Université Pierre et Marie Curie
Telecom Paristech
Master 2 ATIAM

Rapport de stage en laboratoire
Du 01/03/2010 au 01/07/2010

Maître de stage : Bertrand David

Synthèse fréquentielle de sons de guitare pour l'aide à la facture.

Nicolas Barascud
<nicolas.barascud@ircam.fr>

Paris, le 30 juin 2010

Table des matières

Résumé

Ce stage s'inscrit dans le cadre de la Plateforme d'Aide à la Facture Instrumentale (PAFI) financée par l'ANR et visant à créer un échange culturel et technique permettant de répondre à certaines problématiques relatives à la reproduction et l'optimisation de la conception d'instruments de musique, notamment pour le haut de gamme, en fournissant des outils scientifiques récents à la communauté des facteurs d'instruments. Ces outils doivent permettre un transfert technologique à même de fédérer et renforcer une partie de la filière.

Ce travail fait suite à quelques essais préliminaires et s'inscrit dans une collaboration à long terme avec le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (et notamment François Gautier). Ce qui est appelé ici synthèse fréquentielle se base sur un modèle linéaire du fonctionnement de la guitare débouchant sur une représentation des couplages sous forme de fonction de transfert. La synthèse peut ainsi être réalisée à l'aide d'Algorithme de FFT. Notre apport consiste à mesurer et à modéliser la matrice d'admittance caractérisant le couplage à l'aide d'algorithme sous-espace. On peut ensuite mesurer la fonction de transfert liée au rayonnement, et réaliser la synthèse. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de modifier sélectivement les paramètres mécaniques de la structure (fréquences de résonance, amortissements des modes propres) et d'étudier les effets de ces modifications sur le son obtenu sans avoir à construire un nouvel instrument.

Abstract

This project is part of the publicly funded PAFI platform aiming at creating a cultural and technical exchange in order to answer questions regarding the conception and the optimization of musical instruments by providing the instrument-makers the adequate scientific tools to enhance their instruments. Those tools must allow for a technological transfer able to federate and reinforce a part of the field.

This study is part of an ongoing, long-term collaboration with the Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (François Gautier namely) and follows preliminary research. What is here called frequency synthesis is based on a linear model of the guitar sound production system leading to a representation of the coupling in terms of transfer functions. The synthesis task can then be performed using FFT algorithms. Our contribution consists in measuring and modelizing - using subspace high-resolution algorithms - 1D and 2D input impedance signals at the guitar bridge, which efficiently characterize the coupling between the body and the strings. The transfer function describing the motion of body and string can then be computed, and the synthesis can be performed after having measured radiation patterns. The advantage of such a method is that it allows to modify the mechanical parameters of the structure (modal frequencies, decay rates) selectively and study the effects of those modifications without having to build a new instrument.

Remerciements

En préambule à ce mémoire, je souhaite adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont participé à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je tiens à remercier sincèrement Bertrand David[1], qui, en tant que Directeur de mémoire, s'est toujours montré à l'écoute tout au long de la réalisation de ce projet, et qui est en grande partie à l'origine de mon intérêt et de mon engouement pour l'acoustique des guitares. Les premiers cours de traitement du signal que j'ai pu suivre avec lui ont immédiatement éveillé ma curiosité et m'ont donné envie d'approfondir ces domaines au point de m'amener aujourd'hui à rédiger un mémoire traitant de ces deux sujets. Merci encore pour son aide, pour l'inspiration, pour sa patience et pour le temps qu'il a pu me consacrer, sans quoi ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à François Gautier[2] pour son accueil chaleureux au Mans, pour sa générosité et la patience dont il a su faire preuve malgré ses charges académiques et professionnelles. Ses conseils avisés ont largement contribué à la réalisation de ce mémoire.

J'exprime ma gratitude à Jean Marie Fouilleul pour avoir gracieusement fourni ses guitares, et que je remercie au même titre que François, notamment pour sa bonne humeur et sa disponibilité lors des mesures à la Guitarreria.

Télécom ParisTech est un lieu privilégié pour effectuer un stage de fin d'études. J'ai une pensée particulière pour l'ensemble des membres du département TSI, thésards et professeurs de l'école que j'ai côtoyés quotidiennement et dont j'ai toujours apprécié la gentillesse et la bonne humeur.

Je n'oublie pas mes collègues de bureau, Erica, Alexis, Marc, pour leur compagnie qui s'est toujours révélée fort agréable et bienvenue, et avec qui j'ai eu tant de discussions fructueuses.

Enfin, j'adresse toute ma reconnaissance à Ester Cierco Molins, que j'ai eu tant plaisir à connaître et à côtoyer, aussi bien pour ses qualités humaines que pour son efficacité au travail. Je la remercie pour sa gentillesse et sa bonne humeur de tous les instants, sans lesquels ces quatre mois n'auraient vraiment pas été les mêmes. *Ha estat un plaer* !

Merci à tous et à toutes.

---

[1] Télécom ParisTech, Paris

[2] Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, Le Mans

[3] Jean-Marie Fouilleul, Luthier, http ://www.guitar-fouilleul.com/

Chapitre 1

Introduction

1.1 Préambule

Ce stage s'inscrit dans le cadre d'une collaboration à long terme entre l'équipe de traitement du signal musical de Télécom ParisTech[1] et le laboratoire d'acoustique de l'Université du Maine au Mans[2] ayant abouti sur un projet de recherche financé par l'ANR, la « Plateforme modulaire d'Aide à la Facture Instrumentale » (PAFI), proposant une démarche collaborative originale entre des laboratoires de recherche partenaires (Ircam, LAUM, Télécom ParisTech, LTCI), le pôle national d'innovation des métiers de la musique (PIMM) et un collectif d'artisans-luthiers représentatif du tissu économique des entreprises françaises. En se basant sur des outils de caractérisation et de prédiction mécanique et acoustique, il s'agit dans ce projet de répondre à des problématiques liées à la reproduction et à l'optimisation de la conception d'instruments de musique, notamment pour la facture haut de gamme, caractéristique de la lutherie française dans le marché mondial. Le projet PAFI a ainsi pour ambition d'offrir aux entreprises artisanales de la facture instrumentale des moyens modernes d'anticipation et d'aide à la décision en matière de suivi d'exploitation et d'innovation technologique.

Les très petites entreprises en facture instrumentale (classique, traditionnelle et contemporaine) n'ont pas les moyens humains et financiers pour acheter, adapter ou développer des outils à haute valeur ajoutée. Par ce projet de réalisation d'outils logiciels et matériels faible coût utilisables en atelier individuel, et en impliquant des artisans luthiers partenaires dans la définition et la mise au point de prototypes, le projet PAFI vise à contribuer à lever un verrou scientifique et technique. Actuellement, le coût d'un ensemble de matériels de mesure non dédiés permettant de réaliser les mesures vibratoires et acoustiques est d'un ordre de grandeur supérieur à celui visé dans le cadre du projet ! Dans le cadre de ce projet, un prototype de plate-forme logicielle et matérielle d'aide à la conception et à la caractérisation des instruments de musique a été mis au point. Cette plate-forme est constituée d'un « module général » d'une part et de « modules métiers » - instruments à cordes et à vent d'autre part. Le « module métiers - instruments à cordes » est constitué d'outils prototypes de caractérisation mécanique et acoustique des instruments de musique directement utilisables en atelier. Ils sont destinés aux artisans de la facture d'instruments à cordes : facteurs de guitares et de harpes, luthiers et archetiers du quatuor.

Dans le cadre du « module instruments à corde », et dans une volonté d'apporter un nouvel axe de développement au projet, il m'a été confié la suite d'un projet ayant pour thème la synthèse "hybride"

[1] http ://www.telecom-paristech.fr
[2] http ://laum.univ-lemans.fr

de sons de guitare, dans la continuité de travaux menés par Nicolas Waisbord, Charles Fox et tout dernièrement Xabier Jaureguiberry [1]. Ce qui était appelé synthèse "hybride" consistait à mesurer un signal issu de l'interaction de l'instrumentiste et de l'instrument (typiquement un signal de force au chevalet) et à modéliser la fonction de transfert correspondant au rôle de la caisse de résonance et du rayonnement, de manière analogue à ce qui a pu être fait pour le violon (voir par exemple [2]). Le but étant de parvenir à modifier sélectivement des paramètres mécaniques de l'instrument (fréquences de résonance, amortissements des modes propres) et étudier les effets de cette modification sur le son obtenu, sans avoir à construire un nouveau prototype. L'intérêt de ce type de synthèse n'est donc pas d'entendre un son de synthèse parfait, mais plutôt de pouvoir percevoir *par comparaison* l'effet d'une modification sur le son de l'instrument.

1.2 Objectifs du stage

Lorsqu'il pince une corde, l'instrumentiste impose un certain nombre de conditions initiales sur le déplacement et la vitesse de la corde et de la caisse de résonance ; la corde vibre ensuite librement lorsqu'elle est relâchée. Pour peu que le mouvement soit assez faible pour qu'on puisse appliquer des résultats de la théorie linéaire, la vibration résultante ainsi que le rayonnement sont donnés simplement par la superposition des réponses transitoires des modes couplés caisse/corde[3]. L'instrumentiste peut - de manière limitée - contrôler les amplitudes des partiels formant la réponse du système, mais les fréquences, taux d'amortissement, rayonnement, sont gouvernés par les propriétés mécaniques de l'instrument, l'instrumentiste ne peut généralement guère - ou très peu - influer sur ces paramètres. Néanmoins, dans un contexte musical, il est probable que l'impact de l'instrumentiste - bien que minime - sur son instrument ait une certaine importance.

Au niveau de la physique, il est encore difficile de savoir lesquels de ces facteurs ou paramètres ont des conséquences perceptibles au niveau du son rayonné par l'instrument. L'objectif *in fine* de pouvoir relier les qualités musicales d'une guitare aux détails de sa facture nous pousse développer des modèles théoriques de son fonctionnement. Pour que de tels modèles soient utiles, il faut qu'ils soient *réalistes*, c'est-à-dire qu'ils doivent permettre de reproduire avec une certaine fidélité le *comportement* physique de l'instrument. Il faut néanmoins mesurer cet aspect : l'objectif ici n'est pas de développer des méthodes de synthèse précises, au sens de reproduire avec le plus grand détail des résultats expérimentaux. Le but de ces modèles est de répondre à des questions d'intérêt pour les facteurs et instrumentistes, ce qui nous force à garder un lien explicite entre les paramètres physiques de l'instrument et les paramètres du modèle. Cela implique des priorités fondamentalement différentes d'un travail voué à de la synthèse en temps-réel par exemple. Là où il faudrait plutôt chercher à simplifier au maximum le modèle tout en essayant de ne pas sacrifier la qualité sonore, l'approche ici consiste à différer toutes les questions de perception jusqu'à-ce que le modèle soit validé par la comparaison avec l'expérience. C'est seulement là qu'il sera possible de procéder par soustraction en éliminant des détails du modèle qui n'ont pas d'incidence au niveau auditif.

Notre but ici est est de parvenir à modéliser toute la chaîne de fonctionnement de la guitare (de l'interaction avec l'instrumentiste jusqu'au rayonnement) pour aboutir à un système de synthèse rapide, s'appuyant sur un type de données expérimentales uniquement : la mesure d'admittance au chevalet. La modélisation de ces mesures doit permettre de modifier sélectivement les paramètres mécaniques tels que les fréquences et les amortissements modaux et de juger des différences obtenues après resynthèse. Ce n'est donc pas un jugement "absolu" mais un jugement par comparaison,

[3]Le terme "caisse" inclut ici l'air contenu dans la cavité et à l'extérieur.

qui justifie l'intérêt d'un modèle même si ce dernier ne permet pas de reproduire parfaitement le comportement de l'instrument.

Notre modèle se base sur les travaux effectués par Woodhouse [3, 4]. Dans un premier temps, il s'agit de mettre en place un système de traitement de signal numérique capable de modéliser le couplage mécanique entre la corde et le chevalet. Le moyen le plus direct pour caractériser ce lien se fait par le biais de mesures de l'*admittance au chevalet* (1D ou 2D) et il est le sujet de la première partie de ce rapport. Nous montrons ensuite comment modéliser cette admittance en fonction de ses caractéristiques physiques (les résonances, les atténuations, etc.) grâce aux méthodes à haute résolution (HR) ESPRIT et ESTER. Enfin, la mesure du rayonnement permet de compléter le modèle, et il devient possible de simuler des sons de guitare en modifiant les paramètres du modèle - forcément corrélés à certaines caractéristiques des différents composants de la guitare - et de juger à l'oreille leurs effets sur le son de la guitare. Tout cela bien-sûr sans avoir à chaque fois besoin de construire un nouveau prototype.

1.3 Synthèse de sons de guitare : état de l'art

La synthèse par modèle physique, et la modélisation de guitare classique en particulier, est un domaine ayant connu un succès croissant au cours des vingt dernières années [5] [6]. Les algorithmes de synthèse basés sur des modèles physiques deviennent de plus en plus performants avec une bonne capacité à reproduire le comportement naturel de l'instrument. Les modèles physiques fournissent des informations utiles aux acousticiens pour comprendre les phénomènes mis en jeu lors de la production sonore ainsi que les liens entre le son d'un instrument ses propriétés physiques. Différentes approches par modèles physiques peuvent être trouvés dans [7] [8] [9]. Dans [7], un système simple comprenant trois composantes dans une boucle de rétroaction (*feedback loop*) (un filtre passe-bas, un retard et un gain) est introduit pour synthétiser le son d'une corde pincée. Dans [8], [9], on utilise un modèle physique par guide d'onde pour implémenter la synthèse d'instruments à corde comme la guitare acoustique, le banjo et la mandoline. Dans cette méthode, la même équation d'onde peut être appliquée à n'importe quel matériau élastique se déplaçant selon un guide d'onde à une dimension, des extensions à deux et trois dimensions étant également possibles. Mais si les guides d'onde digitaux sont des abstractions ayant un sens physique, leur coût en temps de calcul a longtemps limité leur utilisation en temps réel (et bien que ce point tende à s'estomper avec la puissance de calcul croissante des microprocesseurs actuels, les performances de ces modèles s'avèrent être limitées en terme de précision et de fidélité [3], du moins à des fins de comparaison avec l'expérience).

Le comportement des cordes (pincées) est à présent relativement bien compris. Les progrès concernant la modélisation du comportement du résonateur sont, eux, plus récents [6] [10]. Et pour cause, la modélisation du résonateur s'avère particulièrement complexe. En effet, un son typique de guitare montre des pics spectraux allant au moins jusqu'à 5kHz [3], ce qui correspond au 60^e partiel de la note la plus basse de la guitare (82Hz). Chacun de ces partiels peut présenter deux polarisations. Une caisse de résonance de guitare typique possède pas moins de 250 modes de vibration, ainsi qu'un nombre comparable de mode pour l'air qu'elle contient [3]. Il apparaît donc à l'évocation de tels chiffres qu'on a à faire à un système à un plusieurs centaines de degrés de liberté.

Aujourd'hui nous avons à disposition un certain nombre de techniques pour simuler le comportement des cordes [11]. Des travaux ont aussi été effectués pour simuler les paramètres d'excitation et d'étouffement des cordes ainsi que pour simuler les phénomènes de vibrations sympathiques [12]. Néanmoins, bien que la position du point d'excitation soit aujourd'hui bien modélisée, les effets des différents moyen d'excitation (ongles, doigts, médiateur) ne sont que rarement pris en compte (voir par exemple [13]). Les paramètres physiques des cordes, du sillet de tête et du chevalet son également traités de manière plus ou moins idéalisée.

Le comportement du corps de la guitare n'est, quant à lui, pas encore parfaitement compris, bien que les paramètres comme la taille, forme et le matériau ont été incorporés dans certains modèles [14]. L'acoustique de la salle ainsi que la pression atmosphérique et l'humidité doivent également être considérées. Étant donné le grand nombre de paramètres nécessaires, il est clair que certaines hypothèses et simplifications sont nécessaires pour modéliser la guitare - du moins pour commencer.

Mis à part quelques premiers travaux (cf [15]), très peu de modèles permettent de simuler les techniques de main gauche comme tirés, *hammer-ons*, *pull-offs*, trilles, *tapping* ou glissés. En outre, le recours à des signaux d'excitation enregistrés limites de la portée générale des modèles et ne tient pas compte de l'excitation de la main gauche (les *hammer-ons* par exemple) par opposition à la main droite. Il rend également difficile de faire face aux situations où une guitare est jouée avec un *bottleneck*, puisque longueur de la corde varie en permanence et il n'est pas possible d'enregistrer des signaux d'excitation de toutes les positions possibles du barré. Ainsi, bien que le terrain a certainement été prévu pour la synthèse de la guitare, il reste encore beaucoup à faire avant qu'un synthétiseur parvienne à synthétiser l'ensemble des gestes instrumentaux usuels. L'ensemble des travaux menés dans le domaine jusque-là montre néanmoins que malgré les simplifications il est possible d'arriver à des synthèses convaincantes.

Nous avons choisi une méthode de synthèse dite "fréquentielle", proposée par Woodhouse [3, 4], qui nous convient tant au niveau de sa précision que de son coût en temps de calcul [3]. Un autre critère de choix est qu'elle permet aussi bien d'utiliser directement des mesures de mobilité que d'exprimer l'admittance en terme de modes. La description de ce modèle fait l'objet de la prochaine section.

Chapitre 2

Modèles

2.1 Modèle général pour la synthèse

Le fonctionnement global d'une guitare peut être schématisé de la façon suivante : admettons qu'une force f_p soit exercée par une corde et transmise au chevalet par l'intermédiaire du sillet. Le chevalet se met donc en mouvement et entraîne avec lui la table d'harmonie, qui acquiert donc une accélération γ. Par un phénomène de couplage mécanique entre la table d'harmonie et le fond de la caisse, l'air présent dans la caisse de la guitare est lui aussi mis en mouvement. Il résulte de ce couplage un rayonnement acoustique engendrant une pression acoustique P_a.

Fig. 2.1 – Schématisation du fonctionnement de la guitare.

Lorsqu'il pince une corde, l'instrumentiste impose un certain nombre de conditions initiales sur le déplacement et la vitesse de la corde et de la caisse de résonance ; la corde vibre ensuite librement lorsqu'elle est relâchée. Pour modéliser l'interaction avec le musicien en admettant qu'au point de pincement, la corde est soumise à un échelon inversé de force à $t = 0$ ($f = f_0 \neq 0$ à $t < 0$, f=0 à $t \geq 0$), de sorte que $v = 0$ et le déplacement y_0 à $t = 0$. La corde est supposée infiniment souple et les amortissements et la raideur sont ensuite introduits *a posteriori* comme des perturbations. Le rayonnement est supposé causé entièrement par le mouvement du chevalet et de la table d'harmonie. Le rayonnement de la corde est négligé. Le mouvement est supposé assez faible pour qu'on puisse appliquer des résultats de la théorie linéaire, la vibration résultante ainsi que le rayonnement sont donc donnés par la superposition des réponses transitoires des modes du système couplé corde/caisse[1].

Le mouvement des cordes et celui du chevalet peuvent être décomposés selon trois composantes : normale, perpendiculaire et transverse par rapport à la table d'harmonie. Pour la guitare, l'expérience montre que le mouvement longitudinal est généralement plus faible que les deux autres composantes et est donc négligé tout au long de ce projet. On suppose que la corde est solidement fixée à une extré-

[1]Le terme "caisse" inclut ici l'air contenu dans la cavité et à l'extérieur.

mité ($x = 0$), alors qu'elle est attachée à la caisse de la guitare à son autre extrémité. Les mouvements de la corde et de la table d'harmonie sont donc identiques en ce point ($x = L$). L'importance relative des déplacements selon les axes y et z dépend de l'angle de pincement imposé par l'instrumentiste. Le mouvement des cordes et de la table sont couplés au niveau du chevalet. Il est possible de décrire la relation entre la force de la corde et la vitesse au chevalet grâce à "l'admittance d'entrée" [16]. En considérant deux composantes pour la force et la vitesse, on est amené à définir une matrice d'admittance 2D au chevalet, et les deux composantes sont donc couplées par les termes croisés de la matrice.

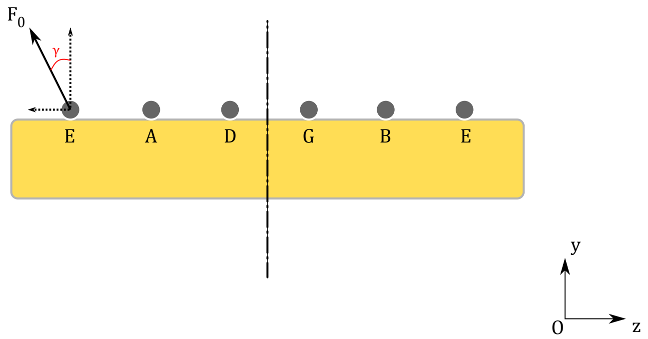


Fig. 2.2 – Schématisation du pincement dans un contexte de jeu classique.

La méthode proposée par Woodhouse [3] et choisie pour ce projet consiste à traiter le couplage corde/caisse dans le domaine fréquentiel, et de retrouver le signal temporel par une transformée de Fourier inverse. La principale raison pour laquelle cette méthode est particulièrement attractive est due à la nature du couplage entre le sous-système "corde" et le sous-système "caisse". En effet celui-ci est ponctuel, et pour cette raison il est très simple de calculer l'admittance du système couplé. De plus, l'algorithme est relativement véloce car basé sur les transformées de Fourier rapides. Notons $Y_1(\omega)$ l'admittance de la corde, et $Y_2(\omega)$ l'admittance au chevalet. Ces deux systèmes sont couplés au point où les admittances sont définies, par conséquent, l'admittance totale du système s'écrit simplement :

$$Y = \left(\frac{1}{Y_1} + \frac{1}{Y_2}\right)^{-1} \tag{2.1}$$

Pour utiliser cette méthode à des fins de synthèse, il faut encore néanmoins simuler un pincement de la corde. En effet, nous souhaitons modéliser la vibration de la caisse résultante d'un échelon de force appliqué à un endroit donné de la corde. Par la réciproque du théorème des vibrations, on peut tout aussi bien imaginer appliquer la force au niveau du chevalet et calculer le déplacement de la corde correspondant[2]. Pour résoudre ce problème, il suffit de multiplier deux fonctions de transfert. La première est l'admittance couplée calculée définie ci-dessus, donnant le déplacement au chevalet correspondant à une force qui y serait appliquée. La deuxième fonction est la fonction de transfert $H(\omega)$ adimensionnée entre un déplacement appliqué à une extrémité de la corde (le chevalet) et le déplacement correspondant du point où le pincement est effectué. Cette fonction est calculée dans la section 2.2.2. On a donc :

$$A(\omega) = Y(\omega) \times H(\omega) \tag{2.2}$$

[2]Le mouvement s'effectue dans deux directions si les deux polarisations de la corde sont prises en compte

On voit ici tout l'intérêt de cette méthode, puisque outre sa relative simplicité conceptuelle, elle nous laisse le choix d'utiliser l'admittance couplée mesurée directement ou l'admittance calculée en termes de modes. Le seul désavantage potentiel de cette méthode réside dans l'utilisation de la Transformée de Fourier inverse pour obtenir la réponse temporelle. En effet, étant donné la nature discrète du signal et la bande passante finie, il est difficile de garantir que la réponse soit absolument causale. Néanmoins Woodhouse rapporte des résultats suffisamment causaux [4] avec cette méthode, ce que nous confirmerons dans la suite de ce rapport.

2.2 Caractérisation de la corde

Admittance

Quelque soit notre choix de synthèse, toutes nécessitent la même information de départ, à savoir la caractérisation des cordes et de la caisse de résonance. De même que la caisse est naturellement décrite par son admittance (cf 2.3), on peut calculer l'admittance correspondante pour la corde, en y faisant apparaître à la fois la raideur et l'amortissement, qui sont tous deux essentiels à une resynthèse fidèle [3].

En partant de la forme générale de la projection de la solution de l'équation de d'Alembert sur l'axe de la corde (x) :

$$\phi(x,t) = f_+\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_-\left(t + \frac{x}{c}\right) \tag{2.3}$$

L'équation de d'Alembert étant par ailleurs linéaire, on peut sans restriction considérer uniquement les solutions sinusoïdales, dites harmoniques ou monochromatiques. En effet, toute configuration peut être ramenée à une somme de sinusoïdes par la transformée de Fourier. Une solution de l'équation d'onde qui soit harmonique dans le temps est de la forme :

$$\phi(x,t) = y(x)\cos\omega t = \Re[y(x)e^{-i\omega t}] \tag{2.4}$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$, où c est la célérité de l'onde. La solution générale de l'équation ci-dessus est :

$$y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx) \tag{2.5}$$

où A et B sont deux constantes d'intégration.

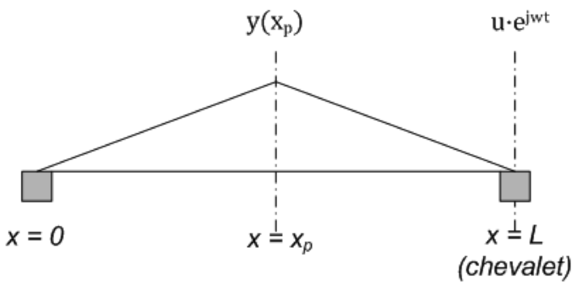


Fig. 2.3 – Corde pincée.

Supposons la corde fixée en $x = 0$ et soumise à un déplacement harmonique $we^{i\omega t}$ en $x = L$. Pour satisfaire la première condition, la constante A doit être nulle et donc le déplacement de la corde doit prendre la forme :

$$y(x) = B \sin \frac{\omega x}{c} \tag{2.6}$$

L'autre condition aux limites ($x = L$) impose :

$$y(x) = w \frac{\sin \frac{\omega x}{c}}{\sin \frac{\omega L}{c}} \tag{2.7}$$

En supposant que la force exercée en $x = L$ est de la forme $fe^{i\omega t}$, l'égalité des forces implique :

$$f = T \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=L} = T \frac{w\omega \cos \frac{\omega L}{c}}{c \sin \frac{\omega L}{c}} \tag{2.8}$$

où T indique la tension (en Newton). On retrouve donc la formule standard pour l'impédance d'une corde :

$$Z = \frac{f}{i\omega w} = -\frac{iT}{c} \cot \frac{\omega L}{c} \tag{2.9}$$

il faut développer l'expression ci-dessous en série afin de faire apparaître ses pôles. On utilise le développement en série de la cotangente[3] (voir par exemple [17] pour la preuve) pour obtenir :

$$Z = \frac{-iT}{L} \left(\frac{1}{\omega} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega - \frac{k\pi c}{L}} + \frac{1}{\omega + \frac{k\pi c}{L}} \right) \tag{2.10}$$

La raideur et l'amortissement sont donc introduits *a posteriori*. Les raideurs sont incluses dans l'écriture des fréquences de corde ω_k, alors que les amortissements sont ajoutées directement dans l'écriture de l'impédance de corde :

$$Z = \frac{-iT}{L} \left(\frac{1}{\omega} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega - \omega_k(1 + \frac{i\eta_k}{2})} + \frac{1}{\omega + \omega_k(1 + \frac{i\eta_k}{2})} \right) \tag{2.11}$$

où $\eta_n = 1/Q_n$ (adimensionné) avec Q_n le facteur de qualité du k-ième mode de corde compte pour l'amortissement. La raideur peut être prise en compte en utilisant :

$$\omega_k = \frac{k\pi c}{L} \left(1 + \frac{B}{2T} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \right) \tag{2.12}$$

où B est le facteur d'inharmonicité (N.m^{-2}) [18]. L'équation 2.11 peut se réécrire plus simplement :

[3] Cette formule, démontrée par Euler au §178 de son *Introductio in Analysin Infinitorium*, stipule que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\pi \cot \pi x = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x + k}$$

$$Z = \frac{-iT}{L}\left(\frac{1}{\omega} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\omega - i\omega_k\eta_k}{\omega^2 - i\omega\omega_k\eta_k - \omega_k^2(1 - \frac{\eta_k^2}{4})}\right) \tag{2.13}$$

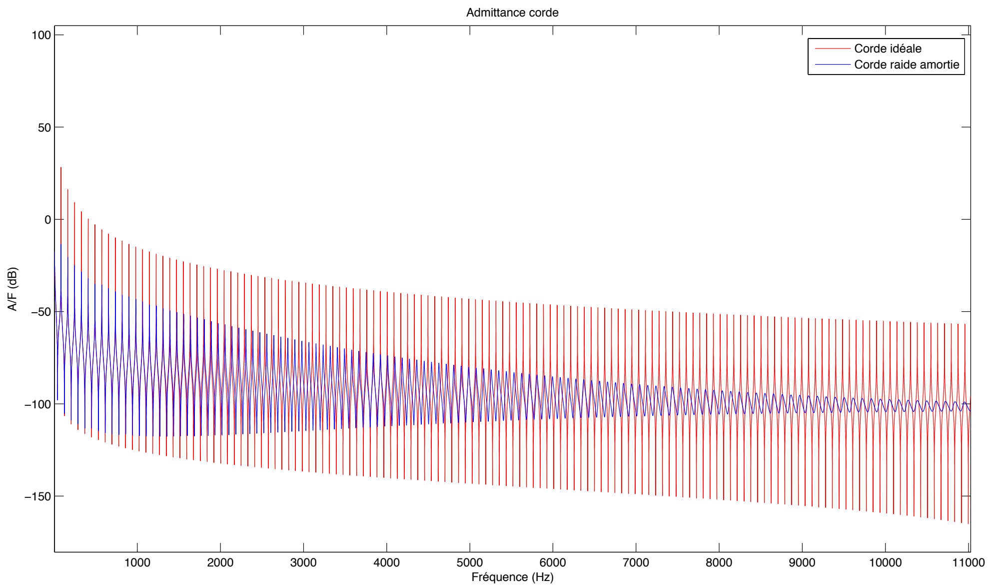


Fig. 2.4 – Comparaison de l'admittance pour une corde raide amortie et pour une corde idéale

2.2.1 Détermination des paramètres de la corde

La caractérisation des cordes requiert leur tension, masse linéique, rigidité et un modèle pour les coefficients d'amortissement. Les autres grandeurs d'intérêt telles que la célérité ou l'impédance caractéristique en découlent. On travaillera dans la suite avec des cordes de longueur L, de tension T, de masse linéique ρ, et de rigidité B[4].

Tensions, masses

Le site du fabriquant fournit les valeurs de la tension et masse linéique des cordes. Nous les avons mesurées pour une corde filée (Mi grave), et une corde en nylon (Mi aigu).

$$\rho_{E_1} = 3.96 \times 10^{-4} \pm 0.02 \text{ kg.m}^{-1} \quad (\text{valeur fabriquant } 3.82 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-1})$$
$$\rho_{E_6} = 5.41 \times 10^{-3} \pm 0.02 \text{ kg.m}^{-1} \quad (\text{valeur fabriquant } 5.12 \times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1})$$

On déduit de ces grandeurs la célérité et de tension. T est calculé à partir de la densité linéique et la célérité selon l'équation :

[4]Pour une corde solide homogène de rayon a et de module d'Young E, $B = \frac{E\pi a^4}{4}$

$$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{2.14}$$

Si la fréquence fondamentale de la corde est connue et vaut f_0, c peut être estimé selon $c = 2f_0L$.

$$T_{E_1} = 72.52 \pm 0.06 \text{ N} \quad \text{(valeur fabriquant 70.13 N}$$
$$T_{E_6} = 61.53 \pm 0.09 \text{ N} \quad \text{(valeur fabriquant 58.80N)}$$

Inharmonicité

Par contre, le facteur d'inharmonicité B doit être mesuré, ce qui se fait en mesurant les fréquences des harmoniques puis en les ajustant aux résultats théoriques connus pour une corde raide [18]. En pratique, plusieurs méthodes sont disponibles pour déterminer l'inharmonicité. Woodhouse [4] propose de relever sur un spectrogramme les premiers harmoniques pour la corde considérée à une frette donnée, et afin de relever leur fréquence avec plus de précision que l'espacement des *bins* FFT du sonagramme (étant donné que cette technique est basée sur des analyses FFT courtes), d'analyser la variation de la phase en fonction du temps dans le *bin* en question [19] : si le signal dans ce *bin* est dominé par une unique sinusoïde décroissante, la phase doit varier linéairement et son gradient peut être modélisé par régression linéaire. Ce gradient peut servir à corriger l'erreur par rapport à la fréquence centrale de chaque *bin*.

Nous calculons l'inharmonicité en mesurant les fréquences des harmoniques par une méthode itérative à partir d'enregistrements de notes isolées sur notre guitare test. L'algorithme utilisé consiste à estimer successivement sur le spectre chaque harmonique aux alentours des fréquences f_n obtenues par la suite $f_{n+1} = 2f_n - f_{n-1}$ ($f_0 = F_0$, $f_1 = 2F_0$). En l'absence d'inharmonicité, le quotient f_n/n est constant, ce qui est infirmé par la figure 2.5 Ce qu'on voit en fait est une droite de pente non nulle, étant donnée que les effets de l'inharmonicité (supposés faibles) entraînent une déviation progressive des harmoniques avec leur fréquence, de sorte que la n-ième harmonique est donnée par :

$$f_n \simeq nf_0 \left(1 + \frac{B\pi^2}{2TL^2}n^2\right) \tag{2.15}$$

avec f_0 la fréquence fondamentale, n le numéro d'harmonique et B le facteur d'inharmonicité. Une régression linéaire donne alors B.

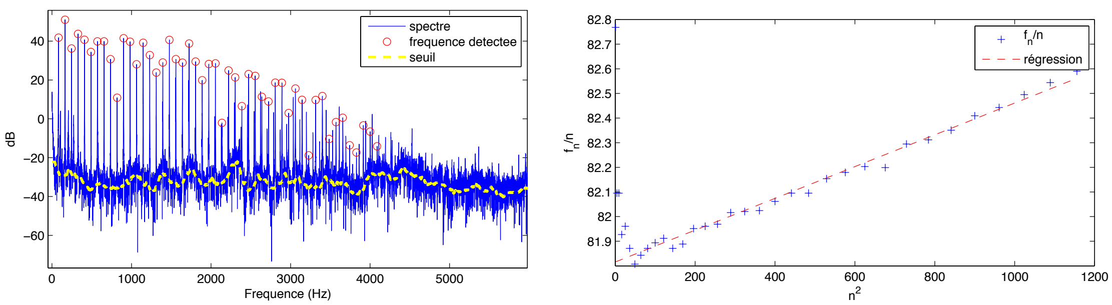


Fig. 2.5 – Corde pincée.

On peut encore améliorer les résultats en répétant cette opération sur toutes les frettes de la corde et en faisant la moyenne.

Amortissements intrinsèques à la corde

L'amortissement des modes de corde est la somme de plusieurs contributions. Une partie de cet amortissement provient des caractéristiques intrinsèques de la corde (friction, pertes visco-thermiques, raideur) [20], alors que l'autre partie provient du couplage avec la table. Dans cette partie nous discutons uniquement de la première contribution. Les amortissements intrinsèques, notés η_k dans la formule 2.13, sont d'importance primordiale dans le calcul de l'admittance. Ce sont néanmoins les paramètres les plus difficiles à mesurer précisément. Nous avons donc essayé deux méthodes. En premier lieu nous avons utilisé un modèle présenté dans [3] et incluant trois types d'amortissement : les frottements visqueux dus au mouvement de la corde dans l'air, la friction interne et la perte d'énergie due à la raideur. L'expression du facteur de perte pour le k-ième mode de corde est ainsi donné par :

$$\eta_k = \frac{T(\eta_F + \eta_A/\omega_k) + B\eta_B(k\pi/L)^2}{T + B(k\pi/L)^2} \tag{2.16}$$

où η_F, η_A et η_R sont des coefficients liés respectivement à la **f**riction, aux frottements dans l'**a**ir et à la **r**aideur, et dont les valeurs sont fourni par Woodhouse dans [3].

Les amortissements ont également été trouvés dans la littérature pour des cordes de guitare classique dans [21] pour les 10 premiers harmoniques. On peut observer que les amortissements suivent une tendance linéaire, les amortissements au delà du 10e mode ont donc provisoirement été calculés par extrapolation linéaire en attendant un examen plus poussé sur le sujet. Les résultats sont regroupés dans la figure 2.6, ou on montre ces amortissements jusqu'à 11025Hz pour la première corde (329,6Hz) pour les deux méthodes.

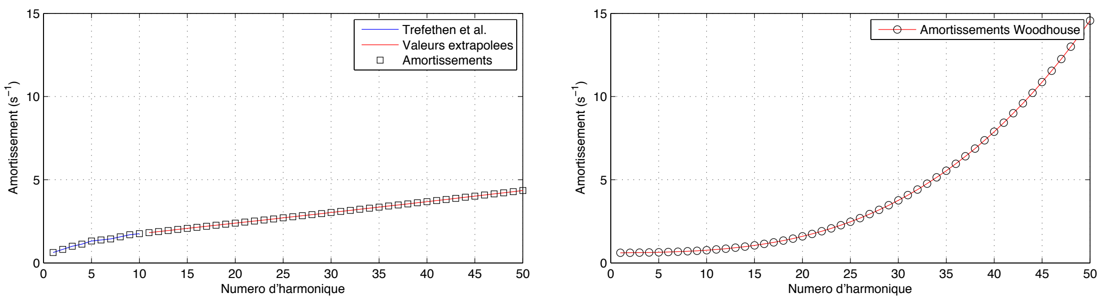


Fig. 2.6 – Comparaison des amortissements de cordes dans les deux modèles utilisés.

Les deux modèles donnent des résultats clairement différents. Il est en effet délicat de proposer un modèle détaillé pour les amortissements de la corde étant donné que les mécanismes physiques mis en jeu ne sont pas encore entièrement compris [20]. Plusieurs points mériteraient donc d'être approfondis car ces paramètres ont un impact sur la qualité de la synthèse. Cet aspects est discuté plus en détail en fin de rapport. Et par ailleurs, on peut se demander si les coefficients de friction, de raideur varient en fonction du matériau ou avec l'âge. Actuellement, très peu d'informations sont disponibles à ce sujet dans la littérature (*cf* [22]).

2.2.2 Fonction de transfert

Comme expliqué en 2.1, nous avons besoin de la fonction de transfert entre un déplacement donné appliqué à une extrémité de la corde et le déplacement correspondant au point d'application du pincement, appelé x_p sur la figure 2.3, et qu'on notera simplement x dans la suite. Cette fonction de transfert est calculée en Annexe B et vaut :

$$\frac{y}{w} = \frac{c}{\omega L}\sin(\frac{x\omega}{c}) + \frac{c}{L}\sum_{j=1}^{+\infty}(-1)^j \sin(\frac{x\omega}{c})\frac{2\omega - i\omega_j\eta_j}{\omega^2 - i\omega_j\omega\eta_j - \omega_j^2(1+\frac{\eta_j^2}{4})} \tag{2.17}$$

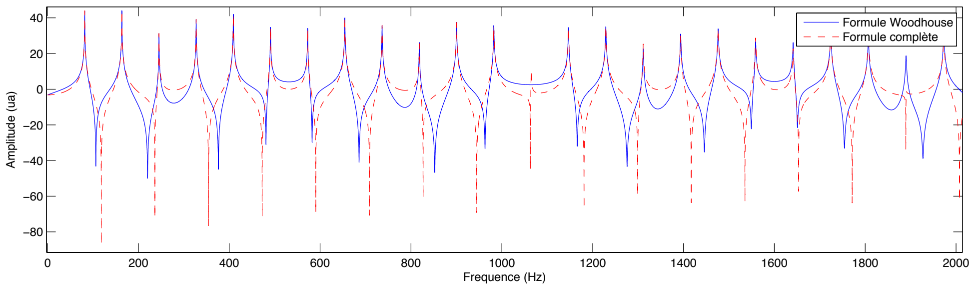


Fig. 2.7 – Comparaison de la formule de Woodhouse (approximée, en bleu) pour la fonction de transfert et la formule complète correspondante (en rouge).

2.3 Analyse du couplage corde/caisse

Le moyen le plus direct pour caractériser le comportement dynamique de la caisse de résonance se fait par le biais de l'*admittance* - appelée aussi *mobilité* - au point de contact avec la corde, où plus généralement par la matrice d'admittance en ce point si on tient compte des deux directions de polarisation de la corde (*cf* [18] [22]). La mobilité est d'ailleurs un facteur déterminant de la qualité d'une guitare. Plus le chevalet est mobile, mieux il transmettra les vibrations de la corde à la table d'harmonie. Le calcul de l'admittance nous permettra d'extraire les propriétés des modes : chaque mode possède une masse et une raideur effectives, et un angle propre de vibration au chevalet. Ils ont également une certaine efficacité de rayonnement, qui est utile si le but est de reproduire un champ sonore. Néanmoins, dans un premier temps, nous nous efforcerons de reproduire la réponse telle que mesurée sur la structure. Précisons encore que les effets de l'air environnant la caisse de résonance sont inclus implicitement dans le calcul étant donné qu'ils influent sur l'admittance, et les modes que nous observons sont en fait des modes du système couplé air-structure.

Afin de mesurer l'impédance, on excite la table d'harmonie en un point x_0 du chevalet à l'aide d'une force $f_p(t)$, et on mesure la vitesse de déplacement de la table au point d'impact. L'admittance au point x_0 est définie par :

$$\hat{Y}(f) = \frac{\hat{\gamma}(f)}{\hat{F}(f)} \tag{2.18}$$

où l'on désigne par $\hat{\phi}(f)$ la transformée de Fourier de la fonction $\phi(t)$.

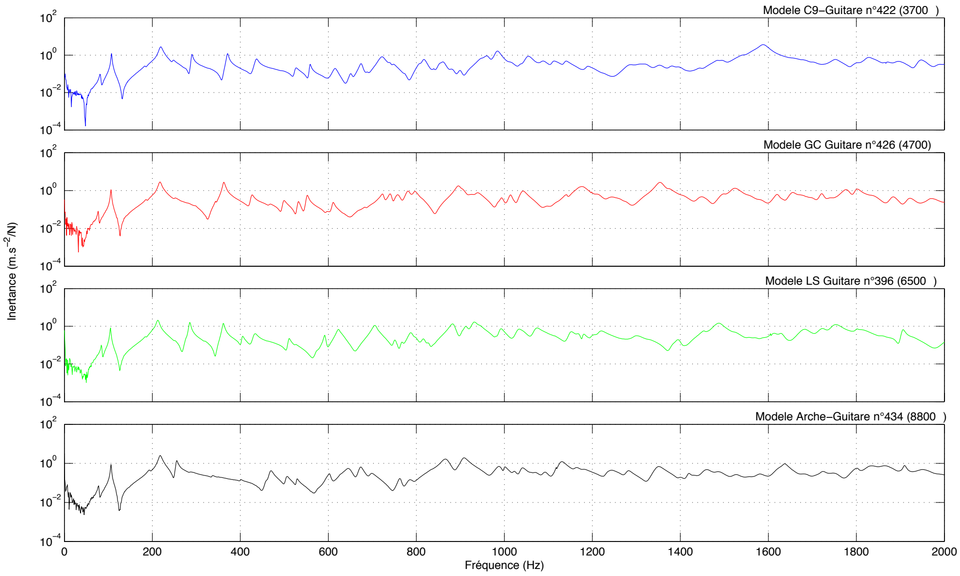


Fig. 2.8 – Quelques mesures d'admittance effectuées sur des guitares de luthier (J.-M. Fouilleul)

2.3.1 Expression modale

Cas unidimensionnel

Ici nous retrouvons le résultat utilisé par Woodhouse [3, 4] comme point de départ pour la synthèse modale. Supposons qu'une structure *conservative* soit soumise à une excitation ponctuelle harmonique - de pulsation ω - au point de coordonnées (x_F, y_F) de la forme :

$$f(x_F, y_F) = F_0 \delta(x - x_F)\delta(y - y_F) sin(\omega t). \tag{2.19}$$

On notera cette expression f_F. En utilisant le formalisme présenté en annexe A et en utilisant les propriétés d'orthogonalité A.4, le déplacement u_A de la structure au point d'observation (x_A, y_A) s'écrit

$$u_A = \sum_n \Phi_n(x_A, y_A) q_n(t) \tag{2.20}$$

La projection des efforts extérieurs sur le mode n s'écrit $f_n = \Phi_n(x_A, y_A) q_n(t)$ (force généralisée au point d'excitation). Le système de n oscillateurs découplés amortis à un degré de liberté A.16 peut s'écrire :

$$\ddot{q}_n + 2\xi_{nm}\omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{\Phi_n(x_F, y_F) f_F}{m_n} \tag{2.21}$$

En prenant la transformée de Fourier de cette expression, en notant dans le domaine fréquentiel les déplacements généralisés $Q_n(\omega)$, $F_0 = F(x_F, y_F)$ la transformée de Fourier de f_F, on obtient :

$$\ddot{Q}_n(\omega) = \frac{\Phi_n(x_F, y_F) F(x_F, y_F)}{m_n(\omega_n^2 + 2i\xi_{nm}\omega_n\omega - \omega^2)} \tag{2.22}$$

Le déplacement au point d'observation (x_A, y_A) s'écrit alors dans le domaine fréquentiel :

$$U(x_A, y_A, \omega) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{F_0 \Phi_n(x_F, y_F)\Phi_n(x_A, y_A)}{m_n(\omega_n^2 + 2i\xi_{nm}\omega_n\omega - \omega^2)} \tag{2.23}$$

L'expression de l'admittance de transfert entre les points (x_A, y_A) et (x_F, y_F) est donc :

$$Y_{AF}(\omega) = \frac{\dot{U}(x_A, y_A)}{F(x_F, y_F)} = \frac{i\omega U(x_A, y_A)}{F_0} = i\omega \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Phi_n(x_F, y_F)\Phi_n(x_A, y_A)}{m_n(\omega_n^2 + 2i\xi_n\omega_n\omega - \omega^2)} \tag{2.24}$$

Notons qu'on retrouve là un résultat intéressant : il est possible d'intervertir les positions d'excitation et d'observation sans que cela ne change l'expression de l'admittance. C'est la *propriété de réciprocité* des fonctions de transfert de type excitation-réponse [18]. Au point d'excitation, l'admittance se simplifie :

$$\boxed{Y_A(\omega) = \frac{\dot{U}(x_A, y_A)}{F(x_A, y_A)} = i\omega \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\Phi_n^2(x_A, y_A)}{m_n(\omega_n^2 + 2i\xi_n\omega_n\omega - \omega^2)}} \tag{2.25}$$

ce qui correspond à la somme des admittance d'oscillateurs amortis à un degré de liberté [23]. Cette expression est très utile pour étudier le comportement de la guitare en basse fréquences étant donné que les pics de résonance peuvent être aisément isolés et un faible nombre de termes de la série suffit pour rendre compte de la réponse de la structure [24].

Cas bidimensionnel

Dans cette section les deux directions de polarisations de la corde (transverse et tangentiel à la table d'harmonie en position de repos) sont prises en compte. Dans tous les instruments à cordes, y compris la guitare, la corde excite la table d'harmonie au travers le chevalet, auquel elle est attachée. L'admittance mécanique du chevalet, néanmoins, est non-nulle et différente pour un mouvement parallèle ou normal à la table d'harmonie. Il est donc nécessaire de réécrire l'expression analytique de cette admittance mécanique afin de prendre en compte ce couplage.

Traiter les deux directions de polarisation de la corde implique de prendre en compte le déplacement du chevalet dans les directions normale et parallèle à la table de d'harmonie. Au niveau mathématique, cela revient à remplacer l'impédance d'entrée Y calculée précédemment par une matrice à deux dimensions :

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \tag{2.26}$$

Il est pratique de définir Y_{11} comme l'admittance dans la direction normale comme calculée précédemment, et Y_{22} l'admittance dans la direction tangentielle au sillet. Les termes non diagonaux Y_{12} et Y_{21} sont les termes de couplages, ou admittance croisée. Comme auparavant, ces grandeurs peuvent être exprimées en comme une somme modale. Néanmoins, il est nécessaire d'introduire une propriété additionnelle pour chaque mode : l'angle θ_k du mouvement de la table d'harmonie au chevalet, mesuré depuis la direction normale [4]. On obtient :

$$Y_{11}(\omega) = i\omega \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos^2(\theta_k)}{m_k(\omega_k^2 + 2i\xi_k\omega_k\omega - \omega^2)} \tag{2.27}$$

$$Y_{22}(\omega) = i\omega \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(\theta_k)}{m_k(\omega_k^2 + 2i\xi_k\omega_k\omega - \omega^2)} \tag{2.28}$$

Les termes croisés Y_{12} et Y_{12} sont égaux en vertu du théorème de réciprocité dans le cas linéaire :

$$Y_{12}(\omega) = Y_{21}(\omega) = i\omega \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(\theta_k)\cos(\theta_k)}{m_k(\omega_k^2 + 2i\xi_k\omega_k\omega - \omega^2)} \tag{2.29}$$

2.3.2 Effet de la corde

Le processus de synthèse requiert également l'admittance au chevalet. Deux options s'offrent à nous : on peut utiliser directement l'admittance mesurée ou la calculer en utilisant les valeurs paramètres modaux obtenus par ESPRIT. La figure 2.9 montre les effets du couplage avec la corde au niveau du chevalet sur la mobilité par rapport à celle de la caisse seule.

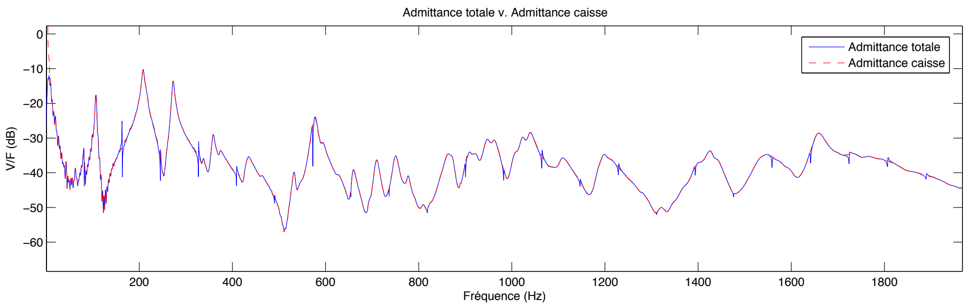


Fig. 2.9 – Comparaison de l'admittance au chevalet en tenant compte ou non des effets de corde.

Chapitre 3

Mesures

3.1 Mesures effectuées

3.1.1 Protocole de mesure

Les mesures d'admittance ont été réalisées au sein du laboratoire d'acoustique de Télécom ParisTech[1] sur deux guitares, d'entrée de gamme pour l'une (**Ibanez 2005**), et milieu de gamme pour l'autre (**Picado 1991**) dans un premier temps. Afin de mesurer uniquement la contribution de l'admittance au chevalet, les cordes ont été étouffées au préalable par des morceaux de feutre. La figure 3.1 illustre le montage utilisé pour cette expérience.

Il est important de noter ici que la méthode de suspension de la guitare est déterminante. En effet, la réponse en fréquence sera celle du système couplé "guitare+suspension". Par conséquent, il est important de choisir une méthode de suspension à la fois non-invasive (c'est-à-dire qui ne modifie pas la structure du système étudié) et dont la réponse propre est en dehors de la gamme de fréquences d'intérêt. Nous avons choisi de suspendre la guitare par le col avec des sangles élastiques, dont les modes de vibrations sont à des fréquences assez basses (de l'ordre du Hertz) pour ne pas perturber nos mesures (au delà de 50Hz).

L'excitation de la table est donnée par un marteau d'impact à balancier[2] permettant de fournir une impulsion de force très localisée (de l'ordre de quelques millisecondes). La mesure de vitesse est quant à elle effectuée à l'aide d'un accéléromètre piézoélectrique[3].

L'acquisition des données est faite par une carte de son externe[4] et un logiciel d'édition audio standard (Audacity), à une fréquence d'échantillonnage de 48kHz. Afin de s'isoler du 50Hz émis par le réseau électrique, toutes les masses ont soigneusement été reliées entre elles. Notons que l'amplificateur utilisé permet d'activer ou désactiver les masses en entrée et en sortie. Les accéléromètres sont également reliés à la masse.

[1] 1, rue Barrault, 75013 Paris
[2] Brüel & Kjaer 8203
[3] Brüel & Kjaer 4374 n°2209533
[4] Edirol UA-5

Fig. 3.1 – Photographie du montage expérimental utilisé pour la mesure d'admittance au chevalet.

3.1.2 Résultats

Dans un premier temps, nous ne nous intéressons qu'au mouvement perpendiculaire de la table d'harmonie. Un exemple typique de de courbe d'admittance est présenté en figure 3.2.

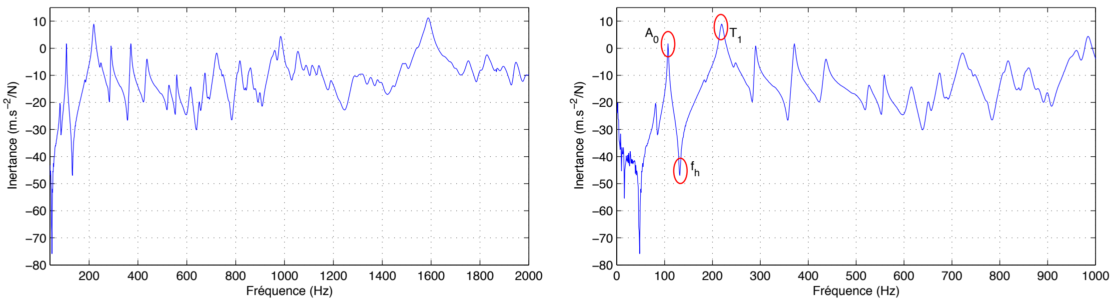


Fig. 3.2 – Mesure de l'admittance normale, de 0 à 2kHz, et agrandissement en basses fréquences.

La structure modale à basses fréquences de la guitare classique est bien connue : les mouvements couplés de la table et du piston d'air situé au voisinage de la rosace donnent lieu à deux modes, notés classiquement A_0 et T_1. La fréquence f_h de l'antirésonance, observée entre les fréquences de résonance de A_0 et T_1 correspond à la fréquence de résonance du résonateur de Helmholtz de la cavité à parois rigides. Les trois fréquences correspondantes f_{A_0}, f_{T_1} et f_h sont relevées sur le graphe de droite de la figure 3.2.

Par ailleurs, l'admittance moyenne entre 0 et 1kHz est environ 8dB au-dessus de la valeur moyenne entre 1 et 2, 5kHz, ce qui traduit une mobilité plus importante de la table en basse fréquences. En raison des couplages et des amortissements (internes et par rayonnement), les pics sont clairement séparés jusqu'à 1kHz et se chevauchent de plus en plus jusqu'à former quasiment un continuum au delà de 2500Hz (*cf* section 4.6).

La mesure possède également une excellente reproductibilité. La figure 3.3 montre la superposition de 6 mesures d'admittance normale. La superposition est quasiment parfaite jusqu'à environ 9kHz, à partir d'où il devient difficile d'obtenir de bons résultats.

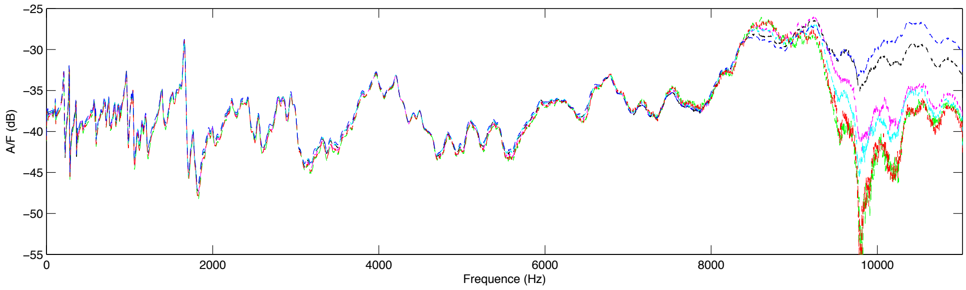


Fig. 3.3 – Superposition de 6 mesures d'admittance.

3.2 Cas bidimensionnel

3.2.1 Mesures effectuées

Protocole

La figure 3.5 montre le principe de la procédure expérimentale pour obtenir les quatre termes de la matrice d'admittance. Le premier schéma montre comment obtenir Y_{11} et Y_{21}, le deuxième schéma montre comment obtenir Y_{22} et Y_{12}. En pratique, l'accéléromètre doit être placé le plus près possible du point de fixation de la corde utilisée pour la mesure d'admittance (Mi grave le plus souvent) et du point d'impact, comme le montre la figure 3.4.

L'impulsion de force est donnée par un marteau B&K 8203 (similaire à celui utilisé dans [25]), et mesurée par un transducteur de force embarqué dans le marteau. Le marteau étant monté sur un système de pendule, ce système assure une bonne reproductibilité des impacts. Les signaux de vitesse sont obtenus par intégration des données recueillies par l'accéléromètre. La figure 3.6 ci-dessous montre un exemple typique des signaux temporels obtenus de cette manière.

Comme on l'a montré précédemment, l'admittance au chevalet peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

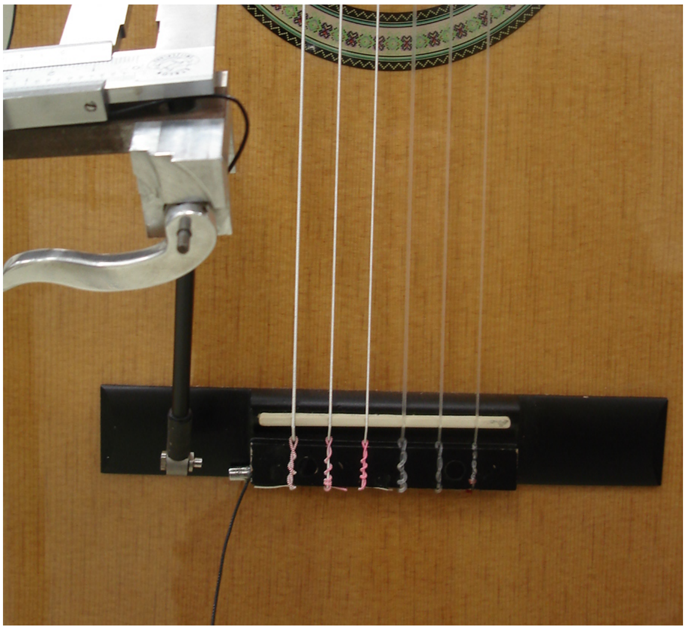


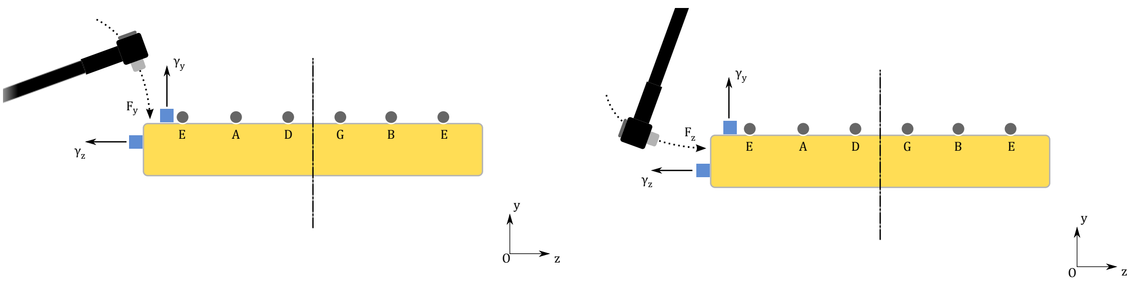
Fig. 3.4 – Photographie montrant la mesure de Y_{22}.

Par conséquent, notre méthode opératoire telle que présentée dans la figure 3.5 nous permet de calculer les quatre termes de la matrice d'admittance dans le domaine fréquentiel :

$$Y_{ij}(\omega) = \frac{V_i(\omega)}{F_j(\omega)} \tag{3.2}$$

Dans notre cas, la modélisation par ESPRIT (*cf* 4.2) fournissant de meilleurs résultats en utilisant l'accélération impulsionnelle (rapport de l'accélération sur la force), nous utilisons préférentiellement cette grandeur, que l'on appellera Y également. On a donc :

$$Y_{ij}(\omega) = \frac{A_i(\omega)}{F_j(\omega)} \tag{3.3}$$



(a) (b)

Fig. 3.5 – Mesure de l'admittance par excitation impulsionnelle. Y_{11} et Y_{21} peuvent être obtenus avec (a), Y_{22} et Y_{12} peuvent être obtenus avec (b).

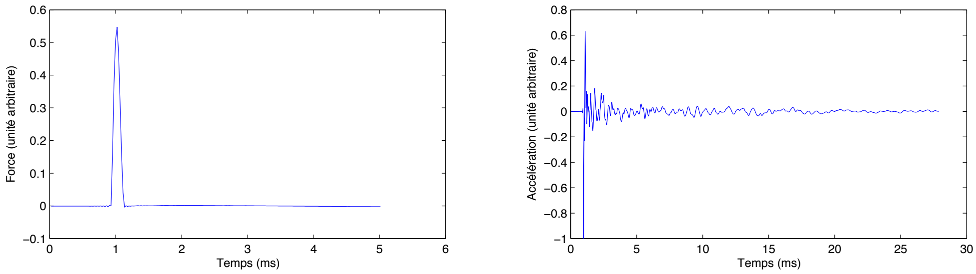


Fig. 3.6 – Signal d'accélération (à droite) et de force (à gauche).

où $A_i(\omega)$ est la transformée de Fourier du signal d'accélération temporelle. Notons que cette commodité mathématique n'a pas d'impact sur le reste du traitement, dans le sens où il suffit d'effectuer une division par $j\omega$ pour retrouver l'expression traditionnelle de admittance en vitesse sur force.

Résultats

La figure 3.7 montre la forme des 4 termes de la matrice d'admittance tels que nous les avons mesurés. Comme prévu, le terme Y_{11} est clairement le terme de plus grande amplitude, ce qui confirme que la mobilité du chevalet est plus grande dans la direction normale que tangentielle. Les trois autres termes sont du même ordre de grandeur, à environ -10dB à -15dB sous Y_{11}. Néanmoins il est clair que pour certaines portions du spectre, ce rapport d'amplitude diminue considérablement. Le couplage devrait donc être plus important dans ces domaines. Au dessus de 2kHz, il n'est pas rare de voir que que Y_{12} et Y_{22} sont d'amplitude supérieure à Y_{11}.

La fiabilité de ces mesures peut être testée en vérifiant que la réciprocité $Y_{12} = Y_{21}$ est bien assurée, ce qui est clairement montré sur le second graphe. Dans l'ensemble, ces résultats sont tout à fait comparables avec ceux effectués par Lambourg et Chaigne [25] et Woodhouse [3].

On peut également tester la robustesse des modes dans les mesures en appliquant ESPRIT (*cf* 4.2) séparément sur chacun des 4 termes de la matrice d'admittance présentés dans la figure 3.7, puis en comparant les fréquences des modes ainsi détectés. On présente ces résultats sous la forme d'un histogramme dans la figure 3.8.

La résolution est de 3Hz et le nombre moyen de modes détectés dans la bande de fréquence considérée (0-1375Hz) est de 24. Sur ces 24 modes, 12 sont détectés dans les 4 mesures à moins de 3Hz d'intervalle, 7 à moins de 10Hz. Pour chaque composante de la matrice d'admittance, ESPRIT détecte donc en moyenne 5 composantes qu'on ne retrouve pas automatiquement dans les trois autres. Ceci est donc un problème potentiel en vue d'une synthèse modificatrice, étant donné que si on veut changer certaines des propriétés des modes, il faut le faire sur les quatre composantes de l'admittance 2D. Il serait intéressant de refaire cette expérience en utilisant la méthode dite du *wire-break* (*cf* 7.3.1) pour voir si les modes ainsi détectés sont plus robustes.

3.2.2 Obtention des θ_k

Nous avons vu dans les pages précédentes que si nous souhaitons effectuer une synthèse fidèle, il est nécessaire d'avoir accès aux angles θ_k introduits dans cette section. Il est évident qu'une mesure

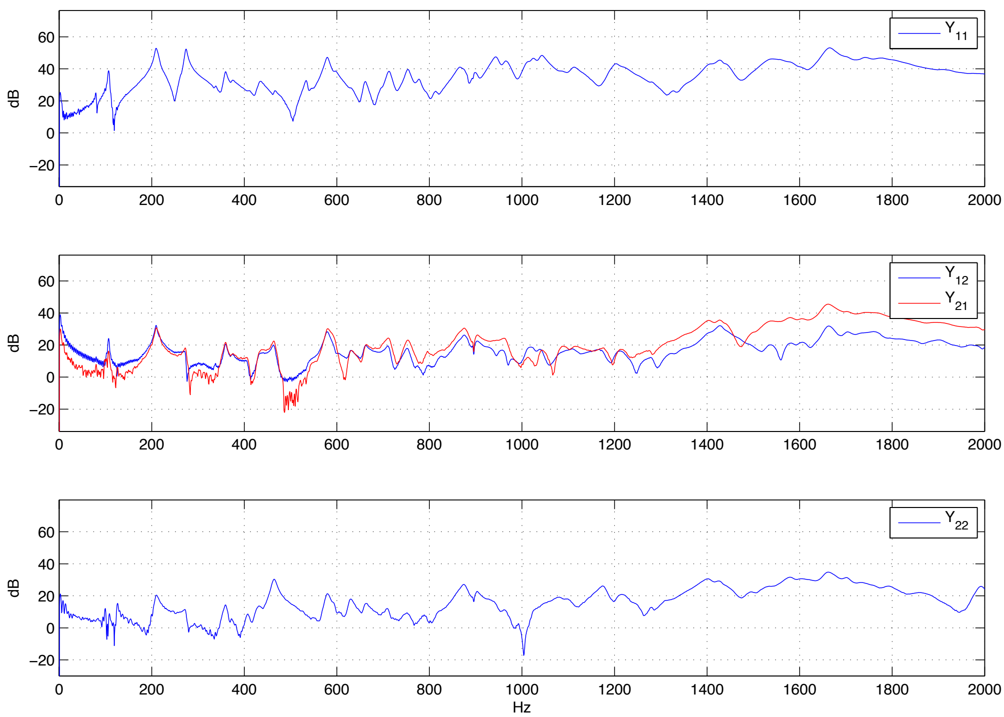


Fig. 3.7 – Réponse en fréquence des 4 termes de la matrice d'admittance.

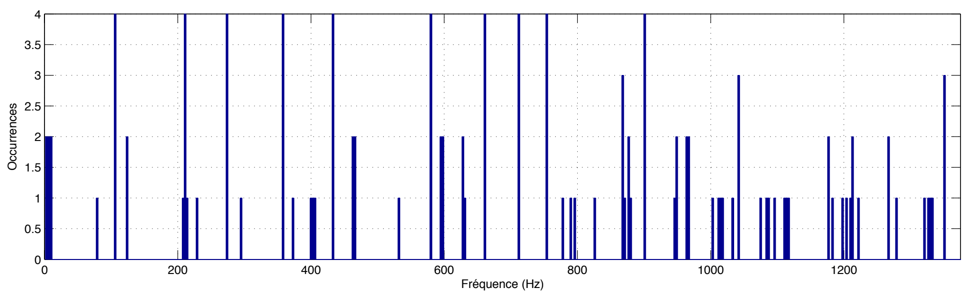


Fig. 3.8 – Réponse en fréquence des 4 termes de la matrice d'admittance.

directe de ces paramètres est inenvisageable, étant donné que la valeur de l'angle est *a priori* différente pour chaque mode. Woodhouse montre qu'il est possible d'obtenir de bons résultats en utilisant une distribution statistique des angles entre $-90°$ et $90°$ et centrée en 0.

Néanmoins, la forte similitude entre les 4 formules énoncées en 2.3.1 (en particulier le fait qu'un seul paramètre additionnel soit introduit pour passer d'une à deux dimensions) suggère qu'il est possible de passer d'une composante de l'admittance à une autre grâce à des transformations mathématiques élémentaires, au moins en basses fréquences. En supposant le recouvrement modal assez faible, on peut estimer qu'aux alentours du mode k :

$$Y_{11}(\omega)|_{\omega=\omega_k} \simeq \frac{i\omega \cos^2(\theta_k)}{m_k(\omega_k^2 + 2i\xi_k\omega_k\omega - \omega^2)} \tag{3.4}$$

$$Y_{22}(\omega)|_{\omega=\omega_k} \simeq \frac{i\omega \sin^2(\theta_k)}{m_k(\omega_k^2 + 2i\xi_k\omega_k\omega - \omega^2)} \tag{3.5}$$

$$Y_{12}(\omega)|_{\omega=\omega_k} = Y_{21}(\omega) \simeq \frac{i\omega \sin(\theta_k)\cos(\theta_k)}{m_k(\omega_k^2 + 2i\xi_k\omega_k\omega - \omega^2)} \tag{3.6}$$

Et par conséquent, on aurait par exemple **aux alentours** de ω_k :

$$Y_{12} = Y_{21} \simeq \sqrt{(Y_{11} \times Y_{22})} \tag{3.7}$$

Les considérations ci-dessus permettent de retrouver les angles θ_k pour chaque mode. La figure 3.9 montre la distribution des angles obtenus par cette méthode. On est confortés par le fait que la distribution est clairement centrée en zéro, ce qui confirme que la plupart des modes oscillent dans la direction normale à la table, et donc que le rayonnement se fait préférentiellement dans cette direction.

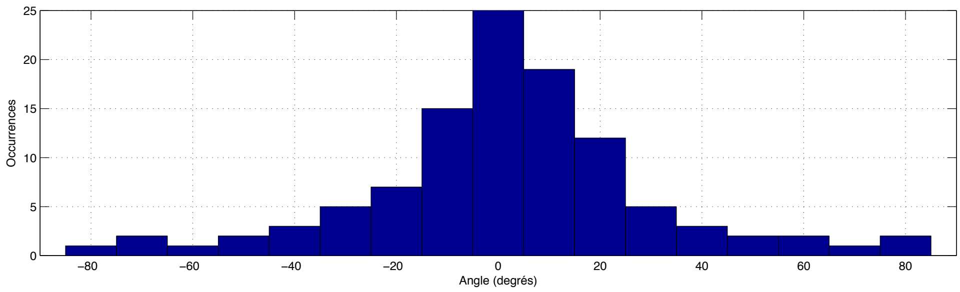


Fig. 3.9 – Distribution des angles θ_k

Chapitre 4

Détermination des paramètres modaux/Modélisation

4.1 Méthodes Haute Résolution

Maintenant que nous avons obtenu des mesures satisfaisantes de l'admittance au chevalet, nous cherchons à modéliser cette admittance. Plusieurs techniques peuvent être envisagés. Cependant, comme nous l'expliquons plus bas, la forme particulière de l'admittance, qui présente un recouvrement modal assez important dans certaines gammes de fréquence, ainsi qu'une forme temporelle fortement atténuée nous a orienté vers les méthodes à *haute résolution* (HR).

Les méthodes HR se basent sur représentation paramétrique du signal, appelée *Exponential Sinusoidal Model* (ESM). Le signal à analyse $x(t)$ est alors modélisé comme une somme de sinusoïdes $s(t)$ dont l'amplitude varie exponentiellement, et d'un bruit blanc gaussien $\beta(t)$ complexe centré[1] de variance σ^2. On obtient ainsi la relation :

$$x(t) = s(t) + b(t) \tag{4.1}$$

En écrivant le signal déterministe $s(t)$, quant à lui, s'écrit sous la forme :

$$s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k z_k^t \tag{4.2}$$

où $K \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_k = a_k e^{i\phi_k}$ et $z_k = e^{\delta_k} e^{2i\pi f_k} \in \mathbb{C}^*$ sont respectivement le nombre d'exponentielles complexes, les amplitudes et les pôles complexes du modèle. $\delta_k \in \mathbb{R}$ est appelé *facteur d'atténuation* (ou *taux d'amortissement*) des sinusoïdes. On conçoit donc bien que ce modèle de signal est adapté à la description de l'amortissement naturel des systèmes vibratoires linéaires libres.

Si on restreint l'horizon d'observation en définissant le vecteur $s(t) = [s(t-l+1), ..., s(t+n-1]^T$ où les entiers n et l vérifient $N = n + l + 1$ avec N la longueur du signal x à modéliser et en posant $v(z) = [1, z, z^2, ..., z^{N-1}]^T$ ainsi que $\alpha = [\alpha_0, ...\alpha_{K-1}]^T$, $s(t)$ vérifie alors :

[1] On rappelle qu'un bruit blanc gaussien complexe centré est une suite de variable aléatoires *indépendantes et identiquement distribuées* à valeurs complexes, de densité de probabilité $p(b) = \frac{1}{\pi\sigma^2} e^{-\frac{|b|^2}{\sigma^2}}$

$$\boxed{s(t) = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k z_k^{t-l+1} v(z_k) = \mathbf{V}^N \mathbf{D}^{t-l+1} \alpha} \tag{4.3}$$

avec $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(z_0, ..., z_{K-1})$ une matrice diagonale de dimensions KxK, et $\mathbf{V}^N = [v(z_0), ..., v(z_{K-1})]$ la matrice de Vandermonde de dimensions NxK définie à partir des pôles z_k.

L'avantage des méthodes HR sur les méthodes à base de transformations de Fourier) est qu'en l'absence de bruit, leur précision est virtuellement infinie [26] (limitée en pratique par la précision finie des machines de calcul), étant donné qu'elles ne sont pas sujettes aux problèmes liés aux fenêtrage qui apparaissent avec la transformation de Fourier. Néanmoins, elles restent pour la plupart encore peu utilisées dans le cadre du traitement du signal audio du fait de leur grande complexité algorithmique, malgré qu'elles se soient montrées particulièrement efficaces sur des fenêtres temporelles courtes [26] et dans le cas de signaux fortement attenués [27]. Néanmoins, plus que la complexité algorithmique, la principale limitation des méthodes HR réside dans leur grande sensibilité aux erreurs de modélisation, n'étant pas adaptées à l'analyse de signaux qui ne seraient pas proche du modèle de signal utilisé.

4.2 ESPRIT

La méthode ESPRIT (pour Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques) [28] s'appuie sur une décomposition de l'espace signal en deux sous-espaces propres : le *sous-espace signal* engendré par les composantes sinusoïdales amorties et le *sous-espace bruit* formant son complémentaire orthogonal. Badeau [26] a montré que la méthode ESPRIT est plus robuste que les autres méthodes HR (en particulier du fait de sa moindre sensibilité au bruit). C'est donc sur cette méthode que s'est porté notre choix.

Par souci de concision, seules les grandes étapes du calcul seront présentées ici. Pour plus de détails, ainsi que les preuves mathématiques des propriétés utilisées, le lecteur intéressé pourra se référer à [26], [28] ou encore [29].

La première étape de l'algorithme ESPRIT consiste à former (à *calculer* pour $\mathbf{X}$) les matrices de Hankel $\mathbf{S}$ et $\mathbf{X}$ à partir des signaux discrets (de longueur N) s_i et x_i :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{t-l+1} & s_{t-l+2} & \cdots & s_t \\ s_{t-l+2} & & & s_{t+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ s_{t-l+n} & s_{t-l+n+1} & \cdots & s_{t+n-1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{t-l+1} & x_{t-l+2} & \cdots & x_t \\ x_{t-l+2} & & & x_{t+1} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{t-l+n} & x_{t-l+n+1} & \cdots & x_{t+n-1} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

avec $l = N - n + 1$, n étant la somme des dimensions des sous-espaces signal et bruit. A partir de ces deux matrices, on obtient les matrices d'autocorrélation $\mathbf{R}_{ss}$ et $\mathbf{R}_{xx}$ (qu'on calcule pour $\mathbf{R}_{xx}$) par la relation :

$$\mathbf{R}_{ss} = \frac{1}{l} S S^H \qquad \mathbf{R}_{xx} = \frac{1}{l} X X^H \tag{4.5}$$

La matrice $\mathbf{R}_{ss}$ est singulière, de rang K inférieur à n. Son espace image est égal à l'espace signal. Son noyau, orthogonal à l'espace signal, est l'espace bruit. L'espace signal est aussi l'espace propre principal de $\mathbf{R}_{ss}$, ce qui reste vrai même en présence de bruit blanc. Il est nécessaire pour la suite d'introduire également une base de l'espace signal $\mathbf{W}(t)$ (qui peut être obtenue soit comme la base des principaux vecteurs propres de $\mathbf{R}_{ss}(t)$ ou comme toute autre base de l'espace propre principal de $\mathbf{R}_{ss}(t)$). Comme le bruit blanc est supposé gaussien de variance σ^2 :

$$\mathbb{E}[\mathbf{R}_{xx}] = \mathbf{R}_{ss} + \sigma^2 \mathbf{I} \tag{4.6}$$

ce qui montre que les vecteurs propres de $\mathbf{R}_{ss}$ sont des vecteurs propres de $\mathbf{R}_{xx}$ dans la limite où l'estimation est parfaite. L'algorithme ESPRIT nécessite les K vecteurs propres de $\mathbf{R}_{ss}$ pour pouvoir déterminer les pôles z_k. On montre à présent comment trouver K et ces vecteurs propres.

Les valeurs propres $\lambda_{m,m=1,\dots,n}$ et les vecteurs propres correspondant w_m de $\mathbf{R}_{xx}$ sont calculés. Il peut être montré [29] que les valeurs propres sont réelles et positives, et que celles associées au sous-espace bruit sont égales[2] à σ^2.

En classant les valeurs propres par ordre décroissant, celles associées au signal modal sont naturellement sélectionnées. En principe, la valeur K correspond exactement au nombre de valeurs propres vérifiant $\lambda_m \geq \sigma^2$. En pratique, on peut avoir recours au critère ESTER pour déterminer K de manière plus robuste (voir 4.7).

ESPRIT s'appuie sur une propriété forte de l'espace signal pour en déterminer une base : *l'invariance rotationnelle*. En définissant les matrices $\mathbf{V}_\uparrow$ et $\mathbf{V}_\downarrow$ les matrices de dimensions de $(n-1)xK$ contenant respectivement les $(n-1)$ dernières lignes et les $(n-1)$ premières lignes de $\mathbf{V}^N$. La propriété d'invariance rotationnelle s'écrit alors :

$$\mathbf{V}_\uparrow = \mathbf{V}_\downarrow \mathbf{D} \tag{4.7}$$

Etant donné que les colonnes des matrices $\mathbf{V}^N$ et $\mathbf{W}(t)$ constituent deux bases du même espace signal, il existe une matrice inversible $\mathbf{G}$ de dimensions KxK telle que $\mathbf{V}^N = \mathbf{W}(t)\mathbf{G}(t)$. $\mathbf{G}(t)$ est donc simplement la matrice de passage de la première base à la seconde. L'équation 4.7 devient donc :

$$\boxed{\mathbf{W}_\uparrow(t) = \mathbf{W}_\downarrow(t)\mathbf{\Phi}(t)} \tag{4.8}$$

où $\mathbf{\Phi}(t)$ est la *matrice spectrale*, définie par son équation aux valeurs propres :

$$\boxed{\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{G}(t)\mathbf{D}\mathbf{G}(t)^{-1}} \tag{4.9}$$

Les valeurs propres de $\mathbf{\Phi}(t)$ sont donc les pôles z_k. On peut montrer enfin qu'en multipliant l'équation 4.8 à gauche par $\mathbf{W}_\downarrow^H(t)$, et en admettant que la matrice $\mathbf{W}_\downarrow^H(t)\mathbf{W}_\downarrow(t)$ est inversible (pour la preuve, se référer à [29] par exemple), on obtient l'expression de $\mathbf{\Phi}(t)$:

$$\boxed{\mathbf{\Phi}(t) = \left(\mathbf{W}_\downarrow^H(t)\mathbf{W}_\downarrow(t)\right)^{-1} \mathbf{W}_\downarrow^H(t)\mathbf{W}_\uparrow(t)} \tag{4.10}$$

Le calcul de $\mathbf{\Phi}(t)$ nous permet par diagonalisation de trouver l'ensemble des pôles z_k. Une fois ces pôles complexes déterminés, les fréquences et coefficients d'atténuation sont trouvés par :

$$\delta_k = \ln(|z_k|) f_k = \frac{1}{2\pi} \arg(z_k) \tag{4.11}$$

L'algorithme a été codé sous Matlab et le code correspondant est présenté en annexe C.1

[2] Presque égales dans le cas où le bruit additif n'est pas un bruit blanc.

4.3 Estimation de l'amplitude et des phases

Les amplitudes et phases a_k et ϕ_k (réelles) peuvent être obtenues en appliquant la méthode des moindres carrés [30]) :

$$\alpha_k(t) = \mathbf{V}_n^{\dagger} x(t) \tag{4.12}$$

On en déduit $a_k = |\alpha_k|$ et $\phi_k = \arg(\alpha_k)$. D'après le théorème de Gauss-Markov, l'estimateur des moindres carrés est un estimateur linéaire sans biais, de variance minimale parmi tous les estimateurs linéaires sans biais, dans la mesure où le bruit additif est blanc [26]. Dans le cas où le bruit additif est coloré, l'estimateur optimal est obtenu par la méthode des moindres carrés pondérés (on pourra consulter [30] ou [31] pour des informations détaillées sur l'estimation des amplitudes par la méthode des moindres carrés pondérés).

4.4 Prétraitement du signal

Nous avons déjà mentionné que le pour des résultats optimaux, la méthode ESPRIT requiert que le bruit soit blanc. Les résultats de la méthode ESPRIT sont largement améliorés par un prétraitement du signal effectué en amont [32]. Ici on applique un filtrage médian sur une largeur de 200Hz suivi d'un redressement, qui consiste à effectuer un modèle AR, duquel on extrait les coefficients d'un filtre qui, appliqué au signal original, nous permet d'obtenir le spectre redressé. Le code correspondant est fourni en Annexe C.3.

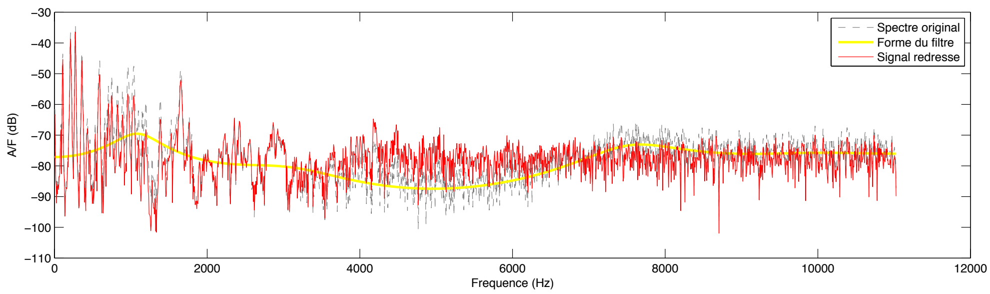


Fig. 4.1 – Redressement du spectre et filtrage médian.

Les composantes fréquentielles en dehors de la gamme dynamique (choisie à 80dB) sont ensuite réajustées au minimum de la dynamique ($max - dyn$).

4.5 Résultats

La méthode ESPRIT a été implémentée et appliquée aux signaux d'admittance mesurés dans le but d'estimer leurs paramètres (utilisés pour la synthèse). Les signaux analysés correspondent à ceux mesurés avec les cordes étouffées, c'est-à-dire l'admittance de la caisse sans les effets des cordes. Étant donné qu'ESPRIT travaille avec des signaux temporels, et que nous construisons l'admittance par division spectrale de l'accélération et de la force appliquée au point de contact de la corde sur le chevalet, le procédé suivant à été utilisé :

1. Etant donné qu'on travaille avec des signaux réels, il est nécessaire de reconstruire la symétrie hermitienne de la réponse en fréquence de l'admittance.

2. On applique une TF inverse pour obtenir l'admittance temporelle.
3. Le signal est ré-échantillonné d'un facteur 2. La fréquence d'échantillonnage passe donc à 22050Hz, c'est-à-dire à un signal possédant de l'information entre 0 et 11025Hz.
4. Le prétraitement décrit dans la sous-section précédente est appliqué.

La figure 4.2 montre les résultats de la resynthèse par ESPRIT, en utilisant 200 composantes complexes. La courbe bleue montre le signal mesuré, et la courbe rouge le signal synthétisé. Les points rouges correspondent aux fréquences détectées par l'algorithme sur le signal mesuré.

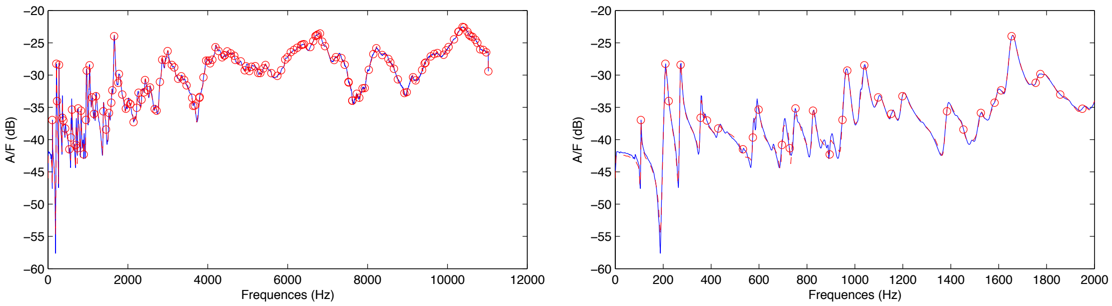


Fig. 4.2 – Resynthèse par ESPRIT sur toute la gamme fréquentielle, et agrandissement en BF.

La figure 4.3 montre la reconstruction du signal du point de vue temporel, avec le signal mesuré en bleu, et la resynthèse en rouge. On peut voir que la reproduction est tout à fait satisfaisante.

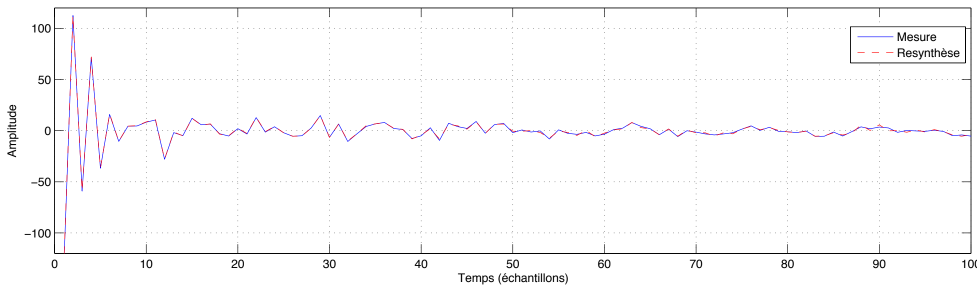


Fig. 4.3 – Resynthèse par ESPRIT avec agrandissement.

ESPRIT est une méthode sous-espace : elle requiert la dimension de l'espace total (signal + bruit), ainsi que dimension sous-espace signal, c'est-à-dire le nombre de composantes complexes. La dimension de l'espace signal influe sur la fidélité de la reconstruction, comme le montre la figure 4.4. Le graphe de droite est obtenu avec 200 composantes complexes (100 sinus, donc) sur l'ensemble de la gamme fréquentielle ($0 - 11025$Hz), le graphe de gauche avec 50 composantes.

Etant donné que la reproductibilité des mesures peut être assurée au moins en BF et raisonnablement bien jusqu'à 10Khz, il est intéressant de comparer l'analyse de différentes mesures effectuées au même endroit. La figure 4.5 montre les fréquences estimées lors de l'analyse de 4 mesures d'admittance normale en basses fréquences (0-1375Hz). Les résultats sont présentés sous la forme d'un histogramme avec une résolution de 5 Hz. La plupart des composantes (19 au total) ont moins de 3 Hz de différence dans les 3 mesures. Les (5) autres sont espacées de moins de 10Hz.

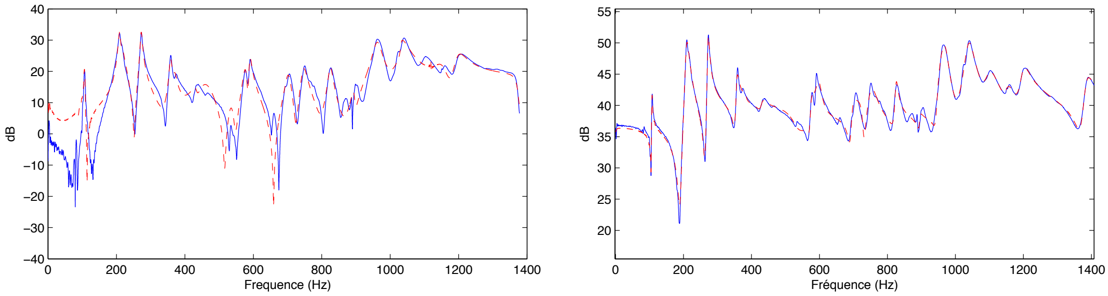


Fig. 4.4 – Influence du choix de la taille de l'espace signal sur la précision de la resynthèse par ESPRIT.

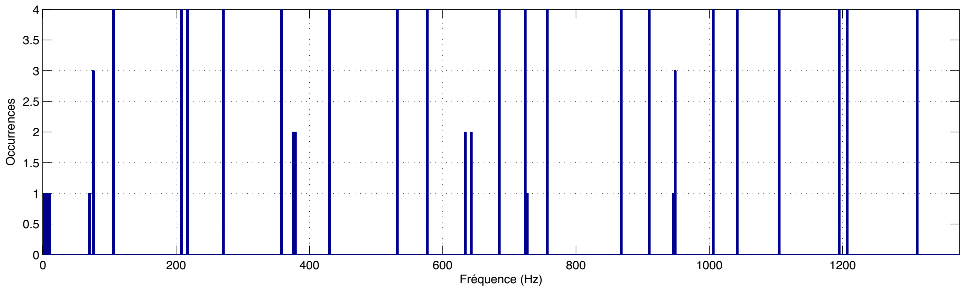


Fig. 4.5 – Analyse de 4 mesures d'admittance normale.

4.6 Traitement des hautes fréquences

En moyennes et hautes fréquences, la réponse de la structure tend vers un comportement continu appelé *champ diffus* (voir par exemple Skudrzyk [33] ou Ege [32]). Le recouvrement modal est trop important pour pouvoir isoler les paramètres des modes et il est nécessaire d'utiliser une approche différente pour la synthèse.

Plusieurs méthodes sont disponibles pour synthétiser les hautes fréquences du spectres. Skudzryk (voir [23], et [33] pour sa forme finalisée) propose une méthode dite des valeurs moyennes (mean-value method), prevoyant de remplacer dans ce domaine fréquentiel l'expression exacte 2.25 par une formule intégrale- calculée par une méthode des résidus - dont il démontre que la partie réelle peut en fait s'exprimer en hautes fréquences en fonction de la densité modale d et de la masse totale de la structure M_t uniquement.

Woodhouse [4] suggère d'utiliser une méthode pseudo-statistique : afin de modéliser le comportement en hautes fréquences, tous les paramètres modaux sont générés par des processus pseudo-aléatoires (dans une certaine gamme de valeurs préalablement déterminée par l'expérience et en respectant néanmoins une certaine densité modale).

Dans notre cas, étant donné les bon résultats des modélisations par méthodes HR, nous proposons d'appliquer ESPRIT avec un nombre volontairement élevé de composantes sur la partie hautes-fréquences de l'admittance mesurée. Il est évident que les grandeurs ainsi trouvées par ESPRIT perdent toute signification physique, mais comme cette méthode permet une reconstruction convaincante, elle au moins aussi justifiée qu'une approche statistique.

4.7 ESTER

Dans la méthode ESPRIT, les dimensions des sous-espaces doivent être choisies *a priori*, et la qualité de l'estimation dépend fortement de ce choix. Le choix idéal pour la dimension du sous-espace modal est évidemment le nombre d'exponentielles complexes présentes dans le signal. Ce nombre est K, c'est-à-dire le double du nombre de sinusoïdes amorties. Il est donc judicieux d'estimer ce nombre avant l'analyse. Ceci est effectué à l'aide de la méthode ESTER [30]. Bien entendu, un nombre supérieur à K peut très bien être choisi, et dans ce cas une partie du bruit sera projeté dans le sous-espace modal, produisant des composantes nulles ou fortement atténuées. Par contre un nombre inférieur à K entraînerait des erreurs dans l'estimation.

Les premières étapes de l'algorithme ESTER (pour Estimation of Error) sont similaires à celles d'ESPRIT. Le signal discret x_i est écrit sous forme de matrices de Hankel, et la matrice de corrélation $R_{xx}(t)$ correspondante calculée puis diagonalisée afin de trouver l'ensemble des n valeurs propres $\lambda_m, m = 1, .., n$ et des vecteurs propres $w_m, m = 1, .., n$, où n est la somme des dimensions des espaces signal et bruit.

On écrit ensuite la matrice $\mathbf{W}(p)$ à partir des colonnes $w_1, ..., w_p$ avec $p < n$, et on extrait comme précédemment $\mathbf{W}_\uparrow(p)$ et $\mathbf{W}_\downarrow(p)$. Enfin,

$$\mathbf{\Phi}(p) = \mathbf{W}_\downarrow(p)^\dagger \mathbf{W}_\uparrow(p) \qquad \mathbf{E}(p) = \mathbf{W}_\uparrow(p) - \mathbf{W}_\downarrow(p)\mathbf{\Phi} \tag{4.13}$$

Le critère ESTER définit K comme le plus grand p qui maximise $J(p) = ||E(p)||^{-2}$. Le code correspondant est fourni en annexe.

Chapitre 5

Résultats préliminaires

5.1 Synthèse à 1 dimension

Dans cette partie on effectue une synthèse en ne prenant en compte qu'une seule direction de polarisation de la corde. La vitesse et la force appliquée au chevalet sont donc unidimensionnels et l'admittance au chevalet est simplement le quotient des deux.

5.1.1 Comparaison avec l'expérience

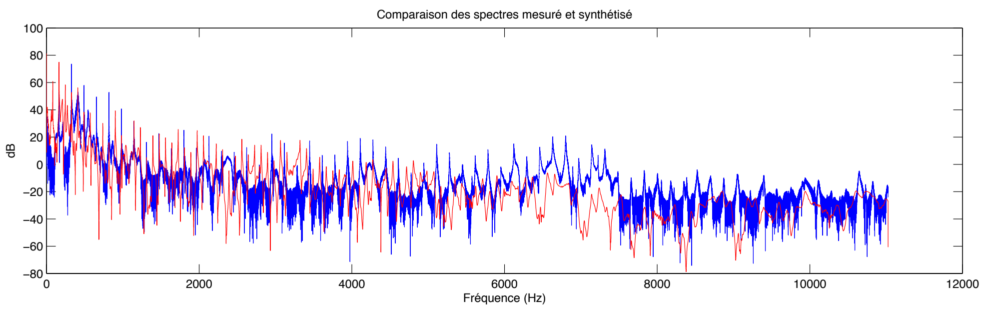


Fig. 5.1 – Comparaison mesure/synthese 1D : spectres

La figure 5.1 montre une comparaison des spectres mesuré (en bleu) et synthétisé (en rouge). La figure 5.2 montre une comparaison des signaux temporels correspondants. La mesure a été effectuée en cassant un cheveu à exactement 20cmdu sillet, et le signal d'accélération correspondant enregistré. L'allure générale du spectre correspond relativement bien, mais on remarque immédiatement que les amortissements individuels des modes sont mal reproduits. La comparaison des des enveloppes des signaux temporels montre que la mesure est moins amortie que la synthèse, ce qui est confirmé par l'observation des sonagrammes sur la figure 5.3. Cela est certainement dû au fait que les coefficients d'amortissement de la corde (*cf* 2.2.1) sont trop élevés pour notre guitare. On peut également apercevoir sur le signal mesuré un léger battement qui n'est pas reproduit par la synthèse. Le passage à la synthèse à deux dimensions nous confirmera si la différence observée est entièrement imputable à la non considération de la seconde direction de vibration.

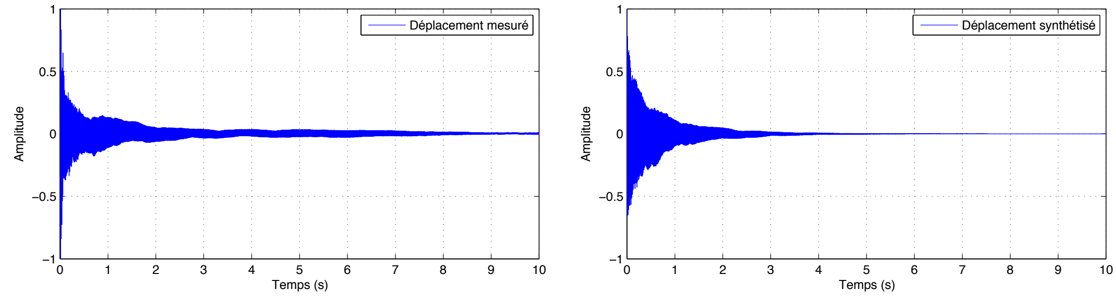


Fig. 5.2 – Comparaison mesure/synthese 1D : signaux temporels

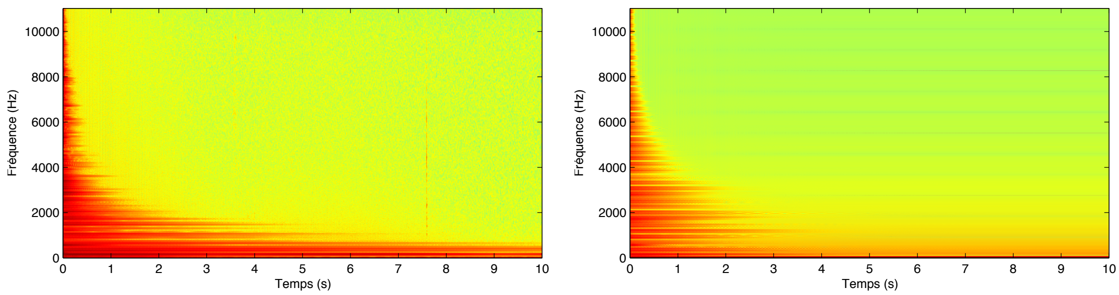


Fig. 5.3 – Comparaison mesure/synthese 1D : spectrogrammes

D'autre part, on notera qu'il a été nécessaire de corriger *a posteriori* la valeur du coefficient d'inharmonicité légèrement (8%) par rapport à la valeur mesurée pour faire coïncider les harmoniques entre les deux spectres. Ce phénomène n'a pas été observé pour la synthèse à 2D, probablement car le couplage additionnel entre les deux directions de polarisation de la corde induit un déplacement des pics supplémentaires. L'importance de cet effet n'a pas pu être étudiée dans le cadre de ce projet mais gagnerait à être quantifié plus en détail.

5.2 Synthèse à 2 dimensions

Dans cette partie on effectue une synthèse en prenant en compte les 2 directions de polarisation de la corde. A quelques exceptions près, la méthode est identique à celle présentée dans la section précédente. En particulier, l'admittance est sous forme matricielle. L'équation 5.1 s'écrit alors :

$$\mathbf{Y}^{-1} = \mathbf{Y}_1^{-1} + \mathbf{Y}_2^{-1} \tag{5.1}$$

De même que pour la synthèse 1D, il est possible d'utiliser directement les admittances (normales et tangentielles) mesurées, ou d'utiliser les valeurs données par ESPRIT à partir de ces mesures et les injecter dans les formules 2.27, 2.29 et 2.28. Comme mentionné en 3.2.2 néanmoins, cette deuxième méthode nécessite d'avoir accès aux angles θ_k.

$$\begin{bmatrix} A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

La figure 5.4 montre le résultat de la synthèse 2D : on obtient une accélération synthétisée normale et une accélération tangentielle, plus faible (d'un facteur 2).

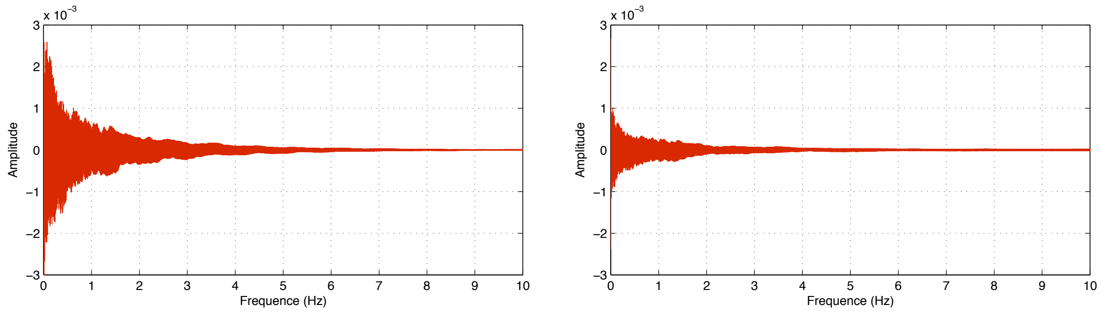


Fig. 5.4 – Synthèse 2D temporelle. Accélération normale (à gauche) et tangentielle (à droite).

5.2.1 Comparaison avec la mesure

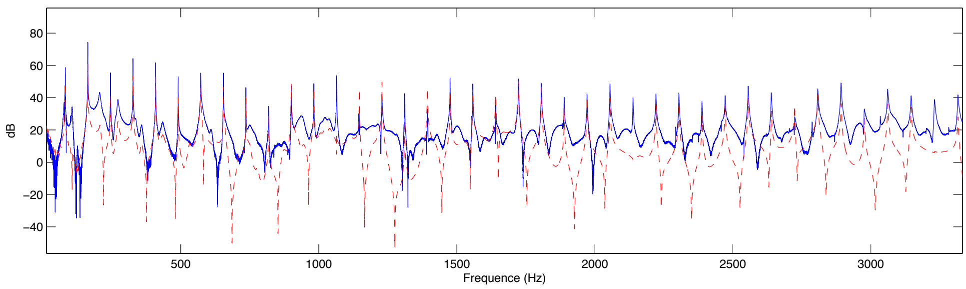


Fig. 5.5 – Comparaison mesure/synthese 2D

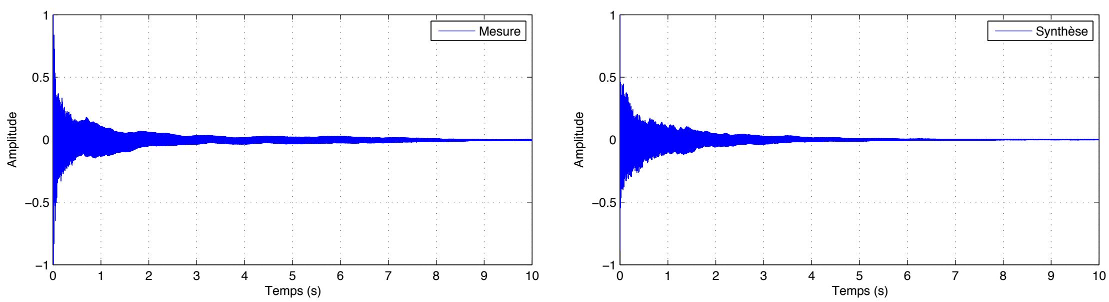


Fig. 5.6 – Comparaison mesure/synthese 2D : signaux temporels

La figure 5.5 montre le résultat de la synthèse 2D. L'allure générale, surtout au niveau des hautes fréquences, suit mieux la mesure que la synthèse à une dimension. On note aussi une légère amélioration au niveau de la reproduction de l'enveloppe temporelle sur la figure 5.6. Comme précédemment néanmoins, les amortissements ne sont visiblement pas corrects. On peut notamment remarquer sur les sonagrammes de la figure 5.7 que les premiers partiels sont encore une fois trop amortis par rapport à la mesure. La raison principale à cela est que nous avons utilisé le modèle d'amortissement de corde et les valeurs des coefficients η_F, η_R et η_A donnés par Woodhouse (voir l'équation 2.13). Ce modèle suit les observations faites par Woodhouse en prenant en compte le fait que l'amortissement dû aux pertes visco-thermiques (caractérisé par le coefficient η_A) augmente sensiblement dans les basses fréquences. Par conséquent si ce coefficient est mal ajusté les premiers partiels se trouvent trop amortis dans la synthèse, comme on peut l'observer sur les sonagrammes de la figure 5.7. Il serait nécessaire de calculer ces coefficients pour notre guitare afin d'améliorer la resynthèse. Néanmoins, on peut se douter que cela ne résoudra pas tout. En effet, même si son modèle se veut relativement complet par rapport à ce qu'on peut trouver dans la littérature, Woodhouse reporte des résultats ne donnant pas entière satisfaction [4], notamment sur ce point.

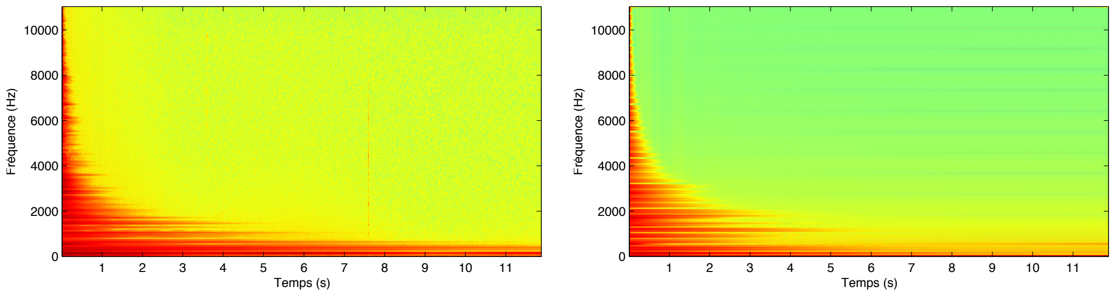


Fig. 5.7 – Comparaison mesure/synthese 2D : spectrogrammes

Les raisons de ces différences dans les taux de décroissance ne sont pas triviales. Il est peu probable que le fait que les mesures de la matrice d'admittance 2D au chevalet n'aient pas été réalisés le même jour que que les enregistrements des pincements ait une influence quelconque. Bien qu'on ait systématiquement utilisé un accordeur électrique avant chaque mesure, il est possible que de faibles différences dans l'accordage de l'instrument se soient introduites, déplaçant ainsi légèrement les harmoniques successives de la corde aux alentours de modes de caisse. On sait en effet que les taux d'amortissement varient fortement avec la fréquence aux alentours des modes de caisse [3]. Cet effet n'est cependant probablement pas assez fort pour expliquer à lui tout seul les disparités observées. Valette [20] suggère d'autres réponses possibles, concernant notamment la méthode de support des cordes : à leurs extrémités, ces dernières entourent légèrement les frettes et le sillet, impliquant deux longueurs effectives très légèrement différentes pour les deux polarisations. Cette différence n'est pas grande (de l'ordre un diamètre de corde), mais serait suffisante pour produire un effet notable sur le comportement vibratoire de l'instrument. La présence de mécanismes non linéaires dus en partie à l'excitation de vibrations longitudinales est aussi évoquée. Bien sûr, il reste à savoir à quel point tous les effets décrits dans ce chapitre peuvent être perçus, ce qui ne constitue pas directement le but de notre travail, mais mériterait amplement d'être étudié dans le cadre plus général du projet PAFI.

Chapitre 6

Rayonnement

L'ajout de rayonnement à la chaîne de traitement permet de rendre le son de synthèse plus réaliste. Pour quantifier le rayonnement d'une structure, on définit son impédance de rayonnement, qui est simplement le quotient de la pression rayonnée dans le milieu par la vitesse de l'élément rayonnant (la table d'harmonie) à une fréquence donnée :

$$Z_{ray}(\omega) = \frac{\hat{P}_a(\omega)}{\hat{v}(\omega)} \tag{6.1}$$

Z_{ray} est mesurée en fixant un pot vibrant alimenté en bruit blanc sur le chevalet, au même endroit que pour les mesures de mobilité, et en mesurant l'accélération de la table d'harmonie correspondante. La pression rayonnée est enregistrée avec un microphone Schoeps Digital (capsule cardioïde MK-4 montée sur un Amplifcateur Microphonique CMD-2) dans un environnement studio[1]. Pour la guitare acoustique, plusieurs manières de placer les micros sont utilisées, la plus fréquente étant à la jointure du manche et du corps de la guitare [34]. Le micro est placé à 80cm de l'instrument et décalé à 30deg par rapport au plan médian de la guitare. Pression et accélération sont chacune recueillies dans un canal. L'enregistrement est effectué sur une durée de plusieurs minutes. Le traitement consiste à moyenner l'impédance de rayonnement obtenue dans N_t trames d'une longueur $L = N_{fft}$. Dans chaque trame les signaux temporels sont fenêtrés par une fenêtre de Hanning de longueur N_{fft}. L'impédance est ensuite lissée en multipliant le signal d'impédance temporelle par une demi fenêtre de Hanning descendante. La figure 6.1 montre la forme typique d'une telle impédance. Le code MATLAB correspondant est fourni en Annexe C.4.

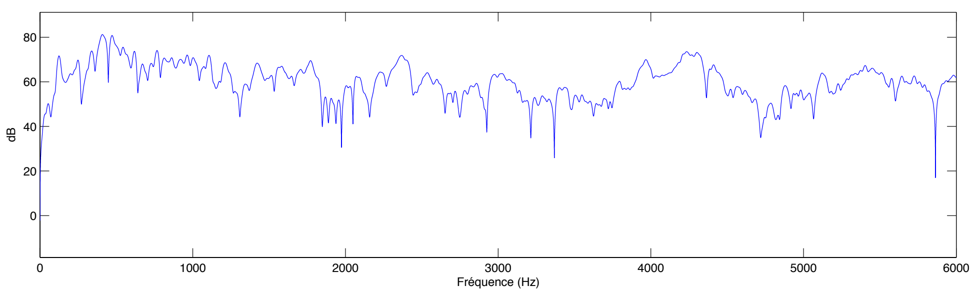


Fig. 6.1 – Impédance de rayonnement mesurée en studio sur la guitare test.

[1] 1, rue Barrault, 75013 Paris

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

7.1 Conclusions

Cette étude présente une comparaison des prédictions d'un modèle de synthèse pour les vibrations du système couplé corde/caisse de résonance d'une guitare, avec les mesures correspondantes. Le modèle suppose les vibrations linéaires, que le mouvement des cordes est régi par les équations d'onde usuelles et modifiées afin d'inclure les effets de raideur et d'amortissement, et que le point de contact entre la corde et la caisse est ponctuel au niveau du chevalet. La vibration du corps de guitare est caractérisée par la matrice d'admittance au point de couplage, de manière à ce que le mouvement des cordes puisse être pris en compte dans deux directions de polarisation. Tous les paramètres du modèle ont été déterminés précisément par des mesures sur une guitare test utilisée tout au long du projet.

Le modèle de synthèse peut être validé en utilisant des mesures de mobilité qui, injectées dans le modèle, doivent permettre de resynthétiser fidèlement les mesures. Une fois le modèle validé, on utilise la méthode haute résolution ESPRIT afin d'obtenir une représentation paramétrique du signal de mobilité au chevalet. Une telle représentation permet virtuellement de modifier sélectivement les paramètres modaux de la structure (fréquences de résonance, amortissements des modes propres notamment) et étudier les effets de cette modification sur le son obtenu, sans avoir à construire un nouvel instrument.

Bien que le comportement en basses fréquences semble être relativement bien répliqué, le amortissements ne sont pas tous parfaitement reproduits. Mais même pour obtenir une reproduction partielle telle que celle-ci, il est nécessaire d'utiliser un modèle d'amortissement intrinsèque pour la corde le plus complet possible. L'amortissement varie avec la fréquence, et plusieurs études font état d'une variation de plus d'un ordre de grandeur dans la gamme de fréquences audibles [4, 19]. Cette variation *doit* être inclue dans la synthèse sous peine d'obtenir des taux de décroissance erronés [3]. A plus hautes fréquences, on peut constater que deux phénomènes observables dans nos mesures mais ne sont pas reproduits par le modèle. On observe un dédoublement des pics important, dépassant ce qui est explicable par le couplage (ce phénomène a déjà été relevé dans [35], chez Woodhouse également [4]), ainsi que des pics additionnels dans la mesure qu'on ne retrouve pas dans la synthèse, possiblement attribués à des effets non-linéaires (cf [35]).

On notera que jusque là, aucune remarque n'a jusque là été faite concernant des aspects perceptifs. En aucun cas nous n'avons essayé de prévoir si les effets décrits peuvent être entendus ou non, mais l'intérêt de ce genre de question reste indéniable et reste tout à fait dans le cadre de notre démarche. Il serait en effet tout à fait intéressant de savoir combien les divers points évoqués dans ce rapport peuvent être perçus par l'oreille. Est-ce que la séparation des pics spectraux, ainsi que les pics dus à la non-linéarité, sont-ils audibles ? A quel point est-il nécessaire de pousser la *fidélité* de la synthèse pour que la synthèse soit indiscernable de l'enregistrement ? Toutes ces questions ne sont pas simplement rhétoriques, mais des problématiques d'intérêt pour les facteurs, qui ne cherchent en aucun cas un modèle "parfait", mais un modèle utile à des fins auditives.

7.2 Questions théoriques

7.2.1 Modélisation de l'amortissement intrinsèque à la corde

Ce problème a déjà été relevé dans le paragraphe précédent : les amortissements intrinsèques à la corde sont les paramètres expérimentaux les plus difficiles à déterminer. Valette, dans [22], montre des mesures faisant apparaître de fortes variations de ces amortissements avec la fréquence, et propose un certain nombre d'explications ainsi qu'un modèle tenant compte de différents mécanismes d'amortissements (friction, pertes visco-thermiques, ...). Cette approche, également utilisé par Woodhouse [3], doit néanmoins être vue comme une combinaison de modèles physiques et de simulation numérique. En effet, les mécanismes physiques sous-jacents ne sont pas encore compris assez en détail pour qu'on soit capable de fournir un modèle prédictif réaliste qui nous éviterait de devoir relever les modes de corde un à un comme c'est le cas dans [3]. En particulier, la forme et l'origine du terme de pertes visco-thermiques doivent encore être précisées.

7.2.2 Reconstruction de la matrice d'admittance à partir de 2 mesures

On peut également tirer avantage des considérations de la section 3.2.2 à d'autres fins que pour obtenir la distribution des angles θ_k. En effet, on peut se demander si il n'est pas possible de reconstituer la totalité de la matrice d'admittance à partir de deux mesures seulement. Pour mieux visualiser cela, si on trace par exemple la courbe correspondant à l'équation 3.7 en compagnie des mesures de Y_{12} et Y_{21}, on obtient la figure suivante :

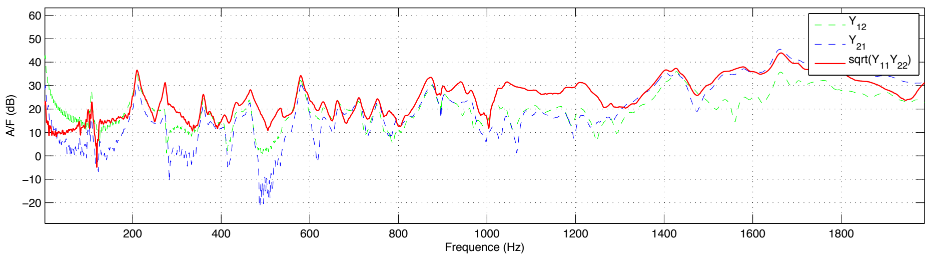


Fig. 7.1 – Reconstruction de Y_{12} à partir de Y_{11} et Y_{22}.

On peut trouver de nombreuses justifications expérimentales à cette volonté de réduire le nombre de mesures nécessaires à l'obtention de l'admittance complète au chevalet. En effet, si la guitare utilisée dans ce projet le permettait, il est souvent difficile (et parfois même impossible selon la géométrie du chevalet) de frapper le chevalet de manière tangentielle comme schématisé dans le deuxième schéma de la figure 3.5. De ce point de vue là, le fait d'avoir uniquement deux mesures serait intéressant.

7.3 Amélioration de la synthèse

7.3.1 Au niveau expérimental

Au niveau expérimental, on propose ici certaines modifications au dispositif mis en place pendant ce projet et qui seraient à même d'améliorer la qualité des mesures. La première suggestion concerne le dispositif lui-même. Afin d'assurer la meilleure reproductibilité possible, il est nécessaire d'effectuer l'impulsion de force *exactement* au même endroit à chaque répétition. Dans cette optique, il est nécessaire de pouvoir contrôler le mouvement de balancier inhérent au mode de suspension de la guitare. Cela soulève néanmoins un autre problème, puisque suspendre la guitare est le meilleur moyen d'obtenir des mesures de l'instrument isolé. On suggère de tenir la guitare avec des supports en mousse au niveau des arêtes de la caisse de résonance.

Au niveau de la méthode de mesure, on suggère de procéder aux mesures d'admittance par la méthode de *wire-break*[1] [4] , qui permet d'effectuer la mesure au plus près du point de contact entre la corde et le chevalet, et reste accessible quelle que soit la géométrie de ce dernier.

7.3.2 Au niveau du traitement du signal

Il serait intéressant et profitable de séparer la modélisation en deux régions, dans les basses fréquences où le recouvrement modal est faible et où une représentation du signal par une méthode du type ESPRIT à un sens physique, et effectuer un traitement à part en hautes fréquence, où le recouvrement modal est fort et donc où appliquer un modèle de signal de type ESM perd tout son sens physique. En BF, il est alors possible de faire usage de méthodes comme ESTER pour estimer le nombre de modes dans la fenêtre considérée, ce qui peut également constituer un moyen supplémentaire de vérifier la fiabilité des mesures d'admittance (on doit trouver le même nombre de modes dans les quatre termes de la matrice d'admittance).

Pour rendre la synthèse plus réaliste, il serait également intéressant de modéliser des conditions initiales se rapprochant d'un jeu instrumental réel. Il s'agit encore une fois ici plus d'une aide pour les facteurs que d'un simple "artifice". Plusieurs travaux traitent du problème et pourront servir de référence (on pourra s'inspirer par exemple des travaux dans ce domaine de Cuzzucoli [13], Laurson [36] ou plus récemment Evangelista [37]).

Enfin, une fois que le modèle de synthèse aura été corrigé et validé, on pourra envisager de mettre en place une interface permettant de modifier "visuellement" les paramètres des modes sur une figure d'admittance, et d'entendre directement le résultat sur le son de l'instrument.

[1] La réponse en vitesse de la caisse à une impulsion appliquée à la corde est identique à la réponse d'accélération de la caisse à un heaviside de force au même endroit, on peut donc envisager d'exciter la corde en cassant un fil très fin au niveau du point de contact avec le chevalet. Cette méthode permet de plus d'obtenir les quatre termes de la matrice d'admittance

Bibliographie

[1] Xavier Jaureguiberry. Synthèse hybride de sons de guitare. Master's thesis, Télécom ParisTech, 2009.

[2] Robert T. Schumacher and James Woodhouse. Computer modelling of violin playing. *Contemporary Physics*, 36(2) :79–92, 1995.

[3] J. Woodhouse. On the synthesis of guitar plucks. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 :928–944, 2004.

[4] J. Woodhouse. Plucked guitar transients : Comparison of measurements and synthesis. *Acta Acustica united with Acustica*, 90 :945–965, 2004.

[5] S. Bilbao. Robust Physical Modeling Sound Synthesis for Nonlinear Systems. *IEEE Signal Processing Magazine*, 24 :32–41, March 2007.

[6] X. Serra. State of the art and future directions in musical sound synthesis. In *International Workshop on Multimedia Signal Processing*, Chania, Crete, 2007.

[7] K. Karplus and A. Strong. Digital synthesis of plucked-string and drum timbres. *Computer Music J.*, 7(2) :43–55, 1983.

[8] J. O. Smith. Physical modeling using digital waveguides. *Computer Music Journal*, 16, 12/1992 1992.

[9] M. Karjalainen, V. Välimäki, and T. Tolonen. Plucked-string models, from the karplus-strong algorithm to digital waveguides and beyond. *Computer Music Journal*, (22) :17–32, 1998.

[10] C. McKay. A survey of physical modeling techniques for synthesizing the classical guitar. McGill University, Canada, 2003. Course notes.

[11] Ricardo R. Boullosa and Felipe Ordu na Bustamante. Use of measured data in the physical modeling of the classical guitar. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 102(5) :3085–3086, 1997.

[12] K. Kobayashi. Musical tone synthesizing apparatus simulating interaction between plural strings. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 97(3) :2017–2017, 1995.

[13] Giuseppe Cuzzucoli and Vincenzo Lombardo. A physical model of the classical guitar, including the player's touch. *Comput. Music J.*, 23(2) :52–69, 1999.

[14] Vesa Välimäki, Jyri Huopaniemi, Matti Karjalainen, and Zoltàn Jànosy. Physical modeling of plucked string instruments with application to real-time sound synthesis. *J. Audio Eng. Soc*, 44(5) :331–353, 1996.

[15] D. A. Jaffe and J. O. Smith. Extensions of the Karplus-Strong plucked-string algorithm. *Computer Music J.*, 7(2) :56–69, 1983.

[16] J. A. Moral and E. V. Janssen. Eigenmodes and quality of violins. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 71(S1) :S42–S42, 1982.

[17] Martin Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from the book*. Springer, 2004.

[18] A. Chaigne and J. Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Belin, 2008. ISBN 978-2-7011-3970-8.

[19] Hanna Järveläinen, Vesa Välimäki, and Matti Karjalainen. Audibility of the timbral effects of inharmonicity in stringed instrument tones. *Acoustics Research Letters Online*, 2(3) :79–84, 2001.

[20] C. Valette and C. Cuesta. *Mécanique de la corde vibrante*. Hermès, Traité des nouvelles technologies, Série mécanique, 1993.

[21] L. N. Trefethen and V. E. Howle. Eigenvalues and musical instruments. Technical report, August 1997.

[22] J. Kergomard A. Hirschberg and G. Weinreich. *In Mechanics of musical instruments.* Udine, 1995.

[23] Eugen J. Skudrzyk. *Simple and complex vibratory systems*. Pennsylvania State University Press, 1981.

[24] Kerem Ege. *La table d'harmonie du piano - études modales en basses et moyennes fréquences.* PhD thesis, Ecole Polytechnique ParisTech, 2009.

[25] Ch. Lambourg and A. Chaigne. Measurements and modelling of the admittance matrix at the bridge in guitars. In *Proceedings of the SMAC 93*, 1993.

[26] Roland Badeau. *Méthodes à haute résolution pour l'estimation et le suivi de sinusoïdes modulées. Application aux signaux de musique*. PhD thesis, Telecom ParisTech, 2005.

[27] J. Laroche. The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musical signals. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(4) :1958–1965, 1993.

[28] R. Roy and K. Kailath. Esprit. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 37(7) :984–995, 1989.

[29] R. Badeau. Méthodes à haute résolution. Cours de Master 2.

[30] R. Badeau, B. David, and G. Richard. A new perturbation analysis for signal enumeration in rotational invariance techniques. *IEEE Transactions of Signal Processing*, 54(2) :450–458, 2006.

[31] Petre Stoica, Randolph L. Moses, Benjamin Friedlander, and Torsten Soderstrom. Maximum likelihood estimation of the parameters of multiple sinusoids from noisy measurements. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing*, 37 :378–392, 1989.

[32] Kerem Ege, Xavier Boutillon, and Bertrand David. High-resolution modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 325(4-5), 2009.

[33] Eugen J. Skudrzyk. The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. *J. Acoust. Soc. Am.*, 67(4) :1105–1124, 1980.

[34] *L'enregistrement par micro d'une guitare classique ou électrique*, guitare classique @ net edition, 2004.

[35] Jr. Harold A. Conklin. Generation of partials due to nonlinear mixing in a stringed instrument. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105(1) :536–545, 1999.

[36] Mikael Laurson, Cumhur Erkut, Vesa Välimäki, and Mika Kuuskankare. Methods for modeling realistic playing in acoustic guitar synthesis. *Comput. Music J.*, 25(3) :38–49, 2001.

[37] G. Evangelista and F. Eckerholm. Player-instrument interaction models for digital waveguide synthesis of guitar : touch and collisions. *Trans. Audio, Speech and Lang. Proc.*, 18(4) :822–832, 2010.

[38] L. Meirovitch. *Analytical Methods in Vibrations*. Macmillan, New York, 1967.

[39] T. Gmür. *Dynamique des structures - Analyse modale numérique*. Presses polytechniques et universitaires, Lausanne, 1997.

Table des figures

Annexe A

Formalisme modal

Cette section est inspirée de l'ouvrage de Chaigne et Kergomard [18] et de Meirovitch [38].

A.1 Cas d'un système conservatif

Considérons un système conservatif discret. Il possède un nombre fini de degrés de liberté. On peut retranscrire le mouvement de ce système à l'aide du formalisme suivant :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathrm{x}} + \mathbf{K}\mathrm{x} = 0 \tag{A.1}$$

où le vecteur x est le vecteur composé de l'ensemble des paramètres décrivant le mouvement. $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ sont respectivement les matrices de masse et de raideur modales. On peut montrer que ces matrices sont symétriques définies positives [18].

La recherche de solutions harmoniques nous amène à résoudre le système de n équations linéaires et homogènes suivant :

$$\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right)\mathrm{x} = 0 \tag{A.2}$$

Ce système admet une solution Φ_n non nulle telle que $\left(\mathbf{M} - \omega_n{}^2\mathbf{K}\right)\Phi_n = 0$ si et seulement si ω_n est racine du polynome caractéristique :

$$det\left(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}\right) = 0 \tag{A.3}$$

Il existe un nombre fini de racines (réelles pour un système conservatif [18]) ω_n. On appelle ω_n la *pulsation propre* et le vecteur Φ_n la *déformée modale* associées au n-ième mode. Le couple (ω_n, Φ_n) quant à lui, forme un *mode propre* du système.

L'ensemble des déformées modales Φ_n forme une base de co-diagonalisation des matrices de masse et de raideur [18]. Les propriétés suivantes en découlent :

$$\begin{cases} < \Phi_m, \mathbf{M}\Phi_n >= \Phi_m^{\mathsf{T}}\mathbf{M}\Phi_n = m_n\delta_{nm} \\ < \Phi_m, \mathbf{K}\Phi_n >= \Phi_m^{\mathsf{T}}\mathbf{K}\Phi_n = k_n\delta_{nm} \end{cases} \tag{A.4}$$

Cette dernière équation traduit l'indépendance mécanique des modes entre eux[1]. Les quantités $m_n =< \Phi_m, \mathbf{M}\Phi_n >$ et $k_n =< \Phi_m, \mathbf{K}\Phi_n >$ sont appelées respectivement *masse modale* et *raideur modale*. Elles sont liées entre elles par la relation suivante :

$$\frac{k_n}{m_n} = \omega_n \tag{A.5}$$

Notons que la masse modale et la raideur modale ne sont connues qu'à un facteur près étant donné l'indétermination sur l'amplitude de la déformée modale [18]. Deux choix sont usuellement retenus :

1. On peut fixer à l'unité la plus grande composante des vecteurs propres, ce qui permet alors de comparer les masses modales à la masse physique de la structure.
2. On peut également normaliser les vecteurs propres par rapport à la matrice de masse. Cela revient à fixer à l'unité la masse généralisée du mode. Les relations d'orthogonalité énoncées plus haut deviennent dans ce cas :

$$\begin{cases} < \Phi_m, \mathbf{M}\Phi_n >= \Phi_m^\top \mathbf{M}\Phi_n = \delta_{nm} \\ < \Phi_m, \mathbf{K}\Phi_n >= \Phi_m^\top \mathbf{K}\Phi_n = w_n^2\delta_{nm} \end{cases} \tag{A.6}$$

Une fois les modes propres déterminés, tout mouvement du système peut être décomposé sur la base modale :

$$\mathrm{x} = \sum_n \Phi_n q_n(t) \tag{A.7}$$

où les $q_n(t)$ sont les *coordonnées modales*. Lorsque le système est soumis à un champ de force $\mathbf{F}$, on peut alors réécrire l'équation A.1 :

$$\sum_n \ddot{q}_n(t)\mathbf{M}\Phi_n + \sum_n q_n(t)\mathbf{K}\Phi_n = \mathbf{F} \tag{A.8}$$

équation que l'on peut projeter sur la déformée Φ_m :

$$\sum_n \ddot{q}_n(t) < \Phi_m, \mathbf{M}\Phi_n > + \sum_n q_n(t) < \Phi_m, \mathbf{K}\Phi_n >=< \Phi_m, \mathbf{F} > \tag{A.9}$$

Finalement, en vertu des propriétés d'orthogonalité, cette équation devient un système de n oscillateurs à un degré de liberté découplés :

$$\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{f_n}{m_n} \tag{A.10}$$

avec $f_n =< \Phi_n, F >$ la *force généralisée*, qui représente la projection des efforts extérieurs sur le mode n.

[1]Autrement dit, le travail virtuel des forces élastiques du mode n est nul lors d'un déplacement selon le mode m [38].

A.2 Cas d'un système dissipatif

Supposons à présent que notre système possède un mécanisme d'amortissement pouvant être représenté par une fonction de dissipation de type visqueux, quadratique dans les vitesses généralisées [38]. L'énergie $\mathcal{D}$ dissipée par le système est telle que :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}\dot{\mathrm{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\dot{\mathrm{x}} \geq 0 \tag{A.11}$$

où $\mathbf{C}$ est la matrice d'amortissement, symétrique et non-négative. Les équations du mouvement du système dissipatif en présence d'un champ de force F s'écrivent à présent sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathrm{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathrm{x}} + \mathbf{K}\mathrm{x} = 0 \tag{A.12}$$

Il est possible, comme dans le cas non-amorti, de développer x sur la base des modes propres du système conservatif associé $\mathrm{x} = \sum_n \Phi_n q_n(t)$. Après projection sur la déformée modale Φ_m et grâce aux propriétés d'orthogonalité des modes entre eux par rapports aux matrices de masse et de raideur, on peut montrer que les déplacements modaux généralisés q_n sont à présent solutions de :

$$\ddot{q}_n + +2\xi_{nn}\omega_n\dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{f_n}{m_n} - 2\omega_n \sum_{n\neq m}\xi_{nm}\dot{q}_m \tag{A.13}$$

où les ξ_{nm} sont les *coefficients d'amortissement* (ou *taux d'amortissement*) sans dimension, du mode n, et définis par :

$$< \Phi_n, \mathbf{C}\Phi_m >= 2\xi_{nm}m_n\omega_n \tag{A.14}$$

Les ξ_{nn}, notés simplement ξ_n, sont les *coefficients d'amortissement* (ou *taux d'amortissement*) du mode n. La dénomination *coefficient d'amortissement intermodal* est généralement utilisée pour les coefficients ξ_{nm} lorsque $n \neq m$. En général, la matrice $\mathbf{C}$ n'est pas diagonalisable : les équations restent donc couplées par les coefficients d'amortissement intermodaux.

Le système d'équations A.14 peut être grandement simplifié si le couplage par amortissement était nul ; en d'autres termes si la matrice des ξ_{mn} était diagonale. Dans la pratique, il est possible d'ignorer les composantes non-diagonales, et ce même si l'existence de termes de couplage est mise en évidence expérimentalement dans les structures réelles.

Cette hypothèse simplificatrice, dite d'*amortissement diagonal* (parfois appelée *hypothèse d'amortissement proportionnel* ou encore *hypothèse de Basile*), ne peut cependant être appliquée que pour des systèmes *faiblement dissipatifs* [18] , et dont les fréquences propres sont suffisamment séparées [39][2]. Dans ce cas, l'influence des coefficients intermodaux sur le contenu spectral peut être négligée. Les déformées propres restent donc inchangées par rapport au cas conservatif.

La matrice $\mathbf{C}$ peut donc s'exprimer comme combinaison linéaire de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{K}$ (amortissement de Rayleigh) et sa projection sur les modes propres est diagonale. La démonstration complète de ce point là peut-être trouvée par exemple dans [18] ou [38]. On a donc :

[2]On conçoit donc que cette hypothèse ne sera pas forcément applicable en hautes fréquences où le recouvrement modal est important. Des critères permettant de contrôler concrètement si dans une structure donnée la distribution spectrale est suffisamment large et le niveau d'amortissement bas pour que le découplage dynamique soit applicable, ont été formulées [39], mais ne sont pas développées ici par souci de concision.

$$< \Phi_n, \mathbf{C}\Phi_m >= 2\xi_{nm} m_n \omega_n \delta_{nm} \tag{A.15}$$

Les équations des déplacements généralisés sont alors découplés et s'écrivent :

$$\boxed{\ddot{q}_n + 2\xi_{nm}\omega_n \dot{q}_n + \omega_n^2 q_n = \frac{f_n}{m_n}} \tag{A.16}$$

Rappelons encore les expressions des différents paramètres d'amortissement (décrivant tous l'amortissement de manière identique) - facteur de perte η, décrément logarithmique λ, angle de perte δ, et facteur d'amortissement (ou amortissement temporel) α en s^{-1} - en fonction du coefficient d'amortissement réduit ξ :

$$\begin{cases} \eta = 2\xi \\ \xi = 2\pi\xi \\ \delta = arctan(2\xi) \\ \alpha = \xi\omega \end{cases} \tag{A.17}$$

Annexe B

Obtention de la fonction de transfert

B.1 Quelques calculs préliminaires

On cherche à développer :

$$\frac{y}{w} = \frac{\sin \frac{\omega x}{c}}{\sin \frac{\omega L}{c}} \tag{B.1}$$

Partons de $f(z) = \dfrac{1}{(z-x)\sin z}$.

On intègre $f(z)$ sur un cercle de centre 0 et de rayon strictement compris entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$. On a d'après le Théorème de Cauchy (sous certaines conditions, l'intégrale prise le long d'un contour fermé est égale à $2\pi i\times$ (somme des résidus dans le domaine limité par ce contour) :

$$\int_C \frac{dz}{(z-x)\sin z} = 2\pi i[R(x) + \sum_{-n}^{+n} R(k\pi)] \tag{B.2}$$

En écrivant :

$$\int_C = \int_C \frac{zdz}{(z^2-x^2)\sin z} + x\int_C \frac{dz}{(z^2-x^2)\sin z} \tag{B.3}$$

On *peut* montrer (mais ce n'est pas immédiat) que $\int_C \to 0$ lorsque $n \to \infty$, donc :

$$R(x) + \sum_{-\infty}^{+\infty} R(k\pi) = 0 \tag{B.4}$$

avec $R(x) = \frac{1}{\sin x}$ le résidu au point x. Pour les résidus en $k\pi$, on dit que si $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ et si z_0 est un pôle **simple** de $f(z)$, alors $R(z_0) = \frac{u(z_0)}{v'(z_0)}$, et donc :

$$R(k\pi) = \frac{1}{(k\pi - x)\cos k\pi} = \frac{(-1)^k}{k\pi - x} \tag{B.5}$$

soit finalement :

$$\frac{1}{\sin x} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi - x} \tag{B.6}$$

Résultat qu'on peut appliquer directement à $\frac{1}{\sin(\omega L/c)}$.

$$\frac{1}{\sin \omega L/c} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi - \omega L/c} = \frac{c}{L} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\omega - k\pi c/L} \tag{B.7}$$

Rem : On peut aussi effectuer la démonstration avec la formule d'Euler.

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}) = x \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x}{k\pi})(1 + \frac{x}{k\pi}) \tag{B.8}$$

soit

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{A}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{B_k}{1 - \frac{x}{k\pi}} + \frac{C_k}{1 + \frac{x}{k\pi}} \right) \tag{B.9}$$

les A, B_k, C_k étant faciles à calculer.

Pour calculer A, on multiplie tout par $\sin x$ et on fait tendre x vers 0, soit $1 = A + 0 \times \sum$ et $A = 1$

Pour calculer B_k, on multiplie tout par $\sin x$, on pose $x = k\pi + h$ et on fait tendre h vers 0, soit :

$$1 = \lim_{h \to 0} \frac{B_k \sin(k\pi + h)}{1 - \frac{k\pi + h}{k\pi}} = \lim_{h \to 0} \frac{(-1)^k B_k \sin h}{-\frac{h}{k\pi}} = -(-1)^k k\pi B_k$$

d'où B_k. Idem pour C_k

B.2 Obtention de la fonction de transfert

On part de :

$$\frac{\sin \omega x/c}{\sin \omega L/c} = \frac{c}{L} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\omega - k\pi c/L} \sin \omega x/c \tag{B.10}$$

De la même manière que Woodhouse [3], on introduit rigidité et amortissement dans la formule précédente en écrivant :

$$\frac{y}{w} = \frac{c}{\omega L} \sin(\frac{x\omega}{c}) + \frac{c}{L} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(-1)^j \sin(\frac{x\omega}{c})}{\omega - \omega_j(1 + \frac{i\eta_j}{2})} + \frac{(-1)^j \sin(\frac{x\omega}{c})}{\omega + \omega_j(1 - \frac{i\eta_j}{2})} \tag{B.11}$$

$$\frac{y}{w} = \frac{c}{\omega L} \sin(\frac{x\omega}{c}) + \frac{c}{L} \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \sin(\frac{x\omega}{c}) \frac{2\omega - i\omega_j\eta_j}{\omega^2 - i\omega_j\omega\eta_j - \omega_j^2(1 + \frac{\eta_j^2}{4})} \tag{B.12}$$

Annexe C

Codes MATLAB

C.1 Algorithme ESPRIT

```
function [freq,dec,amp,phi,En,residu,snr,ssynth]=hr(s,Fe,Ntot,Ns,preproc)
% estime les paramètres des modes propres (fréquence, amortissement,
% amplitude, phase) à l'aide la méthode haute résolution esprit
%
% s : le signal a analyser
% Fe : fréquence d'échantillonnage (défaut = 1)
% Ntot : dimension de l'espace complet (signal + bruit) = taille de Rss
%        defaut : min(300, taille du signal/3 )
% Ns : taille de l'espace signal = nombre de sinus cherchés (défaut Ntot/3)
% preproc : 1 si preprocessing (blanchiement) 0 sinon. (défaut = 1)
% freq : vecteur de fréquences (Hz)
% dec : vecteur des amortissements (1/s)
% amp : vecteur des amplitudes
% phi : vecteur des phases
% En : vecteur des energies normalisées à la plus forte
% residu : signal résiduel de la décomposition (optionel)
% snr : rapport signal à résiduel en dB
% B. DAVID, le 16/10/09
% E. CIERCO et N. BARASCUD le 30/05/2010

N = length(s);
if nargin ≤1, Fe=1;end
if nargin ≤ 2, Ntot = min(300,fix(N/3)); end
if nargin ≤3, Ns = fix(Ntot/3); end
if nargin ≤4, preproc = 1;end

% préprocessing
if preproc
   sp = preprocess(s,Fe,10,affich);
else
   sp = s;
end

% algo esprit
% construction de la matrice H^H*H (de hankel) : autocovariance
% par bloc: pour des signaux longs ce calcul est plus rapide
% car demandant moins de mémoire
% revient a partitionner en sous matrice hankel la matrice complete
% qui serait de taille Ntot x N-Ntot
```

```
Nl = length(sp) - Ntot +1 ; % nombre de colonnes de la "grande" matrice
Nt = fix(Nl/Ntot); % nombre de blocs pour le calcul de Rss
                   % les sous matrices sont de taille Ntot x Ntot

HH = zeros(Ntot);
h=waitbar(0,'fabrication de la matrice');
for k=1:Nt
   deb = (k-1)*Ntot+1; fin = deb+2*Ntot-2;
   x = sp(deb:fin);
   H = hankel(x(1:Ntot),x(Ntot:end)); HH = HH + H*H';
   waitbar(k/Nt,h);
end

deb = Nt*Ntot+1; x = sp(deb:end);
H = hankel(x(1:Ntot),x(Ntot:end)); HH = HH + H*H';
close(h);drawnow

% calcul du sous-espace signal
disp('calcul des vecteurs propres');
[U,S,V] = svd(HH,0); % evd en fait et U = V^T
                     % mais ordonne les valeurs
U = U(:,1:Ns); % selection des vecteurs propres signal

disp('calcul des poles')
Up = U(2:end,:); Um = U(1:end-1,:);
Phi = pinv(Um)*Up;  % calcul de la  matrice spectrale
                    % plus stable numériquement que leftdivide

z = eig(Phi); z = z(:); % poles du signal

% on enlève les points aberrants (de decroissance tres grande)
tau = - 1./log(abs(z)); % temps de décroissance en nbre d'echant
ind = find( tau < 5 );z(ind) = z(ind)./(abs(z(ind))+eps); % on les remet sur le C1

% calcul des amplitudes et des phases sur le signal original (non filtré)
disp('calcul des amplitudes');
Vd = vdm(z,N); b = pinv(Vd)*s(:); % amplitudes complexes

% calcul du résiduel
ssynth = Vd*b;

if isreal(s);ssynth = real(ssynth);end
if nargout ≥ 6, residu = s - ssynth;end
if nargout ≥ 7, snr = 10*log10( sum(abs(s.^2))/sum(abs(residu.^2)));end

% selection d'apres l'energie
ind = find(angle(z)>0); % selection des fréq. > 0
freq = angle(z(ind))/2/pi*Fe;
dec = -log(abs( z(ind) ))*Fe;
amp = abs(b(ind) );
phi = angle(b(ind));
zp = z(ind);
En = amp.^2.*(1-abs(zp).^(2*N))./(1-abs(zp).^2); % energies
En = 10*log10(En/max(En));

[En,ind]=sort(En,1,'descend');
freq = freq(ind);dec = dec(ind);amp = amp(ind);phi = phi(ind);
```

C.2 Algorithme ESTER

```

N=length(x);
n=floor(N/2);
l = N-n+1;
p=n-1;
threshold = 10^2;
J=threshold-1;

X = hankel(x(1:n),x(n:N));
Rxx = 1/l * X * X';
[U1,Lambda,U2] = svd(Rxx);

while J<threshold
    W = U1(1:n,1:p);
    Wd = W(1:n-1,:);
    Wu = W(2:n,:);
    phi = pinv(Wd)*Wu;
    E = Wu - Wd*phi;
    J = 1 / norm(E)^2;
    K=p;
    p=p-1;
end;

end
```

C.3 Preprocessing

```
function [y,ar] = preprocess(x,Fe,K,affich)
% function [y,ar] = preprocess(x,Fe,K,affich);
% prétraitement pour un signal audio
% filtrage median du spectre + redressement;
% y: signal filtré
% ar: coeff. ar du filtre estimé (H(z) = 1/AR(z))
% x: signal
% Fe: freq d'échantillonnage
% K: ordre de prediction (default=12)
% affich = 1/0: avec affichage ou non (0=default)

if nargin < 3,affich=0;K=12;end
if nargin < 4,affich=0;end

warning off
nfft = min(8192,2^(nextpow2(x)-1));
L =200 ; % largeur en Hz du filtrage médian
dyn = 80; % dyn max de la dsp en dB (sur le filtrage médian)

% estimation de la densité de puissance
[X,F] = pwelch(x,hanning(nfft),nfft/2,nfft,Fe);

if affich
    figure;
    plot(F,10*log10(abs(X)),'--','color',[.5 .5 .5]);
    title('effet du preprocessing');
```

```
    hold on
end

d = round(L/Fe*nfft/2)*2+1;
Xm = medfiltp(abs(X),d,33);Xm = Xm(:);
ind = find( 10*log10(Xm) < max(10*log10(Xm))-dyn );
Xm(ind) = max(Xm)/10^(dyn/10);

Xm = [Xm; Xm( end-1:-1:2)];
gam = real(ifft(Xm)); gam = gam(1:nfft/2); gam = gam(:);

Rxx = toeplitz( gam(1:K),gam(1:K));
a = -pinv(Rxx)*gam(2:K+1);
sig = gam(1:K+1).'*[1;a];
if affich
[H,F] = freqz(1,[1;a],nfft,Fe);
plot(F,20*log10(sqrt(sig) * H),'y','LineWidth',2);
end

y = filter([1;a],1,x);
y = y(K+1:end); % attention troncature pour le transitoire

if affich
    [Y,w] = pwelch(y,hanning(nfft),nfft/2,nfft,Fe);
    plot(w,10*log10(abs(Y)),'r');
end

ar = [1;a];
```

C.4 Rayonnement

```
clear all;
close all;

% Chargement du fichier son
[s,Fe]=wavread('impray28062010');

p = s(:,1); % Pression dans le canal gauche
a = s(:,2); % Accélération dans le canal droit

nfft = 2^18;
Nt= fix((length(s)-nfft)/nfft);
L = nfft;
Z=zeros(nfft/2+1,1);

h=waitbar(0,'wait');
% Calcul itératif de l'impédance de rayonnement sur Nt trames de longueur
% nfft, puis moyenne arithmétique
for ii=1:Nt
    ndeb = (ii-1)*L+1;
    nfin = ndeb+L-1;
    paux = p(ndeb:nfin);%f = f-median(f);
    aaux = a(ndeb:nfin);% a=a-mean(a);

    % les signaux temporels sont fenêtrés
    P = fft(paux.*hanning(nfft));P = P(1:nfft/2+1);
    A = fft(aaux.*hanning(nfft));A = A(1:nfft/2+1);
```

```
    transfert = P./A;
    Z=Z+transfert;
    waitbar(ii/Nt);
end;

close(h)

nu = (0:nfft/2)/nfft*Fe; % vecteur fréquences
Z=Z/Nt;
Z=Z.';

hz=ifft([Z conj(Z(end-1:-1:2))],'symmetric');
w = hanning(6000);w=w(3001:end); % demi-hanning descendante
hz=hz(1:3000);
hz2=hz.*w';
Zray=fft(hz2,nfft);
Zray = Zray(1:nfft/2+1)*2i*pi.*nu; % pour repasser en Pression/Vitesse

figure();
M = max(db(Zray));
plot(nu,db(Zray));
axis([0 6000 M-100 M+10]);
```