



## Université Pierre et Marie CURIE

Master Sciences et Technologies, mention Sciences de l'Ingénieur,  
Spécialité Mécanique et Ingénierie des Systèmes,  
Orientation Acoustique, Traitement du signal et Informatique  
Appliqués à la Musique (ATIAM)

### Rapport de stage

# Vers une évolution de la table d'harmonie de la harpe

Kurijn BUYS

Stage effectué du 1 mars au 30 juin 2010 au sein de l'équipe Mécanique et  
Ingénierie des Solides Et des Structures (MISES) de l'Institut Jean Le  
Rond d'Alembert (IJLRDA), et soutenu le 7 juillet 2010, sous la  
responsabilité de Charles BESNAINOU (Ing. CNRS IJLRDA-LAM) et Joël  
FRELAT (Dr. CNRS IJLRDA-MISES)



# Remerciements

Je souhaite remercier particulièrement Charlers Besnainou et Joël Frelat pour leur soutien, leurs encouragements et leur confiance qui m'ont permis de progresser de façon libre, motivé et inspiré au cours de mon stage!

Je remercie Angela Vinceti et Martine Rousseau pour leur aimable assistance dans les étapes mécaniques, acoustiques et rédactionnelles.

Dernière mais non des moindres, je tiens à remercier Marie Violette Cordenier qui, grâce à son adorable existence, savait me soutenir et inspirer pendant toute la durée de mon stage.

# Résumé, Abstract

Suite à la faible évolution de la harpe, nous sommes amenés à étudier les possibles voies de modification de cet instrument. En tenant aux critères liés aux instruments classiques, on vise à augmenter et spectralement égaliser le son rayonné. Cette puissance sonore provient du système d'amplification de la harpe qui est principalement lié à la table d'harmonie. Après quelques modélisations analytiques préalables pour la compréhension de certains aspects globaux, nous proposons cinq modifications : l'utilisation d'un matériau composite pour la fabrication de la table d'harmonie, un décentrement de la barre d'harmonie, une fractionnement de la table d'harmonie, une division de la caisse de résonance et une table d'harmonie avec un bombé initial. Nous évaluons une modélisation numérique par éléments finis des trois premières modèles modifiés. Afin de vérifier les voies de modélisation, nous étudions les courbes spectrales de la puissance rayonnée, des admittances aux points d'accroche des cordes et les déformées des modes avec une indication de leur efficacité. Les résultats confirment en grande partie le potentiel des modifications proposées et nous pouvons alors conclure que l'on est prêt pour une réalisation concrète.

*Given the evolution of the harp is rather poor, we are conducted to study the possible modification paths of the instrument. Considering criteria based on classical musical instruments, we seek to amplify and equalize the spectrum of the radiated sound. This sound power comes from the amplification system of the harp which is principally embodied by the soundboard. After some introductory analytical modelling in order to understand certain global aspects, we propose five modifications : the use of a composite material for the manufacturing of the soundboard, a decentration of the sound-bar, a fractionation of the soundboard, a division of the resonance chamber and a soundboard with an initial curvature. We evaluate a numeric finite element model of the three first modified models. In order to verify the modification paths, we study the spectral curves of the radiated power and of the admittances on the string anchoring points, and the modal shapes with an indication of their efficiency. The results confirm the potential of the proposed modifications the for a great part so that we can conclude that we're ready for a concrete realization.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Approche globale de la harpe</b>	<b>6</b>
1.1 Peut-on optimiser, et quoi? . . . . .	7
1.2 Quelques éléments de modélisation . . . . .	8
1.2.1 Flexion des plaques minces élastiques . . . . .	9
1.2.2 Flexion d'une poutre encastrée-encastrée . . . . .	11
1.2.3 Rayonnement des surfaces planes . . . . .	12
1.2.4 Admittances aux points d'excitation . . . . .	18
1.3 Quelques voies de modification . . . . .	19
1.3.1 Table en matériau composite . . . . .	19
1.3.2 Barre d'harmonie décentrée . . . . .	20
1.3.3 Table d'harmonie fractionnée . . . . .	21
1.3.4 Caisse de résonance divisée . . . . .	23
1.3.5 Table avec un bombé initial . . . . .	23
<b>2 Modélisation numérique</b>	<b>25</b>
2.1 Géométrie et caractéristiques de la table d'harmonie . . . . .	25
2.2 Stabilisation du maillage . . . . .	27
2.3 Modes de vibration . . . . .	28
2.4 La précontrainte par la charge des cordes . . . . .	29
2.5 Les réponses par une impulsion aux points d'accroche . . . . .	30
2.5.1 Rayonnement . . . . .	31
2.5.2 Admittances d'entrée . . . . .	32
2.6 Résultats de l'étude comparative des modèles . . . . .	32
2.6.1 Table en matériau composite . . . . .	33
2.6.2 Barre d'harmonie décentrée . . . . .	34
2.6.3 Table d'harmonie fractionnée . . . . .	35
<b>Conclusions, recommandations et perspectives</b>	<b>37</b>

<b>Annexes</b>	<b>38</b>
<b>A Annotations relatives au modèle de harpe utilisé</b>	<b>39</b>
A.1 La géométrie . . . . .	39
A.2 Les cordes . . . . .	40
<b>B Comparaison entre la pression en face et la puissance rayonnée</b>	<b>41</b>
<b>C Graphiques</b>	<b>43</b>
C.1 Tables en bois et en composite . . . . .	43
C.2 Tables avec une barre décentrée . . . . .	49
C.3 Table libre et fractionnée . . . . .	53

# Introduction

Contrairement à la plupart d'autres instruments de musique classique, la harpe connaît une faible évolution concernant le mécanisme de production du son. La harpe apparaît en Europe aux alentours du IXe siècle après J.-C. où elle a alors pris sa forme moderne : triangulaire, apparemment posée sur la pointe, et dotée de la colonne qui relie la console (où s'accrochent les cordes) au bas de la caisse de résonance. L'instrument évolue encore vers un instrument chromatique, avec une variation de nombres de cordes pour finalement arriver à la harpe à pédales et la harpe celtique comme nous les connaissons aujourd'hui [1].

Dans toute cette évolution il n'y a aucune modification importante dans la modélisation du système d'amplification qui sont analogues pour les deux familles de harpes mentionnées.

Bien que l'évolution acoustique de la harpe ait plutôt stagné, les dernières années il y a eu quelques luthiers qui se sont dévoués à des constructions modifiées. Didier Budin a breveté en 1988 une harpe construite avec des matériaux en composite. Il a également construit une harpe dont les cordes sont accrochées sur une ligne décentrée par rapport au milieu de la table d'harmonie. Néanmoins, ces modèles n'ont jamais été analysés et il reste d'autres modifications à étudier. Il est temps alors pour une évaluation acoustique approfondie. On propose d'étudier des nouveaux concepts et des concepts qui ont déjà montrés leur efficacité sur les instruments à cordes.

# Chapitre 1

## Approche globale de la harpe

Nous considérons tout d'abord le fonctionnement global du système d'amplification de la harpe. Il consiste en un couplage des cordes à la table d'harmonie et à son tour, de la table d'harmonie à l'air environnant. Les cordes sont accrochées à la barre d'harmonie en bois qui est collée au milieu en dessous de la table d'harmonie. La barre a une épaisseur importante pour supporter l'immense charge de tension des cordes.

Pour que la vibration de la corde se traduise dans un son, il faut que l'air environnant se mette à osciller. La corde elle-même n'est pas capable de mettre l'air en mouvement mais elle peut, à l'aide d'un chevalet, transporter une partie de son énergie vibratoire à une surface qui est très efficace pour ce but : la table d'harmonie. Quand on entre dans le détail, on observe que les transferts d'énergie sont plus ou moins efficaces en considérant certains paramètres. La table d'harmonie est elle-même un système vibratoire, et sa vibration est donc restreinte à ses modes de vibration. D'une part, chaque endroit d'excitation de la table (au points d'accroche des cordes) nous raconte la proportion de l'excitation de chaque mode, ce qui sera caractérisé par *les admittances d'entrée*. D'autre part, la propagation de l'air à partir de la couche d'air en contact avec la table est spécifiée pour chaque mode par un modèle de rayonnement.

L'autre côté de la table est couplé avec la caisse de résonance. Pour pratiquement pouvoir monter les cordes à la main, on a prévu plusieurs trous dans l'arrière de la caisse de résonance ce qui a bien évidemment des conséquences acoustiques importantes. Contrairement à la plupart d'instruments à cordes le rôle de résonateur de Helmholtz est différent. Il a été montré que le rayonnement venant des trous est important dans une plage fréquentielle correspondante au rayonnement de la surface supérieure de la table [2], [3]. Cependant, puisque nous proposons un modèle bien adapté qui s'approche plus à un modèle de guitare par exemple, le rôle de la caisse de résonance sera principalement d'amplifier les basses fréquences, ce qui est une manque dans le modèle actuel [4], [5]. La modélisation proposée ne prend alors pas

en compte le couplage des deux rayonnements qui se manifesteront généralement dans différentes plages fréquentielles.

Dans ce chapitre nous abordons d'abord la question générale d'optimisation pour ensuite parler de quelques éléments analytiques globaux, dont on traite la modélisation du rayonnement plus en détail car sa modélisation numérique a été réalisé pendant ce stage. Ensuite nous expliquons quelques voies donnant lieu aux modifications proposées dont on en évalue numériquement quelques-uns dans le chapitre suivant.

## 1.1 Peut-on optimiser, et quoi ?

### **Le son de la harpe actuelle : une beauté dont la balance peut être plus crédible**

Avant de commencer à proposer des modifications il faut, évidemment, que l'on sache quelles objectifs on aimerait obtenir. L'objectif global est d'obtenir un son plus *beau*. Afin de modéliser la beauté du son de la harpe, on peut distinguer plusieurs aspects qui sont tous caractérisés par un nombre de paramètres : l'oeuvre musicale, le harpiste, le jeu, le son, les contextes, l'auditeur, ...

Vu que les aspects non directement liés à l'instrument physique peuvent varier selon les différentes utilisations de l'instrument, on ne les prendra pas en compte dans cette étude et on suppose une utilisation correspondant à un répertoire plutôt classique avec un jeu et des contextes plutôt habituels.

Le seul aspect directement lié à l'instrument est le son. Le son possède quatre dimensions : le temps, la fréquence, l'amplitude et l'espace.

Le son de la harpe est constitué d'un ensemble de partiels (surtout des quasi-harmoniques) qui ont tous une enveloppe temporelle qui peut différer selon l'endroit dans l'espace où on se retrouve. Puisque l'influence de l'espace est un paramètre du son qui dépend également selon l'auditeur et l'environnement, on utilisera un indice moyen : la puissance rayonnée.

Pour les paramètres restants, la partie *reconnaissable* pour l'oreille dans le son de la harpe est la série harmonique dont les enveloppes spectrales et temporelles sont simples et donc également reconnaissables. Les modes de vibration de la table d'harmonie engendrent une variation relative entre chaque corde, qui dans le cas de la harpe actuelle est reconnaissable puisqu'il s'agit des variations de plusieurs décibels. Cette variation reconnaissable impose une complexité du point de vue d'une oeuvre qui est concentré sur la mélodie comme il est le cas pour la musique classique. Si on arrive à enlever ou diminuer cette complexité on atteindrait *une balance* qui aura plus de potentiel d'être crédible et qui sera alors plus *beau*.

Par ailleurs, étant donné que l'instrumentiste peut varier l'amplitude du son en jouant sur le pincement, il y a de l'intérêt que la puissance sonore globale

soit forte pour que le musicien ait la liberté d'une dynamique plus étendue. Ceci élargit les capacités de l'instrument en le rendant compatible avec plus de répertoires et plus de contextes de jeu.

### **En pratique**

Puisque le caractère de la table d'harmonie est indépendant des cordes, son effet se manifeste de façon différente sur la série des partiels pour chaque corde. La seule possibilité mécaniquement faisable est d'essayer de réduire le caractère global, donc d'aplatir pour chaque corde la courbe fréquentielle de la puissance rayonnée par la table et la courbe fréquentielle de l'admittance d'entrée (qui est caractéristique pour les inharmonicités et les enveloppes temporelles des partiels). Pour ce qui concerne l'élargissement de la dynamique, il résulte directement d'une augmentation globale de la puissance rayonnée.

Il est intéressant et clarifiant de s'imaginer ces critères en termes d'énergie. Au moment où le doigt lâche la corde, une quantité d'énergie est introduite dans le système résonant de la corde qui fait alterner l'énergie entre les états cinétique et potentiel. Pour que l'auditeur entende cette alternance la corde lâche une partie de son énergie à la table d'harmonie qui est, elle aussi, un système résonant. La table passera à son tour une partie de l'énergie à l'air en contact. Il y a deux raisons pour que ce passage ne se passe pas pareil pour toutes les fréquences. Premièrement, les transferts corde-table et table-environnement dépendent du caractère fréquentiel de la table et deuxièmement, chaque élément : la corde, la table et l'air a des pertes dues au frottements à l'intérieur des matériaux.

Le but d'augmenter et égaliser la puissance sonore revient alors à minimiser ces pertes d'une façon qui ne va pas privilégier certaines (bandes de) fréquences. Pour ce faire, il y a plusieurs endroits où l'on peut intervenir. Surtout la table d'harmonie est l'élément central qui doit passer le plus objectivement l'énergie (par rapport à la fréquence). On peut considérer les endroits d'excitation sur la plaque représentés par les points d'accroche des cordes. Ou on peut modifier les caractéristiques mécaniques de la table. Afin de procéder aux hypothèses nous détaillons ces aspects d'abord dans la section suivante.

## **1.2 Quelques éléments de modélisation**

Dans cette section nous abordons quelques aspects analytiques qui seront utilisés pour pouvoir expliquer les hypothèses, ou pour utiliser comme point de départ dans la modélisation numérique.

L'idée de l'étude est de montrer les capacités globales des modifications que l'on propose. On vise à montrer des premiers ordres qui seront valables

pour différents géométries et tailles de harpes, cependant les paramètres des modifications ne sont loin d'être indépendants quand on entre en détail.

Pour les calculs numériques, on utilise un modèle spécifique avec des caractéristiques déterminées choisies en accord avec une harpe que l'on possède et pour laquelle on envisage une réalisation de ces modifications. Il s'agit d'une petite harpe de la marque *Camac* dont les spécifications peuvent être trouvées dans l'annexe A.

Une première modification concerne l'adaptation de la caisse de résonance pour qu'elle compense l'absence des basses fréquences dans le cas de la harpe actuelle. On propose une caisse consistant de plusieurs résonateurs de Helmholtz simples et indépendants entre eux. Comme dans le cas de la guitare on peut en première ordre négliger le faible couplage entre le résonateur et la table [5]. Alors le résonateur de Helmholtz simple a une seule fréquence de résonance qui s'applique comme un filtre au spectre du déplacement moyen de la partie de la table qui délimite le résonateur.

En considérant ensuite les autres modifications envers les critères d'optimisation, bien que surtout autour des fréquences des résonateurs Helmholtz il manque un apport de puissance, il est pertinent de supposer que le rayonnement propre de la surface supérieure de la table donne des indications importantes des objectifs mentionnés.

D'abord on décrit brièvement le phénomène des ondes de flexion dans les plaques et dans une poutre encastrée, pour ensuite décrire le rayonnement et les admittances aux points d'excitation sur la plaque.

### 1.2.1 Flexion des plaques minces élastiques

On présente d'abord le cas d'une plaque orthotrope qui s'applique aux bois de lutherie comme la table d'harmonie actuelle.

Les hypothèses "plaque mince" (ou Kirchoff-Love) généralisent pour les plaques les hypothèses d'Euler-Bernoulli appliquées aux poutres : les sections droites restent droites et perpendiculaires à la fibre neutre. On ne tient pas compte des amortissements internes dans la plaque et par la charge acoustique de l'air en contact avec la plaque, vu la complexité de la modélisation et le relativement faible rôle dans le comportement vibratoire. La présentation détaillée de l'établissement de l'équation de flexion des plaques sort du cadre de cette étude. On peut se reporter, par exemple, à l'ouvrage de Yu [6]. Nous décrivons ici uniquement les étapes à suivre et les hypothèses prises en compte.

On note  $w(x, y, t)$  le déplacement transverse dans un base cartésienne où les axes de coordonnées coïncident avec les axes de symétrie de la structure et que  $e_z$  est la direction transverse.

On considérant le champ de déplacement transversal on en déduit le tenseur des déformations qui se relie aux contraintes par la lois de comportement.

Ensuite, les moments de flexion sont obtenus par intégration des moments élémentaires sur l'épaisseur  $h$  de la plaque. En écrivant les énergies on peut appliquer le principe de Hamilton pour déduire l'équation du mouvement de flexion de la plaque qui se simplifie encore pour une plaque homogène. Dans le domaine fréquentiel où l'on pose  $W(x, y, \omega) = TF(w(x, y, t))$  elle s'écrit :

$$-\omega^2 \rho_p h W + D_1 \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + D_3 \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} + (D_2 + D_4) \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} = F(x, y, \omega) \quad (1.1)$$

où :

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}; & D_2 &= \frac{E_x \nu_{yx} h^3}{6(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} = \frac{E_y \nu_{xy} h^3}{6(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}, \\ D_3 &= \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}; & D_4 &= \frac{G_{xy} h^3}{3}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $\rho_p$ ,  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\nu_{xy}$ ,  $\nu_{yx}$  sont respectivement la masse volumique, les modules d'Young, les coefficients de Poisson et le module de cisaillement du matériau orthotrope de la plaque.

Le cas isotrope s'applique approximativement aux matériaux composites avec des couches dont les directions des fibres sont mélangées. Ce cas est une simplification du cas orthotrope où l'on a  $E_x = E_y = E$  et  $\nu_{xy} = \nu_{yx} = \nu$ , si bien que les constantes de rigidité s'écrivent :

$$\begin{aligned} D_1 = D_3 &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})} = D; & D_2 &= 2\nu D, \\ D_4 &= \frac{\mu h^3}{3} = \frac{Eh^3}{6(1 + \nu)} = 2(1 - \nu)D. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Par conséquent, on retrouve l'équation classique des plaques minces homogènes isotropes en flexion :

$$-\omega^2 \rho_p h W + D \frac{d^4 W}{dx^4} = 0, \text{ avec } D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}, \quad (1.4)$$

### Conditions aux limites

Afin de trouver les solutions de la vibration de flexion d'une plaque de dimension finie on ajoute ses états connus de  $W$  aux coordonnées des bords à l'équation de propagation obtenue précédemment.

Dans le cas de la harpe actuelle, la table d'harmonie est encastrée aux quatre bords. Un encastrement se manifeste par un blocage des rotations et des déplacements, ce qui s'exprime pour un bord donné en  $x = x_0$ , par  $W = 0$  et  $\frac{\partial W}{\partial x} = 0$ .

Dans les modifications proposées on utilise aussi des bords libres. Ce type de conditions s'expriment par une absence de moment et d'effort tranchant,

d'où :  $\mathcal{M}_x = 0$  et  $\mathcal{T}_x = \frac{\partial \mathcal{M}_x}{\partial x} + 2\frac{\partial \mathcal{M}_{xy}}{\partial y} = 0$ , ce qui s'écrit en coordonnées cartésiennes pour un matériau isotrope :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \text{ et} \\ \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial y^2} = 0. \end{cases} \quad (1.5)$$

En imposant ces conditions en accord avec la géométrie on pourrait, en théorie, trouver les déformées modales de flexion de la table d'harmonie. Néanmoins, étant donné que la géométrie de la table est relativement complexe et que même dans le cas d'une plaque rectangulaire ce type de conditions ne conduisent pas à une solution analytique, on arrête le développement analytique ici. Dans la suite on étudie une table d'harmonie coupée dans la largeur en plusieurs parties. Pour le choix des endroits des coupes il serait intéressant de se baser sur une approche analytique. Puisque cette approche n'a pas de solution analytique pour le cas d'une plaque, on peut, en revanche, étudier le cas d'une poutre encastree des deux côtés. Pour une telle plaque, les premiers modes dans la direction perpendiculaire au plan des cordes sont approximativement analogues aux premiers modes d'une poutre avec des propriétés équivalentes que nous présentons dans la section suivante.

### 1.2.2 Flexion d'une poutre encastree-encastree

On considère les poutres dans le cadre de l'approximation d'Euler-Bernoulli, pour un matériau isotrope. Nous considérons que les parties de plaque ont une section constante dans leur longueur d'un point de vu de leur modélisation par des poutres, autrement l'équation générale ne peut pas se résoudre analytiquement. L'équation des vibrations de flexion transversale pour une telle poutre s'écrit :

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (1.6)$$

où  $E$  et  $\rho$  sont le module d'Young et la masse volumique du matériau,  $S$  la section droite constante  $S = bh$ , dont le moment d'inertie par rapport à la fibre neutre en  $z = h/2$  est égale à  $I = bh^3/12$ .

La recherche de solutions propres sous la forme  $y(x, t) = \Phi(x) \cos \omega t$  conduit à la solution générale :

$$\Phi(x) = A \cosh kx + B \sinh kx + C \cos kx + D \sin kx, \quad (1.7)$$

avec :

$$k = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{\rho S}{EI}} \quad (1.8)$$

Les conditions aux limites des encastrement aux extrémités 0 et  $L$  de la poutre :  $y(0, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = y(L, t) = \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$  conduisent à un système

de deux équations qui s'écrit sous une forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} \sinh kL - \sin kL & \cosh kL - \cos kL \\ \cosh kL - \cos kL & \sinh kL + \sin kL \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

Pour obtenir des solutions non triviales, le déterminant de la matrice doit être égal à zéro, ce qui donne :

$$\cosh kL \cos kL = 1. \quad (1.10)$$

Cette équation transcendante a une infinité de solutions dont on trouve numériquement les deux premières :  $k_1L = 4,730$  et  $k_2L = 7,853$  (la solution zéro correspondant au mode rigide n'est pas d'application dans ce cas encasté) [7]. Ensemble avec l'équation (1.8) qui s'écrit aussi comme :

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} k_n^2, \quad (1.11)$$

on peut calculer les fréquences de résonance de ces premiers modes.

### 1.2.3 Rayonnement des surfaces planes

Vu que l'on vise à modifier le son produit par l'instrument, on est amené à considérer son rayonnement. Comme on s'intéresse au son global provenant de l'instrument on se contente de l'étude du rayonnement en champ lointain dans ce travail.

Comme mentionné auparavant, le rayonnement propre de la surface supérieure de la table donne des indications importantes des objectifs d'optimisation, alors nous aborderons uniquement cette partie du rayonnement.

Nous commençons par traiter le cas d'une surface infinie qui se déplace transversalement. De chaque élément de cette surface, la pression de l'air se propage dans un demi-espace par une demi-sphère. Alors, le son produit à un endroit donné est lié à la somme des ondes de pression venant de chacune de ces éléments. Quand on met le cas de la plaque isotrope, "infinie" à la place de cette surface, l'équation (1.4) montre que pour une onde progressive  $e^{j(\omega t - k_B x)}$ , la fréquence  $\omega$  est quadratiquement liée par l'équation de dispersion au nombre d'onde  $k_B$  sur la plaque :

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\rho_p h}} k_B^2, \quad (1.12)$$

où  $h$  est l'épaisseur de la plaque. Cette équation montre que les ondes de flexion se propagent à une vitesse qui augmente avec la fréquence de l'excitation. En la comparant avec l'équation de dispersion dans l'air  $\omega = kc$ , où  $c$  est la célérité dans l'air, on peut constater qu'il existe une fréquence

particulière, appelée *fréquence critique* pour laquelle le nombre d'onde dans l'air est égal au nombre d'onde dans la plaque. Celle-ci est donc donnée par [8] :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_p h}{D}} = \frac{c^2}{h\pi} \sqrt{\frac{3\rho_p(1-\nu^2)}{E}} \quad (1.13)$$

Cette fréquence délimite deux domaines distincts : au-dessous de  $f_c$  on se trouve dans un cas subsonique avec une efficacité de rayonnement faible, alors que pour les fréquences voisines ou supérieures à  $f_c$  on se trouve dans le cas supersonique avec une efficacité de rayonnement élevée. Ce résultat est dû ici à l'allure particulière (parabolique) de l'équation de dispersion de la plaque. Il est à noter que le cas supersonique engendre une ou plusieurs directions de rayonnement privilégiées, se manifestant par une forte variance suivant l'angle de direction du rayonnement.

Dans un cas orthotrope, en partant de l'équation correspondant (1.1) on peut trouver une équation de dispersion qui dépend de la direction de propagation mais qui revient à deux équations similaires pour les directions  $x$  et  $y$ . Pour ces cas extrêmes, l'équation (1.13) donne plusieurs fréquences critiques. Les modules d'Young et les coefficients de Poisson valent  $10,9GPa$  et  $0,5$  dans le sens  $X$  et  $0,64GPa$  et  $0,02$  dans le sens  $Y$ . De plus, comme l'épaisseur de la table varie entre  $2,5\text{ mm}$  en haut (h) et  $8,0\text{ mm}$  en bas (b) on peut vérifier quatre fréquences de coïncidence correspondant aux cas extrêmes de la table d'harmonie, on trouve :

$$f_{cXh} = 20\text{ kHz} \quad f_{cXb} = 6,4\text{ kHz} \quad f_{cYh} = 4,2\text{ kHz} \quad f_{cYb} = 1,3\text{ kHz}. \quad (1.14)$$

Pour le cas d'une table en composite nous considérons un module d'Young isotrope équivalente  $E = 15,0GPa$ . Les deux fréquences critiques extrêmes, en haut et en bas de la table valent alors :

$$f_{ch} = 3,9\text{ kHz} \quad f_{cb} = 1,2\text{ kHz}. \quad (1.15)$$

On conclut qu'à haute fréquence la pression rayonnée peut différer selon la position où on se trouve par rapport à l'instrument en jeu. Pour prendre en compte cette variation de directivité on utilise une grandeur qui est liée au niveau moyen du son produit : la puissance acoustique rayonnée. En dessous de cette fréquence la puissance devient proportionnel au carré de la pression rayonnée à un point quelconque dans l'espace, cette remarque est traitée en détail dans l'annexe B.

De manière générale l'expression qui lie le déplacement d'une surface à un "son moyen" n'est pas déterminée de façon directe. On peut viser un seul point dans l'espace et calculer l'intégrale de Kirchoff dans le domaine temporel ou l'intégrale de Helmholtz en fréquentiel. Dans le cas d'une plaque insérée dans un écran rigide infini ce calcul se réduit à l'*intégrale de Rayleigh*.

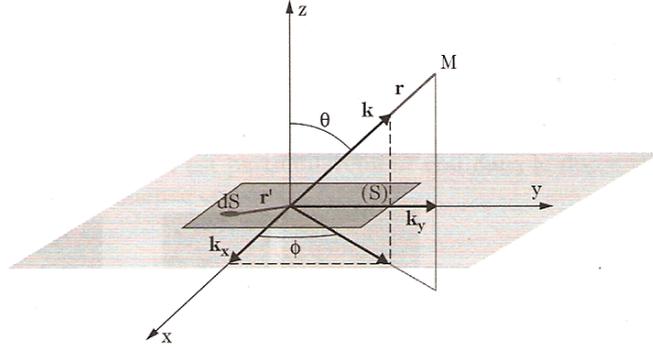


FIGURE 1.1 – Géométrie pour le calcul du rayonnement de la plaque rectangulaire insérée dans un écran infini. On note  $k_x = k \sin \theta \cos \Phi$  et  $k_y = k \sin \theta \sin \Phi$ .

A "grande distance" on peut utiliser l'approximation "de module" (modèle de Fraunhofer) de cet intégrale. La figure 1.1 montre un dessin d'une telle plaque. Compte tenu des hypothèses, dans un point  $M$  à distance  $r$  et avec angles spaciaux  $\theta$  (par rapport à l'axe  $Z'$ ) et  $\Phi$  (entre  $X'$  et la projection sur le plan  $X'Y'$ ), la pression rayonnée s'écrit [8] :

$$P(r, \theta, \Phi, \omega) = -\frac{\omega^2 \rho}{2\pi r} e^{-jkr} \int_{S'} W(x', y', \omega) e^{-j(k_x x' + k_y y')} dx' dy', \quad (1.16)$$

où la surface  $S$  entourant la plaque se trouve dans le plan  $X'Y'$ . Le paramètre  $k$  est le nombre d'onde dans l'air avec le vecteur d'onde correspondant qui a des composantes cartésiennes :  $k_x = k \sin \theta \cos \Phi$  et  $k_y = k \sin \theta \sin \Phi$  dans un repère dont les axes  $X$  et  $Y$  sont inclus dans la surface de rayonnement en champ lointain.  $W$  représente le déplacement de flexion transversale de la plaque. Cette expression montre qu'à une distance suffisamment grande par rapport aux dimensions de la plaque, la pression rayonnée est proportionnelle à la transformée de Fourier spatiale du déplacement, soit :

$$P(r, \theta, \Phi, \omega) = -\frac{\omega^2 \rho}{2\pi r} e^{-jkr} \widetilde{W}(k_x, k_y, \omega). \quad (1.17)$$

En ignorant les amortissements internes et par la réaction de l'air sur la plaque on peut décomposer le champ de déplacement de la plaque sur la base de ses modes propres *in vacuo* :

$$W(x', y', \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x'_e, y'_e, \omega) \Phi_n(x', y'). \quad (1.18)$$

$A_n(x'_e, y'_e, \omega)$  représente l'amplitude modale déterminée par l'excitation de la plaque à l'endroit  $(x'_e, y'_e)$  et  $\Phi_n(x, y)$  est le mode de vibration  $n$  de la plaque.

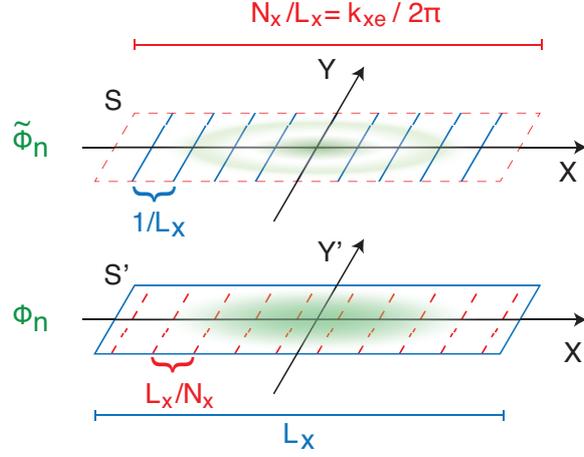


FIGURE 1.2 – Relation entre un mode quelconque  $\Phi_n$  et sa transformée de Fourier  $\tilde{\Phi}_n$  (en vert). La dimension finie de la surface  $S'$  résultent en un spectre discret (en bleu) et l'effet de l'échantillonnage résulte en un spectre borné par une surface de dimension finie  $S$  (en rouge).

Son spectre angulaire est :

$$\tilde{W}(k_x, k_y, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x'_e, y'_e, \omega) \tilde{\Phi}_n(k_x, k_y), \quad (1.19)$$

où le spectre angulaire du déplacement de chaque mode est donné par la transformée de Fourier 2D :

$$\tilde{\Phi}_n(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x, y) e^{-j(k_x x + k_y y)} dy dx. \quad (1.20)$$

La figure 1.2 montre la relation entre un mode quelconque  $\Phi_n$  et sa transformée de Fourier  $\tilde{\Phi}_n$ .

La pression rayonnée s'écrit alors :

$$P(r, \theta, \Phi, \omega) = -\frac{\omega^2 \rho}{2\pi r} e^{-jkr} \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x'_e, y'_e, \omega) \tilde{\Phi}_n(k_x, k_y). \quad (1.21)$$

On peut montrer que pour une composante fréquentielle spatiale il existe des directions privilégiées de l'espace où la contribution devient très grande, on parle de *coïncidence spatiale*. En inspectant le spectre angulaire d'un mode et le spectre temporel pour une excitation donnée (le coefficient  $A_n(x'_e, y'_e, \omega)$ ) on peut alors avoir une idée de sa directivité.

Pour une fréquence  $\omega$  et un mode  $n$  donnés on retrouve des coïncidences spatiales quand la longueur d'onde dans l'air  $\lambda$  est égale ou plus petite que la longueur d'onde dans la plaque  $\lambda_{n_x}$  et  $\lambda_{n_y}$  qui séparent les maximums

d'amplitude de vibration consécutifs de la plaque, ce qui ne peut se produire qu'au delà de la fréquence critique. Vu la complexité de la table d'harmonie de la harpe, on ne vérifie pas cette condition de façon analytique, mais elle est intégrée dans les calculs numériques de manière implicite. Il est aussi possible de vérifier la condition "à la main" en comparant la longueur d'onde dans l'air, correspondant aux fréquences de résonance, avec les images des déformées modales obtenues numériquement.

Outre ces coïncidences, les coefficients de pression  $P_n$  contiennent des *coïncidences fréquentielles* dans la mesure où ils sont proportionnels aux amplitudes modales vibratoires  $A_n(x'_e, y'_e, \omega)$ .

Si la plaque est excitée au point de coordonnées  $(x_e, y_e)$  par une force ponctuelle  $F$ , alors cette amplitude modale vaut :

$$A_n(\omega) = \frac{F}{\rho_p h} \frac{\Phi_n(x_e, y_e)}{\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta_n \omega \omega_n}, \quad (1.22)$$

où les  $\omega_n$  sont les pulsations propres de la plaque *in vacuo* et  $\zeta_n$  l'amortissement modal supposé petit devant l'unité.

La puissance rayonnée se calcule par intégration du vecteur intensité acoustique  $I(r) = \frac{1}{2} \mathcal{R}e \{P(r, \theta, \Phi) V^*(r, \theta, \Phi)\}$  sur une surface fermée à distance  $r$  quelconque de la plaque. En champ lointain de la plaque, on a alors :

$$\langle \mathcal{P}_a(\omega) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \mathcal{R}e \{P(r, \theta, \Phi) V^*(r, \theta, \Phi)\} r^2 \sin \theta d\theta d\Phi, \quad (1.23)$$

où le symbole "\*" désigne le complexe conjugué. Compte tenu de l'équation d'Euler elle s'écrit alors comme :

$$\langle \mathcal{P}_a(\omega) \rangle = \frac{1}{2\rho c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} |P(r, \theta, \Phi, \omega)|^2 r^2 \sin \theta d\theta d\Phi, \quad (1.24)$$

où  $P$  est donnée par (1.17). On se déplace dans la base cartésienne des nombres d'onde par une substitution  $r^2 \sin \theta d\theta d\Phi = dk_x dk_y$  et en exploitant les propriétés de la transformée de Fourier spatiale, comme le théorème de Parseval, qui stipule que l'on peut calculer indifféremment la puissance moyenne rayonnée  $\langle \mathcal{P}_a(\omega) \rangle$  dans l'espace réel ou dans l'espace des nombres d'onde, on peut écrire :

$$\langle \mathcal{P}_a(\omega) \rangle = \frac{\omega \rho}{8\pi^2} \int_{S_r} \frac{|\hat{W}(k_x, k_y, \omega)|^2}{k_z} dk_x dk_y, \quad (1.25)$$

où  $k_z = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2} = k \cos \theta$ , et  $S_r$  est le cercle de rayonnement qui restreint l'intégration à la partie réelle, il est définie par :

$$\int_{S_r} dk_x dk_y = \int_{-k}^k dk_y \int_{-\sqrt{k^2 - k_y^2}}^{\sqrt{k^2 - k_y^2}} dk_x. \quad (1.26)$$

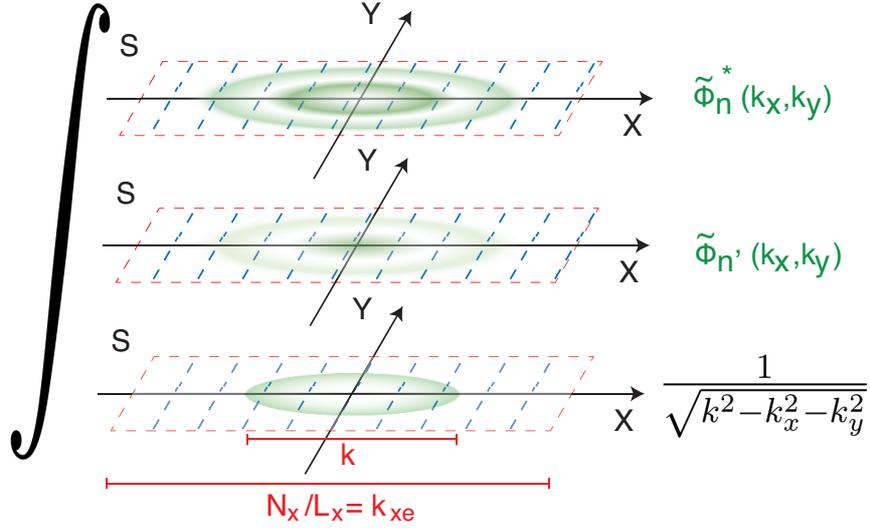


FIGURE 1.3 – Schéma montrant l'intégration pour le calcul de la résistance de rayonnement pour un couple de modes  $(n, n')$  quelconque à une fréquence spatiale  $k$  donnée.

On introduit l'expression de  $\tilde{W}$  (1.19) :

$$\langle \mathcal{P}_a(\omega) \rangle = \frac{\omega\rho}{8\pi^2} \int_{S_r} \frac{|\sum_{n=1}^{\infty} \dot{A}_n(\omega) \tilde{\Phi}_n(k_x, k_y)|^2}{k_z} dk_x dk_y. \quad (1.27)$$

En écrivant le numérateur sous la forme  $\sum_{n,n'=1}^{\infty} \dot{A}_n^*(x'_e, y'_e, \omega) \tilde{\Phi}_n^*(k_x, k_y) \tilde{\Phi}_{n'}(k_x, k_y) \dot{A}_{n'}(x'_e, y'_e, \omega)$ , on peut sortir les amplitudes de l'intégrale. On obtient finalement :

$$\langle \mathcal{P}_a(\omega) \rangle = \sum_{n,n'=1}^{\infty} \dot{A}_n^*(x'_e, y'_e, \omega) R_{nn'} \dot{A}_{n'}(x'_e, y'_e, \omega), \quad (1.28)$$

où  $R_{nn'}$  est la résistance de rayonnement du couple des modes  $n$  et  $n'$  :

$$R_{nn'} = \frac{\omega\rho}{8\pi^2} \int_{S_r} \frac{\tilde{\Phi}_n^*(k_x, k_y) \tilde{\Phi}_{n'}(k_x, k_y)}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y. \quad (1.29)$$

La figure 1.3 montre schématiquement comment, pour un couple de modes  $(n, n')$  et une fréquence angulaire  $k$  quelconque, ce calcul doit être effectué.

L'ensemble des résistances peut s'écrire sous une forme matricielle  $\mathbb{R}_a(\omega)$  où sur la diagonale on trouve les résistances de rayonnement propres, identiques à celles calculées dans le cas des modes isolés, les autres résistances résultent de l'interférence entre les champs de pressions créés par un couple de modes distincts.

La surface d'intégration  $S_r$  définie par (1.26) garantit que les résistances de rayonnement sont réelles. On peut montrer que l'intégration sur la contrepartie de la surface représente une partie réactive qui ensemble avec la résistance (la partie active) forment l'impédance de rayonnement [9]. En effet, pour ce domaine  $k_z$  devient complexe, ce nombre d'onde possède le sens physique des ondes de pression en  $e^{-jk_z z}$  évanescentes, il vaut :

$$k_z = -j\sqrt{k_x + k_y - k}. \quad (1.30)$$

La partie réactive de l'impédance est obtenue par la même expression (1.29), mais pour une intégration sur  $S \setminus S_r$ .

### Efficacité de rayonnement

On définit l'efficacité de rayonnement d'un mode isolé par le quotient [8] :

$$\sigma_n(\omega) = \frac{\langle \mathcal{P}_a |n \rangle}{\frac{1}{2}\rho c S \langle |\dot{W}_n|^2 \rangle}, \quad (1.31)$$

où  $\langle |\dot{W}_n|^2 \rangle$  est la vitesse quadratique moyenne de la plaque définie par :

$$\langle |\dot{W}_n|^2 \rangle = \frac{1}{S} \int_S |\dot{W}_n(x, y, \omega)|^2 dS. \quad (1.32)$$

En considérant l'expression de la puissance rayonnée on peut constater que l'efficacité est proportionnelle à la résistance de rayonnement du mode  $n$  :

$$\sigma_n(\omega) = \frac{R_{nn'}(\omega)}{\rho c S'}, \quad (1.33)$$

Bien qu'en présence d'autres modes il y ait une interaction intermodale, l'efficacité nous donne en moyenne un indice de ces capacités. Complété avec l'allure des déformées modales, cette valeur peut nous aider pour faire des choix de modifications mécaniques à la table.

#### 1.2.4 Admittances aux points d'excitation

L'admittance donne le rapport entre une force à l'entrée et une vitesse à la sortie. En choisissant l'entrée et la sortie à un même endroit d'accroche d'une corde, l'admittance donne la réaction de la table d'harmonie à une force d'excitation et elle exprimera alors le couplage des deux éléments en vibration. On écrit :

$$Y_i(\omega) = j\omega \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n^2(x_i, y_i)}{\rho_p h (\omega_n^2 - \omega^2 + 2j\zeta_n \omega \omega_n)}. \quad (1.34)$$

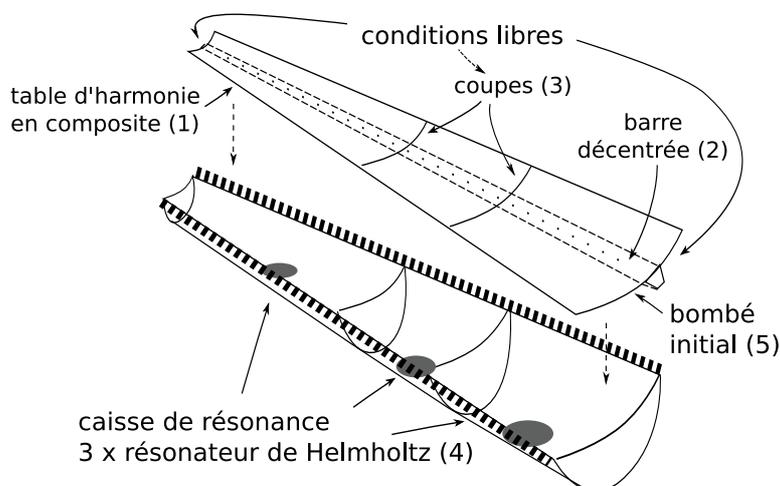


FIGURE 1.4 – Schéma de la table d'harmonie de la harpe avec sa caisse de résonance avec toutes les modifications proposées.

Pour avoir une idée d'une part de l'énergie absorbée par la table et son rayonnement et d'autre part de l'énergie renvoyée à la corde on s'intéresse respectivement à la partie réelle et imaginaire de l'admittance que l'on appelle pour cette raison respectivement la résistance et la réactance. La résistance nous intéresse pour avoir une idée de la proportion de l'énergie de la corde qui se libère pour le rayonnement mais la partie imaginaire est également important puisqu'elle ajoute une distance virtuelle à la corde et elle est donc responsable pour une partie de l'inharmonicité.

### 1.3 Quelques voies de modification

Dans ce paragraphe, nous présentons les modifications mécaniques à étudier. On évalue les conséquences engendrées par les modifications proposées, sur le son et sur la construction statique de la harpe. Vu qu'il s'agit des modifications qui demandent une étude exhaustive, dans ce travail nous traitons seulement les premières trois modifications.

La figure 1.4 montre un schéma avec les modifications proposées. La numérotation correspond à celle des paragraphes qui suivent.

#### 1.3.1 Table en matériau composite

Le matériau utilisé pour la table d'harmonie a une grande importance à la fois sur son comportement statique et sur son comportement dynamique. Pour ce qui concerne la statique, il faut que la structure soit capable de tenir la tension des cordes. En dynamique, le type de matériau a plusieurs conséquences. Pour différents types de matériaux (isotrope, orthotrope,...)

les déformées modales restent grosso modo les mêmes mais les fréquences de résonance peuvent changer beaucoup. Quand on fait monter ces fréquences, de manière globale le rayonnement des modes devient plus efficace. Ceci revient à faire descendre la fréquence critique, donné par l'équation 1.13, qui est inversement proportionnelle à la racine du module d'Young et proportionnelle à la racine de la masse volumique. Le choix d'un matériau plus raide et plus léger résulte alors en une puissance rayonnée plus élevée. Vu que les fréquences de résonance des modes augmentent toutes, on compte sur la caisse de résonance pour la compensation des basses fréquences.

A part les fréquences de résonance, la structure est également caractérisé par son amortissement, dont les amortissements thermoélastique et viscoélastique sont majeurs. Comme mentionné précédemment, on ne prend pas en compte ce phénomène, mais il est à noter qu'il a une grande importance sur la réponse acoustique de la plaque.

L'utilisation du bois pour la fabrication des tables d'harmonie est un choix qui donne une relativement bonne proportion entre la distance fréquentielle entre les modes et l'amortissement. Ce dernier diminue le facteur de résonance des modes de sorte que la réponse globale devient assez plate. Cependant, l'introduction des matériaux synthétiques composites permettent de fabriquer des matériaux dont on peut choisir les caractéristiques mécaniques dans certains limites. Il a été montré qu'un matériau consistant d'un "sandwich" de deux couches extérieurs durs en carbon avec un âme en mousse légère convient bien au but proposé, comme il a été démontré pour la harpe [10] et d'autres instruments à cordes. Il est même possible d'utiliser des composantes qui permettent de jouer sur l'amortissement du matériau. Par ailleurs, ce matériau convient très bien aux exigences statiques. En outre, il est possible d'utiliser une moule pour modeler une forme désirée ce qui convient très bien pour donner un bombé initial à la table, un aspect que l'on abordera ci-après. Nous n'allons pas dans les détails sur ce matériau et on utilisera une modélisation isotrope ce qui est une approche assez grossière mais qui suffit pour notre objectif d'obtenir des premiers ordres de la puissance rayonnée.

### 1.3.2 Barre d'harmonie décentrée

Une autre modification est de déplacer la barre de la table d'harmonie de sa position centrale. L'épaisseur de la plaque est de l'ordre de l'épaisseur de la barre (qui peut même être plus mince après la modification précédente) de sorte que l'effet d'une décentrement de la barre sur l'allure et les fréquences des modes libres reste faible. D'autre part, l'effet associé du décentrement des endroits d'excitation est plus important. Il est évident et bien connu qu'en général, l'excitation d'une structure sur un axe de symétrie provoque une forte alternance de l'amplitude d'excitation entre les modes, puisque les modes pairs correspondant à cette axe de symétrie, y ont un noeud de dé-

placement. La barre décentrée excite alors plus de modes pairs, globalement engendrant des réponses d'impulsion aux endroits des cordes plus riche dans le spectre et alors un rayonnement avec un spectre plus plat et plus puissant, ce qui répond alors bien à nos vœux. Néanmoins, cette modification amène aussi des admittances plus élevées, alors il faudra trouver une bonne équilibre entre la durée du son et la puissance en comparant différents décentrement.

### 1.3.3 Table d'harmonie fractionnée

Une troisième modification consiste d'utiliser une table coupée dans la largeur en plusieurs parties. Pour les bords sur les côtés longs, le montage de la table est identique qu'auparavant, par des encastrements, mais pour avoir des parties de plaque avec un comportement similaire entre eux, les côtés haut et bas sont libres.

Bien que la barre d'harmonie conserve la liaison des parties coupées et donc les modes basses liés à la table entière, ces modes seront réduits si la liaison n'est pas assez importante. Or, il faut trouver une bonne proportion de nombre de coupes et de dimension de la barre. D'autre part, on compte sur l'apport des résonateurs de Helmholtz également ré-modélisés, pour l'amplification des basses fréquences.

Un tel modèle de table fractionnée peut être vu comme un couplage de plaques qui ont chacune leurs modes indépendants. L'ensemble est une géométrie complexifiée qui possède globalement plus de modes dans une plage fréquentielle donnée, en d'autres mots, elle a une plus grande *densité modale*. En choisissant des parties dont les fréquences propres des modes indépendants diffèrent, le spectre de la puissance rayonnée par l'ensemble sera mieux recouvert donc il en résulte une réponse plus plate.

Nous évaluons cette hypothèse pour une table coupée en trois parties. Pour le choix de la coupe on se base premièrement sur l'approche analytique de la poutre encastree des deux côtés. En considérant le cas des parties complètement découplées, on utilise les moyennes des largeurs et épaisseurs de chaque partie de plaque pour les dimensions de trois poutres de section constante.

$$\begin{aligned} l_{p1} &= \frac{l_h + l_{c1}}{2}; & l_{p2} &= \frac{l_{c1} + l_{c2}}{2}; & l_{p3} &= \frac{l_{c2} + l_h}{2}, \\ e_{p1} &= \frac{e_h + e_{c1}}{2}; & e_{p2} &= \frac{e_{c1} + e_{c2}}{2}; & e_{p3} &= \frac{e_{c2} + e_h}{2}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

où les  $l$  sont les largeurs et les  $b$  les épaisseurs, dont les indices  $h, b, c1, c2, p1, p2, p3$  indiquent respectivement du côté haut et bas de la table entière, aux deux endroits de coupe et les trois moyennes correspondant à chaque partie de plaque. En reprenant le calcul de l'équation (1.11) avec ces dimensions moyennes, on obtient pour chaque couple d'endroits de coupe les fréquences de résonance des trois poutres.

Maintenant, nous souhaitons optimiser le rapport entre chaque plaque avec

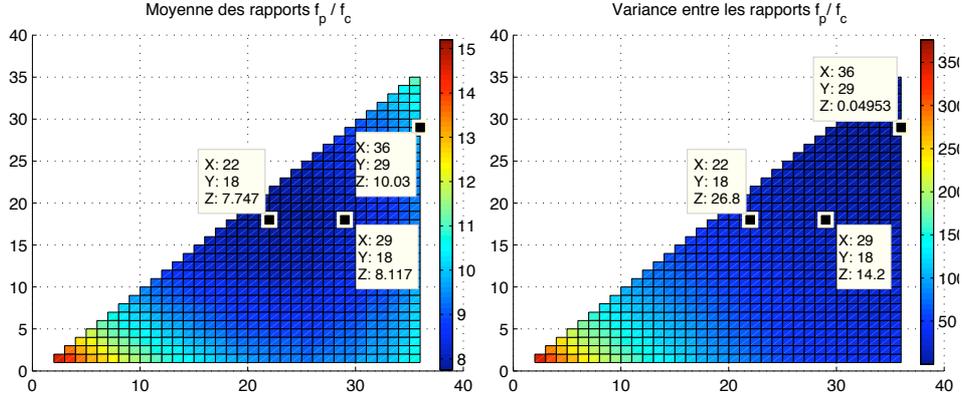


FIGURE 1.5 – Moyenne (gauche) et variance (droite) des trois rapports entre la première fréquence de résonance de chaque plaque et la corde plus grave accrochée à chaque plaque, en fonction de l'endroit des coupes 1 et 2 (resp. axes horizontale et verticale).

ses cordes associées. Pour ce faire, nous considérons pour chaque plaque  $i = 1, 2, 3$  le rapport  $\gamma_{pi}$  entre la fréquence de la corde la plus grave accrochée à la plaque :  $f_{cpi}$  et la fréquence de résonance du premier mode de chaque plaque (donnée par sa modélisation de poutre)  $f_{pi}$ . Afin d'éviter un "trou" dans le spectre pour ces cordes graves, ce rapport devrait être le plus petit possible. D'autre part, pour équilibrer les plaques entre eux, les rapports ne doivent pas trop différer entre eux. Nous étudions alors la moyenne et la variance de ces rapports en fonction de toute possible couple de coupes :

$$\mu = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \gamma_{pi},$$

$$\sigma = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (\gamma_{pi} - \mu)^2, \quad (1.36)$$

avec :

$$\gamma_{p1} = \frac{f_{p1}(c_1)}{f_{cp1}(c_1)}, \quad \gamma_{p2} = \frac{f_{p2}(c_1, c_2)}{f_{cp2}(c_2)}, \quad \gamma_{p3} = \frac{f_{p3}(c_2)}{f_{cp3}}.$$

Les fréquences des cordes  $f_{cpi}$  sont données dans l'annexe A. La figure 1.5 montre le résultat de ces grandeurs en fonction des endroits de coupe.

Les minimums des moyennes et variances sont respectivement trouvés pour des coupes en dessous des couples de cordes (18, 22) et (29, 36). Pour que les modes supérieurs des plaques ne soient pas trop éloignées il est préférable de prendre des parties de plaque dont la largeur n'est pas trop petite. Nous choisissons les coupes alors un peu plus espacées que la proposition de la moyenne, en allant dans la direction préférable par rapport à la variance : (18, 29). Pour ce choix, les endroits des coupes sur l'axe  $X$ , à partir du côté haut de la table sont : 0,524 m et 0,835 m et les fréquences des poutres

et cordes sont (en Hz) :  $f_{p1} = 1087$ ,  $f_{cp1} = 246$ ;  $f_{p2} = 545$ ,  $f_{cp2} = 82$ ;  $f_{p3} = 452$ ,  $f_{cp3} = 41$ .

Ensuite, dans la partie de la modélisation numérique de ce rapport, nous observons le résultat du calcul numérique afin de pouvoir nuancer le modèle de sorte que le spectre se recouvre le mieux possible. Pour ce faire, nous observons les courbes des puissances rayonnées par la table totale et par les plaques séparément. En considérant que le couplage des parties de table sont faibles, les puissances *mutuelles*, résultat du rayonnement couplés des plaques, est faible puisque les fréquences de résonance des parties indépendantes diffèrent.

Une autre indication plus globale est donnée par l'observation des allures des déformées modales et leur efficacité de rayonnement, donnée par l'équation (1.33), à la fréquence de résonance. Ceci permet de sélectionner les modes efficaces et choisir une coupe qui les conserve le plus.

#### 1.3.4 Caisse de résonance divisée

Parallèlement au fractionnement de la table d'harmonie, on peut diviser la caisse de résonance en utilisant des parois supplémentaires qui s'approchent à la table d'harmonie sans la toucher, pour obtenir plusieurs cavités indépendantes.

Comme mentionnée avant, on vise à construire des résonateurs de Helmholtz simples, avec un seul évent par cavité, pour créer une meilleure balance entre leur puissance rayonnée et celle venant de la surface supérieure de la table. Cet aspect ne fait alors pas partie de cette étude, mais étant donné que le choix des paramètres des résonateurs est approximativement indépendant de la table elle-même, la modélisation peut être traitée indépendamment.

Pour ce qui concerne l'apparence des trous pour la raison pratique du montage des cordes, si nécessaire, ils peuvent être construits de façon manipulable pour sauver l'aspect acoustique.

#### 1.3.5 Table avec un bombé initial

Pour de nombreux instruments à cordes, la table d'harmonie est préalablement formée à partir du collage des barres d'harmonie sous la plaque de bois. Cette étape a pour effet principal de rigidifier la table sans lui ajouter trop de masse [11]. Dans le cas de la harpe actuelle, cette barre ne donne pas un bombé initial comme il est le cas pour d'autres instruments comme le violon. De plus, afin de compenser l'immense tension statique des cordes, la barre est choisie assez grosse et rigide de sorte que sa présence est hors proportion pour ce qui concerne le comportement vibratoire de la table.

En utilisant une table bombé initialement, la tension des cordes est compen-

sée par la contrainte tangentielle à la table ce qui fait à la fois renforcer le comportement statique et descendre les fréquences propres par rapport au cas non précontraint. Par conséquent la barre peut être mincie et le nombre de modes par Hertz augmente, mais l'intérêt vient surtout des effets non linéaires qui entrent en jeu.

Dans ce travail, nous prenons pas en compte cette modification on peut se référer par exemple aux travaux de Mamou-Mani [11] qui a montré l'importance des charges statiques sur le comportement dynamique. Néanmoins, on profite de la conséquence que la barre peut être mincie, pour le fractionnement de la table d'harmonie dont l'effet est plus efficace quand les parties de plaque sont plus indépendantes.

## Chapitre 2

# Modélisation numérique

Ce chapitre contient une modélisation et traite un calcul numérique sur les modèles des tables d'harmonie de la harpe actuelle et modifiés selon les hypothèses que l'on vient de traiter. On abordera les étapes de la modélisation numérique : on présente la géométrie et les caractéristiques des modèles, on dit quelques mots sur la précontrainte dans la table d'harmonie par la charge des cordes, pour le calcul dynamique on parle des modes de vibration et de la modélisation numérique du rayonnement et des admittances d'entrée.

La réalisation concrète des calculs est effectuée par le logiciel *CAST3M*, un outil de calcul numérique développé au Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA) et dédié à la résolution des équations aux dérivées partielles par la technique des éléments finis.

La figure 2.1 montre un schéma avec les étapes globales de la modélisation numérique.

### 2.1 Géométrie et caractéristiques de la table d'harmonie

Le maillage du modèle numérique de la table d'harmonie est basé sur une harpe que l'on possède et sur laquelle on compte à réaliser les modifications. Il s'agit d'une petite harpe de la marque *CAMAC* qui possède principalement des caractéristiques d'une harpe de concert, excepté sa dimension et l'absence des pédales. Les précisions détaillées de la géométrie et des caractéristiques des cordes peuvent être trouvées dans l'annexe A.

Ce maillage est constitué de la plaque principale en forme de trapèze et de la barre d'harmonie, collée en dessous de la plaque. Le modèle a pris en compte précisément la géométrie de la table, en supposant pour la plaque une approche de type plaque de Love-Kirchoff avec une évolution affine de l'épaisseur et pour la barre, une modélisation volumique dont la coupe en trapèze évolue de manière affine, excepté à la fin.

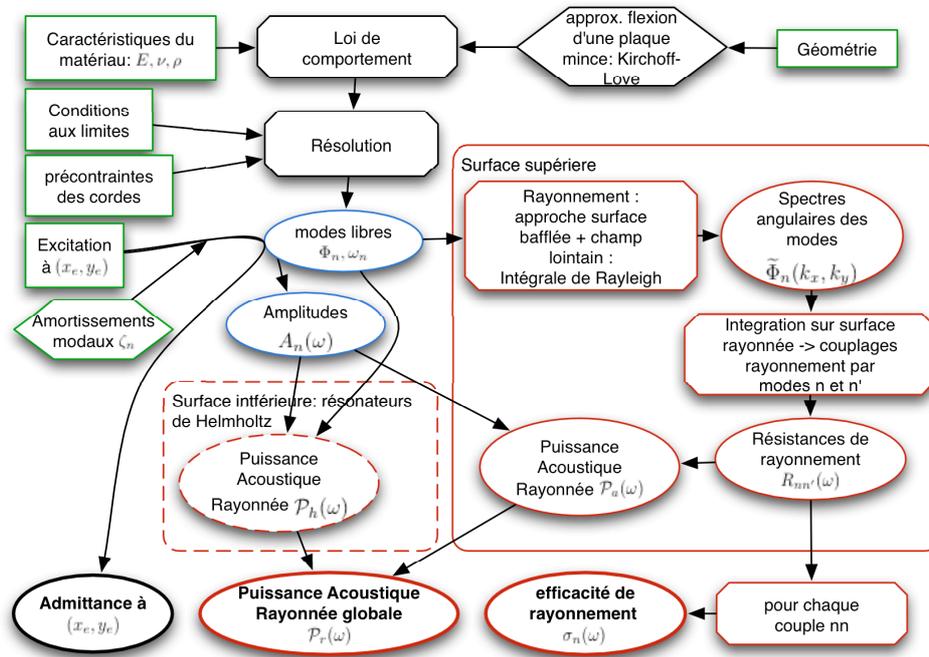


FIGURE 2.1 – Schéma global de la modélisation numérique de la table d'harmonie avec son rayonnement. (les parties entourées en rouge ont été réalisées lors de ce stage).

Toutefois, comme mentionné plus tôt, l'objectif des modèles n'est pas de reproduire parfaitement la réalité mais plutôt d'étudier les effets des hypothèses que l'on suppose aussi valables pour d'autres dimensions et nuances de géométrie.

Les propriétés mécaniques des bois, qui est un matériau orthotrope, ont été tirées de la littérature [12] et se trouvent dans le tableau 2.1.

Pour la table en composite, dépendant de la stratification et des proportions

$\rho$	$E_x$	$E_y$	$\nu_{xy}$	$G_{xy}$
$390 \text{ kg.m}^{-3}$	$10,9 \text{ GPa}$	$0,64 \text{ GPa}$	$0,44$	$0,862 \text{ GPa}$

TABLE 2.1 – Propriétés mécaniques de l'épicéa.

des couches dans le "sandwich" les propriétés mécaniques isotropes équivalentes peuvent varier. Ces propriétés dépendent uniquement des proportions et non de l'épaisseur totale. Nous les calculons pour le cas d'un "sandwich" de composite/epoxy avec une âme en mousse Rohacell (une combinaison qui a été utilisée pour la table d'harmonie d'une guitare) avec des proportions 1/6/1 et 1/10/1. Le résultat se trouve dans le tableau 2.2. Les peaux pour ces proportions ne sont pas d'épaisseur négligeable par rapport à la mousse

de sorte que le calcul de l'équivalence est basé sur une plaque stratifiée classique.

Dans la suite nous comparons les résultats des cas orthotrope et isotropes.

Proportion	$\rho$	$E$	$\nu$
1/6/1	$390kg.m^{-3}$	$21,5GPa$	0,35
1/10/1	$390kg.m^{-3}$	$15,0GPa$	0,35

TABLE 2.2 – Propriétés mécaniques isotropes équivalentes à un "sandwich" composite pour deux différents proportions d'épaisseur des couches.

La finesse des maillages est choisie par rapport au calcul vibratoire abordé dans la section 2.2. Les conditions aux bords sont considérés encastées, ce qui convient assez bien à la réalité où la plaque est solidement assemblée sur le bord épais de la caisse de résonance.

La géométrie de la table et de la barre des modèles modifiés sont identiques, mais pour le décentrement, la barre prend une position décentrée par une légère rotation dans un plan parallèle à la plaque et pour la situation fractionnée, la plaque est coupé en trois parties et tous les bords dans la largeur de la plaque ont des conditions aux limites libres (la barre est seulement libre aux cotés hauts et bas de la table entière).

## 2.2 Stabilisation du maillage

Pour que le calcul des modes de vibration soit correct, la première étape dans un calcul de structure consiste à raffiner le maillage. Cette étape de stabilisation consiste à réduire le pas de discrétisation (et ainsi augmenter le nombre d'éléments) jusqu'à ce que les grandeurs calculées deviennent indépendantes du pas de maillage. Comme il est le cas en général pour des systèmes discrets, la finesse détermine la fréquence la plus élevée qui peut être calculée. Ici il s'agit d'un domaine spatial, alors cette fréquence est représenté par le nombre d'onde du mode le plus élevé considéré.

Pour évaluer cette condition dans le cas d'une géométrie complexe, il est conventionnel, soit de vérifier si l'allure de la coupe de la déformée du mode le plus élevé est assez lisse, soit de vérifier si l'évolution de la fréquence de résonance de ce mode en fonction du logarithme des nombres d'éléments se stabilise. On a opté pour la dernière méthode dont le résultat est montré dans la figure 2.2. On atteint une finesse satisfaisante quand la courbe de la fréquence propre du mode le plus élevé ne descend pas plus que 0,5% par rapport au nombre d'éléments dans le maillage. Ceci est atteint à partir de 12722 éléments. L'application de ce critère sur le couple de points indiqué

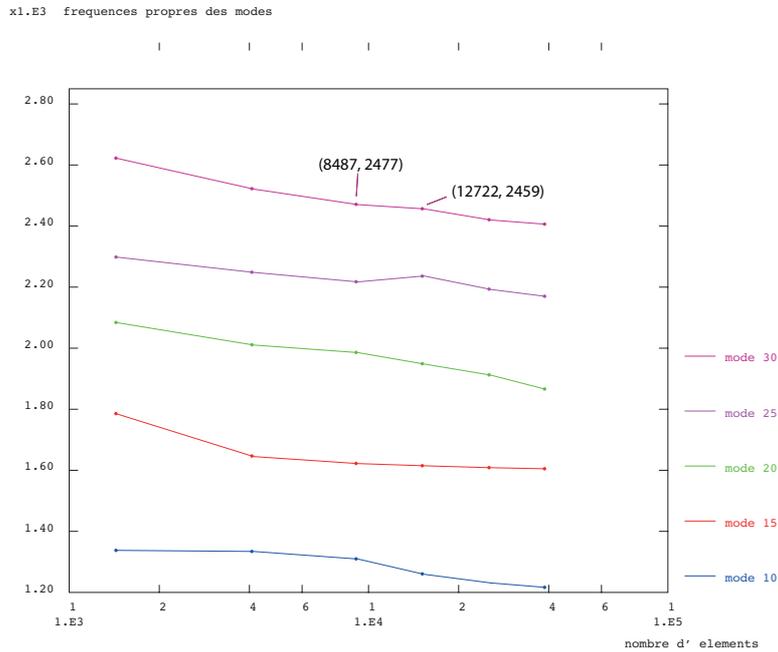


FIGURE 2.2 – Courbes de convergence d’une sélection de modes, en fonction du nombre d’éléments dans la modélisation numérique de la structure.

sur la figure donne :  $\frac{2459-2477}{12722-8487} \times 100 = 0,43\%$ . Ce nombre d’éléments correspond à un pas moyen de  $0,008 \text{ m}$  que nous avons utilisé dans tous les calculs.

## 2.3 Modes de vibration

Une fois le maillage effectué, on résout le problème discrétisé aux valeurs propres sur la table d’harmonie. Pour un système classique l’équation est donné par le principe fondamental de la dynamique :

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0, \quad (2.1)$$

où  $\mathbf{K}$  est la matrice des raideurs de la table,  $\mathbf{M}$  la matrice de masse. Pour la fréquence  $\omega$  on peut mettre chaque fréquence propre caractérisant les modes propres de vibration de la table.

Il est à noter que l’on ne prend pas en compte les amortissements. Pour la plaque, on admet les hypothèses de Kirchoff-Love qui reviennent à négliger le cisaillement dans la plaque.

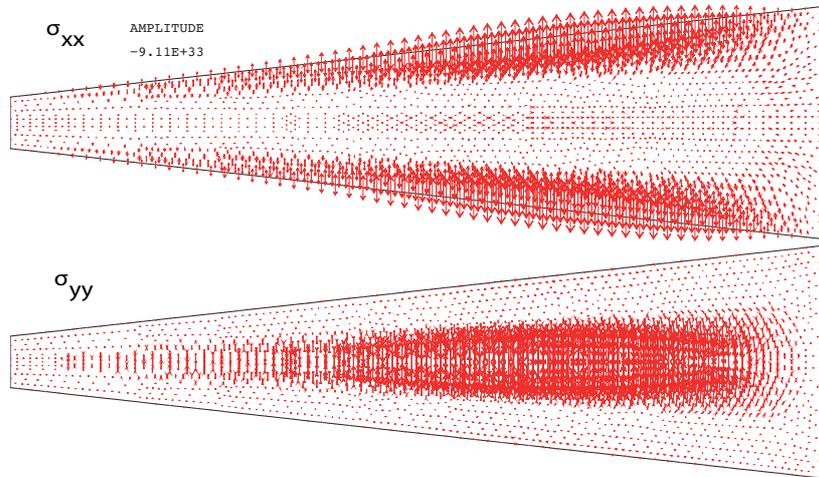


FIGURE 2.3 – Composantes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ , de la précontrainte présent dans la table due à la charge des cordes.

## 2.4 La précontrainte par la charge des cordes

On considère l'effet statique engendré sur la table par la tension des cordes. Cette charge, dont le total vaut  $2408\text{ N}$ , a pour effet d'ajouter une contrainte et un déplacement initial à la table de sorte que le comportement vibratoire se passe autour des moyennes déplacées de ces paramètres. L'équation (2.1) devient pour une situation précontrainte [11] :

$$\det((\mathbf{K} + \mathbf{K}_g) - \omega^2 \mathbf{M}) = 0, \quad (2.2)$$

où  $\mathbf{K}_g$  est la matrice de raideur géométrique des contraintes dues à la tension des cordes. Pour chaque modèle on calcule numériquement la raideur géométrique et on l'ajoute à la raideur de la table avant de commencer le calcul dynamique des modes de vibration. Bien que les précontraintes peuvent engendrer des non linéarités pour des déplacements importants [13], on ne les prend pas en compte dans notre étude.

La figure 2.3 montre les composantes  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ , dans le plan de la table, des contraintes calculées dans la peau inférieure de la table d'harmonie sous la charge des cordes. On remarque la présence d'une compression au milieu de la table. Les contraintes dans la peau supérieure présentent assez précisément un effet inverse tandis que les contraintes dans la peau moyenne (à la moitié de l'épaisseur de la plaque) sont très petites, ce qui confirme l'approximation des plaques minces en flexion.

Les fréquences propres calculées sur une table par l'équation classique et par l'équation prenant en compte les précontraintes, sont trouvées légèrement plus élevées pour le cas précontraint pour tous les modes, avec un maximum de  $2\text{ Hz}$  pour le mode 9. La faible influence est probablement due au fait que la table a une grande épaisseur comparée aux autres instruments à cordes.

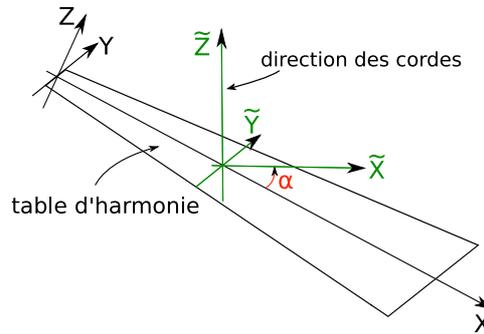


FIGURE 2.4 – Schéma montrant le passage de la base de la corde à la base de calcul liée à la table d'harmonie.

L'augmentation s'explique par le fait que la tension s'exprime comme une traction de la table [8].

## 2.5 Les réponses par une impulsion aux points d'accroche

**Remarque.** *Cette partie de la modélisation numérique a été entièrement réalisée lors de ce stage, ce qui a pris un poids considérable du travail de stage. Le code CAST3M est implémenté d'une façon indépendante de notre étude de sorte que les procédures créées sont applicables sur toute surface plane en vibration de flexion.*

On abordera la modélisation numérique des réponses d'impulsions qui nous intéressent dans cette étude : le rayonnement et les admittances d'entrée.

La souplesse élevée des cordes nous permet de négliger le transfert d'énergie par leur rotation aux points d'accroche. Nous évaluons ces réponses pour des impulsions de déplacement dans les directions longitudinale et transversales par rapport à la corde qui entraînent des courbes très similaires. Etant donné que le son produit vient principalement des ondes transversales dans la corde dont la composante parallèle à la table est également négligeable, on évalue uniquement des impulsions suivant la coordonnée transversale dans un plan perpendiculaire sur la table d'harmonie. La figure 2.4 montre un schéma du passage de la base liée à une corde à la base de calcul liée à la table d'harmonie. Les cordes font un angle  $\alpha$  avec la table d'harmonie, l'impulsion dans la base de la table d'harmonie déplacée au point d'accroche de la corde, se calcule par une rotation :

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

où les coordonnées  $(\tilde{x}, \tilde{z})$  représentent les coordonnées de l'impulsion dans la base de la corde et  $(x, z)$  sont les coordonnées dans la base de la table.

### 2.5.1 Rayonnement

Pour le calcul numérique de la puissance rayonnée par la vibration de la table d'harmonie on cherche une formulation numérique équivalente à (1.28). Pour chaque corde, les coefficients  $A_n(x'_e, y'_e, \omega)$  sont directement obtenus en mettant, pour chaque mode, le déplacement modal au point d'accroche de la corde dans l'expression (1.22) et en évaluant pour des fréquences  $\omega$  désirées. Les amortissements modaux  $\zeta_n$  sont choisies arbitrairement à 2% pour tous les modes, ce qui est une moyenne classique pour des plaques en bois.

Ensuite, les résistances de rayonnement sont obtenus en calculant l'intégrale (1.29) pour chaque couple  $(n, n')$ . Comme la surface de la plaque  $S'$  a une dimension finie  $(L_x \times L_y)$ , la contribution au rayonnement dans le domaine fréquentiel  $S$  est une série bidimensionnelle de valeurs espacées par des pas  $1/L_x$  et  $1/L_y$ . Outre cela, étant donné que l'on échantillonne la surface par des pas spatiaux  $\frac{L_x}{N_x}$  et  $\frac{L_y}{N_y}$ , le spectre angulaire se restreint par les fréquences d'échantillonnages spatiales :

$$k_{xe} = 2\pi \frac{N_x}{L_x}; \quad k_{ye} = 2\pi \frac{N_y}{L_y}. \quad (2.4)$$

La figure 1.2 montre également l'effet de l'échantillonnage d'un mode d'une surface bornée  $S'$  qui résulte en une restriction du domaine des nombres d'ondes par une surface de dimension finie  $S$  discrète.

On peut écrire les spectres comme :

$$\tilde{\Phi}_n(k_{xe} \frac{n_x}{N_x}, k_{ye} \frac{n_y}{N_y}) = \tilde{\Phi}_n(2\pi \frac{n_x}{L_x}, 2\pi \frac{n_y}{L_y}) = \tilde{\Phi}_n[n_x, n_y], \quad (2.5)$$

avec les indices  $n_{x,y}$  allant de  $-N_{x,y}/2$  à  $N_{x,y}/2$ . On utilise la notation par crochets pour désigner une série discrète.

En utilisant la formulation discrète (2.5), les bornes d'intégration indiquées dans (1.26) se traduisent alors comme :

$$M_y(k) = \pm \left[ \frac{L_y k}{2\pi} \right]; \quad M_x(k) = \pm \left[ \frac{L_x \sqrt{k^2 - k_y^2}}{2\pi} \right], \quad (2.6)$$

où l'opérateur  $[ ]$  désigne le nombre entier le plus proche.

En approchant l'intégration par la méthode des rectangles, la forme discrète de la résistance de rayonnement s'écrit alors :

$$R_{nn'}(\omega) = \frac{\omega \rho}{8\pi^2} \frac{1}{4M_x M_y} \sum_{n_y=-M_y(k)}^{M_y(k)} \sum_{n_x=-M_x(k, k_y)}^{M_x(k, k_y)} \frac{\tilde{\Phi}_n^*[n_x, n_y] \tilde{\Phi}_{n'}[n_x, n_y]}{\sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}}. \quad (2.7)$$

La relation entre la fréquence d'échantillonnage temporelle et spatiale est imposée par la situation extrême dans l'intégration (1.29). Comme le cercle d'intégration  $S_r$  est défini jusqu'au nombre d'onde  $k$ , on trouve la relation  $k_e = k_{xe}$ , que l'on interprète plutôt dans le sens inverse puisque l'on cherche à trouver des solutions jusqu'à un seuil fréquentiel temporel connu. Pour une fréquence de Nyquist dans l'air  $f_N = \frac{ck_e}{4\pi}$ , le nombre d'échantillons à prendre dans la direction  $X$  vaut :

$$N_x = L_x \frac{2f_N}{c}. \quad (2.8)$$

Ce qui, pour la table d'harmonie avec une longueur de 1,18 m et largeur maximale de 0,34 m, revient respectivement à des nombres  $N_x = 120$  et  $N_y = 38$ .

Le calcul des résistances de rayonnement comprend également le calcul des efficacités de rayonnement que l'on obtient directement par la formule (1.33).

La discrétisation traitée ci-dessus est une démonstration illustrative. En réalité, le maillage de la surface  $S'$  n'est pas rectangulaire et régulier alors les pas spatiaux entre les noeuds ne sont pas constants. Ces légères différences engendrent des fréquences d'échantillonnages non explicitement déterminées de sorte que la fréquence maximale présente est seulement garantie pour une fréquence de Nyquist basée sur la pas le plus grand dans le maillage, ce qui la fait légèrement descendre.

Aussi l'intégrale dans le calcul des résistances de rayonnement est approchée par la méthode des trapèzes dans nos calculs (intégrée dans les procédures prédéfinies de *CAST3M*) et non par la méthode des rectangles, appliquée dans (2.7) pour des raisons illustratives.

### 2.5.2 Admittances d'entrée

Les admittances d'entrée aux endroits des cordes sont directement obtenus par la fonction de transfert donné par l'équation (1.34). La réponse est ensuite exprimée pour la direction transversale par rapport à la corde en utilisant une rotation par l'opération inverse de (2.3).

## 2.6 Résultats de l'étude comparative des modèles

Dans cette section nous présentons les résultats par le calcul numérique. Nous traitons les modifications dans l'ordre présenté auparavant. Après chaque comparaison nous tirons des conclusions pour ensuite garder le modèle préféré pour les comparaisons qui suivent. Nous n'étudions pas les possibles interactions entre les conséquences des modifications.

Dans l'annexe C nous présentons, pour chaque modèle modifié, les déformées

des huit premiers modes et les courbes de puissance et d'admittance. On affiche les racines des courbes des puissances pour avoir une grandeur proportionnelle à une pression. L'échelle logarithmique permet alors d'interpréter ces courbes comme des décibels classiques. Ensemble avec les graphiques des déformées modales on affiche sa fréquence propre et son efficacité à cette fréquence. Vu leur dépendance fréquentielle, ces efficacités ne sont pas comparables pour des modes dont les fréquences propres sont trop éloignées. Il est à noter que dû à un manque dans le code, les efficacités, et alors également les puissances, ne représentent pas des valeurs absolument liées aux grandeurs, ce qui ne pose pas de problèmes dans cette étude comparative. De manière globale nous évaluons si les modifications engendrent des puissances et des admittances plus plates et des puissances plus élevées. On traite uniquement la partie réelle des admittances, la partie imaginaire, ayant bien entendu aussi de l'importance, a globalement les mêmes conséquences que la partie réelle.

Nous présentons également les moyennes et les variances de ces courbes à partir de  $200Hz$  pour éviter la partie du spectre non utilisée (les fréquences propres des modes sont tous bien supérieures). De plus, ces basses fréquences seront représentées par l'apport de la caisse de résonance. En effet, la moyenne donne l'amplitude globale et est donc un bon indice pour vérifier si la puissance a augmentée. Outre cela, la variance convient à son tour bien comme indice d'égalité du spectre.

Afin de gérer les nombreuses données, nous faisons une sélection limitée de cordes. Les numéros de cordes arbitrairement choisies sont : 1, 9, 17, 24, 31, 36, où 1 est la corde la plus aiguë, accrochée en haut de la table, et 36 la plus grave.

### 2.6.1 Table en matériau composite

Premièrement, nous comparons les résultats d'une table d'harmonie en bois et des modélisations isotropes correspondant à des tables en composite d'un "sandwich" de deux possibles proportions : "1/10/1" et "1/6/1". Les résultats se trouvent dans la section C.1 de l'annexe.

En résumé nous présentons ici, dans le tableau 2.5, les moyennes et les variances des puissances et des admittances.

En observant les spectres de puissance on remarque une augmentation globale des fréquences propres pour les matériaux plus raides. Ceci à pour conséquence que les modes deviennent globalement plus efficaces. Bien que l'on crée aussi un trou dans les basses fréquences, on compte sur la caisse de résonance pour compléter cette manque. C'est pourquoi que les moyennes des cordes plus graves descendent et les aiguës montent, excepté la corde 1. En observant son spectre on suppose que ce point d'excitation excite plutôt des modes qui ne sont pas compris dans le domaine spectral.

Les moyennes et variances des admittances semblent plutôt positives pour le

Corde	1	9	17	24	31	36
Puissance (ortho - iso 15GPa - iso 20 Gpa)						
$\mu (\times 10^2)$	3,28	1,18	0,48	0,32	0,84	1,60
	4,71	2,13	1,38	0,60	0,55	0,55
	1,89	2,71	1,70	0,70	0,73	0,74
$\sigma (\times 10)$	1,07	0,14	0,02	0,01	0,07	0,26
	2,21	0,45	0,19	0,04	0,03	0,03
	0,36	0,73	0,29	0,05	0,05	0,05
Admittance (ortho - iso 15GPa - iso 20 Gpa)						
$\mu (\times 10^5)$	38,45	15,10	7,95	5,31	4,53	6,68
	21,00	10,09	5,66	3,64	2,43	2,75
	6,56	8,56	4,82	3,27	2,21	2,67
$\sigma (\times 10^7)$	147,093	22,681	6,284	2,804	2,046	4,437
	43,872	10,125	3,184	1,315	0,590	0,752
	4,276	7,285	2,308	1,066	0,484	0,712

TABLE 2.3 – Moyennes et variances des courbes de la puissance rayonnée et de l’admittance pour une table d’harmonie en bois et deux en composite.

matériau isotrope raide. Néanmoins on suppose que le calcul de la variance de cette grandeur n’est possiblement pas cohérent car cette descente n’améliore pas forcément la variation spectrale ressentie par la corde.

En observant les allures des déformées modales, on constate que des faibles différences de forme. Bien évidemment, les tables isotropes ont les mêmes déformées. Les valeurs d’efficacité confirment l’augmentation suivant une raideur montante.

Le choix d’un matériau dépend alors fortement des potentiels des autres modifications comme la caisse de résonance. Comme nous ne prenons pas en compte cet élément, nous prenons, pour la suite, la table composite dont le module d’Young équivalent vaut 15 *GPa*.

## 2.6.2 Barre d’harmonie décentrée

Nous évaluons des tables d’harmonie avec une barre à sa position conventionnelle au centre, et des tables avec des légères décentrement. Nous avons choisis arbitrairement des décentrement de 20 % et 35 % par rapport au bord où la table est encastrée. Les résultats se trouvent dans la section C.2 de l’annexe avec les graphiques. Nous présentons dans le tableau 2.5 les moyennes et variances suivant le spectre des grandeurs mentionnées.

Les modes de vibration changent seulement légèrement de forme, mais on constate une augmentation intéressante des efficacités de rayonnement, surtout pour les modes graves qui ont un nombre pair de ventres et dont le rayonnement s’annule en grande partie. En considérant, par exemple, le mode 2, dont l’efficacité vaut seulement  $7,7 \cdot 10^{-3}$  dans le cas centré, il monte jusqu’à  $3,5 \cdot 10^{-2}$  pour le cas le plus décentré.

En observant les spectres de la puissance rayonnée on constate que la différence est faible mais partout positive pour ce qui concerne la puissance

Corde	1	9	17	24	31	36
Puissance (centré - décentrée 20% - décentrée 35%)						
$\mu (\times 10^2)$	4,71	2,13	1,38	0,60	0,55	0,55
	4,60	2,34	1,60	0,68	0,68	0,66
	4,53	2,81	1,90	0,93	0,97	0,82
$\sigma (\times 10^0)$	22,11	4,53	1,91	0,35	0,30	0,30
	21,03	5,43	2,54	0,46	0,46	0,43
	20,39	7,85	3,59	0,85	0,94	0,68
Admittance (centré - décentrée 20% - décentrée 35%)						
$\mu (\times 10^5)$	21,00	10,09	5,66	3,64	2,43	2,75
	23,09	10,94	6,44	4,12	2,93	3,04
	23,36	12,21	7,49	5,25	4,09	3,32
$\sigma (\times 10^7)$	43,872	10,125	3,184	1,315	0,590	0,752
	53,064	11,905	4,133	1,692	0,854	0,921
	54,290	14,830	5,583	2,738	1,663	1,097

TABLE 2.4 – Moyennes et variances des courbes de la puissance rayonnée et de l’admittance pour une table d’harmonie avec une barre centrée, et décentrée de 20 % et 35 %.

globale : elle augmente le plus en décentre la barre. Les moyennes donnent une idée plus précise : surtout les cordes graves gagnent en puissance, ce qui est cohérent avec le modèle car le décentrement est une rotation dont l’axe se trouve plus proche au coté haut de la table et le décentrement à ces endroits est alors plus faible.

Le fait que l’admittance change proportionnellement avec la puissance explique que l’on ne libère pas des énergies perdues. En choisissant un décentrement important, le son sera plus fort, mais aussi moins long...

En conclusion on peut dire que cette modification est un paramètre intéressant qui permet d’intervenir plus ou moins dans le taux du passage d’énergie dont surtout la partie haut fréquente.

### 2.6.3 Table d’harmonie fractionnée

Nous évaluons un seul cas fractionné correspondant à des coupes en dessous des cordes 18 et 29. Des calculs précédentes montraient une trop légère influence par rapport à une table avec des bords libres en haut et en bas, mais sans être fractionnée. Ceci s’explique par le fait que la barre d’harmonie joue un rôle important dans le comportement vibratoire de l’ensemble. C’est pourquoi nous avons dans cette comparaison réduit la barre par deux tiers de son épaisseur. Ce choix est justifié par le fait que les modifications comme le matériau composite et le bombé initial diminuent la nécessité statique de l’épaisseur.

Premièrement nous étudions le changement entre une table encastrée, une table libérée en haut et en bas et la table fractionnée. Ensuite nous regardons le cas fractionné de plus près en comparant son spectre de puissance avec les spectres de puissance venant de chaque partie de la table. Les résultats se trouvent dans la section C.3, et les moyennes et variances sont dans le

tableau 2.5.

Les modes du cas libre en haut et en bas de la table diffèrent bien évi-

Corde	1	9	17	24	31	36
Puissance (encastrée - b+h libre - fractionnée)						
$\mu (\times 10^2)$	5,31	4,60	1,99	1,27	1,39	1,00
	7,40	4,49	2,32	1,50	1,08	0,97
	5,58	4,04	2,14	1,27	0,88	0,92
$\sigma (\times 10^0)$	28,06	21,07	3,94	1,60	1,93	0,99
	54,54	20,10	5,38	2,24	1,16	0,94
	30,98	16,27	4,56	1,61	0,77	0,84
Admittance (encastrée - b+h libre - fractionnée)						
$\mu (\times 10^5)$	21,97	17,30	10,55	6,83	4,93	3,89
	26,02	18,10	11,05	7,26	5,18	4,24
	21,79	17,30	11,26	6,77	4,77	4,13
$\sigma (\times 10^7)$	48,017	29,789	11,083	4,644	2,419	1,503
	67,364	32,606	12,151	5,248	2,666	1,788
	47,244	29,784	12,609	4,563	2,266	1,694

TABLE 2.5 – Moyennes et variances des courbes de la puissance rayonnée et de l'admittance pour une table d'harmonie encastrée, libre en haut et en bas, et fractionnée avec des libertées dans tous les bords dans la largeur.

demment avec le cas encastré. Néanmoins, les spectres des puissances et des admittances se ressemblent beaucoup, surtout en basse fréquence, à part l'exception de la corde 36 qui se trouve évidemment proche du bord libre. En dessus de  $1,5 \text{ kHz}$  on remarque un effet intéressant qui se manifeste pour toutes les cordes : les "trous" dans le spectre du cas encastré sont bien moins présents dans les cas libre et fractionné, ceci est sûrement aussi la raison que les variances deviennent plus petites pour ces cas. Bien que l'on ait pris une barre bien plus mince, la liaison encastrée à la barre et encastrée au bords longs fait en sorte que les parties de plaque n'arrivent pas à se libérer beaucoup. Cependant on peut observer quelques indices prometteurs : bien qu'il s'agit des petites différences, elles sont toutes positives. Les puissances en haute fréquence sont toutes plus plates que le cas simplement libéré sans coupes, ceci provient sûrement de l'augmentation de la densité spectrale que l'on avait supposé. De plus, ceci ne se passe pas avec des notables différences pour l'admittance. Cette modification semble alors de libérer une partie de l'énergie perdue auparavant !

Les courbes de puissance des parties de plaque individuelles montrent que les parties sont toujours bien liées. On ne peut pas en dire beaucoup plus, aussi parce que le rayonnement couplé (du à l'interaction des rayonnements de chaque partie) sont assez important, il est difficile alors de prendre des décisions plus précises.

# Conclusions, recommandations et perspectives

Cet étude comparative a permis de montrer des premiers indices des capacités de quelques modifications mécaniques à la harpe. En posant comme objectif d'augmenter et rectifier la puissance sonore on a constaté qu'aussi bien une table d'harmonie en un matériau plus raide comme le matériau composite, qu'une table dont la barre d'harmonie a été décentrée par une légère rotation ou qu'une table dont les côtés hauts et bas sont libérés ou dont la plaque a été fractionnée dans la largeur, sont des modifications qui comportent des potentiels intéressants pour cet objectif.

L'absence de la modélisation de quelques aspects comme l'approche grossière de l'amortissement nous empêche de tirer des conclusions plus précises, mais nous tenons et nous avons confiance à la pertinence de la simplicité pratiquée dans cette étude. Pour des éventuelles investigations plus spécifiques on peut, par exemple, se référer aux travaux de B. David [9] pour une modélisation plus précise de l'amortissement.

Dans ce rapport nous avons indiqué plusieurs possibles pistes qui peuvent être étudiées plus en détail. On peut envisager de modéliser le matériau composite par un modèle plus réaliste afin de pouvoir nuancer le choix. Il y a de l'intérêt aussi de prendre en compte la caisse de résonance pour évaluer ses capacités, ce qui, comme on a constaté, donnera une information importante pour le choix du matériau par exemple. Afin de pouvoir réduire l'épaisseur de la barre et de rendre les parties fractionnées de la table plus indépendantes, il faudra également prendre en compte le bombé initial.

Comme il a été prévu, nous souhaitons concrètement réaliser l'instrument modifié pour pouvoir vérifier les premières expériences trouvées dans ce travail à la réalité, et pour pouvoir se réjouir d'un son plus beau.

# Bibliographie

- [1] Harpe. (8 Juin 2010). Dans Wikipedia, l'encyclopédie libre. Retiré le 18 Juin 2010, de   
<http://fr.wikipedia.org/wiki/Harpe>
- [2] J-L. Le Carrou, "Vibro-acoustique de la harpe de concert (Vibro-acoustics of the concert harp)", *Ph.D. thesis*, Université du Maine, Le Mans, France, 2006.
- [3] F. Gautier, N. Dauchez, "Acoustic Intensity Measurement of the Sound Field Radiated by a Concert Harp", *Applied Acoustics*, Vol. 65, pp. 1221-1231, 2004.
- [4] A. J. Bell, "The helmholtz resonance and higher air modes of the harp soundbox", *J. Catgut Acoust. Soc.*, 3(3) :2-8, 1997.
- [5] C. Valette, *Cours de Vibrations et Acoustique au DEA ATIAM*, Chapitre 2, 2007.
- [6] Y. Y. YU, *Vibrations of elastic plates*, Springer, New York. 1996.
- [7] K. F. Graff, *Wave Motion in Elastic Solids*, Dover Publications, New York, 1991.
- [8] A. Chaigne, J. Kergomard, *Acoustique des instruments de musique*, Belin, Paris, France, 2008.
- [9] B. David, "Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée", *Ph.D. thesis*, Université Paris VI, 1999.
- [10] C. Preissner and T. J. Royston, "Vibro-Acoustic Properties of a Composite Harp Soundboard", in *Proceedings of 136th Meeting of the Acoustical Society of America*, Norfolk, VA, 1998.
- [11] A. Mamou-Mani, "Précontraintes et vibration des tables d'harmonie", *Ph.D. thesis*, Université Paris VI, 2007.
- [12] D. Guitard, *Mécanique du matériau bois et composites*, Cépaduès éditions, Toulouse, France, 1987.
- [13] A. Mamou-Mani, J. Frelat, C. Besnainou, "Numerical simulation of a piano soundboard under downbearing", *Journal of the Acoustical Society of America*, 123(4) : p. 2401-2406, 2008.

## Annexe A

# Annotations relatives au modèle de harpe utilisé

### A.1 La géométrie

La figure A.1 montre les détails de la géométrie des deux éléments de la table d'harmonie : la plaque et la barre. Tous les géométries évoluent de façon affine.

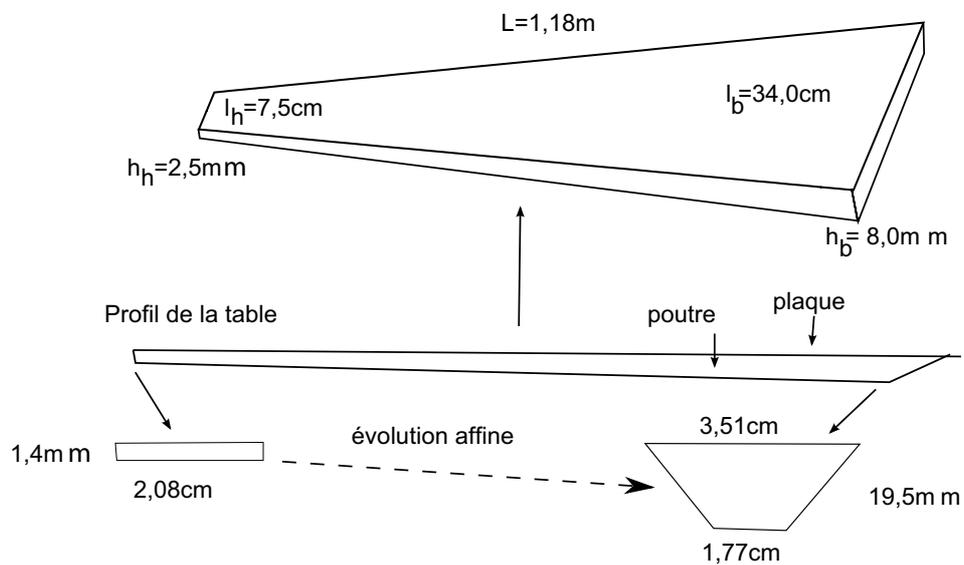


FIGURE A.1 – Géométrie des éléments de la table d'harmonie de la harpe : la plaque et la poutre

## A.2 Les cordes

Les fréquences, tensions (pour des cordes en nylon) et distances par rapport au bord en haut (la coordonnée  $x$  dans la base de la table d'harmonie dans la figure 2.4) par chaque corde sont présentées dans le tableau A.1. L'angle  $\alpha$  dans cette figure vaut  $55,1^\circ$ .

No. corde	X (m)	Freq (Hz)	Tension (N)
1	0,093	1318	16,9
2	0,118	1174	19,1
3	0,143	1046	19,9
4	0,168	987	22,9
5	0,193	880	23,9
6	0,218	784	26,2
7	0,243	698	27,4
8	0,268	659	31,2
9	0,293	587	33,3
10	0,318	523	35,0
11	0,343	493	40,1
12	0,368	440	43,3
13	0,393	392	46,5
14	0,418	350	50,5
15	0,443	329	58,0
16	0,468	293	57,0
17	0,496	261	68,9
18	0,524	246	79,7
19	0,552	220	85,5
20	0,58	196	92,5
21	0,608	175	96,8
22	0,636	164	105,2
23	0,664	146	106,3
24	0,692	130	105,7
25	0,72	123	110,3
26	0,748	110	108,1
27	0,777	98	104,4
28	0,806	87	98,8
29	0,835	82	100,4
30	0,864	73	99,3
31	0,893	65	93,4
32	0,922	61	92,4
33	0,951	55	84,9
34	0,980	49	79,1
35	1,009	43	72,7
36	1,038	41	72,7

TABLE A.1 – Annotations relatives aux cordes de la harpe

## Annexe B

# Comparaison entre la pression en face et la puissance rayonnée

Nous allons montrer le rapport entre la pression en champ lointain dans le point en face, c'est à dire sur l'axe perpendiculaire au milieu d'une plaque rayonnante et la grandeur globale : la puissance acoustique rayonnée par la plaque en champ lointain.

L'équation (1.21), exprimant la pression rayonnée en champ lointain, montre pour un mode  $n$ , l'existence d'une *coïncidence spatiale* et une *coïncidence fréquentielle*, respectivement déterminées par  $\tilde{\Phi}_n(k_x, k_y)$  et  $A_n(x'_e, y'_e, \omega)$ . Si les deux coïncidences s'appliquent, le rayonnement connaît une directivité prononcée. Dans le cas des plaques en vibration, cette rencontre des coïncidences est directement lié aux propriétés mécaniques de la plaque.

La longueur d'onde dans une plaque de dimension finie est fixée par ses modes de vibration. A une fréquence de résonance, c'est à dire à une coïncidence fréquentielle, cette longueur correspond à la longueur dans une plaque infinie dont les capacités de rayonnement sont données par la fréquence critique, donné par l'équation (1.13). Les modes dont les fréquences de résonance qui se trouvent en dessous de la fréquence critique connaissent alors une faible directivité. Le module de la pression rayonnée dans le point mentionnée doit alors être proportionnelle à la racine de la puissance (pour correspondre à une pression) en dessous de la fréquence critique, ce qui est un fait qui simplifie beaucoup les pensées et les calculs ! En considérant l'équation (1.21), dans ce point, les composantes  $k_x$  et  $k_z$  du vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  sont nulles de sorte que la pression dans ce point correspond une simple intégrale sur le profil de l'accélération de la surface. En résumé en peut écrire :

$$\sqrt{\langle \mathcal{P}_a(\omega < \omega_c) \rangle} \sim |P(k_x = 0, k_y = 0, \omega)| \sim \frac{-\omega}{r} \int_{S'} W(x', y', \omega) dx' dy'. \quad (\text{B.1})$$

On vérifie numériquement ce fait sur le rayonnement par la table de la harpe. La figure B.1 montre les courbes normalisées du module de la pression et

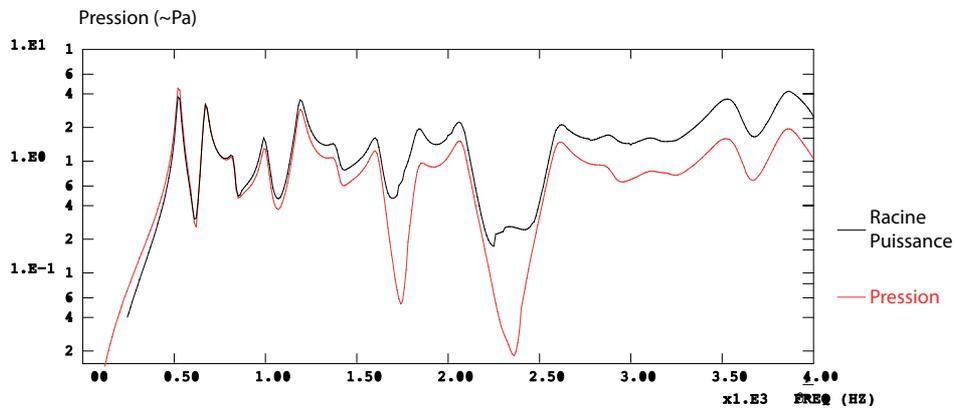


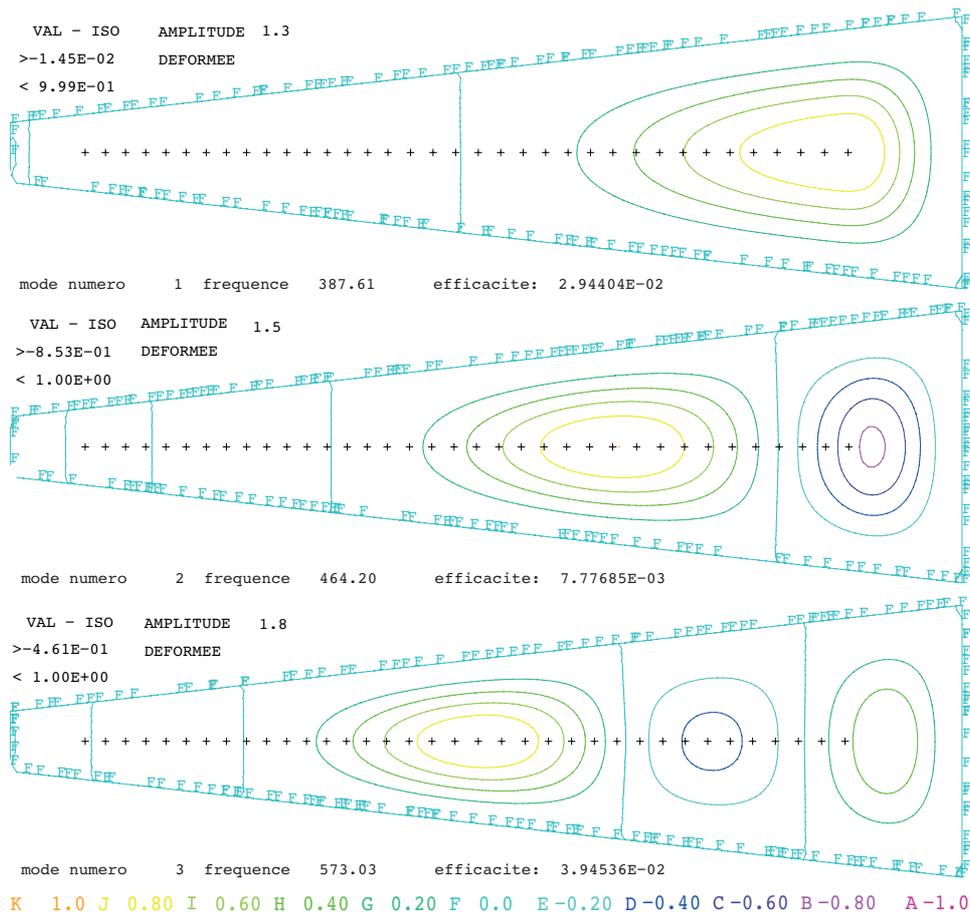
FIGURE B.1 – Relation entre le module de la pression (en rouge) et la racine de la puissance (en noir) rayonnée en champ lointain par une table d’harmonie isotrope dont la fréquence critique minimale vaut  $f_c = 1,6 \text{ kHz}$  (unités non normalisées).

de la racine de la puissance rayonnée par une table isotrope. On constate effectivement une relation proportionnelle jusqu’à  $1,6 \text{ kHz}$ , correspondant à la fréquence critique minimale dans cette plaque. Il est à noter qu’au-delà de cette fréquence, les différences se manifestent surtout par des moins fortes anti-résonances de la puissance (pour cet exemple) et le logarithme de la puissance a l’air de monter linéairement avec la fréquence par rapport à la pression.

# Annexe C

## Graphiques

### C.1 Tables en bois et en composite



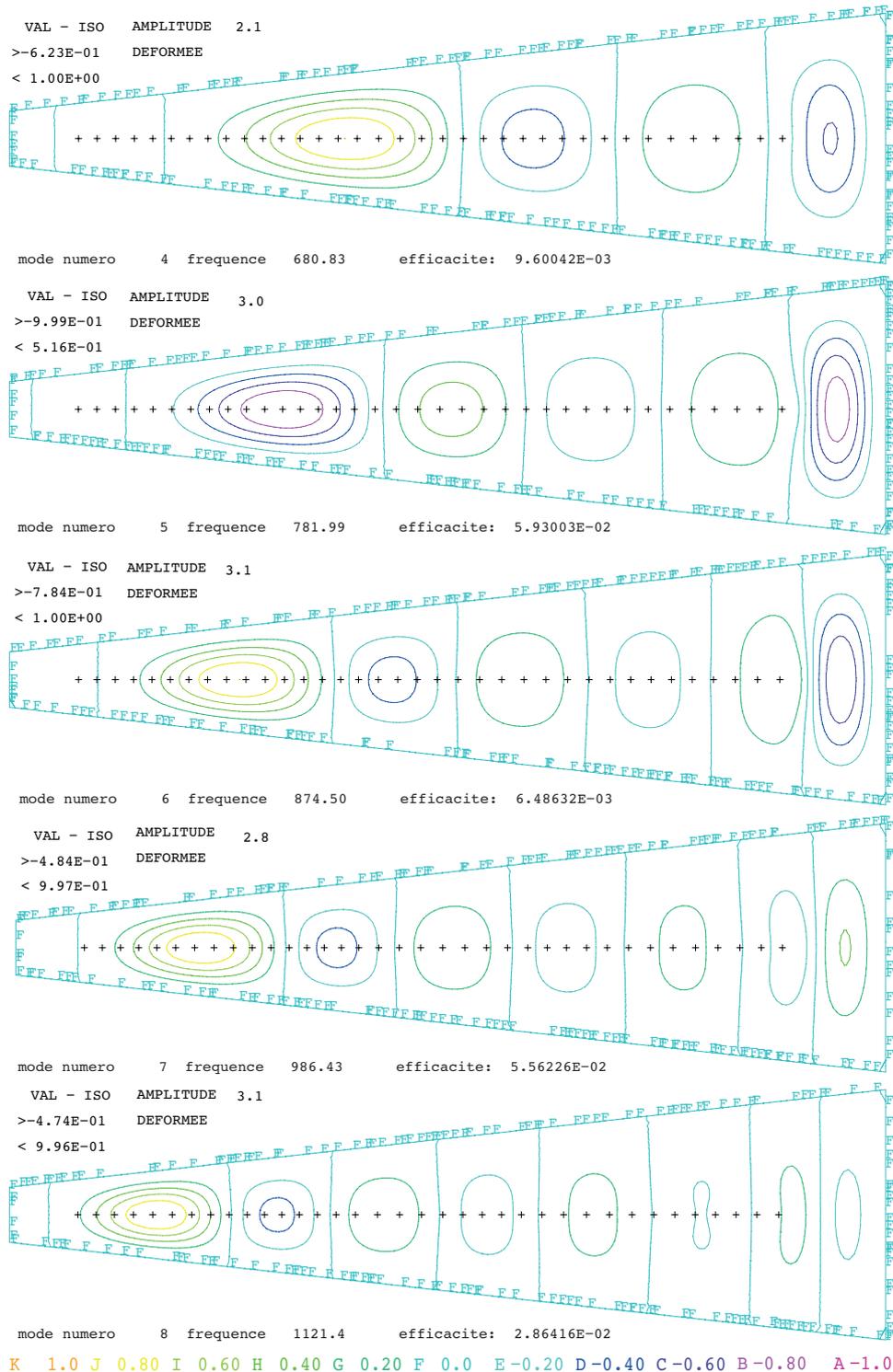
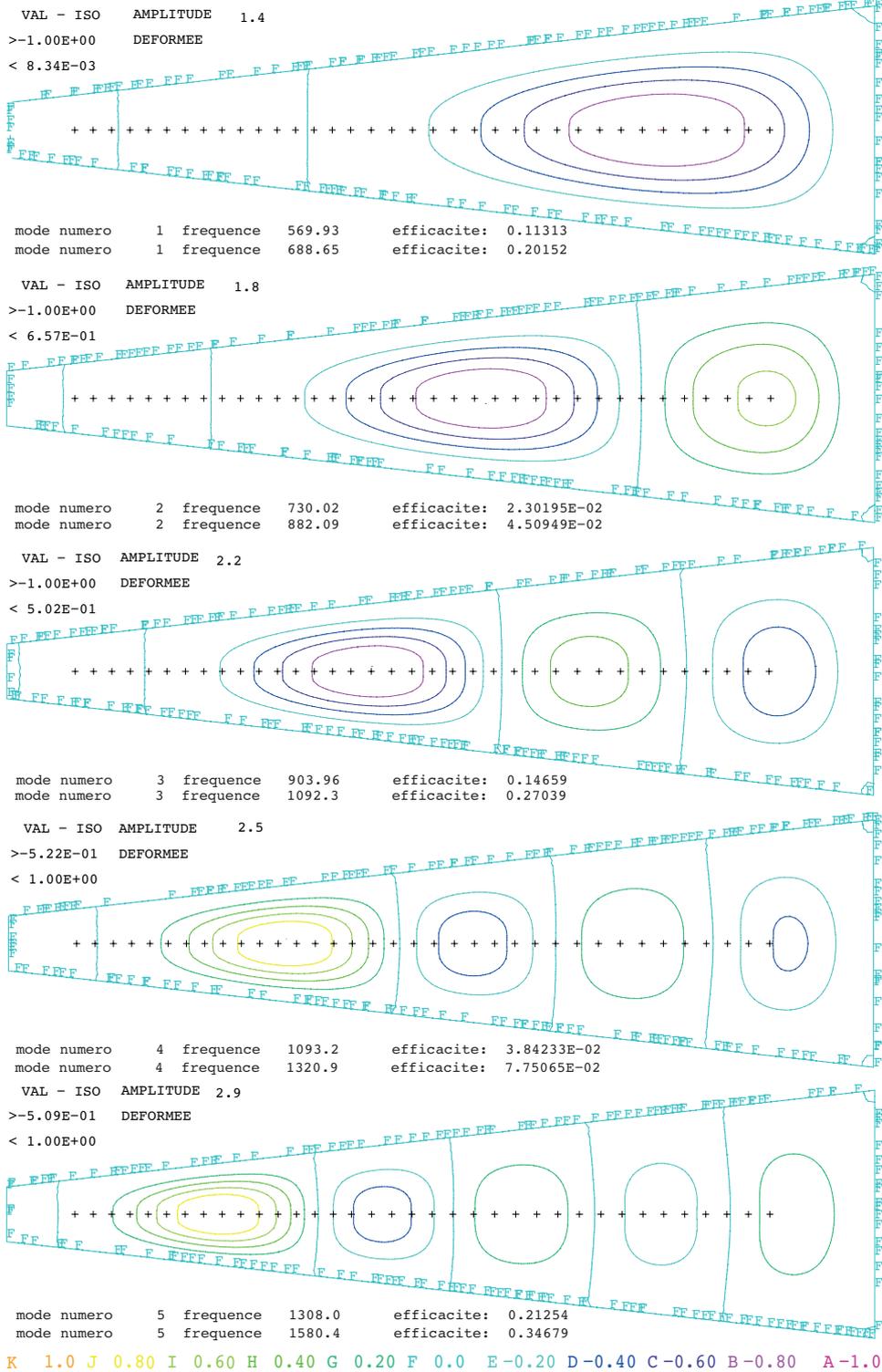


FIGURE C.1 – Déformées des huit premiers modes de la table orthotrope.



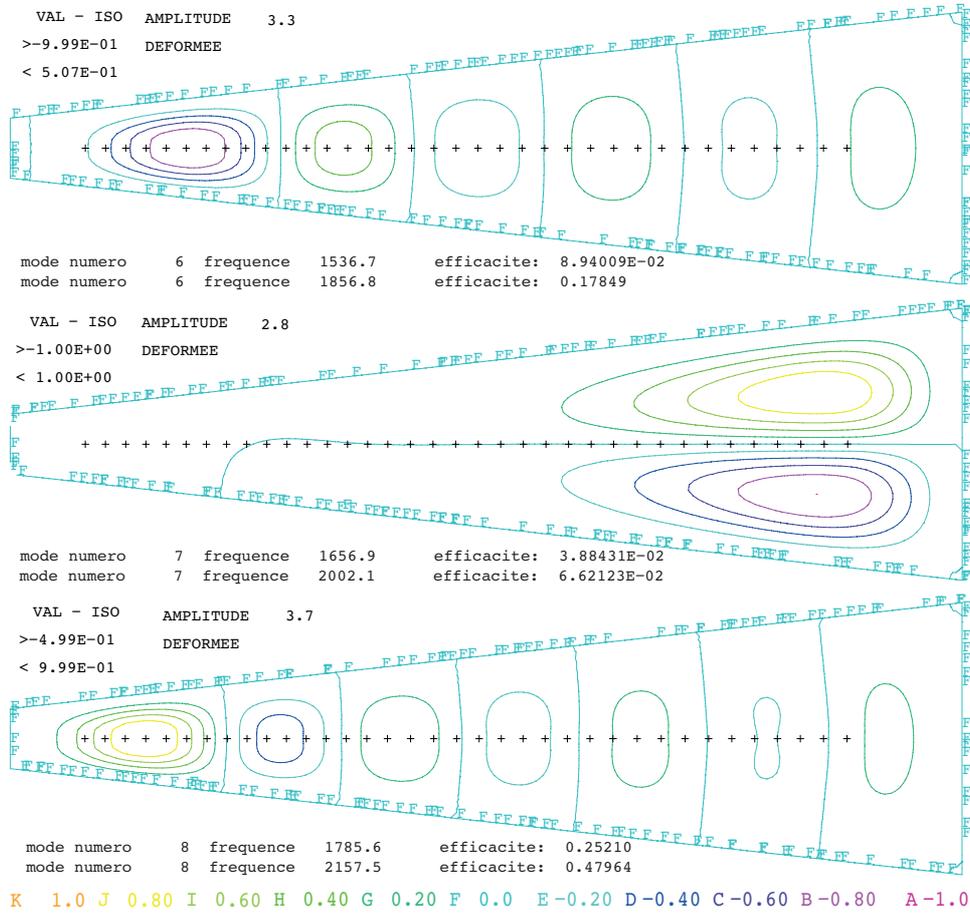


FIGURE C.2 – Déformées des huit premiers modes des tables isotropes (en dessous de chaque mode : la première fréquence propre et efficacité correspond au matériau composite "sandwich" avec une proportion de 1/10/1, les deuxièmes valeurs correspondent au cas d'une proportion 1/6/1.

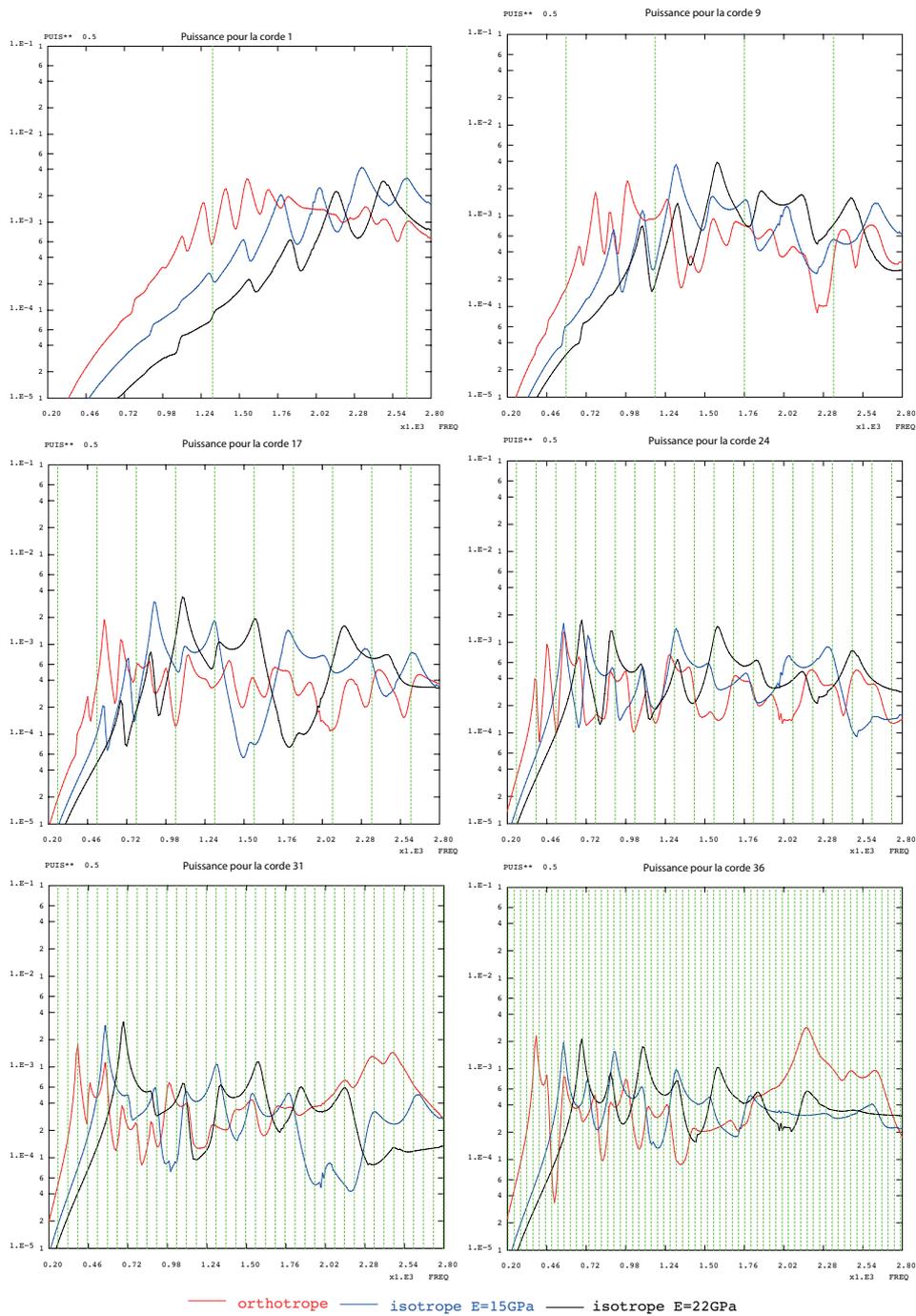


FIGURE C.3 – Courbes de la racine de la puissance rayonnée, comparant les cas d'une table orthotrope (bois) et isotropes (équivalant aux composites "sandwich" de proportion "1/10/1" et "1/6/1"). Les traits en vert marquent les harmoniques de la corde concernée.

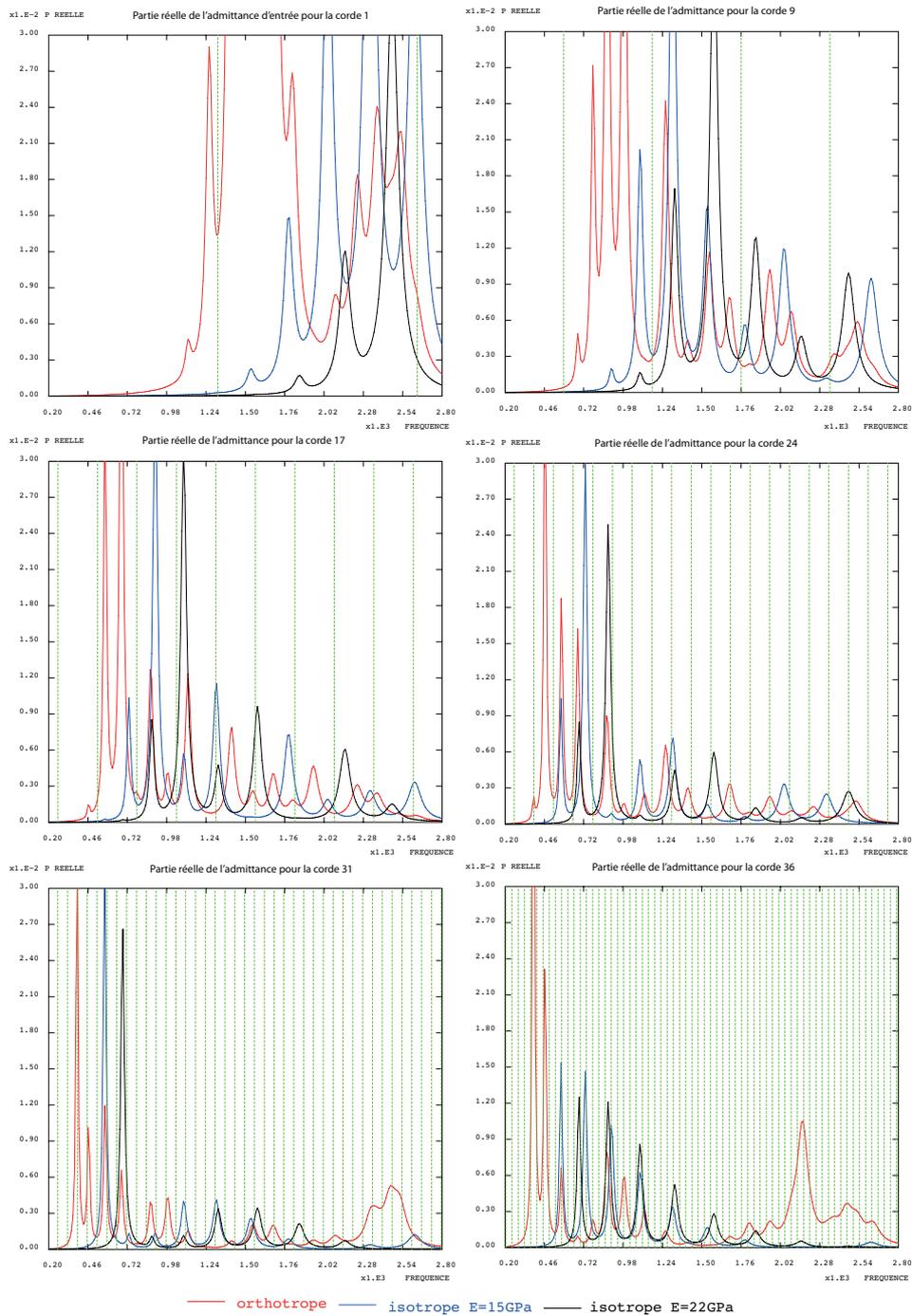
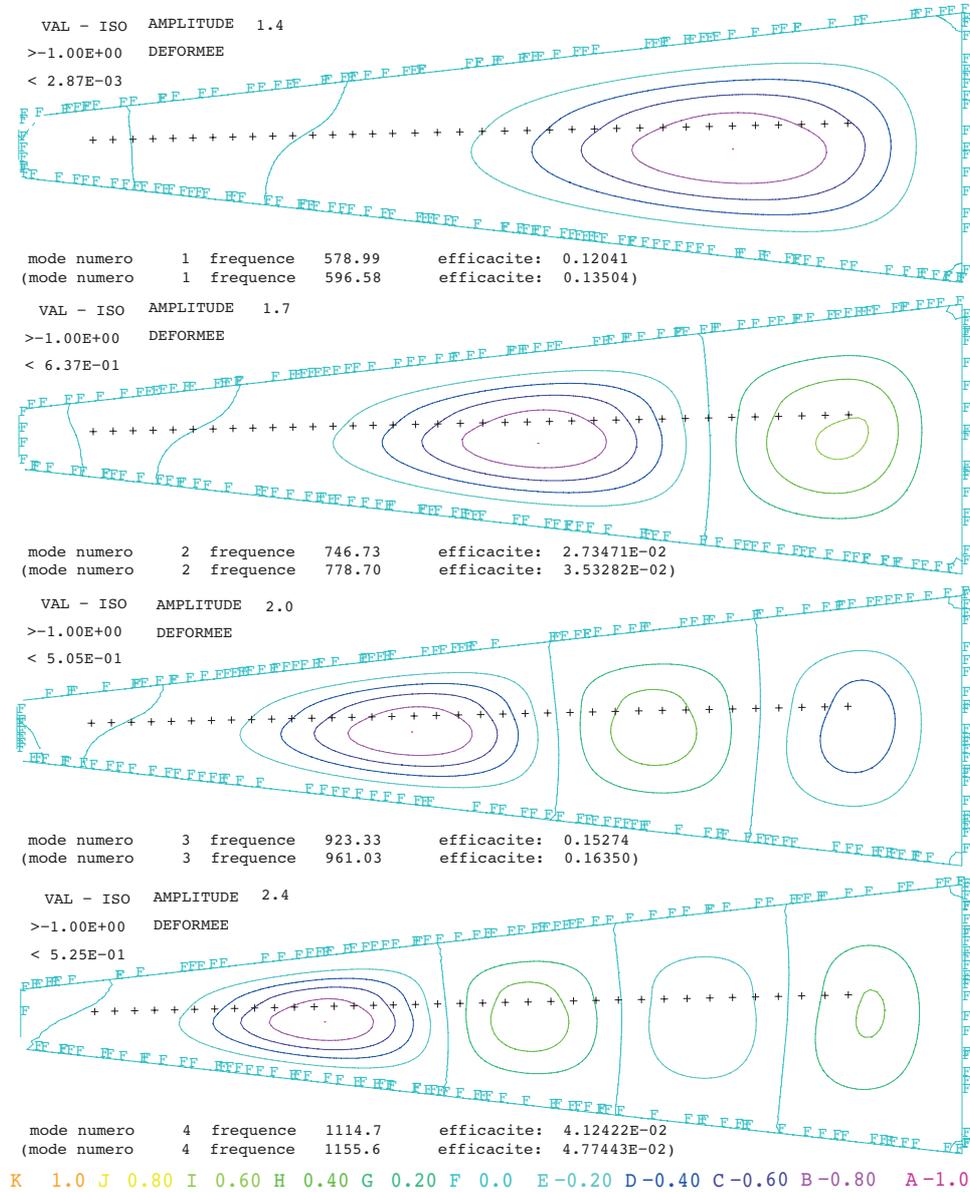


FIGURE C.4 – Courbes d'admittance d'entrée, comparant les cas d'une table orthotrope (bois) et isotropes (équivalents aux composites "sandwich" de proportion "1/10/1" et "1/6/1"). Les traits en vert marquent les harmoniques de la corde concernée).

## C.2 Tables avec une barre décentrée



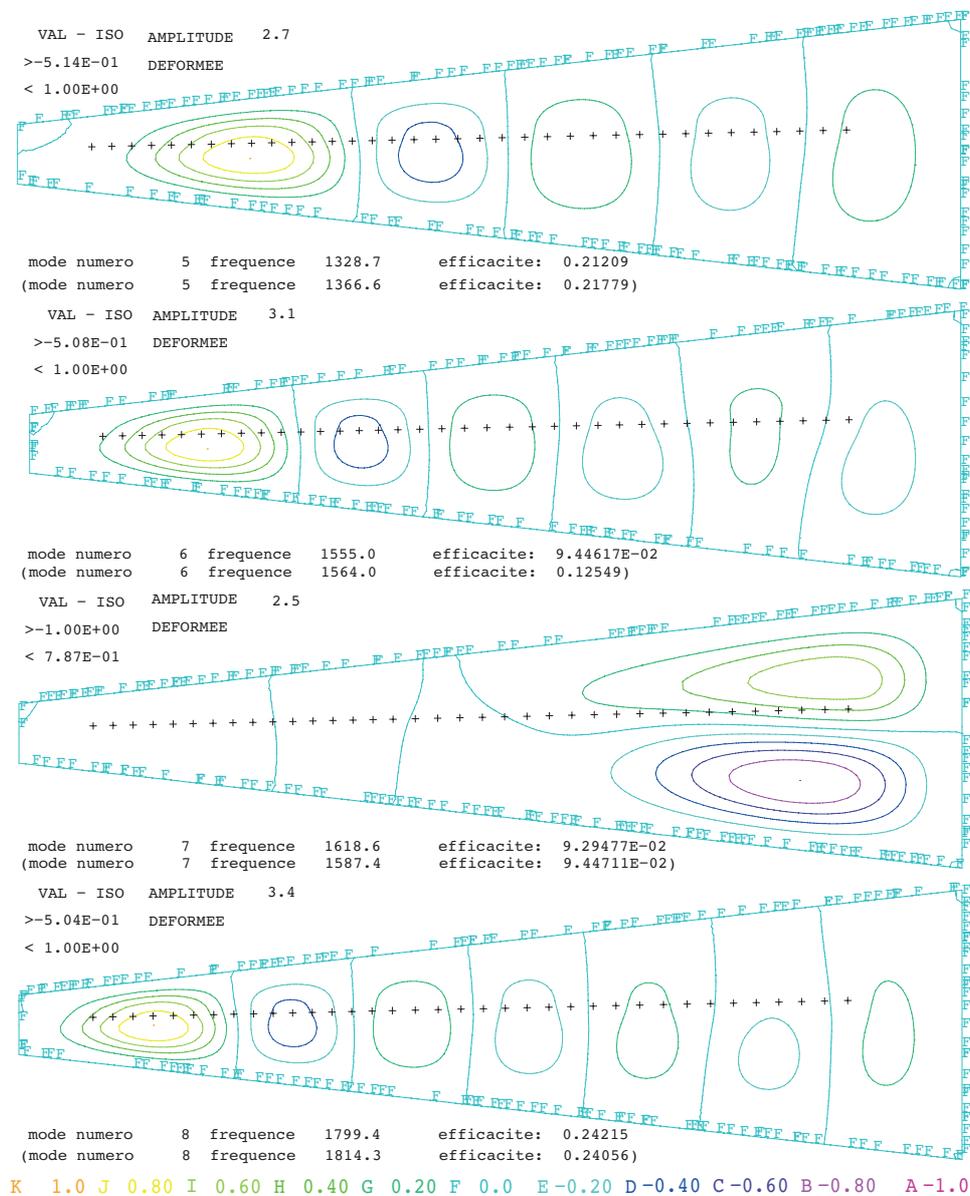


FIGURE C.5 – Déformées des huit premiers modes d'une table d'harmonie avec une barre décentrée de 20% par rapport à son bord. Les déformées pour un cas d'une décentration de 35% ressemblent, leurs fréquences propres et efficacités sont affichées entre parenthèses.

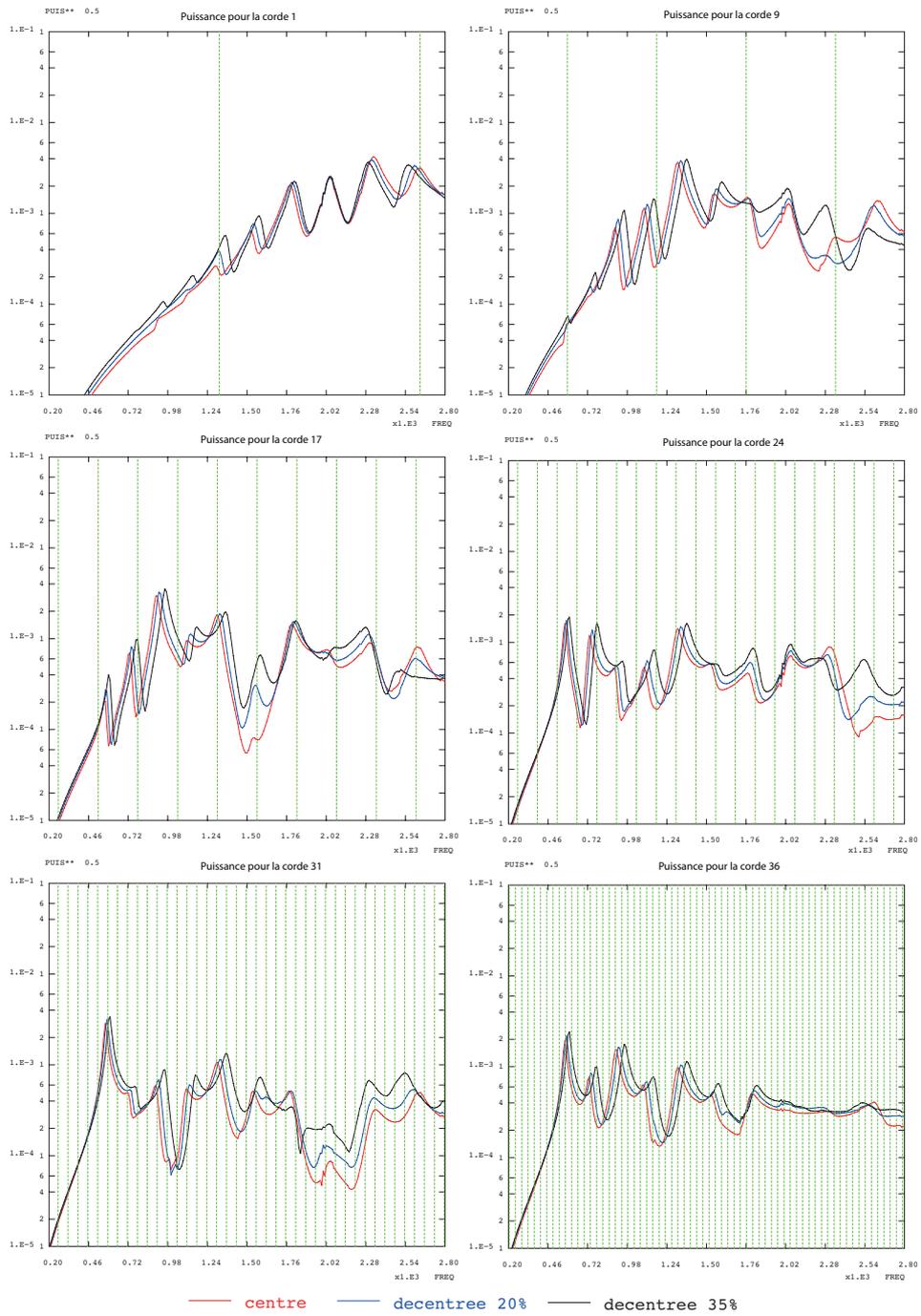


FIGURE C.6 – Courbes de la racine de la puissance rayonnée, comparant les cas d’une table d’harmonie avec une barre au centre, décentrée par 20% et par 35% par rapport au bord. Les traits en vert marquent les harmoniques de la corde concernée).

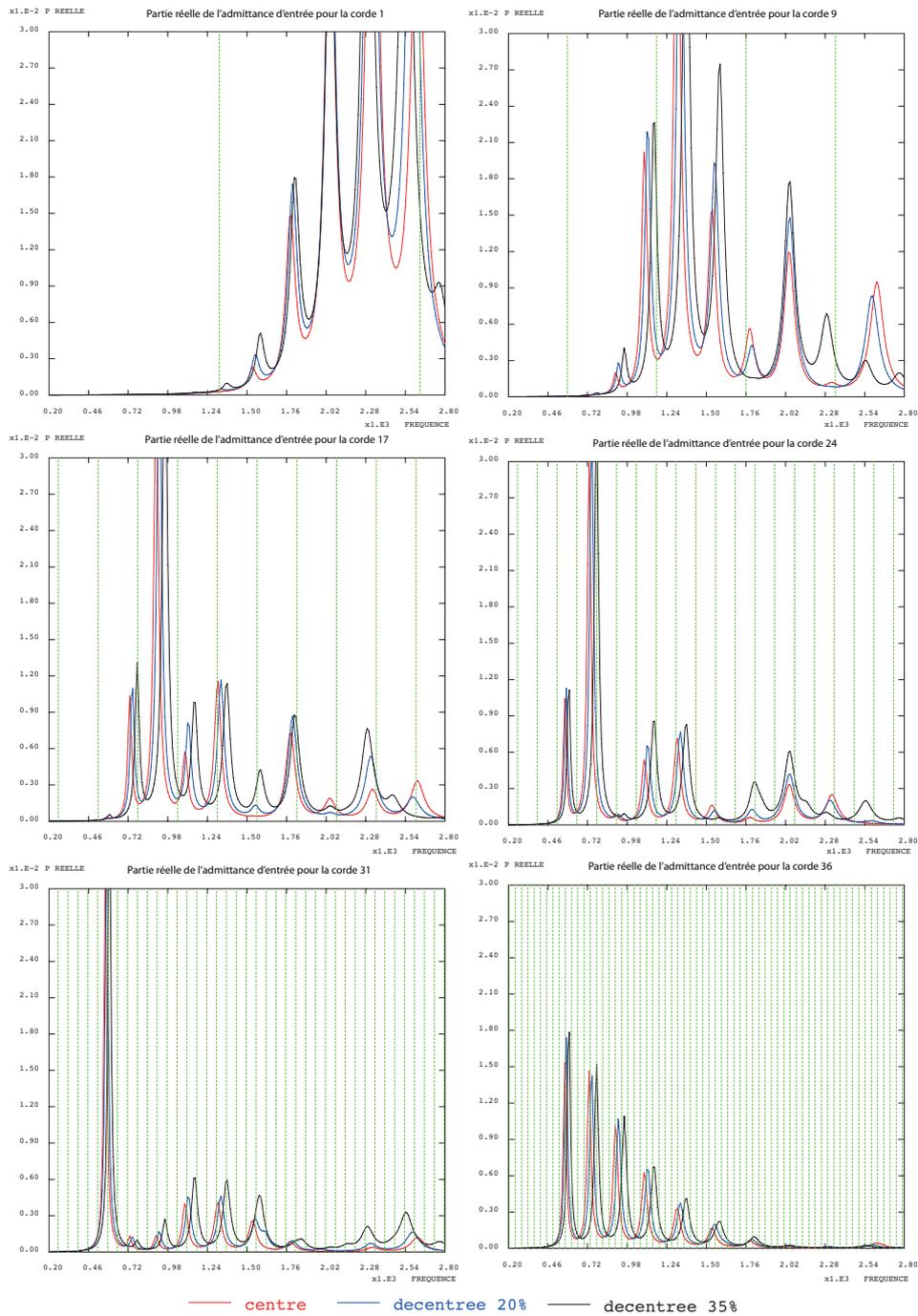
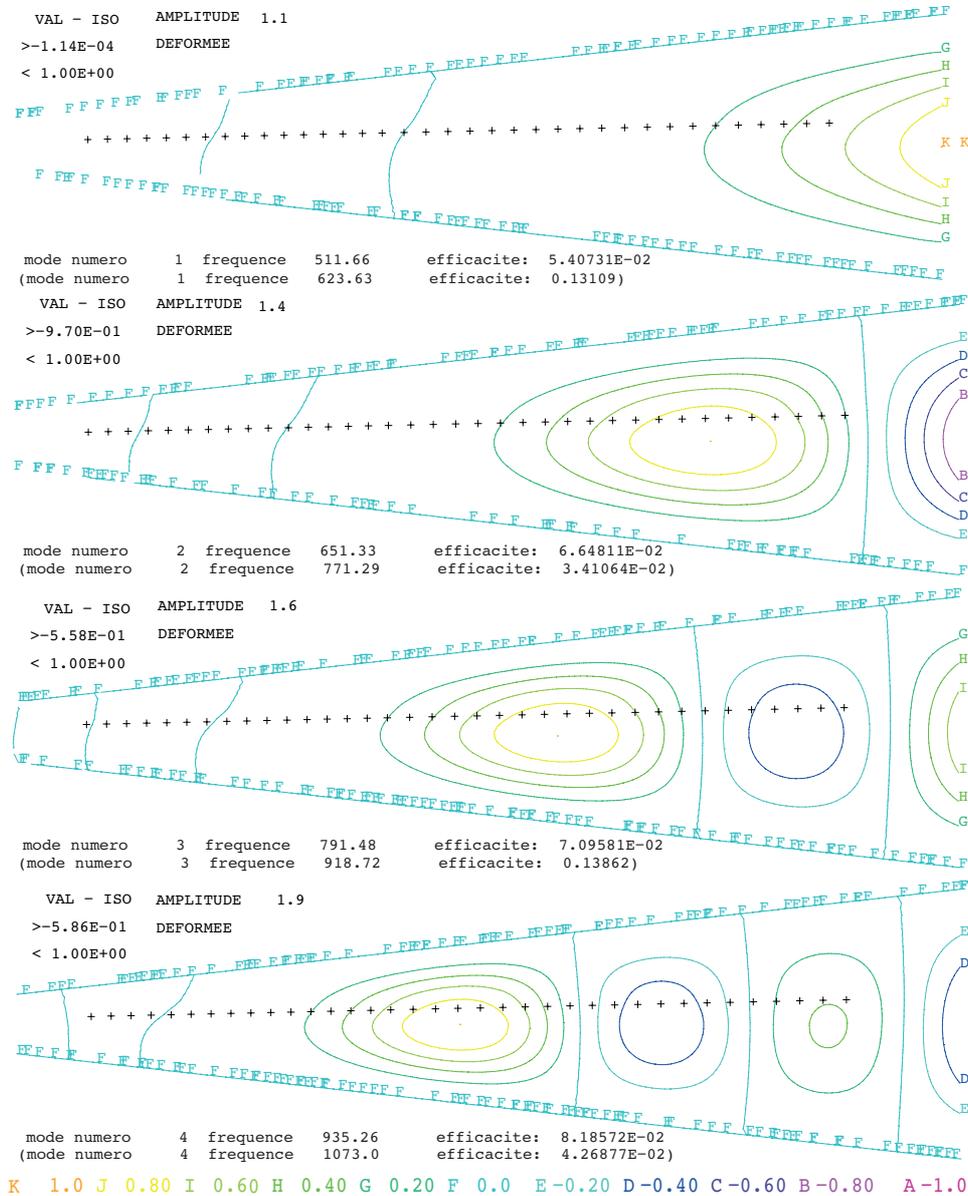


FIGURE C.7 – Courbes d’admittance d’entrée, comparant les cas d’une table d’harmonie avec une barre au centre, décentrée par 20% et par 35% par rapport au bord. Les traits en vert marquent les harmoniques de la corde concernée).

### C.3 Table libre et fractionée



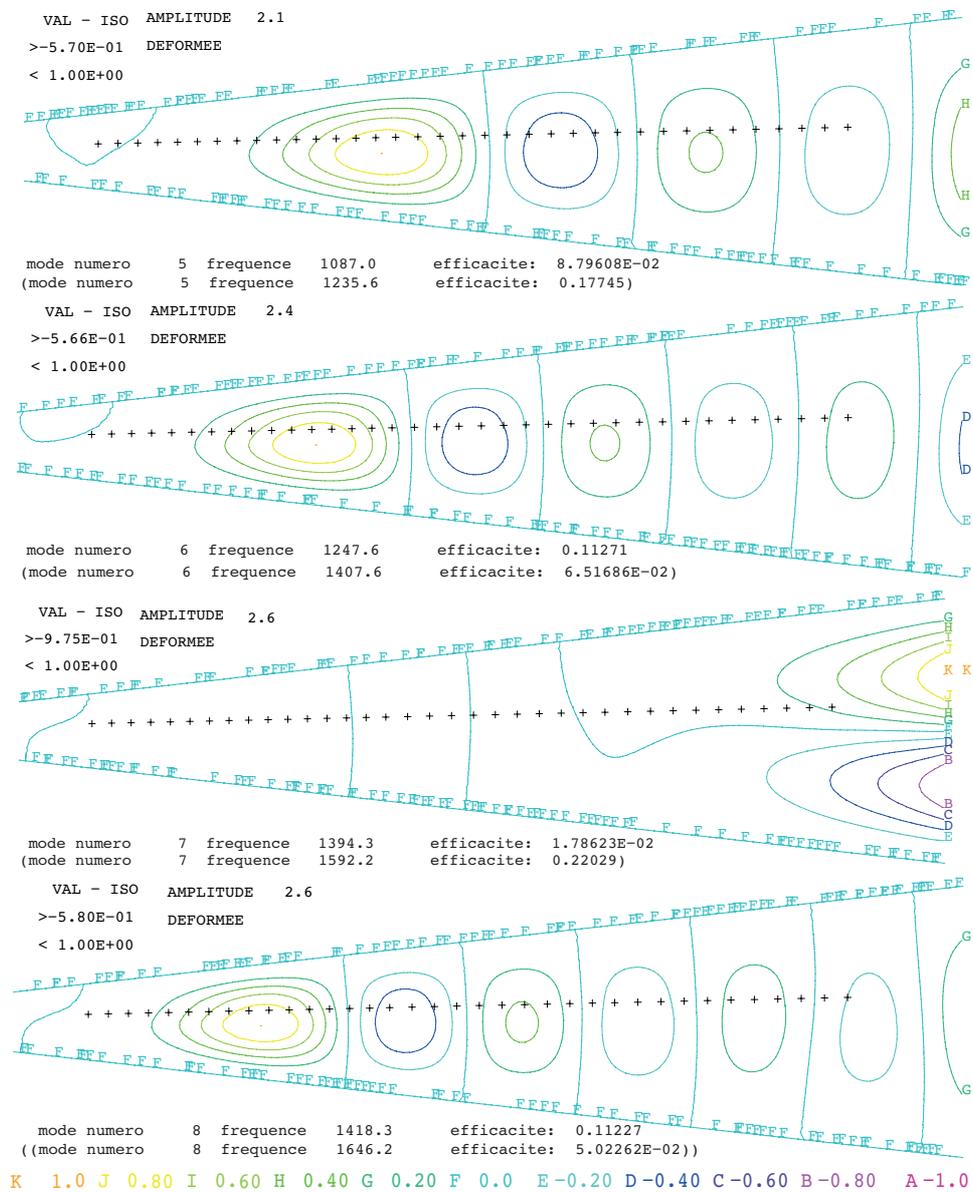
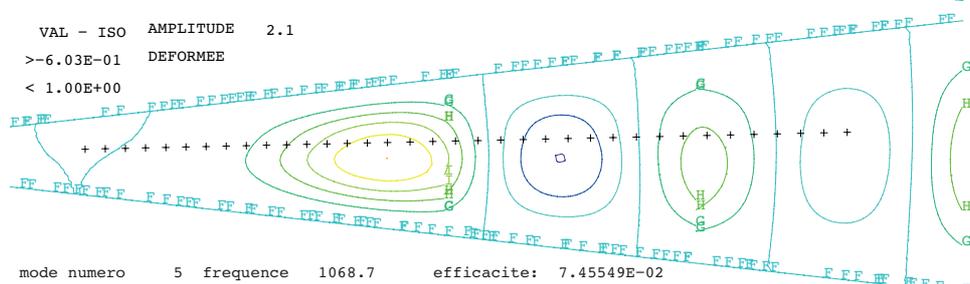
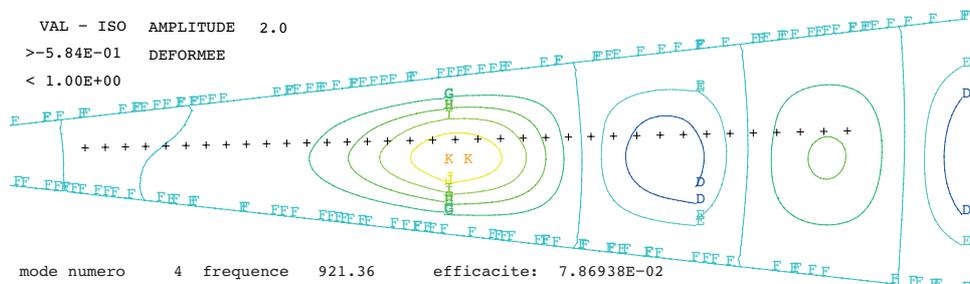
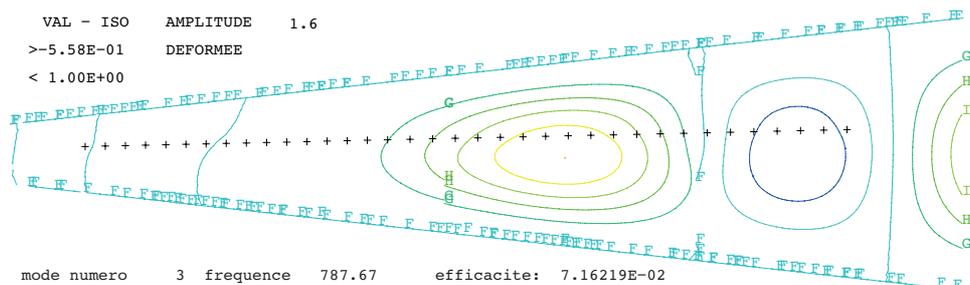
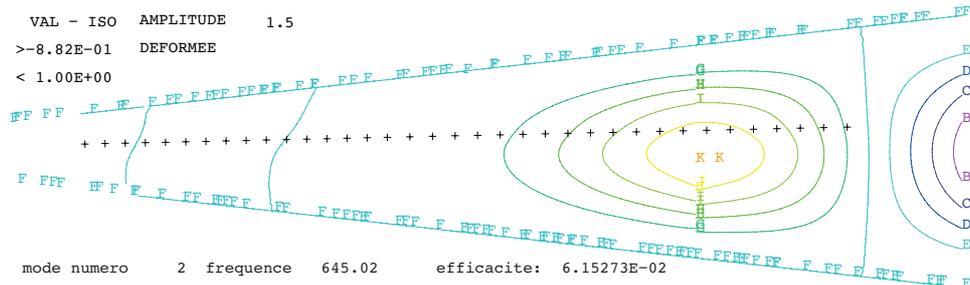
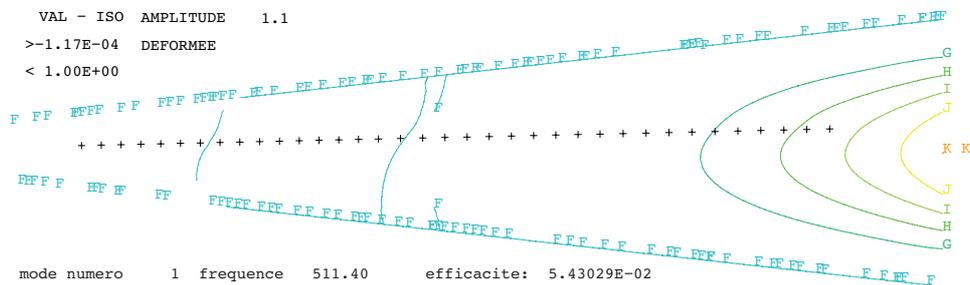


FIGURE C.8 – Déformées des huit premiers modes d’une table d’harmonie dont les côtés haut et bas sont libres, les fréquences propres et efficacités du cas non libre (dont les déformées diffèrent) sont affichées entre parenthèses.



K 1.0 J 0.80 I 0.60 H 0.40 G 0.20 F 0.0 E -0.20 D -0.40 C -0.60 B -0.80 A -1.0

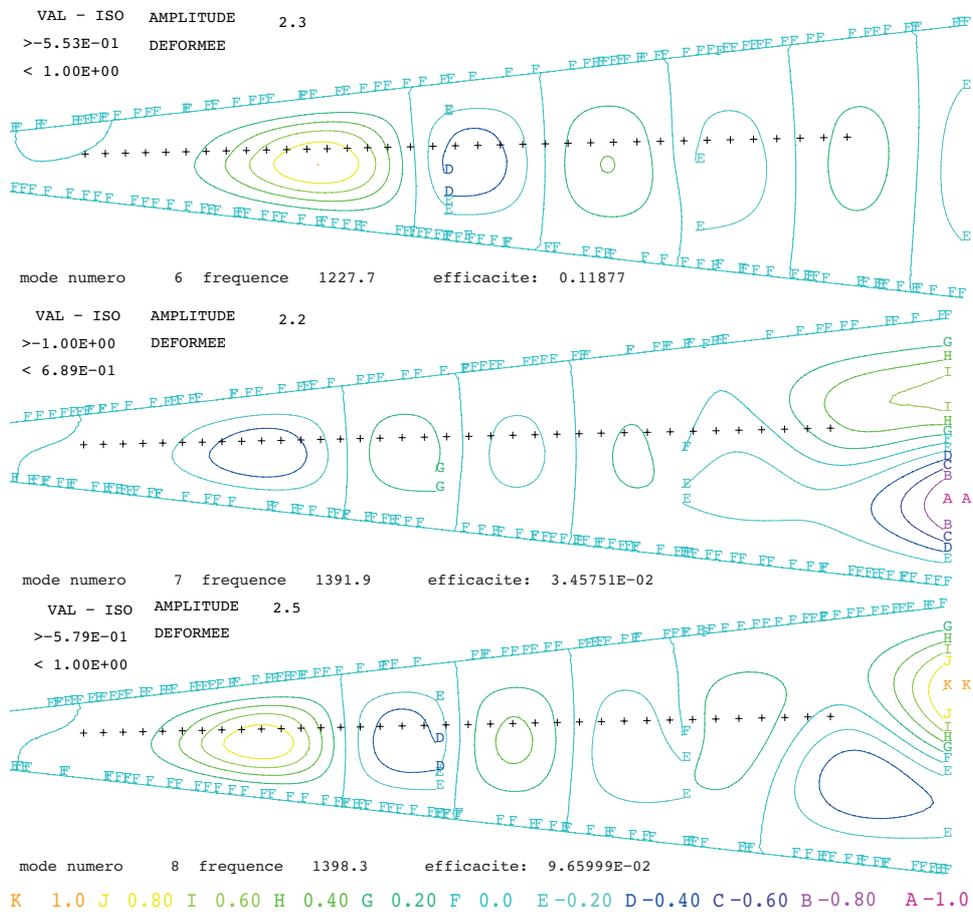


FIGURE C.9 – Déformées des huit premiers modes d’une table d’harmonie dont les côtés haut, bas et les endroits de coupe en dessous des cordes 18 et 29 sont libres.

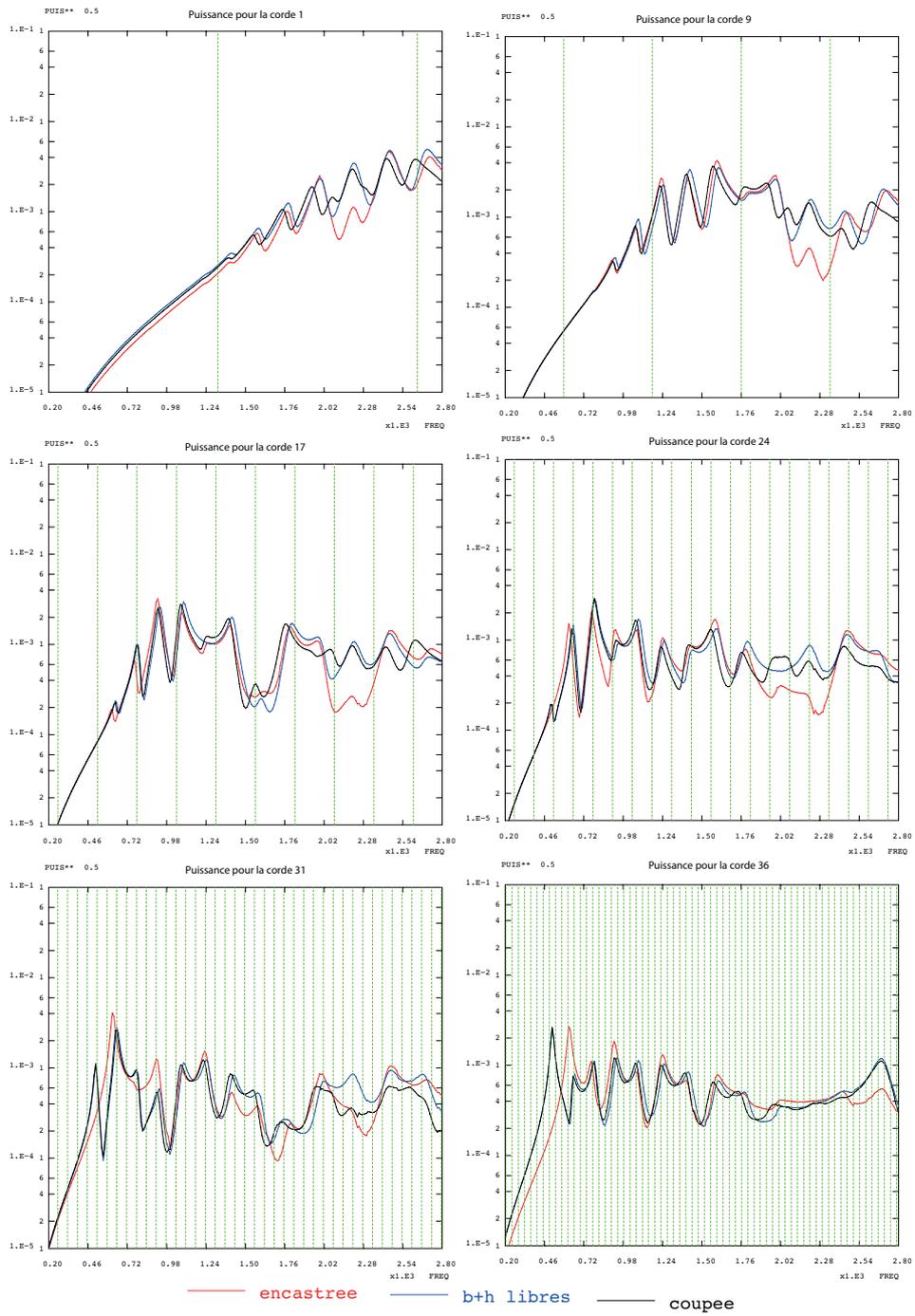


FIGURE C.10 – Courbes de la racine de la puissance rayonnée, comparant les cas d’une table d’harmonie encastree, une table libre en haut et en bas et une table fractionnee. Les traits en vert marquent les harmoniques de la corde concernee).

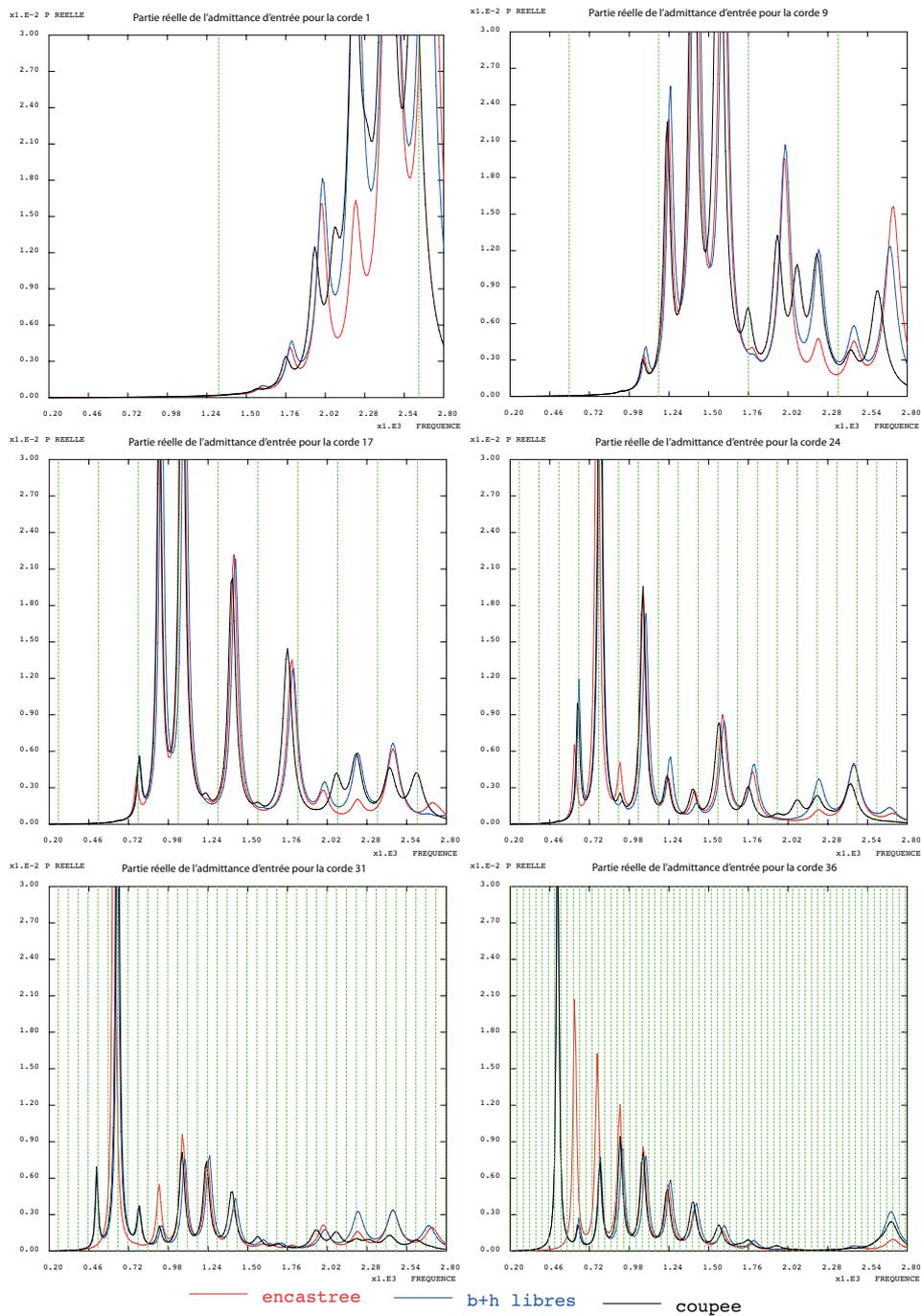


FIGURE C.11 – Courbes d'admittance d'entrée, comparant les cas d'une table d'harmonie encastree, une table libre en haut et en bas et une table fractionnee. Les traits en vert marquent les harmoniques de la corde concernee).

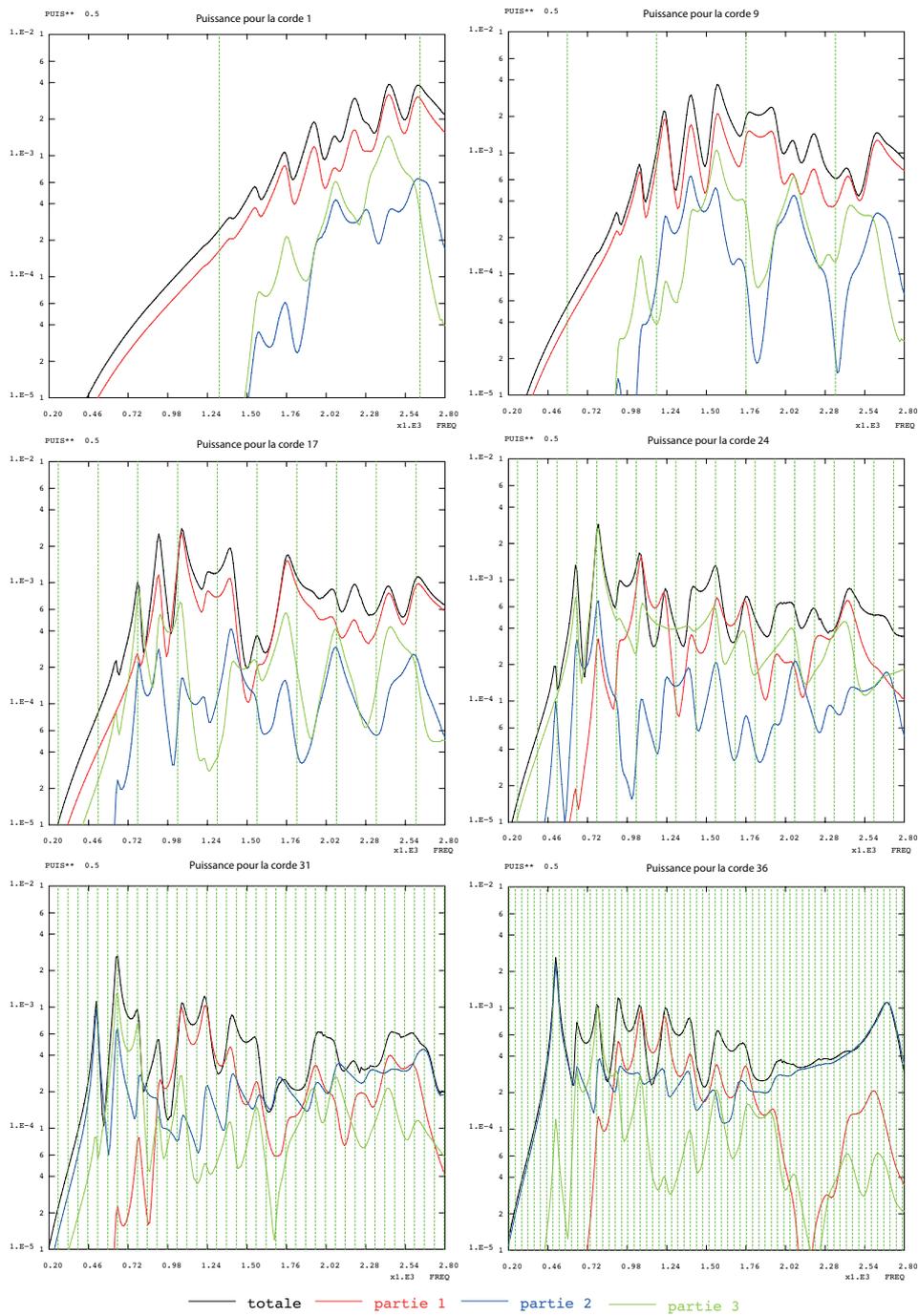


FIGURE C.12 – Courbes de la racine de la puissance rayonnée par la table fractionnée d'avant et par ses parties individuelles. Les traits en vert marquent les harmoniques de la corde concernée).