  $E_2^{moy}$  et  $E_2^{max}$ .

Pour illustrer l'intérêt des étapes, on représente les erreurs  $E_2^{moy}$  (-) et  $E_2^{max}$  (- -) pour plusieurs versions de l'algorithme. Si l'étape 3 est retirée (variante 1, courbes +), les erreurs sont très supérieures. Ceci confirme l'intérêt d'optimiser les longueurs  $L_n$ . Si l'étape 3 n'est réalisée qu'à la dernière itération  $n = N$  (variante 2, x), on améliore les résultats de la variante 1 mais sans retrouver la qualité originale : l'optimiseur numérique atteint un minimum local moins bon.

Un travail sur l'initialisation pourrait améliorer tous ces résultats et permettre de retrouver la même qualité

avec la variante 2 (qui réduit considérablement le temps de calcul de l'optimisation).

**Profil  $\underline{R}_2$**  Ce profil évasé a été approché par 128 tubes droits ( $R_2^a$ ,  $L_n = L/128$ ), 64 cônes ( $R_2^b$ ,  $L_n = L/64$ ), 2 et 4 tronçons ( $R_2^c$  et  $R_2^d$ ) aux paramètres optimisés (figure 1). Après calcul des matrices de transfert globales et concaténation en  $\ell = L$  avec l'impédance bouchon idéalement nulle, on trouve les impédances d'entrée données en figure 3. Ces impédances sont à comparer à la référence obtenue par résolution numérique<sup>5</sup> de (7-8). On observe que deux tronçons

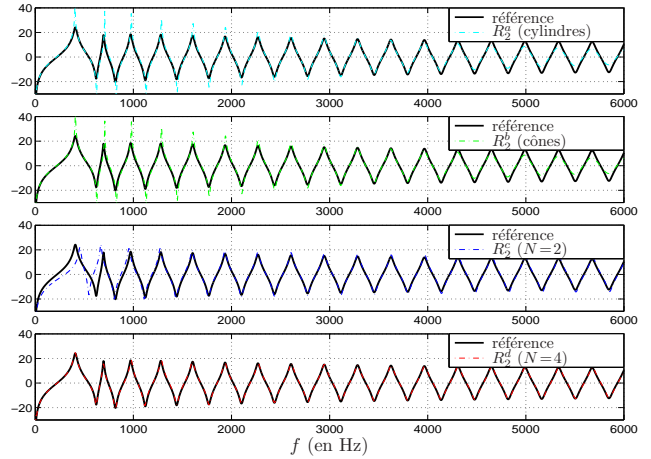


FIGURE 3 – Module (en dB) des impédances d'entrée calculées pour les profils  $R_2^b$  (- - -),  $R_2^c$  (- - -) et  $R_2^d$  (- - -), comparées à la référence (-).

sont insuffisants pour obtenir des résultats fiables mais que 4 tronçons (soit 16 paramètres géométriques  $\{A_n, B_n, \Upsilon, L_n\}_{1 \leq n \leq 4}$ ) donnent des résultats déjà satisfaisants tant géométriquement que pour l'impédance.

**Profil  $\underline{R}_3$**  L'impédance d'entrée d'un trombone avec une embouchure a été mesurée (figure 4). Cette

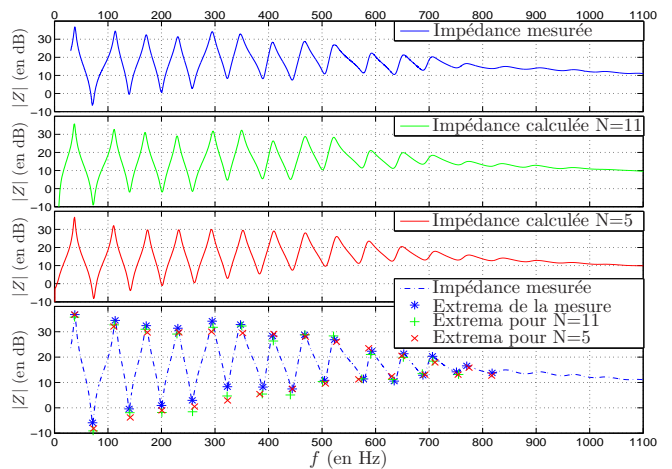


FIGURE 4 – Impédance d'entrée mesurée sur un trombone et versions calculées pour  $N = 11$ ,  $N = 5$  et comparaisons (voir [25] pour plus de détails).

impédance a été calculée à partir du formalisme (12) en considérant la matrice de transfert d'une embouchure

4. Nous remercions R. Caussé de nous avoir fourni ces données.

5. La fonction utilisée est ode23 sous Matlab.

simplifiée (masse, compliance et résistance acoustique, cf. [26]) et l'impédance de rayonnement d'une sphère dont la partie inscrite dans le cône tangent au profil en  $\ell=L$  est pulsante [27, Modèle (M2)].

## 5 Conclusion et perspectives

Le calcul de matrices de transfert par concaténation de tronçons de tubes à  $R''/R$  constant a été rappelé pour le modèle de propagation dit de “Webster-Lokshin” à abscisse curviligne. Un algorithme qui détermine les paramètres géométriques des tronçons optimisés pour approcher une cible à régularité  $C^1$  a été proposé. Grâce à cet algorithme, le modèle géométrique génère des représentations satisfaisantes de cibles avec peu de paramètres. De plus, lorsque la cible est bien approchée, les impédances acoustiques calculées sont fiables de sorte que l'outil complet pourrait s'intégrer à terme dans une plateforme d'aide à la lutherie (en particulier pour les pavillons). Enfin, ces représentations permettent aussi de construire des simulations temps réel (de type guide d'ondes) pour la synthèse sonore [25].

Parmi les perspectives, des discontinuités de profils, la présence de trous, clapets (etc), entre chaque zone  $C^1$  optimisée pourrait être intégrées en définissant des raccords à volume nul et en introduisant des masses ajoutées suivant le principe donné par exemple dans [13, p.302-332]. Par ailleurs, un travail sur les paramètres d'initialisation de l'algorithme proposé en 3.3 pourrait permettre d'accélérer l'optimisation sans dégrader les résultats, en n'exécutant l'étape 3 qu'à la dernière itération. Enfin, la représentation à peu de paramètres d'une perce devrait permettre d'envisager une optimisation sur des impédances (ou immitance) cibles ou d'autres critères acoustiques, et plus seulement sur un critère géométrique.

## Remerciements

Les auteurs remercient J. Kergomard et D. Matignon pour les renseignements bibliographiques et P.-D. Dekoninck pour les travaux initiaux sur l'estimation de profils géométriques. Ce travail fait partie du projet ANR Consonnes.

## Références

- [1] J. L. Lagrange. Nouvelles recherches sur la nature et la propagation du son. Misc. Taurinensia (Mélanges Phil. Math., Soc. Roy. Turin), 1760-1761.
- [2] D. Bernoulli. Sur le son et sur les tons des tuyaux d'orgues différemment construits. Mém. Acad. Sci. (Paris), 1764.
- [3] A. G. Webster. Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.*, 5 :275–282, 1919. Errata, *ibid.* **6**, p.320 (1920).
- [4] E. Eisner. Complete solutions of the Webster horn equation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 41(4) :1126–1146, 1967.
- [5] R. F. Lambert. Acoustical studies of the tractrix horn. I. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 26(6) :1024–1028, 1954.
- [6] E. S. Weibel. On Webster's horn equation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 27(4) :726–727, 1955.
- [7] A. H. Benade and E. V. Jansson. On plane and spherical waves in horns with nonuniform flare. I. Theory of radiation, resonance frequencies, and mode conversion. *Acustica*, 31 :79–98, 1974.
- [8] G. R. Putland. Every one-parameter acoustic field obeys Webster's horn equation. *J. Audio Eng. Soc.*, 6 :435–451, 1993.
- [9] J. Agulló, A. Barjau, and D. H. Keefe. Acoustic propagation in flaring, axisymmetric horns : I. A new family of unidimensional solutions. *Acustica*, 85 :278–284, 1999.
- [10] Thomas Hélie. Mono-dimensional models of the acoustic propagation in axisymmetric waveguides. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 114 :2633–2647, 2003.
- [11] G. Kirchhoff. Ueber die einfluss der wärmeleitung in einem gase auf die schallbewegung. *Annalen der Physik Leipzig*, 134, 1868. (English version : R. B. Lindsay, ed., PhysicalAcoustics, Dowden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg, 1974).
- [12] M. Bruneau, P. Herzog, J. Kergomard, and J.-D. Polack. General formulation of the dispersion equation bounded visco-thermal fluid, and application to some simple geometries. *Wave motion*, 11 :441–451, 1989.
- [13] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008.
- [14] J. Kergomard. *Champ interne et champ externe des instruments à vent*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1981.
- [15] J. Kergomard. Comments on wall effects on sound propagation in tubes. *J. Sound Vibr.*, 98(1) :149–153, 1985.
- [16] L. Cremer. On the acoustic boundary layer outside a rigid wall. *Arch. Elektr. Uebertr.* **2**, 235, 1948.
- [17] A. A. Lokshin. Wave equation with singular retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 240 :43–46, 1978. (russe).
- [18] A. A. Lokshin and V. E. Rok. Fundamental solutions of the wave equation with retarded time. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 239 :1305–1308, 1978. (russe).
- [19] J.-D. Polack. Time domain solution of Kirchhoff's equation for sound propagation in viscothermal gases : a diffusion process. *J. Acoustique*, 4 :47–67, 1991.
- [20] D. Matignon. *Représentations en variables d'état de modèles de guides d'ondes avec dérivation fractionnaire*. PhD thesis, Université de Paris XI Orsay, 1994.
- [21] D. Matignon and B. d'Andréa Novel. Spectral and time-domain consequences of an integro-differential perturbation of the wave PDE. In *Int. Conf. on mathematical and numerical aspects of wave propagation phenomena*, volume 3, pages 769–771. INRIA-SIAM, 1995.
- [22] Thomas Hélie. *Modélisation physique d'instruments de musique en systèmes dynamiques et inversion*. Thèse de doctorat, Université de Paris XI - Orsay, Paris, 2002.
- [23] S. Rienstra. Webster's horn equation revisited. *SIAM J. Appl. Math.*, 65(6) :1981–2004, 2005.
- [24] Thomas Hézard. *Construction de famille d'instruments à vent virtuels*. Projet de fin d'études d'ingénieur, Ecole Nationale Supérieure de l'Electronique et de ses Applications, Cergy-Pontoise, 2009.
- [25] Rémi Mignot. *Réalisation en guides d'ondes numériques stables d'un modèle acoustique réaliste pour la simulation en temps-réel d'instruments à vent*. Thèse de doctorat, Edite de Paris - Telecom ParisTech, Paris, 2009.
- [26] N H. Fletcher and T. D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer-Verlag, New York, USA, 1998.
- [27] Thomas Hélie and Xavier Rodet. Radiation of a pulsating portion of a sphere : application to horn radiation. *Acta Acustica*, 89 :565–577, 2003.