



Rapport de stage

Application du *compressed sensing* à l'holographie acoustique en champ proche

Gilles CHARDON

Mars - Juillet 2009 Sous la direction de Laurent Daudet Équipe Lutheries Acoustique Musique Institut Jean le Rond d'Alembert, UPMC

Introduction

Une méthode classique pour étudier les propriétés vibratoires de structures (en particulier leurs déformées modales), est l'holographie acoustique en champ proche, qui consiste à analyser le champ acoustique rayonné par la structure et en déduire sa dynamique. Cette technique est rapide, peu chère, mais présente cependant quelques difficultés : la présence de bruit oblige à mettre en œuvre des techniques de régularisation, et les données à acquérir, stocker et traiter peuvent être de taille importante.

Le compressed sensing, nouvelle méthode d'échantillonnage, tente justement de donner des solutions à ces problèmes, en tirant parti de certaines connaissances a priori sur le signal recherché. Ces connaissances sont de type parcimonie, c'est-à-dire qu'on connaît une base où les quantités recherchées ont peu de coefficients non nuls. Ceci permet, même sans savoir lesquels de ces coefficients sont non nuls, d'obtenir des résultats corrects avec un nombre très faible de mesures. Ces méthodes ont de nombreuses applications (imagerie médicale, astronomie, photographie, etc.), mais encore peu dans le domaine de l'acoustique. Le but de ce stage a été de tester cette méthode dans le cadre de l'holographie, sur des simulations et des données réelles, ainsi que de fournir des préconisations sur la construction d'une antenne adaptée à cette technique.

Le projet ANR ECHANGE (2009-2011), cadre de ce stage, regroupant des équipes de l'Université Pierre et Marie Curie (Lutheries Acoustique Musique, Modélisation Imagerie et Propagation Acoustique, Laboratoire Jacques-Louis Lions) et de l'IRISA, a pour but de développer des applications acoustiques du compressed sensing.

Ce rapport débutera par une présentation de l'holographie acoustique en champ proche et des techniques associées, puis par une introduction générale au compressed sensing. Le chapitre suivant présentera le travail effectué pendant le stage : application du formalisme du compressed sensing à l'holographie, puis simulations et résultats expérimentaux.

Remerciements

Je tiens bien sûr à remercier Laurent Daudet pour avoir proposé ce sujet dont l'étude ne s'arrêtera pas à ce stage, et pour son encadrement. Le LAM également, pour son accueil. Et mes camarades stagiaires Georges et Antonio, respectivement pour le tutorat de mots croisés et pour l'impression. Enfin, le CNRS et l'Armée Française pour l'argent.

Table des matières

1	Holographie acoustique en champ proche						
	1.1	Rayonnement d'une plaque plane	8				
	1.2	Rétropropagation des ondes acoustiques					
2	Compressed sensing						
	2.1	Représentations parcimonieuses	17				
	2.2	Principe du compressed sensing					
	2.3	Algorithmes de reconstruction	19				
	2.4	Construction d'une matrice de mesure A	22				
3	Hol	Holographie compressée 2					
	3.1	Parcimonie des solutions	25				
		Modélisation des mesures					
		Implémentation					
		Résultats					
4	Cor	nclusion et perspectives	41				

Chapitre 1

Holographie acoustique en champ proche

L'holographie en champ proche [1] se propose, à partir de mesures sur une surface, de reconstituer les champs acoustiques (pression, vitesse) dans un volume. Ces champs sont solutions d'équations différentielles de la forme

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f \tag{1.1}$$

On utilisera les propriétés des solutions de cette équation où le second membre est nul, situation qui traduit l'absence de sources acoustiques dans le volume considéré.

Une utilisation classique de cette technique est la reconstitution des propriétés mécaniques d'une structure vibrante à l'aide de mesures acoustiques effectuées à proximité de celle-ci, comme par exemple la détermination des déformées modales d'une table d'harmonie de clavecin, étude qu'a effectuée l'équipe Modélisation Propagation et Imagerie Acoustique sur des clavecins du Musée de la Musique [2].

On s'intéressera en particulier au cas où les sources sont situées sur un plan, où les expressions des champs sont calculables et restent simples, ce qui nous permettra de montrer la distinction entre ondes propagatives et ondes évanescentes, qui restent localisées autour des sources. On utilisera ensuite ces résultats pour rétropropager ces ondes et reconstituer la carte des sources. Cette rétropropagation étant difficile, on montrera ensuite quelques techniques visant à améliorer les résultats obtenus. Le formalisme utilisé est celui de [3].

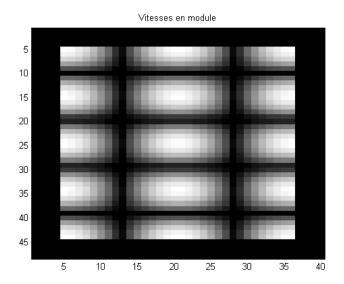


Fig. 1.1 – Distribution des vitesses sur une plaque

1.1 Rayonnement d'une plaque plane

On étudie ici le rayonnement d'une plaque plane infinie, située sur le plan z=0, animée d'une vitesse normale $\dot{w}(x,y)$. La figure 1.1 montre un exemple d'une telle plaque. La vitesse normale se transmet à l'air environnant, dont la pression vérifie, en l'absence de sources, l'équation d'Euler :

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}p, \text{ en particulier } \rho_0 \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z}$$
(1.2)

et l'équation des ondes

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \tag{1.3}$$

On développera les calculs en régime harmonique, sur les transformées de Fourier en temps de ces quantités. L'équation des ondes devient l'équation d'Helmholtz

$$\Delta \hat{p} + k^2 \hat{p} = 0 \tag{1.4}$$

où $k = \frac{\omega}{c}$. L'équation d'Euler devient

$$i\omega\rho_0\vec{\hat{v}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\hat{p}$$
 (1.5)

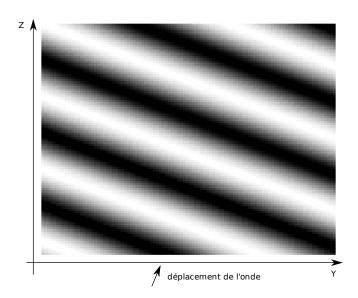


Fig. 1.2 – Onde propagative

1.1.1 Ondes planes, ondes évanescentes

Les pressions de la forme

$$\hat{p} = A(\omega)e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \tag{1.6}$$

vérifient l'équation d'Helmholtz quand $k^2=k_x^2+k_y^2+k_z^2$. Ces trois quantités sont donc liées, on considérera ici que c'est k_z qui sera dépendante des autres : $k_z^2=k^2-k_x^2-k_y^2$.

On sera en présence de deux cas suivant les valeurs de k_z : le cas où k_z sera positif donnera naissance à des ondes planes, propagatives, le cas où k_y sera négatif donnera naissance à des ondes évanescentes.

Ondes planes

On note \vec{k} le vecteur de coordonnées (k_x, k_y, k_z) . On peut alors réécrire $\hat{p} = Ae^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$. La pression est donc constante sur les plans orthogonaux à \vec{k} , et dans la direction parallèle à \vec{k} , la pression a une forme sinusoïdale. Il n'y a pas d'amortissement, l'amplitude est la même dans tout l'espace. L'énergie se propage dans la direction de \vec{k} . La figure 1.2 montre la carte des pressions sur un plan orthogonal à la plaque.

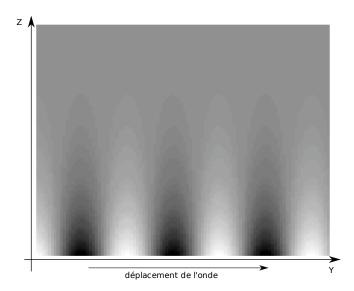


Fig. 1.3 – Onde évanescente

Ondes évanescentes

Ici, on écrit $\hat{p} = Ae^{ik_xx + k_yy}e^{-|k_z|z}$. On choisit la racine de k_z^2 correspondant à une solution s'annulant à l'infini pour des raisons physiques. L'amplitude diminue exponentiellement selon la direction z. L'énergie se propage parallèlement à la plaque, elle reste à proximité. On remarque bien l'amortissement de la pression sur la figure 1.3.

1.1.2 Propagateur

On voudrait maintenant écrire la pression rayonnée comme somme des solutions qui viennent d'être présentées :

$$\hat{p}(x,y,z) = \int P(k_x,k_y)e^{i(k_xx+k_yy+k_zz)}dk_xdk_y$$

Sur le plan z = 0, cette égalité se réduit à

$$\hat{p}(x,y,0) = \int P(k_x,k_y)e^{i(k_xx+k_yy)}dk_xdk_y$$

On reconnaît ici l'écriture de la transformée de Fourier inverse en deux dimensions selon les coordonnées x et y. $P(k_x, k_y)$ est donc la transformée de Fourier de la distribution des pressions sur le plan z = 0.

Si on se place maintenant sur un plan d'altitude z quelconque, on remarque que la pression peut s'y écrire de façon aisée en fonction de la pression sur le plan z=0:

$$\hat{p}(x, y, z) = \int P(k_x, k_z) e^{ik_z z} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = \int P(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y$$

La transformée de Fourier de $\hat{p}(x, y, z)$ suivant x et y s'écrit donc

$$P(k_x, k_y, z) = P(k_x, k_y)e^{ik_z z}$$

On sait maintenant, à partir de la pression sur un plan, obtenir la pression sur un plan parallèle. Reste à étudier notre problème, où nous ne connaissons pas la pression, mais la vitesse. La transformée de Fourier de l'équation d'Euler 1.5 nous indique que

$$\dot{W}(k_x, k_y) = -\frac{k_z}{\rho_0 ck} P(k_x, k_y) = -\frac{k_z}{\rho_0 ck} P(k_x, k_y, z') e^{ik_z(z-z')}$$

En utilisant les résultats sur les intégrales de Weyl, on obtient

$$\hat{p}(x,y,z) = \int \dot{w}(x',y',z')g_v(x-x',y-y',z-z')dx'dy'$$
 (1.7)

où g_v s'écrit (avec **r** le vecteur de coordonnées (x, y, z))

$$g_v(x, y, z) = i\rho_0 ck \frac{e^{ik||\vec{r}||}}{2\pi||\vec{r}||}$$
 (1.8)

Cette intégrale est en fait une convolution :

$$\hat{p}(x, y, z) = g_v \star_{xy} \dot{w} \tag{1.9}$$

Plusieurs remarques sont à faire sur cette égalité : d'une part, le fait qu'elle s'écrive sous forme de convolution n'est pas étonnant, vu la linéarité du problème et son invariance dans l'espace. Le propagateur g_v est constitué de trois termes : une constante, le numérateur de la fraction, représentant un déphasage entre le point de départ et le point d'arrivée, et le dénominateur, représentant l'affaiblissement au cours du trajet dans l'espace, en $\frac{1}{r}$.

Les détails et les discontinuités de \dot{w} sont représentés par les valeurs de la transformée de Fourier pour des k_x et des k_y élevés, donc des k_z^2 négatifs. Ces détails sont ainsi contenus dans les ondes évanescentes, qui, comme on l'a vu plus haut, ne se propagent pas. Pour avoir accès aux détails de la carte des vitesses, il faudra faire les mesures à proximité de la plaque.

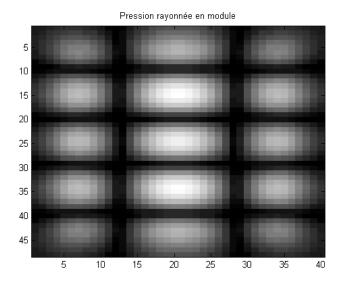


FIG. 1.4 – Pression rayonnée par la plaque de la figure 1.1 à 25mm

1.2 Rétropropagation des ondes acoustiques

La rétropropagation revient donc à une déconvolution. L'inversion de cette convolution est facile à l'aide de la transformée de Fourier spatiale, puisque celle-ci diagonalise la convolution : elle remplace le produit de convolution par le produit classique des transformées.

1.2.1 Rétropropagateur

La rétropropagation s'effectue en multipliant la transformée spatiale de la pression mesurée par une quantité appelée rétropropagateur inverse

$$G^{-1}(k_x, k_y, z_h) = -\frac{k_z}{\rho_0 ck} e^{-ik_z z_h}$$

En résumé, le calcul central de l'holographie acoustique en champ proche est celui-ci :

$$\dot{w}(x,y) = \mathcal{F}_{xy}^{-1} G^{-1}(k_x, k_y, z_h) \mathcal{F}_{xy} \hat{p}(x, y, z_h)$$

Le propagateur inverse a cependant une propriété assez gênante : quand k_x et k_y augmente, k_z^2 devient négatif, ce qui donne une valeur de k_z imaginaire pure. Cette valeur imaginaire pure va, dans l'exponentielle, faire tendre G^{-1} rapidement vers l'infini. En amplifiant les ondes évanescentes, qui sont comme on l'a vu rapidement décroissantes, on va également amplifier du bruit, ce

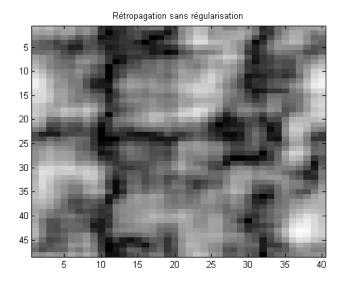


FIG. 1.5 – Rétropropagation des pressions rayonnées à 25mm sans régularisation (mesures bruitées)

qui va profondément perturber l'image. La figure 1.5 montre bien que la rétropropagation sans précautions entraînent des résultats catastrophiques, l'image obtenue ne ressemble en rien aux vitesses initiales de la figure 1.1.

1.2.2 Implémentation

Les calculs étant effectués numériquement, il est nécessaire de discrétiser les calculs et de s'intéresser à des surfaces de tailles finies.

On quadrille de la même façon la plaque et la surface de mesure, en utilisant une antenne de capteurs régulièrement placés. Le problème se reformule alors en inversion d'une matrice ${\bf G}$ qui associe au vecteur des vitesses sur la plaque $\dot{{\bf w}}$ le vecteur des pressions mesurées ${\bf p}$.

Le changement en base de Fourier permet de diagonaliser **G** et de faciliter son inversion. On se retrouve bien entendu confronté au limitations de l'échantillonnage, puisque qu'on ne pourra pas correctement reconstituer des détails de la carte des vitesses plus petits que l'écartement entre les capteurs. Les capteurs ne pouvant être posés en grand nombre et de façon très rapprochée, la mesure est répétée avec l'antenne légèrement déplacée à chaque répétition.

La plaque peut être excitée de deux façons : soit en vibration forcée, à l'aide d'un pot vibrant, soit par un impulsion, en frappant la plaque avec

un marteau. Cette méthode permet de récupérer tous les modes propres simultanément.

1.2.3 Régularisation

Afin de limiter les dégâts causés par l'amplification du bruit, des techniques de régularisation sont utilisées. Deux techniques classiques sont ici présentées, mais de nombreuses ont été développées dans le cadre de l'holographie.

Tikhonov

Cette méthode consiste, au lieu d'inverser la matrice G, à chercher le minimum de

$$J_{\alpha}(\dot{\mathbf{w}}) = ||\mathbf{G}\dot{\mathbf{w}} - \mathbf{p}||^2 + \alpha||\dot{\mathbf{w}}||^2$$

La solution de ce problème est $\dot{\mathbf{w}} = (\alpha \mathbf{I} + \mathbf{G}^H \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}$. Ceci revient à modifier les valeurs propres de la matrice, en conservant les mêmes espaces propres : au lieu d'utiliser la matrice inverse dont les valeurs propres sont $\frac{1}{\lambda_i}$, la matrice a pour diagonale $\frac{\lambda_i^*}{\alpha + |\lambda_i|^2}$. Pour $\alpha = 0$, on retrouve la même matrice, mais pour $\alpha \neq 0$, cela revient à limiter l'explosion pour les valeurs propres λ_i faibles, donc pour les ondes évanescentes. On peut interpréter cette régularisation comme l'application d'un filtre spatial à l'hologramme avant la rétropropagation. Ce filtre est un filtre passe-bas, il permet de limiter le bruit dans la reconstruction mais fait perdre des détails de l'image.

La valeur du paramètre α est déterminée à partir du principe de Mozorov, qui consiste à choisir α de telle façon que la norme entre pressions mesurées et pressions simulées à partir des vitesses reconstruites corresponde à la norme du bruit qu'on attend en ayant connaissance de la variance de celui-ci.

Landweber

Une autre méthode consiste à remarquer qu'on peut écrire

$$\dot{\mathbf{w}} = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{G}^H \mathbf{G}) \dot{\mathbf{w}} + \beta \mathbf{G}^H \mathbf{p}$$

On approche $\dot{\mathbf{w}}$ en itérant $\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{n+1}} = (\mathbf{I} - \beta \mathbf{G}^H \mathbf{G}) \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{n}} + \beta \mathbf{G}^H \mathbf{p}$, en partant de $\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{0}} = \mathbf{0}$. À chaque étape n, les valeurs propres deviennent $\lambda_i = \frac{1 - (1 - \beta |\lambda_i|^2)^m}{\lambda_i}$. On peut également interpréter cette régularisation comme un filtre spatial. β et le nombre d'itérations peuvent également être estimés à l'aide du principe de Mozorov.

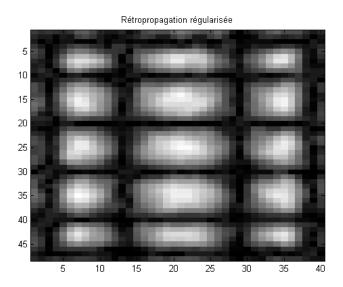


FIG. 1.6 – Rétropropagation régularisée (Tikhonov) des pressions rayonnées à 25mm (mesures bruitées)

L'holographie acoustique en champ proche, en utilisant des mesures à proximité des sources et en utilisant des méthodes de régularisation adaptées, permet donc, à faible coût et faible complexité, de déterminer les propriétés des sources à étudier. Cependant, la nécessité d'effectuer un nombre important de mesures entraîne quelques difficultés : la quantité de données à traiter est importante, et ces mesures doivent parfois être réalisées en plusieurs passes, avec les difficultés de répétabilités correspondantes. Ceci est d'autant plus gênant que les images reconstituées ne semble pas demander autant de mesures. Les nouvelles techniques d'échantillonnage de type compressed sensing pourraient apporter des solutions à ces difficultés.

16CHAPITRE 1. HOLOGRAPHIE ACOUSTIQUE EN CHAMP PROCHE

Chapitre 2

Compressed sensing

Le compressed sensing (ou compressive sampling), récent domaine des mathématiques appliquées, est un ensemble de techniques visant à contourner les limitations habituelles d'échantillonnage, dont un exemple classique est le théorème d'échantillonnage de Shannon. Celui nous indique que pour échantilloner correctement un signal dont le contenu fréquentiel est compris entre 0 et F, il faut une fréquence d'échantillonnage au moins égale à 2F. Or, si ce signal n'est composé par exemple que d'une sinusoïde, il paraît bien exagéré de mesurer de nombreux échantillons qui contiendront chacun peu d'information. Le compressed sensing, en proposant de nouvelles techniques d'échantillonnage, permet de réduire le nombre de mesures nécessaires, nombre qui sera déterminé plus par la quantité d'information du signal que par son étendue fréquentielle.

Après avoir présenté le concept de représentation parcimonieuse sur lequel le *compressed sensing* se base, on présentera les principaux résultats et techniques du *compressed sensing*.

2.1 Représentations parcimonieuses

De nombreux signaux sont, pour diverses raisons, parcimonieux ou presque parcimonieux, c'est à dire qu'ils peuvent être décrits ou approximés de façon plus compacte que leur représentation classique : après un changement de base judicieux, le nombre de coordonnées non nulles ou non négligeables est très faible par rapport à la dimension de l'espace dans lequel ils vivent. La figure 2.1 montre un signal dont la représentation temporelle n'a que très peu de coefficients nuls, mais dont la transformée de Fourier a un support de taille très réduite.

Les exemples typiques sont les images, qui peuvent être compressées par

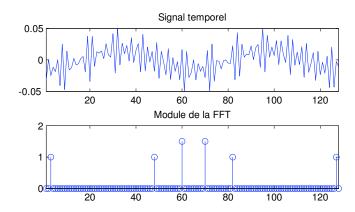


Fig. 2.1 – Signal parcimonieux dans la base de Fourier

des algorithmes de type JPEG, JPEG2000, etc., en profitant du fait qu'après un changement de base judicieux (cosinus par blocs ou ondelettes par exemple), le nombre de coefficients non nuls est fortement réduit. Il suffit alors de stocker les coefficients significatifs, au risque, bien sûr, d'introduire des erreurs dans la reconstruction. L'implémentation reste assez simple, les bases utilisées permettant généralement l'emploi d'algorithmes optimisés (FFT, etc.).

En décomposant le signal non plus sur une base, mais sur un dictionnaire, qui comprend plus de vecteurs qu'une base, on peut arriver à des résultats encore meilleurs, en prenant toutefois certaines précautions. Le système linéaire associé à ce problème étant sous-déterminé, une infinité de solutions existent, et peu sont intéressantes, c'est-à-dire parcimonieuses. Des méthodes permettent de construire de telles représentations, on notera entre autre Basis Pursuit [4], de type optimisation, ou Matching Pursuit [5], un algorithme glouton.

2.2 Principe du compressed sensing

Sachant qu'un signal a peu de coordonnées non nulles dans une base connue à l'avance, il semble inutile d'effectuer des mesures en nombre bien supérieur à la taille du support de ce signal. On voudrait plutôt pouvoir faire un nombre de mesures de l'ordre du nombre de ses coefficients non nuls. Se pose alors la question des mesures à effectuer. Des mesures essayant de correspondre le plus aux signaux, où à l'opposé, des mesures sans rapport avec leur structure? La bonne réponse est, de façon surprenante, la deuxième.

Ces meilleures performances en terme de nombres de mesures se font bien entendu au prix d'une complexité algorithmique plus importante. Celle-ci est cependant souvent un bien petit désavantage comparé à la réduction du nombre de mesures effectuées, qui peuvent coûter cher, prendre énormément de temps, être dangereuses pour la santé (pour les applications médicales notamment), etc.

On notera x le vecteur parcimonieux à reconstruire (après changement de base si nécessaire), y le vecteur des mesures, et A la matrice modélisant celles-ci :

$$y = Ax$$

On s'intéressera également au cas bruité :

$$y = Ax + b$$

La reconstitution n'est possible que sous certaines conditions sur A et la parcimonie du vecteur x: on utilise généralement la constante d'isométrie restreinte pour caractériser celle-ci. Cette constante d'isométrie restreinte, notée δ_s , est le plus petit nombre tel que pour chaque vecteur x_s de support de taille s, on ait :

$$(1 - \delta_s)||x_s||_2^2 \le ||Ax_s||_2^2 \le (1 + \delta_s)||x_s||_2^2$$

Cette constante est malheureusement très difficile à calculer (les méthodes de calculs connues sont NP-difficiles), elle sert donc plus de garantie théorique que d'outil pratique à la caractérisation des mesures.

2.3 Algorithmes de reconstruction

Plusieurs algorithmes ont été soit adaptés, soit spécialement conçus pour la reconstruction. En voici quelques-uns, qui montrent la variété des méthodes utilisées.

2.3.1 Minimisation ℓ_1

Les premiers résultats sur le compressed sensing [6] utilisaient la minimisation ℓ_1 pour la reconstruction de la solution. En effet, si la matrice A a une constante d'isométrie δ_{2s} vérifiant $\delta_{2s} < \sqrt{2} - 1$ (cette borne a d'ailleurs été améliorée par la suite [7]), la solution du problème

$$\min_{x} ||x||_1 \text{ sous contrainte } y = Ax$$

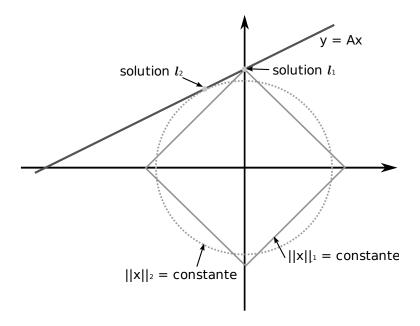


Fig. 2.2 – Comparaison des minimisations ℓ_1 et ℓ_2 en dimension 2

correspond bien au vecteur x d'origine si celui-ci a un support de taille au plus s. Si les mesures sont affectées par du bruit, la solution du problème

$$\min_{x} ||x||_1$$
 sous contrainte $||y - Ax||_2 < \epsilon$

reste proche du vecteur x.

La figure 2.2 montre que la minimisation de la norme l_1 donne une solution parcimonieuse dans la base où elle est calculée, alors que la minimisation de la norme l_2 ne donne pas de solution parcimonieuse. Le fait que la solution trouvée soit effectivement la solution recherchée est garanti par les conditions sur A. Ceci n'est pas vérifié dans l'exemple de la figure, on remarque en effet que plusieurs solutions de l'équation y = Ax de support de taille 1 existent.

Les variantes avec des normes l_p , p < 1 existent également [7]. Elles sont moins contraignantes sur la constante d'isométrie, mais le problème d'optimisation est plus difficile à résoudre car non convexe. La minimisation ℓ_1 est quand à elle convexe, et peut même se réduire à un problème linéaire en présence de données réelles.

Enfin, une autre façon de tenir compte du bruit consiste à s'intéresser au problème d'optimisation

$$\min_{x} ||y - Ax||^2 + \alpha ||x||_1$$

On reconnaît ici une forme proche de la régularisation de Tikhonov, où le deuxième terme en norme ℓ_2 est remplacé par un terme en norme ℓ_1 .

On remarquera que ces algorithmes, tant que les mesures vérifient les conditions relatives à leur constante d'isométrie, ne nécessitent pas d'indication de la taille du support des vecteurs recherchés. Dans le cas bruité, c'est la norme du bruit qui est à indiquer. De plus, leurs performances, assez bonnes, se font au prix d'un complexité algorithmique assez importante, ce qui a conduit à la conception d'autres algorithmes, plus rapides.

2.3.2 Variantes de Matching Pursuit

Matching Pursuit [5], algorithme glouton d'approximation parcimonieuse, a donné naissance à de nombreuses variantes. Certaines de ces variantes peuvent peuvent être utilisées pour le compressed sensing, compressed sensing et approximation parcimonieuse sont en effet deux problèmes reliés : dans le premier on veut résoudre y = Ax connaissant la parcimonie de x, dans le deuxième on veut représenter un signal y par un vecteur parcimonieux x en utilisant un dictionnaire A, avec y = Ax. Orthogonal Matching Pursuit [8] et Compressive Sampling Matching Pursuit [9] sont particulièrement adaptés aux problèmes qui nous intéressent. Leur nature gloutonne leur permet d'avoir de meilleures performances que la minimisation ℓ_1 , mais leur fonctionnement nécessite d'entrer en paramètre non pas la norme du bruit, mais la taille maximale du support de la solution. Alors que la minimisation ℓ_1 demandait une connaissance sur le processus de mesure, d'où vient généralement le bruit, on demande ici une connaissance précise sur les solutions.

2.3.3 Iterative Hard Thresholding

Cet algorithme itératif [10] est très proche de la régularisation de Landweber vue précédemment : entre chaque itération est effectué un seuillage qui conserve uniquement les s plus grands (en module) coefficients :

$$x_{n+1} = H_s(x_n + \mu A^H(y - Ax_n)) = H_s((I - \mu A^H A)x_n + \mu A^H y)$$

Des méthodes existent pour déterminer le pas μ , qui peut varier à chaque itération. La condition sur les mesures pour des signaux de support de taille s est $\delta_{3s} < 1/\sqrt{32}$. Le paramètre d'entrée de l'algorithme est ici la parcimonie du signal.

2.4 Construction d'une matrice de mesure A

Comme on l'a vu, les différents algorithmes nécessitent des conditions sur la matrice de mesure A exprimées en terme de constante d'isométrie restreinte, difficile à calculer. On ne peut donc en pratique utiliser cette constante pour caractériser les mesures, mais l'introduction de l'aléatoire permet d'obtenir des résultats plus commodes. On s'intéressera à deux cas : matrice dont tous les coefficients sont aléatoires, et matrice dont les lignes sont extraites aléatoirement d'une matrice orthogonale.

Une difficulté dans la construction de ces matrices est qu'elle doivent correspondre à des mesures réalisables physiquement, ce qui ne sera pas toujours évident.

2.4.1 Matrice aléatoire

Différents tirages peuvent être utilisés pour obtenir une matrice aléatoire capable de répondre aux conditions, en voici des exemples qui construisent une matrice modélisant m mesures :

- tirer m vecteurs uniformément sur la sphère unité;
- tirer les coefficients par une loi normale de moyenne 1 de variance 1/m;
- tirer les coefficients par une loi de Bernoulli, les coefficients prenant les valeurs $1/\sqrt{m}$ et $-1/\sqrt{m}$.

Ces matrices vérifient les conditions d'isométrie restreinte avec grande probabilité quand

$$m \ge Cs \log(n/s)$$

où C est une constante.

Ces matrices possèdent de plus l'avantage d'être universelles, dans le sens où elles conservent avec grande probabilité leurs propriétés d'isométrie après un changement de base orthogonale. Elles peuvent donc être utilisées quelque soit la base de parcimonie. Cependant, leur caractère entièrement aléatoire limite leurs applications à certains cas particuliers où les mesures peuvent être entièrement construites.

2.4.2 Sous-matrice d'une base orthogonale

Un cas plus adapté à une implémentation consiste à prendre au hasard des lignes d'une matrice orthogonale. La matrice aura alors la propriété d'isométrie restreinte avec grande probabilité si

$$m \ge Cs\mu^2 \log n$$

Ce résultat est bien plus applicable que le précédent, la base d'origine pouvant être donnée par les propriétés physiques des mesures. μ mesure la cohérence entre la base où le signal est mesuré et la base où il est parcimonieux :

$$\mu = \sqrt{n} \max |\langle \phi_i, \psi_k \rangle|$$

Dans notre cas, $\phi = A$ et $\psi = I$. Par exemple, si on s'intéresse à un signal temporel dont on sait qu'il est parcimonieux dans la base de Fourier (c'est alors une somme de sinusoïdes), la meilleure façon de le mesurer est de prendre des échantillons de ce signal à des instants aléatoires. La cohérence entre la base de Fourier et la base des diracs est en effet la plus petite qu'on puisse obtenir.

Le compressed sensing est donc un ensemble de techniques applicables quand :

- les vecteurs recherchés sont parcimonieux (ou approximativement parcimonieux) dans une base connue;
- les mesures, linéaires, obéissent à certaines conditions.

L'application d'une telle méthode doit donc être précédée de l'étude des signaux à mesurer, et en particulier celle de leurs propriétés de parcimonie, ainsi que de la conception de mesures réalisables physiquement et répondant aux critères définis précédemment.

Chapitre 3

Holographie compressée

L'étude de déformées modales par holographie est un bon candidat pour une application du compressed sensing. En effet, les mesures effectuées sont linéaires, et on dispose de connaissances a priori sur les données à reconstituer. Ce sont en effet des modes propres de la structure étudiées, une étude modale peut nous aider à caractériser ces modes et à trouver une base ou ceux-ci seront parcimonieux, ou au moins approximativement parcimonieux.

On s'intéressa d'abord à l'étude des modes propres d'une plaque homogène, puis à la modélisation des mesures et à la conception d'une antenne adaptée au compressed sensing.

3.1 Parcimonie des solutions

L'application du compressed sensing demande que les solutions recherchées admettent une représentation parcimonieuse dans une base connue. Il faut pour cela analyser ces solutions.

Dans notre cas, celles-ci sont les déformées modales de la structure vibrante étudiée. Cette strucure, si on néglige les amortissements, a une déformée qui obéit à l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha \Delta^2 w = 0$$

où α dépend des propriétés mécaniques de la plaque, et Δ^2 est le bi-laplacien. Les conditions aux limites sont dans notre cas libres, donc effort tranchant et moment de flexion y sont nuls, ce qui se traduit par

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = 0, \, \frac{\partial^3 w}{\partial n^3} = 0$$

sur le bord de la plaque. Les modes propres sont les solutions qui s'écrivent $w(x, y, t) = w_n(x, y)e^{i\omega_n t}$, ils vérifient donc

$$\Delta^2 w_n = \frac{\omega^2}{\alpha} w_n$$

et les conditions aux limites. Ceci est un problème aux valeurs propres, et le bilaplacien vérifiant les conditions nécessaires (symétrie, etc.), son spectre est discret et les vecteurs propres, qui sont les déformées modales, forment une base de l'espace des déformées [11].

On dispose donc d'une base où les déformées modales sont parcimonieuses puisque ce sont exactement celles-ci qui la forment. Le calcul de ces déformées est cependant coûteux et passe par des hypothèses sur la plaque qui ne sont pas forcément vérifiées (homogénéité, pas d'amortissements, etc.). Une propriété importante des déformées modales, solutions du problème aux valeurs propres, est qu'elles sont très régulières, et précisement de classe C^{∞} . Cette régularité donne l'idée d'utiliser la base de Fourier, la transformée d'une fonction de classe C^{∞} étant très rapidement décroissante à l'infini, son support reste réduit. Cette idée est de plus justifiée par la forme des modes propres dans les cas où ils sont atteignables analytiquement, puisque qu'ils s'expriment à l'aide de sinus. La régularité est cependant uniquement vraie à l'intérieur du domaine et n'est plus vérifiée au bord de la plaque. Les discontinuités qu'on y recontre font apparaître des termes dans la transformée à toutes les fréquences. On retrouve les mêmes limitations qui viennent avec les méthode de régularisation, mais la facilité d'utilisation et la rapidité des calculs font que la transformée de Fourier est un choix pertinent, au moins pour les premières expérimentations et calculs.

3.1.1 Structure des signaux temporels

Quand la plaque est excitée par une impulsion, tous les modes propres sont excités et rayonnent. Chaque mode propre donne naissance à un champ acoustique de la forme $p_n = A_n(x, y, z)e^{i\omega_n t}e^{-\delta_n t}$, où le deuxième terme exponentiel rend compte de l'amortissement. La pression mesurée par un capteur est donc de la forme

$$p(x, y, z) = \sum A_n(x, y, z)e^{i\omega_n t}e^{-\delta_n t}$$

Le signal est mesuré par un échantillonnage, il est donc nécessaire de remonter aux paramètres A_n , ω_n et δ_n pour pouvoir mener à bien les calculs qui nécessitent la connaissance de A_n et ω_n .

Une solution simple consiste à calculer la FFT des signaux temporels et à sélectionner les pics et les amplitudes correspondantes. Cette méthode a cependant l'inconvénient de mélanger les contributions des modes : en effet, à cause de l'amortissement des modes et de l'horizon finie de la FFT, les contributions des différents modes à la transformée de Fourier s'étalent, atteignant parfois les autres modes. Les perturbations sont cependant assez faibles, de sorte que, dans un premier temps, la FFT soit un choix pertinent.

3.2 Modélisation des mesures

Dans le cadre de l'holographie classique, les mesures effectuées par l'antenne étaient considérées comme un échantillonnage régulier de la pression sur un plan parallèle à la structure vibrante. On va maintenant considérer chaque mesure indépendamment. L'équation 1.7 nous permet d'écrire

$$\hat{p}(x, y, z) = \int \hat{w}(x', y', z') g_v^{xyz}(x', y', z')^* dx' dy'$$
(3.1)

où g_v^{xyz} s'écrit en fonction du propagateur :

$$g_v^{xyz}(x', y', z') = g_v(x - x', y - y', z - z')^*$$
(3.2)

Une mesure de pression peut ainsi s'interpréter comme le produit scalaire de la carte des vitesses sur le plan source avec une fonction déduite du propagateur. On rentre donc ainsi dans le cadre demandé par le *compressed sensing*, avec des mesures linéaires.

Dans le cas particulier où l'on considère la carte des vitesses comme étant parcimonieuse dans la base de Fourier, des mesures de ce type sont satisfaisantes à courtes distances. En effet, quand la distance entre le capteur et la plaque diminue, le propagateur ressemble de plus en plus à un dirac, la mesure obtenue est de plus en plus proche d'une mesure ponctuelle. Les résultats précédemment présentés sur la conception des mesures montrent qu'on est ici dans un cas optimal, et que les capteurs doivent être placés au hasard. Ce résultat est évidemment exact uniquement quand antenne et sources sont sur le même plan, on peut cependant admettre que de telles mesures restent pertinentes quand antenne et sources sont peu espacées. On retrouve ici des conditions semblables à l'holographie classique où l'antenne devait se trouver au voisinage de la source pour des raisons relatives à l'amortissement des ondes évanescentes.

Pour l'implémentation, on doit bien entendu passer par une discrétisation du plan source, pour pouvoir réécrire les mesures comme un produit d'une matrice modélisant l'antenne et d'une matrice associée aux vitesses sur la plaque.

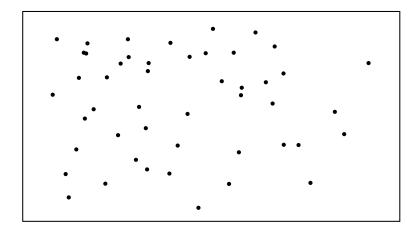


Fig. 3.1 – Antenne d'holographie aléatoire

3.2.1 Conception d'une antenne

Les antennes utilisées pour la méthode classique sont forcément constituées de capteurs régulièrement espacés, pour pouvoir ainsi calculer la transformée de Fourier et mener à bien les calculs nécessaires. Dans notre cadre, la transformée de Fourier n'intervenant plus, les capteurs peuvent être placés de façon plus libre.

Une première solution, qui semble assez efficace et peu complexe, serait de placer les capteurs de façon aléatoire comme sur la figure 3.1. Comme on vient de le voir, ce type de mesure est pertinent dans le cadre d'une parcimonie en base de Fourier et de capteurs proches de la source. Cependant, des problèmes de réalisation se posent, construire une antenne de ce type étant assez difficile vu l'absence totale de structure. Une deuxième solution, plus raisonnable, serait de construire une antenne semi-aléatoire avec des rails placés aléatoirement sur un cadre, puis de placer sur ces rails des micros de façon aléatoire. Ceci serait un bon moyen de simuler une antenne totalement aléatoire en gardant toutefois une structure rendant la construction plus aisée. Une telle antenne ressemblerait à la figure 3.2.

Enfin, une antenne régulière, figure 3.3, n'est pas à écarter. En effet, dans le cas classique, une telle antenne entraînerait un repliement de la transformée de Fourier, et donc des résultats très mauvais. Or ici, il n'est plus question de transformée de Fourier, mais chaque mesure est considérée séparement. La propagation des ondes fait qu'un capteur reçoit de l'information de toute la source, la matrice associée à l'antenne pourrait donc satisfaire aux conditions. On notera, que de façon assez surprenante, des mesures effectuées à très courtes distances dans ce cadre aurait peu de chance de fonctionner,

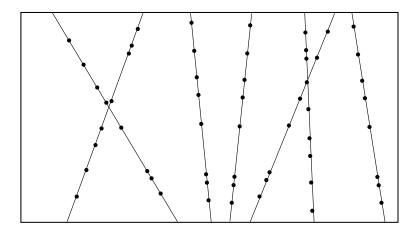


Fig. 3.2 – Antenne d'holographie semi-aléatoire

puisqu'elle seraient effectivement équivalente à un sous-échatillonnage de la carte recherchée, les mesures étant quasiment ponctuelles.

3.3 Implémentation

La méthode a été implémentée en utilisant l'environnement Matlab. Le programme fonctionne en deux principales étapes :

- construction de la matrice modélisant les mesures à partir des informations sur l'antenne données en argument, en utilisant les résultats sur la propagation des ondes;
- utilisation d'un algorithme de reconstruction

Plusieurs algorithmes ont été testés : Iterative Hard Thresholding et Orthogonal Matching Pursuit, en utilisant la toolbox Sparsify, ainsi que la minimisation ℓ_1 , qui a nécessité quelque travail pour l'utilisation dans un cadre complexe, les toolboxes habituelles étant limitées aux données réelles.

3.3.1 Reformulation de la minimisation ℓ_1

La méthode de reconstruction consistant en une miminisation ℓ_1 nécessite d'être reformulée pour son implémentation. Dans le cas de quantitées réelles, ce problème peut être reformulé en un programme linéaire, programme standard de base. Le cas de quantités complexes est un peu plus délicat : la norme ℓ_1 met en effet en jeu le module de chaque composante du vecteur, il n'est plus possible d'utiliser l'astuce permettant la reformulation en un programme

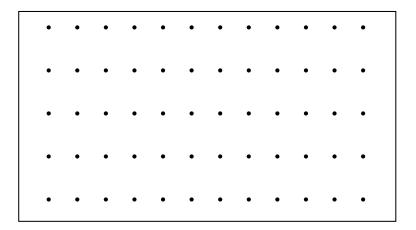


Fig. 3.3 – Antenne d'holographie régulière

linéaire. On peut cependant le reformuler comme un problème non-linéaire mais convexe, de type $Second\ Order\ Cone\ Program\ [12]$:

$$\min_{x} f^{T}x \text{ sous contraintes } ||A_{i}x + b_{i}|| \leq c_{i}^{T}x + d_{i}$$

Le problème

$$\min_{x} ||x||_1$$
 sous contrainte $||y - Ax||_2 < \epsilon$

se reformule en

$$\min_{z} f^{T}z$$
 sous contraintes $||A_{0}z - y|| < \epsilon$ et $||A_{i}z|| \le c_{i}^{T}z$

Le vecteur z se décompose en trois sous-vecteurs, (m, x_r, x_i) , m majorant le module de chaque composante de x, x_r et x_i étant leurs parties réelles et complexes. La première inégalité équivaut à la contrainte du premier problème, avec A_0 construite à partir de A, les autres inégalités servent à majorer le module de chaque composantes de x, en construisant un vecteur réel dont les composantes sont parties réelles et imaginaires d'une composante de x, et dont la norme est le module de cette composante complexe. Le vecteur c_i , à une composante non nulle égale à 1, sélectionne la composante de z majorant le module de la composante de x. Le vecteur f sert à sommer ces majorants, le produit f^Tz majorant la norme l_1 de x. La minimisation d'une majoration de la norme l_1 de x correspond ici à minimiser cette norme. l'implémentation de ce problème d'optimisation utilise la toolbox CVX d'optimisation convexe.

3.4. RÉSULTATS 31

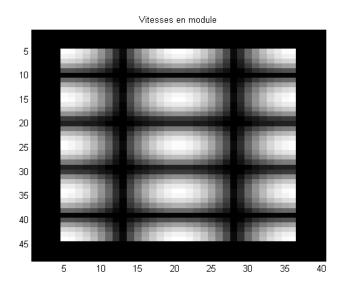


FIG. 3.4 – Vitesses sur une plaque

3.4 Résultats

La validation de la méthode a été faite d'une part en simulant des distributions de vitesses semblables à celles qu'on peut recontrer en réalité, ainsi qu'avec des mesures réelles effectué par l'équipe MPIA.

L'algorithme utilisé dans cette partie est la minimisation ℓ_1 , plus aisée d'utilisation bien que moins rapide. L'objectif ici n'a pas été de comparer différents algorithmes de reconstruction, mais d'étudier la façon dont différents paramètres tels que distance antenne-source, bruit, forme d'antenne, etc., vont affecter les résultats.

3.4.1 Simulations

Ces simulations ont pour cadre commun un domaine de taille 50 cm par 60 cm, discrétisé en 40 fois 48 points, une distance entre l'antenne et la plaque de 2.5 cm et une fréquence de 440 Hz.

La distribution des vitesses utilisée est visible figure 3.4. On prendra note des discontinuités au bord de la plaque, qui vont poser des difficultés. Ces discontinuités apparaissent dans le cas de plaques au bords libres.

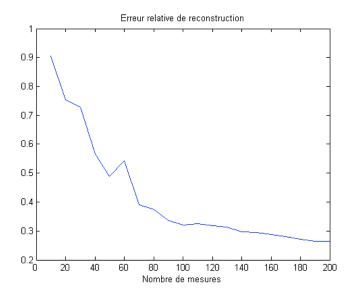


FIG. 3.5 – Erreur de reconstruction des vitesses pour différents nombres de mesures

Nombres de mesures

Les antennes utilisées ici sont aléatoires, allant de 5 à 200 capteurs par pas de 5. Les calculs sont effectués à l'aide de la minimisation ℓ_1 , sans bruit.

Le graphe 3.5 montre que l'erreur de reconstruction diminue quand le nombre de mesure augmente, puis ne diminue plus significativement. La reconstruction figure 3.6 pour 200 mesures donne des résultats satisfaisant. La reconstruction comporte 1920 points, et les résultats sont semblables à ceux obtenus par la technique classique régularisée. Enfin, le graphe 3.7 montre que les vitesses reconstruites sont toutes en phase, ce qui correspond bien à ce quoi on peut s'attendre, les vitesses à reconstruire étant en phase pour un mode propre.

Comportement face au bruit

Du bruit est maintenant simulé sur les mesures. Le rapport signal sur bruit est de 30 dB, on utilise ici la variante de la minimisation ℓ_1 permettant de prendre en compte le bruit. Une difficulté est ici d'estimer la norme du bruit. La reconstruction est visible figure 3.8.

3.4. RÉSULTATS 33

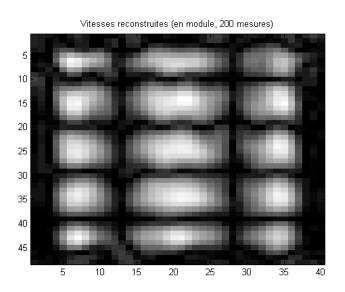


Fig. 3.6 – Reconstruction des vitesses de la plaque de la figure 3.4 pour 200 mesures à 25mm par minimisation ℓ_1

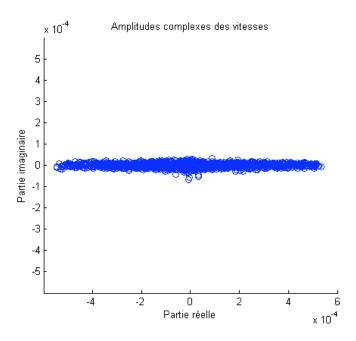


Fig. 3.7 – Amplitudes complexes des vitesses sur la plaque, 200 mesures

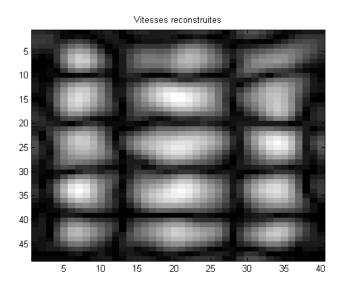


Fig. 3.8 – Reconstruction avec mesures bruitées

Effet de la hauteur

Le changement de la hauteur de l'antenne par rapport à la source va modifier la matrice qui modélise les mesures, les performances varient donc avec cette hauteur. La courbe 3.9 montre qu'il est nécessaire de rester proche de la plaque, comme on devait le faire avec la méthode classique.

Formes d'antennes

Trois formes d'antennes sont ici testées, toutes de 120 capteurs :

- une antenne aléatoire
- une antenne semi-aléatoire
- une antenne régulière

Les simulations ont été faites sans bruit avec la minimisation ℓ_1 , sur la même plaque qu'auparavant, et sur une plaque dont la carte des vitesses contient des hautes fréquences telles qu'elle soit impossible à reconstruire de façon classique avec l'antenne régulière utilisée ici. Les erreurs relatives pour les différentes antennes et distributions sont indiquées figure 3.10.

Pour des cartes de vitesses aux variations lentes, dont les résultats sont visible sur la figure 3.12, les antennes se comportent à peu près de la même façon, tandis que pour des cartes de vitesses aux variations élevées, figure 3.11, les performances sont médiocres pour toutes les antennes mais s'effondrent complètement pour l'antenne régulière.

3.4. RÉSULTATS 35

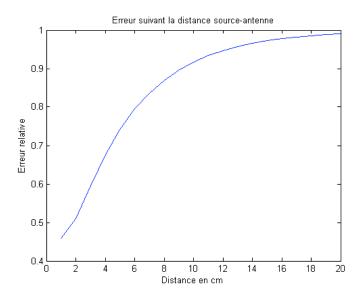


Fig. 3.9 – Effet de la hauteur sur l'erreur de reconstruction, 120 mesures

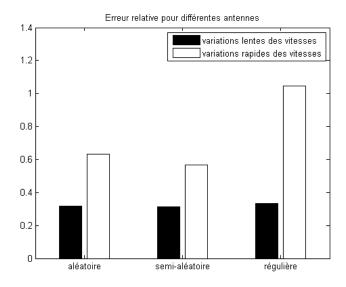


Fig. 3.10 – Erreurs relatives de reconstruction pour différentes antennes et distributions de vitesses

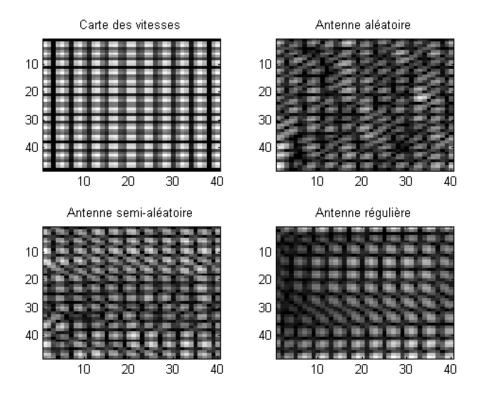


Fig. 3.11 – Résultats de reconstruction avec carte aux variations rapides pour différentes antennes

Le choix le plus judicieux semble donc être l'antenne semi-aléatoire, aux bonnes performances et facilement constructible.

3.4.2 Données expérimentales

Des calculs ont été menés sur des enregistrement réels obtenus sur une plaque métallique plane à l'aide d'une antenne de 120 capteurs. Les mesures sont répétées 16 fois en déplaçant légèrement l'antenne pour obtenir un quadrillage de 48 par 40. Le spectre d'un signal enregistré est visible figure 3.13.

On sélectionne ensuite des pics, qui correspondent aux modes propres, puis on effectue les calculs sur la valeur de la transformée de Fourier en ces points.

Un point délicat est la détermination des paramètres des algorithmes. Les deux reconstructions figures 3.14 et 3.15 ont été obtenues à l'aide de la 3.4. RÉSULTATS 37

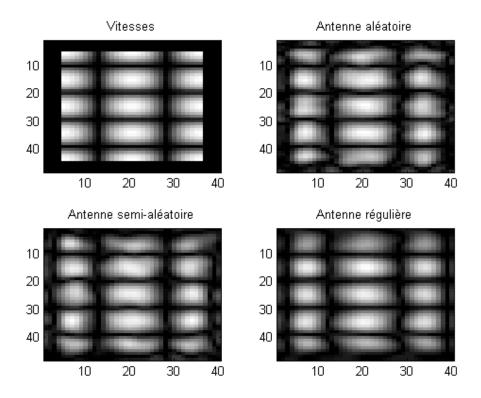


Fig. 3.12 – Résultats de reconstruction avec carte aux variations lentes pour différentes antennes

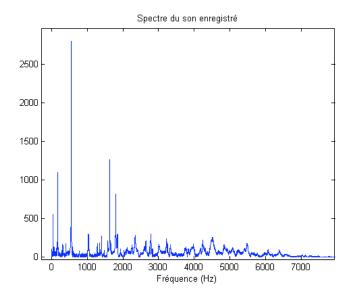


Fig. 3.13 – Spectre du signal mesuré par un capteur pour une plaque réelle excité par une impulsion

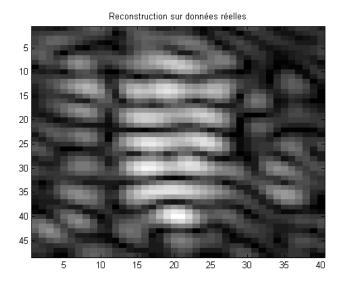


Fig. 3.14 – Carte des vitesses reconstruites sur données réelles, 120 mesures, fréquence $2840~\mathrm{Hz}$

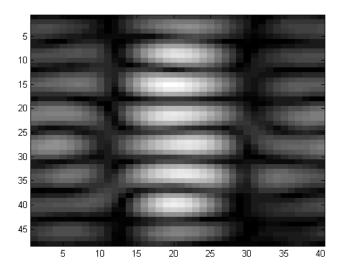


Fig. 3.15 – Carte des vitesses reconstruites sur données réelle, 120 mesures, fréquence 1403 Hz

minimisation ℓ_1 , qui nécessite une estimation de la norme du bruit. Cette estimation a ici été faite empiriquement, mais on pourrait pouvoir retrouver la norme du bruit spatial à partir du bruit temporel qui affecte chaque capteur. Deux autres sources de bruit dans l'hologramme sont les réponses différentes de chaque capteurs. De plus, ces résultats ont été obtenus à partir d'enregistrement d'holographie classique (l'antenne aléatoire a été simulée en gardant 120 mesures au hasard), les mesures n'ont pas toutes été prises pendant la même excitation de la plaque, ce qui représente une source de bruit supplémentaire. Les images obtenues sont conformes à ce à quoi on pourrait s'attendre de la part de mode propre.

Chapitre 4

Conclusion et perspectives

L'application des techniques de *compressed sensing* donne des résultats comparables à ceux des techniques classique d'holographie en champ proche, et ce avec un nombre de mesures beaucoup moins important. Ceci se fait bien évidemment au prix d'une complexité algorithmique importante, et d'hypothèses sur les quantités à reconstruire.

De nombreuses améliorations ou extensions peuvent encore être explorées :

- l'application à des formes quelconques de structures vibrantes pourrait être intéressante pour élargir le champ d'application (par exemple, une structure assez commune telle qu'une table d'harmonie de violon n'est pas plane);
- une étude plus approfondie de la parcimonie des déformées modales apporterait de meilleurs résultats, notamment pour la reconstruction des discontinuités (on pourrait, par exemple, utiliser un dictionnaire de déformées modales calculées par éléments finis sur un problème simplifié, puis reconstruire les perturbations sur une base générique);
- l'utilisation d'un modèle adapté pour les signaux temporels permettrait une meilleure estimation des amplitudes complexes. En effet, ces signaux sont sommes de sinusoïdes amorties exponentiellement. La décomposition du signal sur des fonctions de type $e^{(i\omega-\delta)t}$ rendrait mieux compte de la structure des signaux. De plus, une telle représentation, parcimonieuse et utilisant des fonctions aux propriétés très particulières, et la redondance entre les différents signaux, qui se décomposent sur les mêmes fonctions, ouvriraient la voie à une approche de type compressed sensing distribué, dans le domaine temporel, en diminuant d'autant plus la quantité de données à acquérir et traiter;
- enfin, l'étude de la structure de la parcimonie des modes dans la base de Fourier permettrait de meilleures performances, en complétant la

parcimonie par des propriétés de structure des supports.

De façon plus large, les techniques d'imagerie acoustique offrent de nombreuses possibilités d'applications de ces nouvelles méthodes d'échantillonnage : séparation de sources, localisation de sources ou d'object réflecteurs pour les aspects spatiaux, échantillonnage à des instants aléatoires en limitant le débit mais en conservant la bande passante pour les aspects temporels.

Bibliographie

- [1] J. D. Maynard, E. G. Williams, and Y. Lee, "Nearfield acoustic holography: I. theory of generalized holography and the development of nah," *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 78, no. 4, pp. 1395–1413, 1985.
- [2] S. L. Conte, S. L. Moyne, F. Ollivier, S. Vaiedelich, J. Frelat, D. Ley, and C. Laloue, "Mechanical modelization and holography measurement: application to the restoration and conservation of the couchet harpsichord," Wood Science for Conservation of Cultural Heritage: State of the Art, 2007, Florence.
- [3] E. G. Williams, Fourier Acoustics. Academic Press, 1999.
- [4] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders, "Atomic decomposition by basis pursuit," *SIAM Review*, vol. 43, pp. 129–159, March 2001.
- [5] S. Mallat and Z. Zhang, "Matching pursuits with time-frequency dictionaries," Signal Processing, IEEE Transactions on, vol. 41, pp. 3397–3415, Dec 1993.
- [6] E. J. Candès, "The restricted isometry property ans its implications for compressed sensing," Compte Rendus de l'Académie des Sciences, vol. Série I, no. 346, pp. 589–592, 2008.
- [7] S. Foucart and M.-J. Lai, "Sparsest solutions of underdetermined linear systems via lq-minimization for $0 < q \le 1$," Applied and Computational Harmonic Analysis, vol. 26, no. 3, pp. 395 407, 2009.
- [8] J. Tropp and A. Gilbert, "Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 53, pp. 4655–4666, Dec. 2007.
- [9] D. Needell and J. A. Tropp, "Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples," 2008.
- [10] T. Blumensath and M. E. Davies, "How to use the iterative thresholding algorithm," *Proc. SPARS'09*, 2009.
- [11] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation. Éditions de l'École Polytechnique, 2006.

44 BIBLIOGRAPHIE

[12] M. S. Lobo, L. Vandenberghe, S. Boyd, and H. Lebret, "Applications of second-order cone programming," *Liner Algebra and its Applications*, no. 284, pp. 193–228, 1998.