

---

RAPPORT DE STAGE  
MASTER 2 ATIAM 2006/2007

**SIMULATION DE CIRCUITS AUDIO  
ANALOGIQUES NON LINEAIRES**

**PAR LES SERIES DE VOLTERRA**



---

Etudiant :  
Responsable de stage :

Ivan Cohen  
Thomas Hélie

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
1    État de l’art sur la simulation de circuits audio analogiques . . . . .	1
1.1    Méthodes de modélisation . . . . .	1
1.2    Méthodes numériques actuellement utilisées pour la résolution des équations	2
2    Énoncé et Problématique du stage . . . . .	3
<b>I Étude d’un circuit analogique : le SansAmp GT2 de Tech21</b>	<b>4</b>
1    Présentation . . . . .	4
2    Séparation en étages découplés . . . . .	4
3    Modèles et équations du circuit . . . . .	7
3.1    Modèle de l’amplificateur opérationnel . . . . .	8
3.2    Équations des composants linéaires . . . . .	9
<b>II Introduction aux séries de Volterra</b>	<b>11</b>
1    Systèmes mono-entrée et mono-sortie . . . . .	11
1.1    Définitions et propriétés . . . . .	11
1.2    Lois d’interconnexion . . . . .	12
1.3    Exemple : impédance généralisée au cas faiblement non linéaire . . . . .	12
2    Systèmes à deux entrées et deux sorties . . . . .	14
2.1    Définitions . . . . .	14
2.2    Lois d’interconnexion . . . . .	14
2.3    Application de la loi d’interconnexion en cascade . . . . .	15
2.4    Quadripôles électriques et conventions . . . . .	16
3    Identification en structures simulables . . . . .	17
<b>III Méthode 1 : séries de Volterra de chaque étage</b>	<b>18</b>
1    Premier étage étudié : l’étage B . . . . .	18
1.1    Points d’équilibre . . . . .	18
1.2    Modèle exact petits signaux pour l’amplificateur opérationnel . . . . .	19
1.3    Noyaux de la série de Volterra de l’amplificateur opérationnel . . . . .	19
1.4    Calcul des noyaux de l’étage B . . . . .	21
1.5    Structure simulable de l’étage B . . . . .	23

2	Étages suivants . . . . .	24
2.1	Étage A1 . . . . .	24
2.2	Étage A2 . . . . .	24
2.3	Étage C . . . . .	24
3	Structure des étages . . . . .	25
<b>IV Méthode 2 : représentations d'état</b>		<b>26</b>
1	Écriture des représentations d'état de l'étage B . . . . .	26
1.1	Amplificateur opérationnel . . . . .	27
1.2	Impédances de l'étage B . . . . .	27
1.3	Représentation d'état générale de l'étage B . . . . .	29
2	Résolution du débouclage . . . . .	30
2.1	Problème . . . . .	30
2.2	Solution (Newton-Raphson) . . . . .	30
3	Équations d'état pour tous les étages . . . . .	31
4	Résolution numérique des équations . . . . .	31
<b>V Simulation temps réel des deux méthodes et résultats</b>		<b>33</b>
1	Implantation Volterra . . . . .	33
1.1	Suréchantillonnage . . . . .	33
1.2	Synthèse des filtres . . . . .	34
2	Implantation Runge-Kutta . . . . .	35
3	Résultats . . . . .	35
<b>Conclusion générale et perspectives</b>		<b>38</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>39</b>
<b>VI Annexes</b>		<b>41</b>
1	Expression des filtres pour les séries de Volterra . . . . .	41
1.1	Étage A . . . . .	41
1.2	Étage B . . . . .	42
1.3	Étage C . . . . .	43
2	Expression des constantes pour les séries de Volterra . . . . .	43
3	Schéma complet du SansAmp GT2 et valeurs des composants . . . . .	44

# Remerciements

Je tiens à remercier spécialement Thomas Hélie, chargé de recherche dans l'équipe Analyse Synthèse de l'Ircam, pour m'avoir encadré comme il l'a fait lors de ce stage. Ses connaissances sur le sujet, ses conseils avisés et ses critiques, son écoute, son engagement sur mon travail et ses encouragements m'ont été d'un énorme secours. Je remercie également Rémy Muller pour ses conseils, et son intérêt

sur le stage, ainsi que tous les gens de l'Ircam que j'ai pu côtoyer, en particulier René Caussé, David Roze et Didier Perini, et mes collègues de la formation ATIAM.

# Introduction générale

Alors que la puissance des ordinateurs est en augmentation perpétuelle depuis 15 ans, le domaine de l'informatique musicale a apporté un grand nombre de nouveaux moyens aux musiciens d'exprimer leur art. En particulier, la démocratisation des "home-studios" permet à des artistes amateurs d'enregistrer et mixer leur musique avec peu de moyens techniques, même si la créativité ne s'improvise pas encore !

Actuellement, la simulation de circuits audio analogiques est un des secteurs clés de la musique assistée par ordinateur, que cela concerne des synthétiseurs, les outils de mixage que l'on trouve en studio d'enregistrement, ou encore du matériel relié aux instruments de musique, comme les amplificateurs de guitare. Il est possible de remplacer une partie de ces éléments par des solutions logicielles, fondées sur des opérations de traitement de signal et des études électroniques de circuits, ce qui serait impossible sans le développement des micro-processeurs de ces dernières années.

Néanmoins, les simulations numériques n'ont pas encore tenu toutes leurs promesses : plus pratiques à utiliser que leurs équivalents hardware, plus abordables au niveau des prix, elles peinent encore à atteindre le réalisme sonore qui permettrait aux musiciens de s'affranchir totalement des circuits analogiques originaux, malgré des progrès notables ces dernières années. Nous allons donner un aperçu des différents moyens mis en oeuvre aujourd'hui, dans des produits commerciaux, pour simuler des circuits audio analogiques en temps-réel.

## 1 État de l'art sur la simulation de circuits audio analogiques

### 1.1 Méthodes de modélisation

Il est difficile de faire un état de l'Art exhaustif sur la modélisation de circuits analogiques, les recherches dans le domaine étant essentiellement effectuées au sein d'entreprises en concurrence les unes avec les autres, ce qui limite l'accès aux informations précises. Il est toutefois possible de distinguer trois méthodes majeures de simulation de circuits analogiques : une méthode empirique, une méthode s'appuyant sur l'identification, et une méthode fondée sur des modèles physiques.

#### Méthode empirique

La méthode empirique consiste à développer un modèle approximatif avec des opérations de traitement du signal pour le circuit à simuler, par exemple en utilisant des filtres simples, des fonctions polynomiales pour l'aspect non linéaire [24] [25]. Cette méthode est qualifiée d'empirique car ses

paramètres ainsi que son degré de complexité sont ajustés par l'appréciation perceptive des développeurs. Ces modèles sont faciles à concevoir, mais sont largement en retrait des autres au niveau de la qualité d'imitation, dépendant fortement de la complexité du modèle, et s'appuyant sur peu d'éléments quantitatifs. Ils sont pourtant très largement utilisés.

## **Identification**

La méthode s'appuyant sur l'identification a le vent en poupe depuis plusieurs années, sur des domaines très précis. Tout a commencé avec la possibilité d'effectuer des convolutions du signal entrant en temps réel, avec les calculs de FFT. En mesurant la réponse impulsionnelle de différents systèmes parfaitement linéaires (acoustique de salles, simulations de réverbération, haut-parleurs et égaliseurs numériques en première approximation), il devient possible de réaliser par convolution des simulations précises. Par la suite, de nombreux logiciels temps réel fondés sur cette technique ont vu le jour [1], en particulier des réverbérations à convolution comme Audio Ease Altiverb [3] ou Waves IR-1 [15]. Les logiciels de simulation d'amplificateurs guitare comme Guitar Rig [10] ou Revalver MK2 [2] se servent également de cette technique pour simuler la réponse des haut-parleurs. Aujourd'hui, des évolutions ont vu le jour, notamment avec la prise en compte de phénomènes non linéaires dans les mesures, s'inspirant parfois de loin des séries de Volterra, comme c'est le cas avec le Waves Q-Clone [16] et le Focusrite Liquid Channel [4] (simulation d'égaliseurs et de compresseurs hardware), le futur produit Ellipse Audio Torpedo qui a été mon sujet de stage au début 2006... Cette méthode a de l'avenir, elle garantit le réalisme de la simulation, mais elle se heurte à un certain nombre de difficultés, en particulier sur les moyens de mesurer la non linéarité de façon exhaustive.

## **Modélisation physique**

Actuellement, la méthode qui donne les meilleurs résultats (et que nous avons choisie pour notre étude), est celle qui se repose sur des modèles physiques. Il s'agit d'étudier le circuit analogique à simuler au moyen d'équations sur les tensions à chaque noeud, les intensités sur chaque branche du circuit. Les différences entre les logiciels viennent des simplifications et discrétisations utilisées pour obtenir la solution temps réel. En effet, cette transition est loin d'être évidente, elle peut se réaliser de différentes manières. Il faut donc trouver des moyens de résoudre des systèmes d'équations différentielles non linéaires en temps réel, en réduisant la complexité du problème à résoudre. C'est la technique utilisée pour les simulateurs d'amplificateurs les plus performants à l'heure actuelle, comme Guitar Rig [10], Revalver MK2 [2], et Simulanalog Guitar Suite [19]. Elle a fait l'objet d'une étude à paraître dans la conférence DAFX 2007 à Bordeaux, réalisée par Julius O. Smith, David T. Yeh et Jonathan S. Abel.

### **1.2 Méthodes numériques actuellement utilisées pour la résolution des équations**

Bien sûr, il est difficile pour nous d'évaluer quelles sont les techniques de résolution numérique d'équations utilisées dans les logiciels du commerce. Dans le cas de Simulanalog Guitar Suite, des articles sont disponibles sur le site de l'application [18] [21], donnant une vision d'ensemble des techniques sur lesquelles se basent leurs logiciels. Nous pouvons deviner dans l'ensemble l'utilisation des algorithmes de Runge Kutta ou de Newton-Raphson. Par contre, il semblerait que les séries de Volterra

n'aient jamais été utilisées de manière approfondie dans ce domaine. Cet outil permet de représenter un système d'équations non linéaires différentielles par une "série à noyaux de convolution", qu'on peut ensuite identifier avec un schéma bloc numérique d'opérations élémentaires (addition, multiplication, filtrage linéaire), sans contre réaction. Cette forme est alors dite réalisable, i.e. simulable sans avoir à résoudre d'équations implicites (à l'échantillon).

Une présentation de l'utilisation des séries de Volterra pour la simulation temps réel du filtre Moog [7] a déjà été faite en 2006 lors du congrès DAFX, par Thomas Hélie, et c'est naturellement que l'idée de tester la validité de l'outil sur d'autres circuits, plus fortement non linéaires par exemple, est apparue et a fait l'objet d'un stage...

## **2 Énoncé et Problématique du stage**

Dans ce stage, de nouveaux moyens de simulation de circuits analogiques sont à l'étude, et en particulier l'utilisation des séries de Volterra. Nous nous sommes proposés d'étudier une pédale d'effets pour guitare, le SansAmp GT2 de Tech 21, et de la simuler sous forme logicielle temps réel dans le format plug-in VST, avec cet outil. Nous nous situons donc dans le même contexte que les produits commerciaux, avec la nécessité de réaliser une simulation temps réel, et des performances au niveau sonore qui soient aussi proche que possible du rendu réel.

Dans un premier temps, nous avons fait une étude du circuit électronique de la pédale d'effet, pour estimer la complexité de la modélisation, et pour déterminer quels seront les modèles de composants dont nous aurons besoin pour décrire physiquement le circuit. Ensuite, nous nous sommes intéressés en détail aux formalismes des séries de Volterra, et à la manière dont nous pourrions faire un pont entre une représentation électronique du circuit, et sa formulation équivalente avec cet outil. L'ensemble des équations a alors été converti en structure simulable numériquement en temps-réel, après le calcul des noyaux de Volterra pour chaque étage du circuit qui nous intéresse, et la discrétisation des filtres numériques. Enfin, nous avons testé une autre méthode de résolution numérique temps-réel des équations, s'appuyant sur la méthode de Runge-Kutta.

# Chapitre I

## Étude d'un circuit analogique : le SansAmp GT2 de Tech21

### 1 Présentation

Au démarrage du stage, il était prévu d'étudier le fonctionnement d'un amplificateur guitare à lampes. Mais un gros problème s'est alors posé sur les composants clés de ce circuit audio : la lampe et le transformateur. En effet, il n'existe aujourd'hui aucun modèle satisfaisant de ces composants, qui tiennent compte de leur comportement non linéaire. Il existe un peu de littérature sur leur fonctionnement idéal, notamment les articles [17] [13], mais rien qui tienne compte du champ de fonctionnement complet des circuits. L'explication de ce manque d'informations est simple : ces composants sont considérés comme étant dépassés pour des applications industrielles à plus large échelle, contrairement à notre domaine d'étude où ils sont des éléments essentiels. Par conséquent, la recherche de ce type de modèle est effectuée dans des entreprises, pour être ensuite appliquée directement sur des produits commerciaux. Il n'est donc pas dans leur intérêt de publier le résultat de leurs recherches...

L'étude de ces composants pouvant faire l'objet d'un stage complet, nous nous sommes rabattus sur la pédale SansAmp GT2 de Tech21, qui fait office de préamplificateur guitare, avec des paramètres permettant de sculpter le son en partant d'un Fender Twin à un Mesa Boogie en saturation. Son circuit est très bien connu (voir annexes).

La pédale d'effet embarque trois simulations d'amplificateurs (California pour Mesa-Boogie, British pour Marshall, Tweed pour Fender), qu'on choisit à l'aide du switch  $S_3$ . Elle donne la possibilité aussi de choisir le nombre d'étages de gain (Clean pour avoir un son clair, puis Hi-Gain et Hot-Wired pour des sons saturés). Il est enfin possible de contrôler une simulation de haut-parleur + microphone, ainsi que l'égalisation avec deux potentiomètres agissant sur les fréquences graves et aigues.

### 2 Séparation en étages découplés

La description physique du SansAmp GT2 est difficilement réalisable sans partitionner les problèmes, c'est-à-dire en étudiant séparément chaque étage du circuit. Cela ne peut être pertinent que si les différents étages sont choisis judicieusement, en étant découplés, ce qui permettra de cascader directement leurs structures au sein de la simulation, et de ne pas se soucier de l'interaction d'un bloc avec un autre.



Figure I.1: Le SansAmp GT2 de Tech21

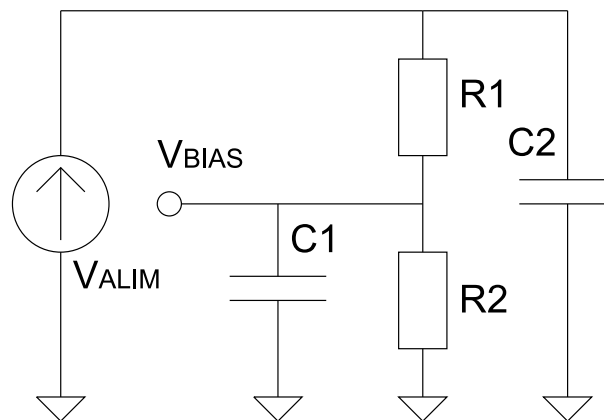


Figure I.2: Alimentation du circuit

Pour commencer, nous étudions l’étage d’alimentation du circuit (voir figure I.2). Celui-ci fournit une tension de polarisation de 4.5 Volts à différents emplacements du circuit, grâce au pont diviseur formé par les résistances  $R_1$  et  $R_2$ , et la tension d’alimentation de 9 Volts, fournie par pile ou alimentation secteur. Les condensateurs permettent de découpler les différents étages reliés au potentiel de polarisation (noté  $V_{BIAS}$ ). On peut donc approximer l’ensemble de l’étage d’alimentation par un générateur de tension  $V_{BIAS}$  idéal.

Ensuite, nous devons nous pencher sur le découpage du circuit en plusieurs étages et blocs découplés. Celui-ci est facilité par la présence des amplificateurs opérationnels dans le circuit, dont nous allons voir une modélisation précise ci-dessous. Une propriété de cette modélisation est que le courant sur les entrées  $V+$  et  $V-$  de l’amplificateur opérationnel est nul. On profite de cette propriété pour identifier nos étages et blocs à l’entrée de certains amplificateurs opérationnels, comme on peut le voir sur les figures I.3 I.4 I.5 I.6 I.7

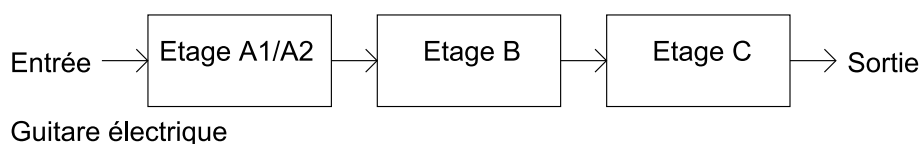


Figure I.3: Mise en cascade des étages

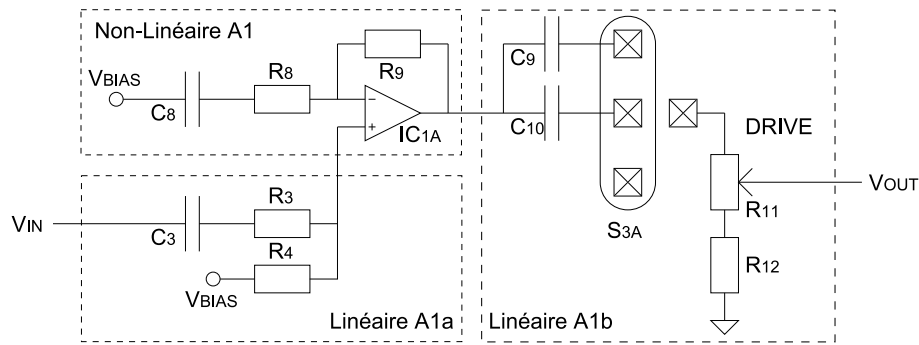


Figure I.4: Étage A1

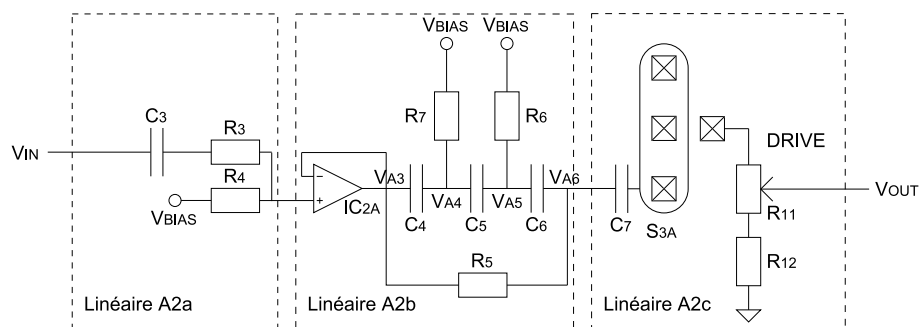


Figure I.5: Étage A2

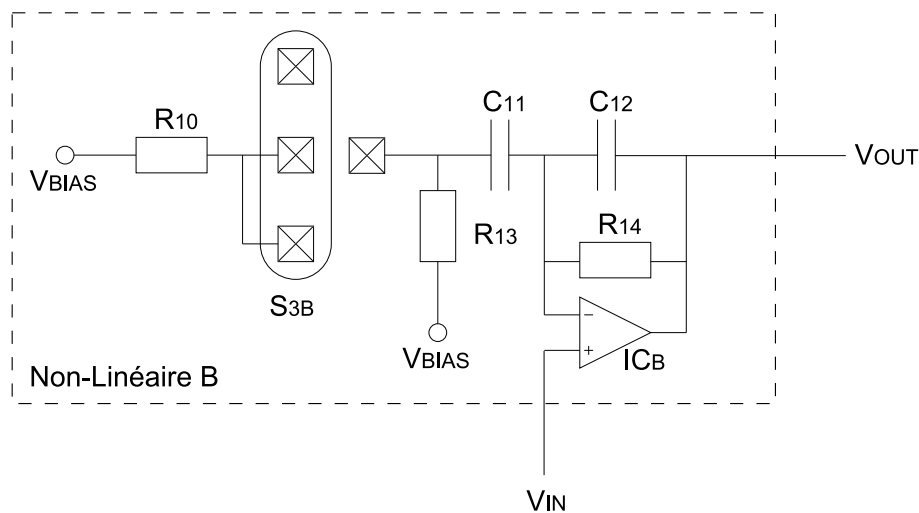


Figure I.6: Étage B

La "chaîne électronique audio" peut donc se résumer ainsi :

- Le générateur de signal : la guitare électrique, qui peut être considérée comme un générateur de tension idéal, ne débitant pas d'intensité, avec une tension maximale en valeur absolue de 400 mV environ ;
- L'étage A : il a une fonction de préamplification du signal provenant de la guitare. Il est divisé en deux parties, un étage A1 qui correspond à la modélisation analogique des amplificateurs California et British (avec des sonorités plutôt saturées), et un étage A2 qui ne sature pas, du fait de

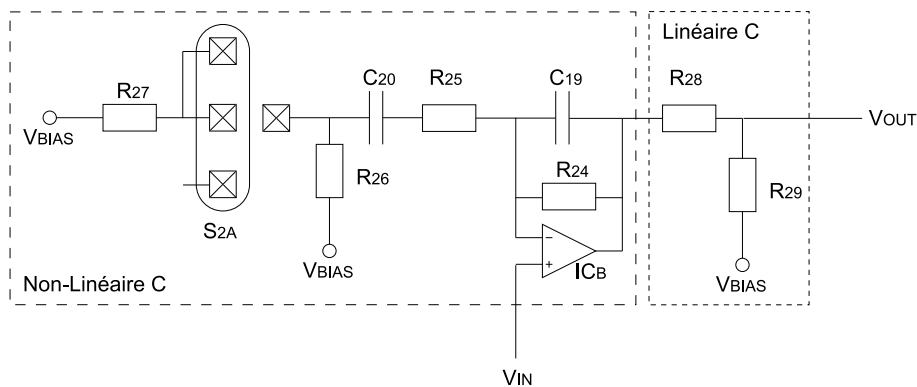


Figure I.7: Étage C

la présence de l'amplificateur en configuration de suiveur. Les deux sous-parties fonctionnent de manière exclusive, selon la position du switch  $S_3$ .

- Les étages B et C : ils ont comme fonction de mettre les amplificateurs opérationnels en régime saturé, dont la saturation est contrôlée par l'amplitude en tension de l'entrée de l'étage B, modifiable par l'utilisateur via le potentiomètre  $R_{11}$  appelé aussi "DRIVE". Il est représenté par deux résistances avec une jonction au milieu, dont les valeurs sont respectivement  $\alpha R_{11}$  et  $(1 - \alpha)R_{11}$

A l'intérieur de ces étages, des séparations supplémentaires par blocs sont faites, ce qui permet de traiter en plusieurs temps les sections linéaires et non linéaires de chaque étage. Nous allons voir comment gérer les interactions entre ces blocs, interactions qui n'existent pas par contre entre nos étages.

**Note : toutes les valeurs des composants sont donnés en annexe.**

Pour ce stage, nous ne nous sommes intéressés qu'aux premiers étages du SansAmp GT2, i.e. les étages non linéaires qui sont les plus intéressants à étudier. Les étages suivants, linéaires et plus simples à modéliser, feront l'objet d'une prochaine étude.

### 3 Modèles et équations du circuit

La première étape pour la simulation avec des modèles physiques est de réaliser la description par des équations du fonctionnement du circuit électronique. Pour cela, on utilise le théorème de Millmann sur chacun des noeuds, ainsi qu'un modèle pour chaque composant particulier du circuit (amplificateur opérationnel dans ce cas, tubes, diodes ou transistors en général...). Des vérifications sur les modèles ont été effectuées avec le logiciel LTSpice/Switcher CAD III, une version gratuite de Spice aussi complète que PSpice par exemple, disponible pour Windows seulement sur le site de Linear Technology [20]. Non seulement LTSpice peut réaliser les simulations de base (analyse petits-signaux, harmonique, points d'équilibre, analyse des transitoires), mais en plus il lui est possible de remplacer les générateurs de tension par des signaux au format WAV, puis d'exporter en WAV ce signal traité par le circuit.

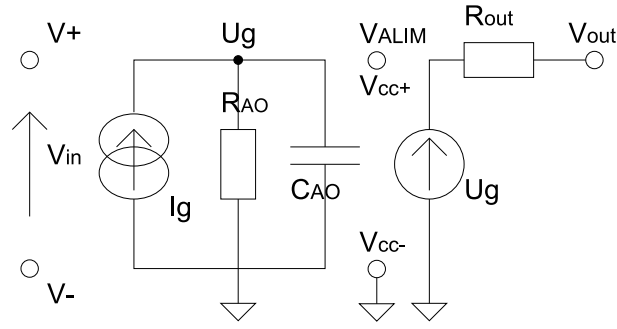


Figure I.8: Modèle de l'amplificateur opérationnel

### 3.1 Modèle de l'amplificateur opérationnel

Les sonorités saturées du SansAmp GT2 sont produites par un amplificateur opérationnel, le modèle TL072 de Texas Instruments. On peut trouver son *Datasheet* [11] sur le site de Texas Instruments, donnant quelques-unes de ses caractéristiques, ainsi que sa structure avec des transistors. Pour pouvoir le décrire électroniquement avec des équations, il est nécessaire d'en récupérer un modèle grand signaux réel, qui tienne compte de son fonctionnement non linéaire ainsi que du "Slew Rate", et de la saturation du courant sur les fréquences élevées. Un modèle est décrit dans [22], ainsi que d'autres plus complexes dans [5] [9], dont nous nous sommes servis pour faire des simulations dans LTSpice.

Le modèle I.8 que nous utilisons, issu de [22], produit des non linéarités au moyen d'équations conditionnelles, de la forme  $y = ax + b$  en régime linéaire, et  $y = a$  en régime de saturation. Dans le but d'écrire des équations analytiques, ces expressions ont été remplacées par des tangentes hyperboliques. Nous obtenons la description suivante :

$$\begin{aligned} i_g &= I_{AO} \tanh(G_{AO}^{in}(V_+ - V_-)), \\ i_g &= C_{AO} \frac{du_g}{dt} + \frac{u_g}{R_{AO}}, \\ V_{out} &= U_{AO}^{out} \tanh[G_{AO}^{out}(u_g - R_{out}I_{out})] + V_{BIAS}, \end{aligned} \quad (I.1)$$

où  $I_{AO}$ ,  $G_{AO}^{in}$ ,  $C_{AO}$ ,  $R_{out}$ ,  $G_{AO}^{out}$ , et  $U_{AO}^{out}$  sont les paramètres du TL072. <sup>1</sup>

Il est possible de simplifier ces équations. Pour cela nous posons :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= V_+ - V_- \\ U_{AO}^{in} &= I_{AO}/C_{AO} \\ \omega_{AO} &= \frac{1}{R_{AO}C_{AO}} \end{aligned} \quad (I.2)$$

<sup>1</sup>Les valeurs numériques des paramètres de l'amplificateur opérationnel sont déterminés à l'aide de LTSpice pour les paramètres statiques, de manière empirique, en changeant les paramètres de gain du modèle que nous utiliserons jusqu'à que la réponse avec un V+ et un V- donnés soit la même que la réponse du modèle plus complexe. Pour les autres paramètres ( $R_{AO}$ ,  $C_{AO}$ ,  $G_{AO}^{in}$ ,  $U_{AO}^{in}$ ), nous nous sommes référés aux caractéristiques du Datasheet [11], et aux valeurs par défaut proposées dans [22].

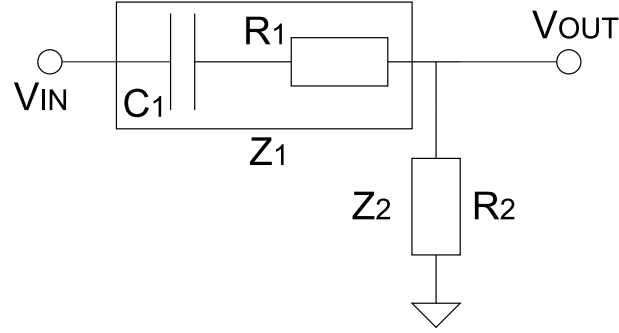


Figure I.9: Diviseur de tension à impédances complexes

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \frac{du_g}{dt} &= U_{AO}^{in} \tanh(G_{AO}^{in} \varepsilon) - \omega_{AO} u_g \\ V_{out} &= U_{AO}^{out} \tanh[G_{AO}^{out} (u_g - R_{out} I_{out})] + V_{BIAS} \end{aligned} \quad (I.3)$$

### 3.2 Équations des composants linéaires

Nous pouvons étudier les équations de chacun des blocs séparément. A l'exception du bloc 2 de l'étage A2, ceux-ci sont des diviseurs de tensions avec des impédances complexes, comme nous pouvons le voir sur la figure I.9

D'une manière générale, nous pouvons donc écrire dans le domaine de Laplace :

$$\begin{aligned} V_{out} &= V_{in} \times \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}, \\ Z_1(s) &= R_1 + \frac{1}{C_1 s}, \\ Z_2(s) &= R_2 \end{aligned} \quad (I.4)$$

soit

$$F(s) = \frac{R_2 C_1 s}{1 + (R_1 + R_2) C_1 s} \quad (I.5)$$

Concernant le bloc 2 de l'étage A2, la résolution s'est effectuée sous Maple, autour du point d'équilibre de l'étage, avec donc les résistances  $R_6$  et  $R_7$  reliées à une masse. On entre le système suivant sous Maple, en utilisant le théorème de Milmann :

$$\begin{aligned}
 (C_4 \frac{\delta}{\delta t} + \frac{1}{R_5})V_{B3} &= C_4 \frac{dV_{B4}}{dt} + \frac{V_{B6}}{R_5} + I_{AO}^{out} \\
 ((C_4 + C_5) \frac{d}{dt} + \frac{1}{R_7})V_{B4} &= C_4 \frac{dV_{B3}}{dt} + C_5 \frac{dV_{B5}}{dt} \\
 ((C_5 + C_6) \frac{d}{dt} + \frac{1}{R_6})V_{B5} &= C_5 \frac{dV_{B4}}{dt} + C_6 \frac{dV_{B6}}{dt} \\
 (C_6 \frac{d}{dt} + \frac{1}{R_5})V_{B6} &= C_6 \frac{dV_{B5}}{dt} + \frac{V_{B3}}{R_5} \\
 I_{AO}^{out} &= \frac{V_{B3}}{R_{AO}^{out}}
 \end{aligned} \tag{I.6}$$

Maple nous donne alors l'expression du filtre. L'ensemble des coefficients des filtres, dont nous verrons la nomenclature au chapitre 3, est disponible en annexes.

# Chapitre II

## Introduction aux séries de Volterra

Dans ce chapitre, nous allons définir et donner les propriétés principales des séries de Volterra. Cet outil peut être vu comme une généralisation du filtrage linéaire, au cas faiblement non linéaire. Pour une présentation détaillée, nous renvoyons à [8] [6] [14] [12].

Ce chapitre est organisé comme suit : en §1, les séries de Volterra pour un système mono-entrée mono-sortie sont d'abord introduites ; puis en §2, le cas des quadripôles est considéré (deux entrées et deux sorties) ; enfin §3, un principe d'identification en structures simulables est donné.

### 1 Systèmes mono-entrée et mono-sortie

#### 1.1 Définitions et propriétés

Un système est décrit par les séries de Volterra si :

$$y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_n h_n(t_1, t_2, \dots, t_n) u(t - t_1) u(t - t_2) \dots u(t - t_n) dt_1 dt_2 \dots dt_n \quad (\text{II.1})$$

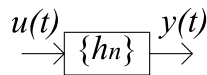


Figure II.1: Système non linéaire décrit par les séries de Volterra

Les fonctions  $h_n$  sont appelées noyaux de Volterra, et décrivent le système. On remarque que celui-ci est linéaire si et seulement si  $h_n = 0$  pour  $n \geq 2$ . La représentation en séries de Volterra du système devient équivalente à celle d'un filtre linéaire, avec la forme d'une opération de convolution.

Pour des systèmes causaux ( $h_n(t_1, \dots, t_n) = 0$  si  $\exists k \mid t_k < 0$ ), on définit les noyaux dans le domaine de Laplace par, pour tout  $(s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{D} \subset \mathbb{C}^N$ ,

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \int_{\mathbb{R}_+^n} h_n(t_1, \dots, t_n) \exp(-(s_1 t_1 + s_2 t_2 + \dots + s_n t_n)), dt_1 dt_2 \dots dt_n, \quad (\text{II.2})$$

où  $\mathcal{D}$  est le domaine de convergence de la transformée de Laplace. Pour un système stable,  $\mathcal{D}$  contient  $\{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 0\}$ . Une notion de convergence existe pour ses séries, mais nous ne nous en occupons pas ici.

### 1.2 Lois d'interconnexion

Considérons deux systèmes non linéaires représentés respectivement par leurs séries de Volterra  $f_n$  et  $g_n$ , ou encore  $F_n$  et  $G_n$  dans le domaine de Laplace. Leurs interconnexions, par une somme, un produit instantané, et une mise en cascade, représentent encore une série de Volterra  $h_n$  donnée par, respectivement, pour  $n \geq 1$  :

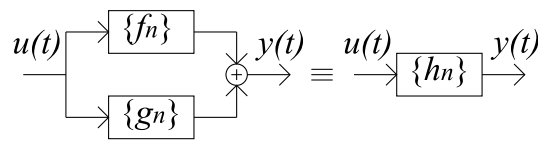


Figure II.2: Somme de séries de Volterra

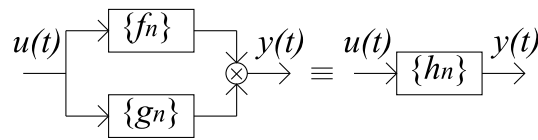


Figure II.3: Produit de séries de Volterra

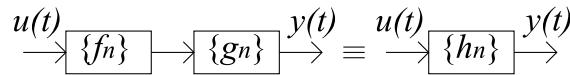


Figure II.4: Mise en cascade de séries de Volterra

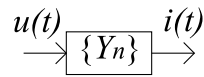
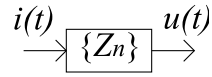
$$H_n(s_1, \dots, s_n) = F_n(s_1, \dots, s_n) + G_n(s_1, \dots, s_n) \quad (\text{II.3})$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{p=1}^{n-1} F_p(s_1, \dots, s_p) G_{n-p}(s_{p+1}, \dots, s_n) \quad (\text{II.4})$$

$$H_n(s_1, \dots, s_n) = \sum_{p=1}^n \sum_{\substack{m_1 + \dots + m_p = n \\ m_1, \dots, m_p \geq 1}} F_{m_1}(s_1, \dots, s_{m_1}) \dots F_{m_p}(s_{m_1 + \dots + m_{p-1} + 1}, \dots, s_n) G_p(s_1 + \dots + s_{m_1}, \dots, s_{m_1 + \dots + m_{p-1} + 1} + \dots + s_n) \quad (\text{II.5})$$

### 1.3 Exemple : impédance généralisée au cas faiblement non linéaire

Pour les circuits électroniques, on peut généraliser la notion d'impédance usuelle (dipôle linéaire) au cas de dipôles faiblement non linéaires à l'aide des séries de Volterra, de la manière suivante : la tension  $u(t)$  aux bornes du dipôle est modélisée par la sortie d'une série de Volterra de noyaux  $\{Z_n\}$  et d'entrée  $i(t)$ , i.e. l'intensité traversant le dipôle (cf II.5 II.6).


 Figure II.5: Impédance généralisée de noyaux  $Z_n$ 

 Figure II.6: Admittance généralisée de noyaux  $Y_n$ 

Cette définition donne bien une généralisation du cas linéaire. En effet, considérons l'exemple linéaire d'une résistance et d'un condensateur en série. Les noyaux de Volterra "impédance" de ce dipôle sont donnés par :

$$\begin{aligned} Z_1(s_1) &= R + \frac{1}{Cs_1} \\ Z_n(s_1, \dots, s_n) &= 0 \text{ si } n \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

De même, une généralisation similaire existe pour les admittances : l'entrée est la tension  $u(t)$ , la sortie  $i(t)$  et les noyaux sont notés  $\{Y_n\}$ .

La conversion des noyaux admittance  $\{Y_n\}$  en noyaux impédance  $\{Z_n\}$  est possible si  $Y_1 \neq 0$ . Elle est donnée par, pour  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} Z_n(s_1, \dots, s_n) &= [Y_1(s_1)Y_1(s_2) \dots Y_1(s_n)]^{-1} \left[ I_n(s_1, n) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{p=1}^{n-1} \sum_{\substack{m_1+\dots+m_p=n \\ m_1, \dots, m_p \geq 1}} Y_{m_1}(s_1, \dots, s_{m_1}) \dots Y_{m_p}(s_{m_1+\dots+m_{p-1}+1}, \dots, s_n) \right. \\ &\quad \left. Z_p(s_1 + \dots + s_{m_1}, \dots, s_{m_1+\dots+m_{p-1}+1} + \dots + s_n) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

où  $\{I_n\}$  représente le système identité de sorte que :

$$\begin{aligned} I_1(s_1) &= 1 \\ I_n(s_1, \dots, s_n) &= 0, \text{ si } n \geq 2. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

La conversion symétrique est obtenue en échangeant le rôle de  $\{Y_n\}$  et de  $\{Z_n\}$ . Ce résultat s'obtient simplement en écrivant à l'aide de II.5 que la cascade de  $\{Y_n\}$  et de  $\{Z_n\}$  définit le système identité ( $\{H_n\} = \{I_n\}$ ).

Pour les deux premiers ordres ( $n = 1, n = 2$ ), cette conversion s'écrit :

$$Z_1(s_1) = [Y_1(s_1)]^{-1} \quad (\text{II.9})$$

$$Z_2(s_1, s_2) = -[Y_1(s_1)Y_1(s_2)]^{-1} Z_1(s_1 + s_2)Y_2(s_1, s_2) \quad (\text{II.10})$$

Remarque : on retrouve bien la relation connue pour le cas linéaire.

## 2 Systèmes à deux entrées et deux sorties

Les séries de Volterra peuvent être généralisées à des systèmes non linéaires multi-entrées et multi-sorties. Nous allons voir les conventions qui concernent les systèmes non linéaires avec deux entrées et deux sorties, dont nous aurons besoin pour la modélisation électronique.

### 2.1 Définitions

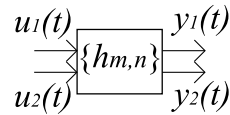


Figure II.7: Séries de Volterra deux entrées et deux sorties

Soit  $(m, n) \in \mathbb{M}_2 = \mathbb{N}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . La formulation d'un système non linéaire deux entrées deux sorties s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_n [h_{m,n}(t_1, t_2, \dots, t_m, \tau_1, \dots, \tau_n)]_1 \\
 &\quad u_1(t - t_1) \dots u_1(t - t_m) u_2(t - \tau_1) \dots u_2(t - \tau_n) dt_1 \dots dt_m d\tau_1 \dots d\tau_n \\
 y_2(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_n [h_{m,n}(t_1, t_2, \dots, t_m, \tau_1, \dots, \tau_n)]_2 \\
 &\quad u_1(t - t_1) \dots u_1(t - t_m) u_2(t - \tau_1) \dots u_2(t - \tau_n) dt_1 \dots dt_m d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (\text{II.11})
 \end{aligned}$$

De même que pour les systèmes mono-entrée et mono-sortie, on peut définir les transformées de Laplace de  $y(t)$ ,  $u(t)$  et  $h_{m,n}(t_1, t_2, \dots, t_m, \tau_1, \dots, \tau_n)$ . Il prennent la forme  $Y(s_1, \dots, s_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ ,  $U(s_1, \dots, s_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$  et  $H(s_1, \dots, s_m, \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ . Ce sont des vecteurs de dimension 2. Les variables  $s_1, \dots, s_n$  affichent la dépendance de  $H_{m,n}$  en fonction de l'entrée 1 tandis que les variables  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  affichent la dépendance de  $H_{m,n}$  en fonction de l'entrée 2.

### 2.2 Lois d'interconnexion

Nous allons nous intéresser à présent aux lois d'interconnexion de deux séries de Volterra à deux entrées et deux sorties. Pour la somme des noyaux, celle-ci est immédiate comme dans le cas des séries mono-entrée et mono-sortie. Nous ne nous intéressons pas au produit, dont nous ne servirons pas.

Voyons à présent le cas de la cascade de séries de Volterra à deux entrées et deux sorties. On utilise les notations suivantes :

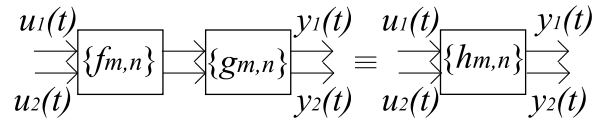


Figure II.8: Mise en cascade de séries de Volterra deux entrées deux sorties

$$s_{(1,m)} = s_m \quad (\text{II.12})$$

$$s_{(2,n)} = \sigma_n \quad (\text{II.13})$$

$$(1, (m, n)) = ((1, 1), \dots, (1, m), (2, 1), \dots, (2, n)) \quad (\text{II.14})$$

$$s_{1,(m,n)} = (s_{1,1}, \dots, s_{1,m}, s_{2,1}, \dots, s_{2,n}) \quad (\text{II.15})$$

$$\widehat{s_{1,(m,n)}} = s_{1,1} + \dots + s_{1,m} + s_{2,1} + \dots + s_{2,n} \quad (\text{II.16})$$

$$(m, n) + (1, (m', n')) = ((1, m+1), \dots, (1, m+m'), (2, n+1), \dots, (2, n+n')) \quad (\text{II.17})$$

$$\mathbb{M}_{(m,n)}^{(m',n')} = \{i_{a,b} \in (\mathbb{M})^{(m',n')} \mid \widehat{i_{1,(m',n')}} = (m, n)\} \quad (\text{II.18})$$

On définit  $i(q, \nu)$  par :

$$\begin{aligned} i(1, \nu) &= \sum_{\beta=1}^{\nu-1} i_{1,\beta} + (1, i_{1,\nu}) \\ i(2, \nu) &= \sum_{\beta=1}^{m'} i_{1,\beta} + \sum_{\beta=1}^{\nu-1} i_{2,\beta} + (1, i_{2,\nu}) \end{aligned} \quad (\text{II.19})$$

On écrit finalement la relation d'interconnexion deux entrées et deux sorties :

$$\begin{aligned} H_{m,n}(s_{1,(m,n)}) &= \sum_{\substack{(m',n') \in \mathbb{M}_2 \\ m'+n' \leq m+n}} \sum_{i_{a,b} \in \mathbb{M}_{(m,n)}^{(m',n')}} \prod_{\nu=1}^{m'} [F_{i_{1,\nu}}]_1(s_{i(1,\nu)}) \prod_{\nu=1}^{n'} [F_{i_{2,\nu}}]_2(s_{i(2,\nu)}) \\ &\quad G_{m',n'}(\widehat{s_{i(1,1)}}, \dots, \widehat{s_{i(1,m')}} , \widehat{s_{i(2,1)}} , \dots, \widehat{s_{i(2,n')}}) \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

### 2.3 Application de la loi d'interconnexion en cascade

Pour clarifier un peu les choses, nous allons détailler l'application de la formule précédente pour le terme  $H(1, 0)$ , soit  $(m, n) = (1, 0)$ .

La relation II.20 nous dit que  $m' + n' \leq m + n = 1$  soit  $(m', n') \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ . Nous pouvons donc écrire des relations dans sur les deux valeurs possibles de  $(m', n')$ . Cela nous permet de trouver que  $i_{1,1} = (1, 0) = i_{2, 1}$  et que  $i(1, 1) = ((1, 1)) = i(2, 1)$

En appliquant la formule d'interconnexion, on trouve :

$$H_{1,0}(s_1) = [F_{1,0}(s_1)]_1 G_{1,0}(s_1) + [F_{1,0}(s_1)]_2 G_{0,1}(s_1) \quad (\text{II.21})$$

## 2.4 Quadripôles électriques et conventions

De la même façon que précédemment avec les impédances généralisées, nous allons définir un formalisme avec des séries de Volterra à deux entrées et deux sorties, pour faire une correspondance avec des blocs de composants électroniques. Ces blocs vont donc être définis comme des quadripôles de Volterra, prenant en entrée la tension d'entrée du bloc  $V_{in}$ , le courant de sortie  $I_{out}$  II.9. La sortie du quadripôle donnera la tension de sortie du bloc  $V_{out}$ , et le courant d'entrée  $I_{in}$ . L'inversion dans notre convention de l'emplacement dans le quadripôle de Volterra des courants va nous permettre de tenir compte du couplage entre les quadripôles. Leur mise en série et en parallèle sont décrites dans les figures II.10 II.11.

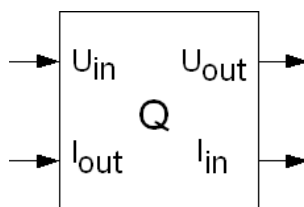


Figure II.9: Formalisme des quadripôles

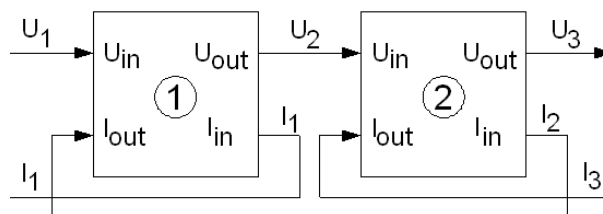


Figure II.10: Mise en série

La notation en quadripôles de Volterra va être mise en application lors de la recherche des noyaux de l'amplificateur opérationnel.

En pratique, lors de la résolution des problèmes et de la mise en cascade, on va essayer de se limiter à un minimum d'entrées sorties si des simplifications sont possibles, pour alléger la forme des calculs, et limiter le nombre de bouclages empêchant la résolution. Ces bouclages pourront être ensuite supprimés à l'aide d'un schéma annulateur, comme nous l'avons vu pour le changement de convention impédance vers admittance, et nous pourrons alors appliquer directement nos relations d'interconnexion.

Par contre, nous remarquons que la présence de contre-réactions et la multiplication des noeuds au sein d'un circuit peut rendre difficile le passage de l'électronique à des dipôles et quadripôles de Volterra. C'est pourquoi nous n'avons pas trouvé de méthode systématique de résolution du problème

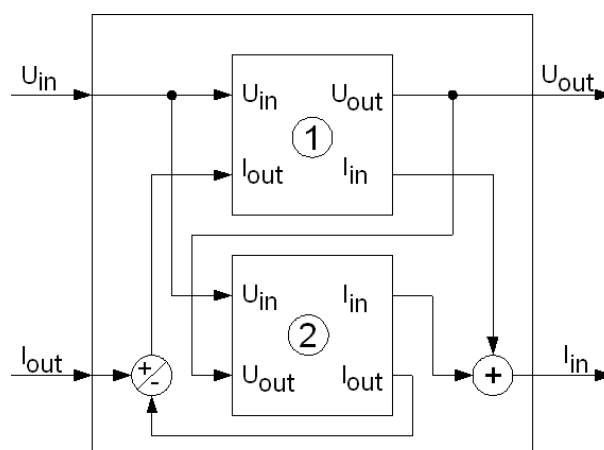


Figure II.11: Mise en parallèle

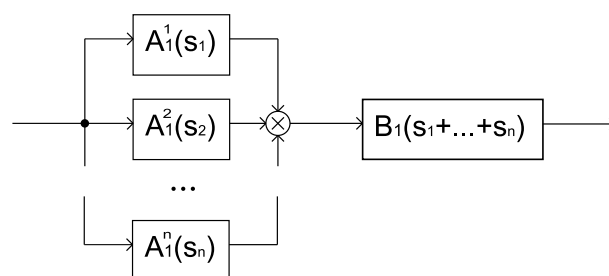


Figure II.12: Modèle de la structure simulable

(voir chapitre suivant), et que les opérations de débouclage sont composées de simplifications des noeuds "à la main" puis de l'utilisation du schéma annulateur.

### 3 Identification en structures simulables

Soit le système décrit dans la figure II.12, avec  $n$  filtres linéaires dont les sorties sont multipliées entre elles, puis cascadié avec un autre filtre linéaire. Cette structure peut s'écrire sous la forme d'une série de Volterra dont tous les noyaux sont nuls sauf à l'ordre  $n$ , il s'écrit  $A_1^1(s_1) A_1^2(s_2) \dots A_1^n(s_n) B_1(s_1 + \dots + s_n)$ .

Soit un système de noyaux  $\{h_n\}$ . D'après II.1,  $y(t)$  peut s'écrire comme une somme de  $y_n(t)$  pour chaque ordre de Volterra. En écrivant l'expression des noyaux et en les identifiant à la structure que l'on vient de voir, il devient possible de déterminer le schéma permettant de simuler le système. La structure simulable est composée de cascades de blocs élémentaires, additions, multiplications et filtres linéaires, sans aucun bouclage.

## Chapitre III

# Méthode 1 : séries de Volterra de chaque étage

A présent, nous allons mettre en application les formalismes que nous venons de voir pour réaliser la simulation du SansAmp GT2. Le calcul des noyaux de Volterra est présenté jusqu'à l'ordre 3 dans un premier temps, la complexité des calculs augmentant significativement dans les ordres plus élevés.

### 1 Premier étage étudié : l'étage B

Nous avons commencé par étudier l'étage du circuit le plus simple : l'étage B, représenté par la figure I.6. L'étude suit le cheminement suivant : recherche des points d'équilibre de l'étage (§1.1), modèle exact petits signaux de l'amplificateur opérationnel (§1.2) et calcul des noyaux de Volterra (§1.3), calcul des noyaux de l'étage B (§1.4), puis identification à une structure simulable (§1.5).

#### 1.1 Points d'équilibre

Une représentation en séries de Volterra détermine la dynamique non linéaire "petit signal" d'un système autour d'un point de référence. De façon naturelle, le point de référence le plus adapté dans notre cas est le point d'équilibre du circuit "au repos" (i.e. avec un signal d'entrée nul). Ce point d'équilibre paramétrise les expressions des noyaux de Volterra, et fixe leur domaine de validité.

A l'équilibre, les tensions  $V_{in} = V_+$ ,  $V_-$  et  $V_{out}$ , et les intensités  $I_{AO}$  et  $I_{out}$  sont constantes. L'étage B devient donc équivalent au circuit présenté figure III.2, les condensateurs étant au repos équivalents à des circuits ouverts.

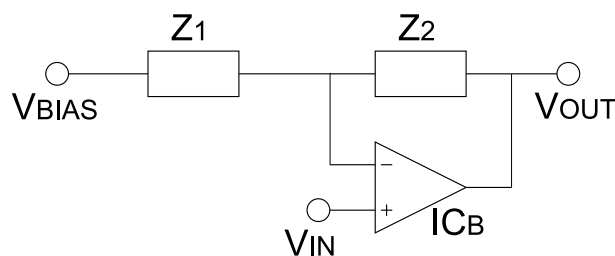


Figure III.1: Représentation simplifiée de l'étage B, avec  $Z_1 = R_{S3} + 1/(C_{11}s)$  et  $Z_2 = R_{14} + 1/(C_{12}s)$

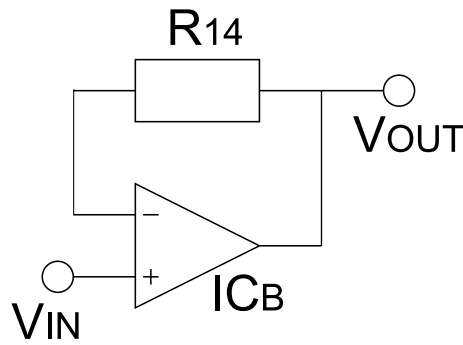


Figure III.2: Représentation à l'équilibre de l'étage B

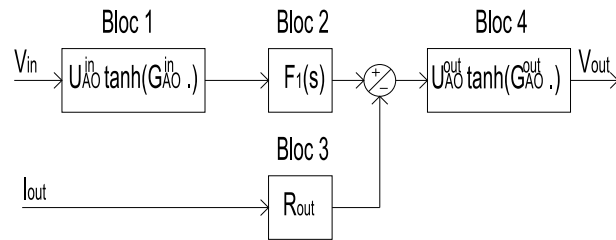


Figure III.3: Structure de l'amplificateur opérationnel

On note  $A = a + A^*$  avec  $A$  la grandeur réelle,  $A^*$  la grandeur à l'état d'équilibre, et  $a$  la grandeur en régime petits signaux. On cherche  $V_{in}^* = V_+^*, V_-^*, V_{out}^*, I_{AO}^*$  et  $I_{out}^*$ . La tension d'entrée  $V_+^*$  est

égale à  $V_{BIAS}$ . Le courant qui rentre dans l'entrée  $V_-$  est nul par définition, ce qui implique que la tension aux bornes de  $R_{14}$  l'est aussi. Donc  $V_-^* = V_{out}^*$ . De plus, la sortie de l'étage B est connectée à l'entrée de l'amplificateur opérationnel de l'étage C, qui a un courant entrant nul. Donc  $I_{out}^* = 0$ . Et finalement, par définition de notre modèle (voir chapitre 1), nous avons  $V_+^* = V_-^*$  donc  $V_{out}^* = V_{BIAS}$  à l'équilibre.

## 1.2 Modèle exact petits signaux pour l'amplificateur opérationnel

Maintenant que nous avons les points d'équilibre pour les différentes grandeurs de l'étage B, nous pouvons établir les équations petits signaux de l'amplificateur opérationnel.

$$\begin{aligned}
 \frac{du_g}{dt} &= U_{AO}^{in} \tanh(G_{AO}^{in} \varepsilon) - \omega_{AO} u_g \\
 v_{out} &= U_{AO}^{out} \tanh[G_{AO}^{out} (u_g - R_{out} i_{out})] \\
 \varepsilon &= v_+ - v_- \\
 U_{AO}^{in} &= I_{AO} / C_{AO} \\
 \omega_{AO} &= \frac{1}{R_{AO} C_{AO}}
 \end{aligned} \tag{III.1}$$

## 1.3 Noyaux de la série de Volterra de l'amplificateur opérationnel

Les équations suivantes correspondent au schéma bloc présenté en figure III.3. Chacun de ces blocs est représentable par une série de Volterra élémentaire. Néanmoins, le calcul de séries de Volterra ne

peut se faire que si nous avons à notre disposition des expressions qui font intervenir des polynômes. Nous calculons donc le développement limité du tangente hyperbolique.

$$\tanh(x) = x + T_3 \times x^3 + o(x^4) = x - 1/3 \times x^3 + o(x^4) \quad (\text{III.2})$$

Précisément, nous avons  $T_3 = -1/3$ . Voyons à présent l'expression des noyaux de chaque bloc :

- Le bloc 1 correspond à une fonction instantanée développable en série entière. Ses noyaux de Volterra sont donnés dans le domaine de Laplace par, pour  $k \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^1(s_{1,2k+1}) &= U_{AO}^{in} T_{2k+1} (G_{AO}^{in})^{2k+1} \\ F_{2k}^1(s_{1,2k}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.3})$$

- Le bloc 2 correspond à un filtre linéaire. Ses noyaux de Volterra sont donnés par :

$$\begin{aligned} F_1^2(s_1) &= \frac{1}{1 + \frac{s_1}{\omega_{AO}}} \\ F_n^2(s_{1,n}) &= 0 \text{ si } n \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

- Pour le bloc 3 on a :

$$\begin{aligned} F_1^3(s_1) &= R_{out} \\ F_n^3(s_{1,n}) &= 0 \text{ si } n \geq 2 \end{aligned} \quad (\text{III.5})$$

- Pour le bloc 4 on a :

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^4(s_{1,2k+1}) &= U_{AO}^{out} T_{2k+1} (G_{AO}^{out})^{2k+1} \\ F_{2k}^4(s_{1,2k}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.6})$$

En utilisant les lois d'interconnexion (équations ...), on trouve les noyaux (deux entrées, une sortie) de l'ensemble bloc 1-3 et du sommateur, donnés par :

$$\begin{aligned} F_{m,n}^{1-3}(s_{1,m}, \sigma_{1,n}) &= F_m^{1:2}(s_{1,m}) = F_m^1(s_{1,m}) F_1^2(\widehat{s_{1,m}}) \text{ si } n = 0 \\ F_{m,n}^{1-3}(s_{1,m}, \sigma_{1,n}) &= -F_1^3(s_1) \text{ si } (m, n) = (0, 1) \\ F_{m,n}^{1-3}(s_{1,m}, \sigma_{1,n}) &= 0 \text{ si } n \neq 0 \neq m \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

De même pour l'amplificateur opérationnel, on trouve les noyaux (deux entrées, une sortie) donnés par les lois d'interconnexion :

$$\begin{aligned}
 H_{1,0}(s_1) &= F_1^{1:2}(s_1)F_1^4(s_1) \\
 H_{0,1}(\sigma_1) &= -R_{out}F_1^4(\sigma_1) \\
 H_{2,0}(s_1, s_2) &= H_{1,1}(s_1, \sigma_1) = H_{0,2}(\sigma_1, \sigma_2) = 0 \\
 H_{3,0}(s_1, s_2, s_3) &= F_1^{1:2}(s_1)F_1^{1:2}(s_2)F_1^{1:2}(s_3)F_3^4(s_1, s_2, s_3) \\
 &\quad + F_3^{1:2}(s_1, s_2, s_3)F_1^4(s_1 + s_2 + s_3) \\
 H_{2,1}(s_1, s_2, \sigma_1) &= F_1^{1:2}(s_1)F_1^{1:2}(s_2)F_1^{1:2}(\sigma_1)(F_3^4(s_1, s_2, \sigma_1) + F_3^4(s_1, \sigma_1, s_2) + F_3^4(\sigma_1, s_1, s_2)) \\
 H_{1,2}(s_1, \sigma_1, \sigma_2) &= F_1^{1:2}(s_1)F_1^{1:2}(\sigma_1)F_1^{1:2}(\sigma_2)(F_3^4(s_1, \sigma_1, \sigma_2) + F_3^4(\sigma_1, s_1, \sigma_2) + F_3^4(\sigma_1, \sigma_2, s_1)) \\
 H_{0,3}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= -R_{out}F_3^4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \tag{III.8}
 \end{aligned}$$

Soit comme résultat final :

$$\begin{aligned}
 H_{1,0}(s_1) &= \frac{A_{1,0}}{1 + s_1/\omega_{AO}} \\
 H_{0,1}(\sigma_1) &= -A_{0,1} \\
 H_{2,0}(s_1, s_2) &= H_{1,1}(s_1, \sigma_1) = H_{0,2}(\sigma_1, \sigma_2) = 0 \\
 H_{3,0}(s_1, s_2, s_3) &= \frac{A_{3,0}}{(1 + s_1/\omega_{AO})(1 + s_2/\omega_{AO})(1 + s_3/\omega_{AO})} + \frac{A'_{3,0}}{1 + \frac{s_1+s_2+s_3}{\omega_{AO}}} \\
 H_{2,1}(s_1, s_2, \sigma_1) &= \frac{A_{2,1}}{(1 + s_1/\omega_{AO})(1 + s_2/\omega_{AO})} \\
 H_{1,2}(s_1, \sigma_1, \sigma_2) &= \frac{A_{1,2}}{1 + s_1/\omega_{AO}} \\
 H_{0,3}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) &= A_{0,3} \tag{III.9}
 \end{aligned}$$

#### 1.4 Calcul des noyaux de l'étage B

En représentant l'étage B à l'aide des systèmes linéaires  $Z_1$ ,  $Y_2 = 1/Z_2$  et de la série de Volterra  $H_{m,n}$  pour l'amplificateur opérationnel, on obtient la structure (exacte, petits signaux) donnée en figure III.4. Cette figure fait apparaître plusieurs boucles. Ceci pose des difficultés pour le calcul des noyaux de Volterra de l'étage B. Pour lever ce problème, on construit des systèmes équivalents non bouclés, en procédant en deux étapes : suppression de la boucle fermée  $Z_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow Z_1$ , et suppression de la boucle impliquant  $H_{m,n}$  grâce à l'introduction d'un "système annulateur".

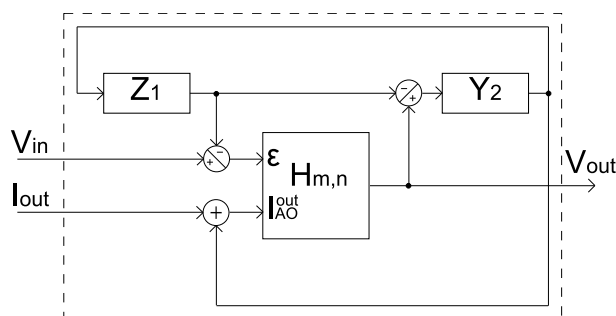


Figure III.4: Structure de l'étage B

**Suppression de la boucle fermée  $Z_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow Z_1$**

On considère le bouclage des impédances / admittances comme un schéma bloc avec une entrée et deux sorties. On obtient la représentation suivante :

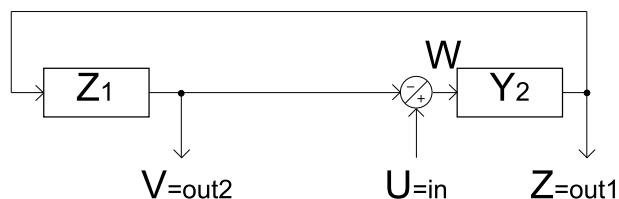


Figure III.5: Suppression de la boucle fermée

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} Z &= Y_2 W = \frac{Y_2}{1 + Z_1 Y_2} U \\ V &= Z_1 V \frac{Z_1 Y_2}{1 + Z_1 Y_2} U \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

On obtient la figure III.6 après débouclage, avec :

$$\begin{aligned} P_1(s_1) &= \frac{Z_1 Y_2}{1 + Z_1 Y_2} \\ Q_1(s_1) &= \frac{Y_2}{1 + Z_1 Y_2} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

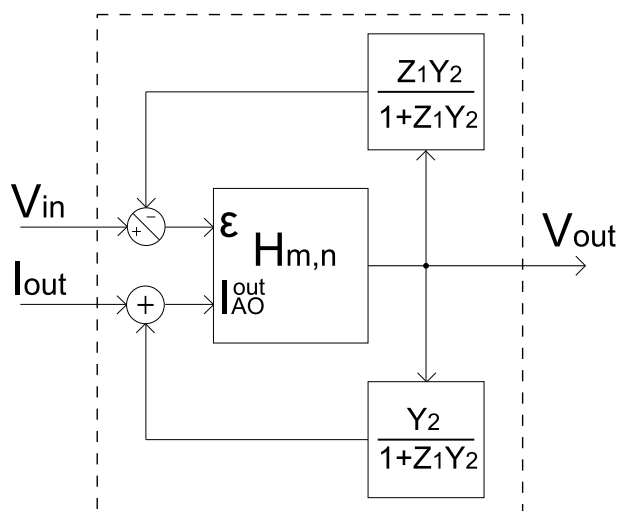


Figure III.6: Structure simplifiée de l'étage B

**Système annulateur et principe de débouclage**

Pour finalement obtenir la représentation de l'ensemble, on utilise les lois d'interconnexion, et on écrit un schéma annulateur (voir figure III.7)

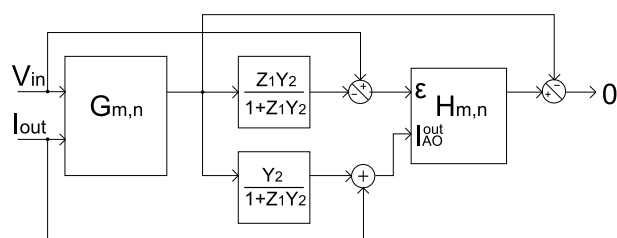


Figure III.7: Suppression de la boucle fermée

### Expression des noyaux de l'étage B

Grâce au schéma annulateur, on peut écrire enfin les noyaux de l'étage :

$$\begin{aligned}
 G_1(s_1) &= \frac{H_{1,0}(s_1)}{1 + P_1(s_1)H_{1,0}(s_1) - Q_1(s_1)H_{0,1}(s_1)} = H_{1,0}(s_1) \times G_1''(s_1) \\
 G_2(s_1, s_2) &= 0 \\
 G_3(s_1, s_2, s_3) &= G_3'(s_1, s_2, s_3) \times G_3''(s_1, s_2, s_3) \\
 G_3'(s_1, s_2, s_3) &= (1 - G_1(s_1)P_1(s_1))(1 - G_1(s_2)P_1(s_2))(1 - G_1(s_3)P_1(s_3))H_{3,0}(s_1, s_2, s_3) \\
 &\quad + (1 - G_1(s_1)P_1(s_1))(1 - G_1(s_2)P_1(s_2))G_1(s_3)Q_1(s_3)H_{2,1}(s_1, s_2, s_3) \\
 &\quad + (1 - G_1(s_1)P_1(s_1))G_1(s_2)Q_1(s_2)G_1(s_3)Q_1(s_3)H_{1,2}(s_1, s_2, s_3) \\
 &\quad + G_1(s_1)Q_1(s_1)G_1(s_2)Q_1(s_2)G_1(s_3)Q_1(s_3)H_{0,3}(s_1, s_2, s_3) \\
 G_3''(s_1, s_2, s_3) &= \frac{1}{1 + P_1(s_1 + s_2 + s_3)H_{1,0}(s_1 + s_2 + s_3) - Q_1(s_1 + s_2 + s_3)H_{1,0}(s_1 + s_2 + s_3)} \\
 &= G_1''(s_1 + s_2 + s_3) \tag{III.12}
 \end{aligned}$$

### 1.5 Structure simulable de l'étage B

Pour obtenir la structure simulables de l'étage B, on applique directement ces équations, avec le formalisme vu à la fin du chapitre précédent.

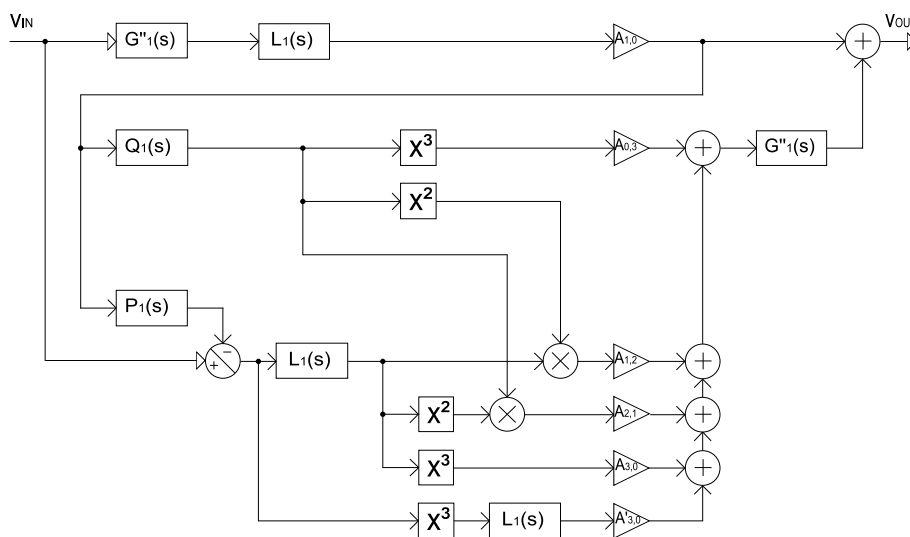


Figure III.8: Structure simulable de l'étage B

On obtient des combinaisons de filtres en cascade, sommes et produits, déterminés pour chaque noyau de Volterra de l'étage, puis sommés en sortie. Notons également la présence de gains statiques (triangles sur la structure) et des fonctions puissance 2 ou 3 de l'entrée.

## 2 Étages suivants

A présent, nous avons les moyens pour calculer les autres étages. Nous nous basons sur les calculs qui ont été faits sur l'étage B, auxquels nous ajoutons quelques variantes.

### 2.1 Étage A1

Pour l'étage A1, nous avons trois éléments supplémentaires à considérer par rapport à l'étage B. Ces trois éléments mis à part, les calculs de l'étage B peuvent réutilisés tels quels.

Pour commencer, un étage linéaire est présent en entrée de l'amplificateur opérationnel. Celui-ci peut être modélisé facilement à l'aide d'un filtre d'ordre 2, dont la formulation est présentée dans le premier chapitre. Ce bloc est parfaitement découplé du reste, ses noyaux de Volterra peuvent être directement cascades aux noyaux de la suite.

Ensuite, nous remarquons que l'amplificateur opérationnel n'est pas dans ce cas en parallèle avec un condensateur, mais seulement une résistance, ce qui va simplifier certains calculs, et descendre l'ordre des filtres.

Enfin, l'élément le plus ennuyeux est la présence d'un bloc linéaire en sortie de l'amplificateur opérationnel. Celui-ci n'est absolument pas découplé du reste, et va influencer le comportement du bloc non-linéaire. Pour garder nos conventions, et éviter de reprendre les calculs du début, nous avons trouvé un moyen de tenir du couplage simplement. Pour commencer, un bloc linéaire qui correspond au diviseur de tension à impédances complexes est cascades en sortie du bloc non linéaire. Ensuite, un bloc à part est ajouté à l'entrée  $I_{AO}^{out}$  de l'amplificateur opérationnel, qui correspond au courant traversant le dernier bloc linéaire. Celui-ci est calculé en résolvant l'équation suivante :

$$I = \frac{V_2 - V_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{V_1 \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} - V_1}{Z_1 + Z_2} \quad (\text{III.13})$$

### 2.2 Étage A2

Dans cet étage complètement linéaire, nous avons simplement trois filtres à cascader, dont les transformées de Laplace peuvent être déterminées facilement à partir de ce qui a été fait dans le premier chapitre. Nous considérons ces trois blocs parfaitement découplés, grâce à la présence d'un amplificateur opérationnel en configuration suiveur entre les deux premiers blocs, et ensuite pour la dernière jonction grâce à la présence de l'amplificateur opérationnel à l'entrée de l'étage suivant.

### 2.3 Étage C

L'étage C est une variante des étages A1 et B. Le bloc non linéaire est pratiquement identique à celui de l'étage B, avec un terme supplémentaire à ajouter de la même façon que pour le bloc A1, du à

la présence de deux résistances en sortie d'étage. Le calcul des deux blocs linéaires à ajouter se fait d'ailleurs simplement, ce sont de simples gains (pas d'impédances complexes).

### 3 Structure des étages

On utilise des filtres d'ordre 1, 2 et 3, qui ont la forme suivante :

$$F(s) = \frac{\sum_{n=1}^N b_n s^n}{\sum_{m=1}^M a_m s^m} \quad (\text{III.14})$$

Les conventions sont présentées sur chaque étage, et font référence aux expressions que l'on trouve en annexes.

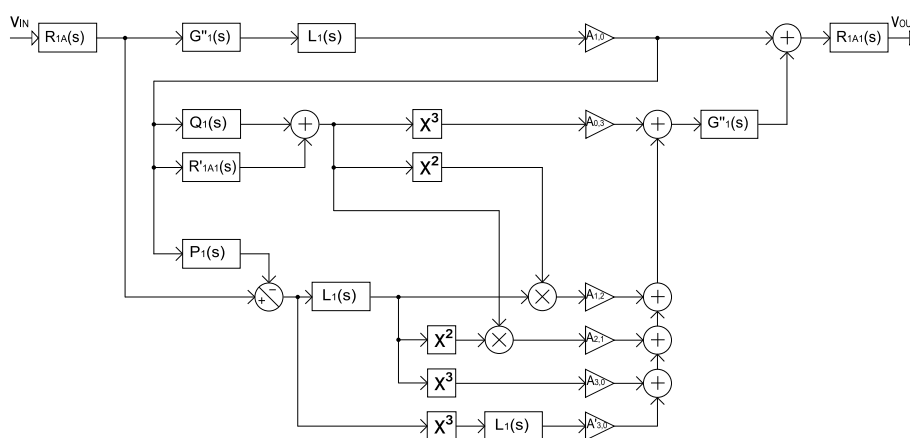


Figure III.9: Structure simulable de l'étage A1

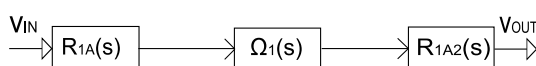


Figure III.10: Structure simulable de l'étage A2

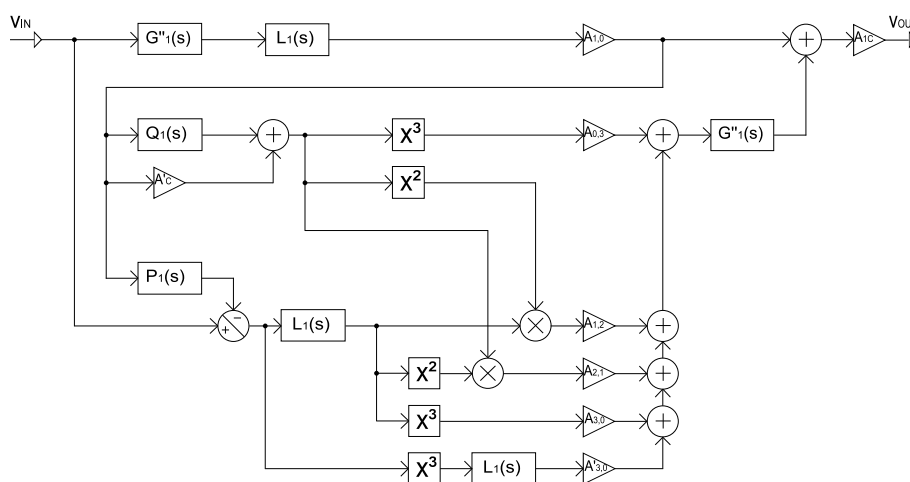


Figure III.11: Structure simulable de l'étage C

# Chapitre IV

## Méthode 2 : représentations d'état

En plus de la simulation du SansAmp GT2, avec les séries de Volterra, nous nous sommes intéressés à une résolution du problème utilisant les représentations d'état, et les méthodes numériques de Euler et Runge-Kutta. Cette approche nous permettra de comparer les performances de deux méthodes de simulation numérique du même circuit, avec les mêmes équations, et des approximations différentes.

### 1 Écriture des représentations d'état de l'étage B

Pour écrire la représentation d'état d'un système donné, on pose sous forme de vecteurs ses entrées (vecteur  $U$ ), ses sorties (vecteur  $Y$ ) et ses états intermédiaires (vecteur  $X$ ) qui nous permettront d'arriver à la résolution. Les équations sont ensuite mises sous la forme générale suivante, qui nous donnera une représentation d'état valide :

$$\begin{aligned}\dot{X} &= f(X, U) \\ Y &= g(X, U)\end{aligned}\tag{IV.1}$$

De plus, comme pour les séries de Volterra, nous considérons les équations autour des points d'équilibre, qu'il convient de calculer. On note  $A = a + A^*$  avec  $A$  la grandeur réelle,  $A^*$  la grandeur à l'état d'équilibre, et  $a$  la grandeur en régime petits signaux.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \dot{x} + \dot{X}^* = f(x + X^*, u + U^*) \\ y &= g(x + X^*, u + U^*) - Y^* = g(x + X^*, u + U^*) - g(X^*, U^*)\end{aligned}\tag{IV.2}$$

Nous remarquons qu'une séparation est faite entre le comportement dynamique du système, régi par les variables d'état intermédiaires, et son comportement statique qui donne la valeur de la sortie du système, en fonction de l'entrée et des états intermédiaires.

En nous inspirant du travail qui a été fait pour les séries de Volterra, nous allons écrire pour l'étage B les représentations d'état de l'amplificateur opérationnel, ainsi que des deux combinaisons d'impédances / admittances présentes dans l'étage dans le schéma simplifié de l'étage B.

Dessin

## 1.1 Amplificateur opérationnel

Pour l'amplificateur opérationnel, nous posons les vecteurs suivants comme paramètres d'état :

$$U_{AO} = \begin{bmatrix} \varepsilon = V_+ - V_- \\ I_{AO}^{out} \\ V_{BIAS} \end{bmatrix} \quad X_{AO} = u_g \quad Y_{AO} = V_{AO}^{out} \quad (IV.3)$$

Nous calculons les point d'équilibre pour chacun des paramètres d'état, ce qui a déjà été étudié dans les chapitres précédents. On obtient :

$$U_{AO}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon^* = 0 \\ (I_{AO}^{out})^* = 0 \\ V_{BIAS} \end{bmatrix} \quad X_{AO}^* = 0 \quad Y_{AO}^* = V_{BIAS} \quad (IV.4)$$

Et à partir des équations du premier chapitre, nous pouvons écrire directement les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{AO} &= f(x_{AO}, u_{AO}) = -\omega_{AO} \cdot x_{AO} + U_{AO}^{in} \tanh(G_{AO}^{in} \cdot \varepsilon) \\ y_{AO} &= g(x_{AO}, u_{AO}) = U_{AO}^{out} \times \tanh(G_{AO}^{out} \cdot x_{AO} - G_{AO}^{in} R_{AO}^{out} I_{AO}^{out}) \end{aligned} \quad (IV.5)$$

## 1.2 Impédances de l'étage B

Les deux blocs d'impédances / admittances sont des filtres linéaires du deuxième ordre ( $P_{1B}$  et  $Q_{1B}$ ), dont les expressions ont été calculées précédemment. Chaque filtre s'écrit sous la forme suivante dans le domaine de Laplace :

$$F(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} = S(s)/E(s) \quad (IV.6)$$

### Représentation d'état d'un filtre linéaire

On considère pour commencer le cas  $m < n$ . On peut donc écrire

$$\begin{aligned} S(s)/E(s) &= \frac{1}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} \times (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) \\ &= \frac{Y(s)}{E(s)} \times \frac{S(s)}{Y(s)} \\ E(s) &= \frac{1}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} Y(s) \\ S(s) &= (b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0) Y(s) \end{aligned} \quad (IV.7)$$

Soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= e(t) \\ s(t) = b_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{dy(t)}{dt} + b_0 y(t) & \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

On prend alors le vecteur d'état suivant :

$$X = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} \\ \dots \\ \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \quad (\text{IV.9})$$

On a alors les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ s(t) &= \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & \dots & b_m & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} X \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

Pour  $m = n$ , on doit écrire la forme suivante :

$$S(s)/E(s) = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} = b_n + \frac{b'_{n-1} s^{n-1} + \dots + b'_1 s + b'_0}{s^n + \dots + a_1 s + a_0} \quad (\text{IV.11})$$

On en revient au problème précédent, on résout avec les  $b'$ , et on obtient les équations d'état suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e(t) \\ s(t) &= \begin{bmatrix} b'_0 & b'_1 & \dots & b'_{n-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} X + b_n e(t) \end{aligned} \quad (\text{IV.12})$$

### Application

On peut maintenant appliquer directement ce que l'on vient de voir, et écrire les paramètres d'état :

$$U_1 = V_1^{in} \quad X_1 = \begin{bmatrix} y(t) \\ dy(t)/dt \end{bmatrix} \quad Y_1 = V_1^{out} \quad (\text{IV.13})$$

$$U_2 = V_2^{in} \quad X_2 = \begin{bmatrix} y(t) \\ dy(t)/dt \end{bmatrix} \quad Y_2 = I_2^{out} \quad (IV.14)$$

Ces systèmes étant des filtres linéaires, on ne se préoccupe pas de leurs points d'équilibre, qui seront dépendants des connexions effectuées avec l'amplificateur opérationnel. On peut donc écrire leurs équations d'état :

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= A_1 X_1 + B_1 U_1 \\ Y_1 &= C_1 X_1 + D_1 U_1 \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{R_1 R_2 C_1 C_2} & \frac{-(1+R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{bmatrix} \\ B_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_1 &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{bmatrix} \\ D_1 &= 1 \end{aligned} \quad (IV.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{X}_2 &= A_2 X_2 + B_2 U_2 \\ Y_2 &= C_2 X_2 + D_2 U_2 \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{R_1 R_2 C_1 C_2} & \frac{-(1+R_1 C_1 + R_2 C_2)}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{bmatrix} \\ B_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ C_2 &= \begin{bmatrix} \frac{-1}{R_1 R_2 C_1 C_2} & \frac{-(1+R_2 C_2)}{R_1 R_2 C_1 C_2} \end{bmatrix} \\ D_2 &= \frac{1}{R_1} \end{aligned} \quad (IV.16)$$

### 1.3 Représentation d'état générale de l'étage B

Les paramètres d'état de tout l'étage sont les suivants :

$$U = V_B^{in} \quad X = \begin{bmatrix} X_{AO} \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad Y = V_B^{out} \quad (IV.17)$$

Nous écrivons les expressions des entrées de l'amplificateur opérationnel, placé dans l'étage B :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= V_B^{in} - Y_1 = V_B^{in} - C_1 X_1 - D_1 U_{AO}^{out} \times \tanh(G_{AO}^{out} \cdot X_{AO} - G_{AO}^{in} R_{AO}^{out} I_{AO}^{out}) \\ I_{AO}^{out} &= Y_2 = C_2 X_2 - D_2 U_{AO}^{out} \times \tanh(G_{AO}^{out} \cdot X_{AO} - G_{AO}^{in} R_{AO}^{out} I_{AO}^{out}) \end{aligned} \quad (IV.18)$$

Pour obtenir une représentation d'état valide, il est nécessaire de trouver l'expression de  $\dot{X}$  et  $Y$  en fonction de  $U$  et  $X$ . Nous allons voir comment y arriver.

## 2 Résolution du débouclage

### 2.1 Problème

A présent, nous utilisons les expressions de  $\varepsilon$  et  $I_{AO}^{out}$ , que nous réinjectons dans les autres équations, pour obtenir notre représentation d'état. En déroulant l'expression de  $I_{AO}^{out}$ , une équation du type  $x + a \tanh(x) + b = 0$  apparaît, celle-ci n'a pas de solution analytique, il est nécessaire d'utiliser une méthode numérique de résolution de cette équation, par exemple Newton-Raphson (voir plus loin).

Cette étape réalisée, on obtient une expression du type  $I_{AO}^{out} = I(X, U)$  comme solution, et on peut écrire une représentation d'état valide de l'étage B :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X, U) = \begin{bmatrix} \dot{X}_{AO} \\ \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(X_{AO}, U_{AO}) \\ A_1 X_1 + B_1 g(X_{AO}, U_{AO}) \\ A_2 X_2 + B_2 g(X_{AO}, U_{AO}) \end{bmatrix} \\ Y &= g(X_{AO}, U_{AO}) = g(X, U) \end{aligned} \quad (IV.19)$$

soit

$$\begin{aligned} \dot{X}_{AO} &= -\omega_{AO} \cdot X_{AO} + U_{AO}^{in} \tanh(G_{AO}^{in} \cdot \varepsilon(X, U)) \\ \dot{X}_1 &= A_1 X_1 + B_1 U_{AO}^{out} \times \tanh(G_{AO}^{out} \cdot X_{AO} - G_{AO}^{in} R_{AO}^{out} I(X, U)) \\ \dot{X}_2 &= A_2 X_2 + B_2 U_{AO}^{out} \times \tanh(G_{AO}^{out} \cdot X_{AO} - G_{AO}^{in} R_{AO}^{out} I(X, U)) \\ Y &= U_{AO}^{out} \times \tanh(G_{AO}^{out} \cdot X_{AO} - G_{AO}^{in} R_{AO}^{out} I(X, U)) \end{aligned} \quad (IV.20)$$

### 2.2 Solution (Newton-Raphson)

La méthode numérique de résolution de l'équation  $x + a \tanh(x) + b = 0$  se fait avec la méthode de Newton Raphson. Pour chaque échantillon à calculer, on fait un certain nombre d'itérations pour atteindre la convergence vers une solution.

Soit  $t_k$  l'instant considéré,  $x$  l'itération numéro n-1 pour l'instant  $t_k$  et  $x^*$  l'itération n. On pose comme solution  $x^* = x + \varepsilon$ . On pose l'hypothèse que  $\varepsilon$  est très petit, ce qui nous permet d'écrire que :

$$\tanh(x^*) = \tanh(x) + \frac{d \tanh(x)}{dx} \varepsilon \quad (IV.21)$$

Notre équation de départ s'écrit :

$$0 = [1 + a(1 + \tanh^2(x))]\varepsilon + x + a \tanh(x) + b \quad (IV.22)$$

On remplace  $\varepsilon$  par  $x^* - x$ , ce qui nous permet d'écrire l'expression utilisable :

$$x^* = \frac{x + a \tanh(x) + b}{1 + a(1 + \tanh^2(x))} + x \quad (\text{IV.23})$$

Deux remarques : tout d'abord, à la première itération de calcul pour l'instant  $t_k$ , nous décidons de prendre la valeur de  $x$  calculée à l'instant  $t_{k-1}$  comme  $x$  initial. Les variations d'un échantillon étant relativement faibles, ce choix devrait nous donner une certaine rapidité de convergence.

Ensuite, dans notre cas précis, le paramètre  $a$  est une fonction analytique de  $x^*$ . Cela ajoute un calcul supplémentaire à chaque itération, mais ne contrarie pas la validité de notre équation, ainsi que sa convergence éventuelle.

### 3 Équations d'état pour tous les étages

En reprenant les raisonnements que nous avons vu dans ce chapitre, et dans le chapitre précédent, il est possible en partant de la représentation d'état de l'étage B d'aboutir directement à celle des étages A1, A2 et C. Il suffit pour cela de considérer chaque bloc à l'intérieur de chaque étage séparément (voir chapitre 1) en déterminant sa relation d'état.

### 4 Résolution numérique des équations

Une fois que les représentations d'état de chaque étage ont été déterminées, nous utilisons les méthodes de résolution numériques de Euler explicite et de Runge-Kutta, qui sont à peu près équivalentes en termes de construction, et dont nous évaluerons les performances. Ces techniques permettent de calculer la variable d'état intermédiaire à l'instant  $n+1$  en fonction de celle de l'instant  $n$ , et donc de résoudre l'équation dynamique. Une fois ce calcul réalisé, celui de la variable d'état de sortie  $Y = g(X, U)$  est immédiat.

Pour résoudre l'équation dynamique avec la méthode d'Euler explicite, nous écrivons simplement :

$$\begin{aligned} \frac{X_{n+1} - X_n}{T_E} &= f(X_n, U_n), \\ X_{n+1} &= T_E f(X_n, U_n) + X_n, \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

avec  $T_E$  la période d'échantillonnage.

Pour résoudre l'équation dynamique avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2, nous écrivons :

$$\begin{aligned} \dot{X} &= f(X, U) = \phi_U(X, t) \\ X_{n+1} &= X_n + k_2 \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

Avec :

$$\begin{aligned}k_1 &= T_E \phi_U(X_n, t_n) = T_E f(X_n, U_n) \\k_2 &= T_E \phi_U(X_n + k_1/2, t_n + T_E/2) = T_E f(X_n + k_1/2, \frac{U_{n+1} + U_n}{2})\end{aligned}\tag{IV.26}$$

La stabilité de cette méthode de résolution fera l'objet d'une étude ultérieure.

## Chapitre V

# Simulation temps réel des deux méthodes et résultats

Nous allons à présent voir comment implanter nos modèles en numérique, pour une simulation temps réel du SansAmp GT2. Nous avons choisi d'utiliser le SDK VST de Steinberg, le VST (Virtual Studio Technology) étant le format de plug-in temps réel le plus répandu dans le domaine de la musique assistée par ordinateur. Le langage de programmation choisi est le C++, via l'environnement Visual Studio 2003.NET de Microsoft, sur plate-forme Windows. Ce travail a été effectué avec l'aide de Remy Muller.

## 1 Implantation Volterra

Grâce aux structures simulables obtenues directement à la fin du travail sur les séries de Volterra, les algorithmes d'application des noyaux de chaque étage sont déjà disponibles, le seul travail restant à effectuer est la discrétisation de chaque filtre, calculé dans le domaine de Laplace, ainsi que l'implémentation du suréchantillonnage :

### 1.1 Suréchantillonnage

Les traitements numériques générant de la distorsion jusqu'à l'ordre 3, il est nécessaire de suréchantillonner le signal pour éviter les phénomènes de repliement. En effet, notre distorsion amenant la création d'harmoniques, elle est susceptible avec une fréquence d'échantillonnage basse (par exemple 44 100 Hz) de faire apparaître des composantes au delà de la demi-fréquence de Nyquist, qui par repliement vont perturber la qualité sonore du résultat (composantes inharmoniques dans les hautes fréquences).

La solution à ce problème est d'augmenter la fréquence d'échantillonnage de travail. Le signal d'entrée étant à bande limitée dans le domaine de l'audible (jusqu'à 20 kHz environ), les composantes de rang 3 superflues ne perturberont plus le signal utile, il sera alors possible de les filtrer complètement puis de revenir à la fréquence d'échantillonnage de départ, avec un signal sonore plus propre.

Où implanter le suréchantillonnage ? Deux possibilités : suréchantillonnage sur chaque étage, ou une seule fois avec de l'ordre 3 exclusif en sortie (pas d'ordre 9, 27 etc. qui serait faux de toute façon). (filtres polyphase de MusicDSP.com)

## 1.2 Synthèse des filtres

Les structures simulables obtenues à la fin du chapitre 4 nous indiquent directement la forme de l'algorithme de calcul à implanter. Néanmoins, les filtres sont écrits dans le domaine de Laplace, et il est nécessaire de les discrétiser pour avoir une représentation en Z.

La transition entre les deux domaines peut se faire en utilisant la transformée bilinéaire, c'est à dire en écrivant :

$$s = \frac{2}{T_e} \times \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (\text{V.1})$$

En appliquant la transformée bilinéaire sur la forme générale des filtres en Laplace, on obtient les formules suivantes à appliquer directement :

$$F(s) = \frac{\sum_{n=1}^N b_n s^n}{\sum_{n=1}^N a_n s^n} \quad F(z) = \frac{\sum_{n=1}^N b'_n z^{-n}}{\sum_{n=1}^N a'_n z^{-n}} \quad (\text{V.2})$$

Pour l'ordre 1 (n = 1) :

$$\begin{aligned} a'0 &= a_0 T_E + 2a_1 \\ a'1 &= a_0 T_E - 2a_1 \\ b'0 &= b_0 T_E + 2b_1 \\ b'1 &= b_0 T_E - 2b_1 \end{aligned} \quad (\text{V.3})$$

Pour l'ordre 2 (n = 2) :

$$\begin{aligned} a'0 &= a_0 T_E^2 + 2T_E a_1 + 4a_2 \\ a'1 &= 2T_E^2 a_0 - 8a_2 \\ a'2 &= a_0 T_E^2 - 2T_E a_1 + 4a_2 \\ b'0 &= b_0 T_E^2 + 2T_E b_1 + 4b_2 \\ b'1 &= 2T_E^2 b_0 - 8b_2 \\ b'2 &= b_0 T_E^2 - 2T_E b_1 + 4b_2 \end{aligned} \quad (\text{V.4})$$

Pour l'ordre 3 (n = 3) :

$$\begin{aligned}
 a'0 &= T_E^3 a_0 + 2T_E^2 a_1 + 4T_E a_2 + 8a_3 \\
 a'1 &= 3T_E^3 a_0 + 2T_E^2 a_1 - 4T_E a_2 - 24a_3 \\
 a'2 &= 3T_E^3 a_0 - 2T_E^2 a_1 - 4T_E a_2 + 24a_3 \\
 a'3 &= T_E^3 a_0 - 2T_E^2 a_1 + 4T_E a_2 - 8a_3 \\
 b'0 &= T_E^3 b_0 + 2T_E^2 b_1 + 4T_E b_2 + 8b_3 \\
 b'1 &= 3T_E^3 b_0 + 2T_E^2 b_1 - 4T_E b_2 - 24b_3 \\
 b'2 &= 3T_E^3 b_0 - 2T_E^2 b_1 - 4T_E b_2 + 24b_3 \\
 b'3 &= T_E^3 b_0 - 2T_E^2 b_1 + 4T_E b_2 - 8b_3
 \end{aligned} \tag{V.5}$$

La transformée bilinéaire ne donne pas une conversion numérique parfaite du filtre exprimé dans le domaine de Laplace. En particulier, elle implique une distorsion de l'espace des fréquences, qui tend à éloigner la réponse du filtre dans les domaines lorsqu'on se rapproche des hautes fréquences.

Lorsqu'on a besoin d'une grande précision autour de la fréquence de coupure d'un filtre, on peut réaliser un "pré-warping" qui va recalculer la fréquence de coupure effective du filtre numérique, en tenant compte de la distorsion de l'espace des fréquences. Dans notre cas, l'erreur étant aux environs de la demi-fréquence de Nyquist, nous n'utilisons pas de pré-warping, le suréchantillonnage garantissant une précision convenable dans le domaine audible.

[23]

## 2 Implantation Runge-Kutta

L'implémentation de Runge-Kutta n'a pas pu être effectuée durant le stage, faute de temps, mais sera réalisée à l'avenir, pour clore le travail sur les modélisations de circuits audio analogiques.

Toutefois, la procédure envisagée pour implanter la résolution des représentations d'état avec les méthodes numériques de Runge-Kutta, et de Newton-Raphson, est la suivante :

Dans chaque bloc, pour l'instant  $t_{n+1}$  on calcule  $X_{n+1}$  en fonction de  $f(X, U)$ , de  $X_n$ , de  $(I_{AO}^{out})_n$ , et de  $U_n$ . On peut alors calculer le  $(I_{AO}^{out})_{n+1}$  ainsi que  $Y_{n+1}$ , puis nous continuons pour les échantillons suivants. L'initialisation se fait avec des valeurs nulles.

Concernant la méthode de Newton-Raphson, le nombre d'itérations doit être limité à une valeur constante, pour que le temps-réel soit envisageable. On peut imaginer faire en offline ou au démarrage du plug-in une phase d'initialisation qui calcule ce nombre d'itérations fixes en fonction de contraintes optimales, comme les performances CPU et l'erreur maximale souhaitée.

## 3 Résultats

Pour des problèmes de temps, les résultats pour la méthode des séries de Volterra seront disponibles pendant la soutenance orale, ainsi que les valeurs numériques. Néanmoins, le plug-in VST temps réel a été développé, et nous pouvons faire quelques remarques sur ce qui en sort.

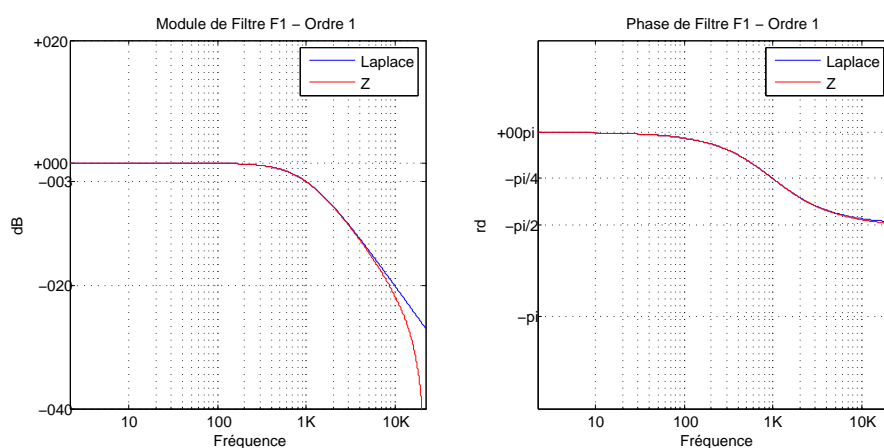


Figure V.1: Diagramme de Bode pour un filtre en Z et Laplace, de fréquence de coupure 1000 Hz

En utilisant uniquement des étages linéaires, le son en provenance d'une guitare électrique subit des colorations dues à la présence des filtres linéaires. Par contre, en activant les étages non linéaires, la sortie prend une amplitude démesurée problématique.

En rencontrant ce problème, nous avons émis deux hypothèses expliquant le dysfonctionnement. La première était une instabilité éventuelle de certains filtres. Après vérification sous Matlab, il s'est avéré que c'était en partie le cas pour certains filtres, dont il a fallu reprendre les expressions.

Toutefois, l'explication la plus pertinente était que le développement limité du  $\tanh(x)$  au troisième ordre est très insuffisant, et amène des divergences au delà du domaine de validité de la série entière. Or, en cherchant des sonorités saturées sur le SansAmp GT2, on sort très rapidement de ce domaine

malheureusement. Nous devons donc à l'avenir augmenter l'ordre de Volterra de la simulation, ou modifier le gain des noyaux non linéaires, en agissant par exemple sur le  $T_3$  du développement limité, pour étendre le domaine de validité de la simulation.

# Conclusion générale et perspectives

Pour conclure ce rapport, il semble important de faire un bilan sur le travail effectué pendant le stage. Au prix de quelques efforts, il a été démontré qu'il était possible de simuler des circuits électroniques en utilisant les séries de Volterra, outil encore peu étudié à l'heure actuelle dans ce contexte. Néanmoins, les démarches à effectuer sont contraignantes, et gagneraient à être automatisées par un outil de résolution systématique, surtout pour les ordres élevés.

Autre point important, le fait que le travail n'ait pas été totalement abouti. Par manque de temps, certains aspects du stage ont été vus très rapidement, et seront finalisés ultérieurement, par exemple sur tout ce qui concerne la méthode de Runge-Kutta, la vérification de sa convergence, son application logicielle, ainsi que la simulation de l'ensemble de la pédale SansAmp GT2... Pour les séries de Volterra, un grand nombre de points pourraient être améliorés, pour garantir la stabilité et une qualité sonore optimale. Par exemple, on pourrait travailler sur un remplacement du développement limité en séries entières par du Volterra-Padé qui garantirait des termes constants en dehors du domaine de validité plutôt que de la divergence.

Et bien entendu, tous ces outils pourront être réutilisés sur d'autres circuits intéressants, pour continuer à développer leur potentiel.

# Bibliographie

- [1] Ivan Cohen. Viva la convolution, Réverbération et processeurs à convolution. AudioFanzine.fr, 2005.
- [2] Alien Connections. Revalver MK 2. <http://www.alienconnections.com/>.
- [3] Audio Ease. Altiverb. <http://www.audioease.com/>.
- [4] Focusrite. Liquid channel. <http://www.focusrite.com/>.
- [5] Donald O. Pederson Graeme R. Boyle, Barry M. Cohn. Macromodeling of integrated circuit operational amplifiers. Technical report, IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol. SC-9, No.6, 1974.
- [6] Martin Hasler. Phénomènes non linéaires. Technical report, École Polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse, 1999.
- [7] Thomas Hélie. On the use of Volterra series for efficient real-time simulations of weakly nonlinear analog audio devices : Application to the Moog ladder filter. In *Proc. of the Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-06)*, pages 7–12, Montreal, Quebec, Canada, Sept. 18–20, 2006. [http://www.dafx.ca/proceedings/papers/p\\_007.pdf](http://www.dafx.ca/proceedings/papers/p_007.pdf).
- [8] Thomas Hélie. Introduction aux séries de volterra. Technical report, Cours de la formation ATIAM, 2007.
- [9] Bonnie Baker Stephan Baier Hubert Biagi, R. Mark Stitt. Burr-brown, spice based macromodels. Technical report, 1995.
- [10] Native Instruments. Guitar Rig 2. <http://www.native-instruments.com>.
- [11] Texas Instruments. TL072 Low Noise JFET-Input Operational Amplifiers. Technical report, <http://focus.ti.com/lit/ds/symlink/tl072.pdf>, 1978-2005.
- [12] Alberto Isidori. Non linear control systems, an introduction, 2nd edition. Communications and Control Engineering Series, 1989.
- [13] Norman Koren. Improved vacuum tube models for spice simulations. Technical report, <http://www.normankoren.com/>, 2003.
- [14] Françoise Lamnabhi-Lagarrigue. Analyse des systèmes non linéaires. Technical report, Éditions Hermès, 1994.
- [15] Waves Ltd. IR-1. <http://www.waves.com>.
- [16] Waves Ltd. Q-clone. <http://www.waves.com>.
- [17] Charles Rydel. Simulation of electron tubes with spice. Technical report, AES the 98th convention, 1995.

- [18] Thomas Serafini. A complete model of a tube amplifier stage. Technical report, <http://www.simulanalog.org>, 2002.
- [19] Simulanalog. Guitar suite. <http://www.simulanalog.org>.
- [20] Linear Technology. LTspice / Switcher CAD III. <http://www.linear.com>.
- [21] Pierluigi Zamboni Thomas Serafini. State variable changes to avoid non computational issues. Technical report, <http://www.simulanalog.org>, 2002.
- [22] Alain Vachoux. Modélisation de systèmes intégrés analogiques et mixtes, introduction à vhdl-ams. Technical report, Laboratoire de Systèmes Microélectroniques, école Polytechnique fédérale de Lausanne, Suisse, 2002.
- [23] David T. Yeh and Julius O. Smith. Discretization of the '59 Fender Bassman tone stack. In *Proc. of the Int. Conf. on Digital Audio Effects (DAFx-06)*, pages 1–6, Montreal, Quebec, Canada, Sept. 18–20, 2006. [http://www.dafx.ca/proceedings/papers/p\\_001.pdf](http://www.dafx.ca/proceedings/papers/p_001.pdf).
- [24] Udo Zölzer. Digital Audio Signal Processing. John Wiley and Sons Ltd., 1997.
- [25] Udo Zölzer. DAFX - Digital Audio Effects. John Wiley and Sons Ltd., 2002.

# Chapitre VI

## Annexes

### 1 Expression des filtres pour les séries de Volterra

Ci dessous sont présentés l'ensemble des expressions des filtres en Laplace utilisés dans les structures simulables de Volterra, voire dans les représentations d'état.

$L1$	
$a_0$	1
$a_1$	$1/\omega_{AO}$
$b_0$	1
$b_1$	0

#### 1.1 Étage A

$P1A$		$Q1A$		$FR1A$	
$a_0$	$\frac{1}{C_8(R_8+R_9)}$	$a_0$	$\frac{1}{C_8(R_8+R_9)}$	$a_0$	1
$a_1$	1	$a_1$	1	$a_1$	$(R_3 + R_4)C_3$
$b_0$	$\frac{1}{C_8(R_8+R_9)}$	$b_0$	0	$b_0$	0
$b_1$	$\frac{C_8 R_8}{C_8(R_8+R_9)}$	$b_1$	$\frac{C_8 R_8}{C_8(R_8+R_9)}$	$b_1$	$R_4 C_3$

$T1A1$	
$a_0$	1
$a_1$	$(R_{11}(1 - DRV) + (R_{11}(DRV) + R_{12}))C_{S3}$
$b_0$	$O$
$b_1$	$(R_{11}(DRV) + R_{12})C_{S3}$

$T1A2$	
$a_0$	1
$a_1$	$2 * (R_{11}(1 - \alpha) + (R_{11}(\alpha) + R_{12}))C_{S3}$
$a_2$	$(R_{11}(1 - \alpha) + (R_{11}(\alpha) + R_{12}))^2 C_{S3}^2$
$b_0$	$O$
$b_1$	$-C_{S3}$
$b_2$	$-R_{11}(1 - \alpha)C_{S3}^2$

$G''A$	
$a_0$	1
$a_1$	$\frac{1}{\omega_{AO}C_8(R_8+R_9)} + 1 + \frac{C_8R_8(A_{1,0}-A_{0,1})}{C_8(R_8+R_9)}$
$a_2$	$\frac{1}{\omega_{AO}} - \frac{C_8R_8A_{0,1}}{C_8(R_8+R_9)}$
$b_0$	$\frac{(1+A_{1,0})}{C_8(R_8+R_9)}$
$b_1$	$\frac{1}{\omega_{AO}C_8(R_8+R_9)} + 1$
$b_2$	$\frac{1}{\omega_{AO}}$

$\Omega A$	
$a_0$	1
$a_1$	$(C_4 + C_5)(R_6 + R_7)$
$a_2$	$C_4R_7(C_4R_6 + 2C_5R_7)$
$a_3$	$R_{AO}^{out}C_5R_7C_6R_6C_4$
$b_0$	-1
$b_1$	$(C_4R_{AO}^{out} - (C_4 + C_5)(R_6 + R_7))$
$b_2$	$C_4(C_5R_{AO}^{out}R_7 + C_4R_{AO}^{out}R_6 - 2R_6C_5R_7 + R_{AO}^{out}C_5R_6 - C_4R_6R_7)$
$b_3$	$C_4^2R_{AO}^{out}R_6C_5R_7$

## 1.2 Étage B

$P1B$		$Q1B$	
$a_0$	1	$a_0$	1
$a_1$	$\frac{1+R_{S3}C_{11}+R_{14}C_{12}}{R_{S3}R_{14}C_{11}C_{12}}$	$a_1$	$\frac{1+R_{S3}C_{11}+R_{14}C_{12}}{R_{S3}R_{14}C_{11}C_{12}}$
$a_2$	1	$a_2$	1
$b_0$	1	$b_0$	$\frac{1}{R_{S3}}$
$b_1$	$\frac{R_{S3}C_{11}+R_{14}C_{12}}{R_{S3}R_{14}C_{11}C_{12}}$	$b_1$	$\frac{R_{S3}C_{11}}{R_{S3}R_{S3}R_{14}C_{11}C_{12}}$
$b_2$	1	$b_2$	$\frac{1}{R_{S3}}$

$G''1B$	
$a_0$	1
$a_1$	$\frac{1}{\omega_{AO}} + (1 + R_{S3}C_{11} + R_{14}C_{12}) + A_{1,0}(R_{S3}C_{11} + R_{14}C_{12}) - A_{0,1}C_{11}$
$a_2$	$1 + \frac{1+R_{S3}C_{11}+R_{14}C_{12}}{\omega_{AO}R_{S3}R_{14}C_{11}C_{12}} + A_{1,0} + \frac{A_{0,1}}{R_{S3}}$
$a_3$	$\frac{1}{\omega_{AO}}$
$b_0$	$\frac{1}{R_{S3}R_{14}C_{11}C_{12}}$
$b_1$	$\frac{1}{\omega_{AO}} + (1 + R_{S3}C_{11} + R_{14}C_{12})$
$b_2$	$(1 + \frac{1+R_{S3}C_{11}+R_{14}C_{12}}{\omega_{AO}R_{14}C_{11}C_{12}})$
$b_3$	$\frac{1}{\omega_{AO}}$

### 1.3 Étage C

$P1C$		$Q1C$	
$a_0$	1	$a_0$	1
$a_1$	$\frac{1+R_{S2}C_{20}+R_{24}C_{19}}{R_{S2}R_{24}C_{20}C_{19}}$	$a_1$	$\frac{1+R_{S2}C_{20}+R_{24}C_{19}}{R_{S2}R_{24}C_{20}C_{19}}$
$a_2$	1	$a_2$	1
$b_0$	1	$b_0$	$\frac{1}{R_{S2}}$
$b_1$	$\frac{R_{S2}C_{20}+R_{24}C_{19}}{R_{S2}R_{24}C_{20}C_{19}}$	$b_1$	$\frac{R_{S2}C_{20}}{R_{S2}R_{S2}R_{24}C_{20}C_{19}}$
$b_2$	1	$b_2$	$\frac{1}{R_{S2}}$

$G''1C$	
$a_0$	1
$a_1$	$\frac{1}{\omega_{AO}} + (1 + R_{S2}C_{20} + R_{24}C_{19}) + A_{1,0}(R_{S2}C_{20} + R_{24}C_{19}) - A_{0,1}C_{20}$
$a_2$	$1 + \frac{1+R_{S2}C_{20}+R_{24}C_{19}}{\omega_{AO}R_{S2}R_{24}C_{20}C_{19}} + A_{1,0} + \frac{A_{0,1}}{R_{S2}}$
$a_3$	$\frac{1}{\omega_{AO}}$
$b_0$	$\frac{1}{R_{S2}R_{24}C_{20}C_{19}}$
$b_1$	$\frac{1}{\omega_{AO}} + (1 + R_{S2}C_{20} + R_{24}C_{19})$
$b_2$	$(1 + \frac{1+R_{S2}C_{20}+R_{24}C_{19}}{\omega_{AO}R_{S2}R_{24}C_{20}C_{19}})$
$b_3$	$\frac{1}{\omega_{AO}}$

## 2 Expression des constantes pour les séries de Volterra

$A_{1,0}$	$U_{AO}^{out}G_{AO}^{out}U_{AO}^{in}G_{AO}^{in}$
$A_{0,1}$	$-U_{AO}^{out}G_{AO}^{out}R_{AO}^{out}$
$A_{2,0}$	0
$A_{1,1}$	0
$A_{0,2}$	0
$A_{3,0}$	$(U_{AO}^{in}G_{AO}^{in})^3 \times T_3U_{AO}^{out}(G_{AO}^{out})^3$
$A'_{3,0}$	$U_{AO}^{in}T_3(G_{AO}^{in})^3 \times U_{AO}^{out}G_{AO}^{out}$
$A_{2,1}$	$(U_{AO}^{in}G_{AO}^{in})^2(-R_{AO}^{out}) \times 3T_3U_{AO}^{out}(G_{AO}^{out})^3$
$A_{1,2}$	$U_{AO}^{in}G_{AO}^{in}(R_{AO}^{out})^2 \times 3T_3U_{AO}^{out}(G_{AO}^{out})^3$
$A_{0,3}$	$-(R_{AO}^{out})^3 \times T_3U_{AO}^{out}(G_{AO}^{out})^3$
$A_C$	$\frac{R_{29}}{R_{28}+R_{29}}$
$A'_C$	$\frac{-R_{28}}{(R_{28}+R_{29})^2}$

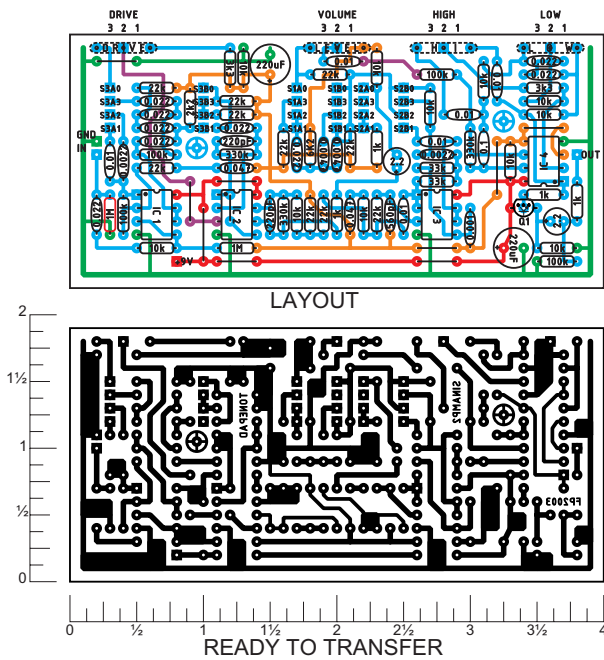
$\omega_{AO}^{-1}$	$R_{AO}C_{AO}$
$U_{AO}^{in}$	$I_{AO}/C_{AO}$
$U_{AO}^{out}$	$(V_{cc+} + V_{cc-})/2 - V_{offs}$
$C_{S3}$	$(S3 = CAL)C_9$
$C_{S3}$	$(S3 = BRI)C_{10}$
$C_{S3}$	$(S3 = TWE)C_7$
$R_{S3}$	$(S3 = TWE)R_{13}$
	$(S3 = CALouBRI) \frac{R_{13}R_{10}}{R_{13}+R_{10}}$
$R_{S2}$	$(S2 = CLE)R_{26} + R_{25}$
	$(S2 = HOTouHIG) \frac{R_{26}R_{27}}{R_{26}+R_{27}} + R_{25}$

### 3 Schéma complet du SansAmp GT2 et valeurs des composants

# SIN AMP 2.2

Rev.2.Feb.26.2004

Build the Sans Amp GT2. Pads are provided for panel mount switches, wiring will be different depending on the switches used. Off board components except for the potentiometers are not shown on the layout. Trademarks remain property of their owners.



### Parts List

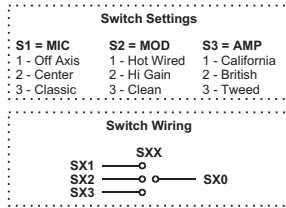
- |                  |                    |
|------------------|--------------------|
| <b>Resistors</b> | <b>Capacitors</b>  |
| 4 - 1k           | 9 - 0.022 $\mu$ F  |
| 1 - 2k2          | 2 - 0.047 $\mu$ F  |
| 2 - 3k3          | 2 - 0.0047 $\mu$ F |
| 1 - 6k2          | 6 - 0.01 $\mu$ F   |
| 11 - 10k         | 1 - 0.1 $\mu$ F    |
| 10 - 22k         | 2 - 220 $\mu$ F    |
| 2 - 33k          | 1 - 560 pF         |
| 4 - 100k         | 2 - 220 pF         |
| 3 - 330k         | 2 - 2.2 $\mu$ F    |
| 2 - 1M           | 2 - 0.0022 $\mu$ F |
|                  | 1 - 0.001 $\mu$ F  |

### Pots

- 4 - 100k Lin.

### Transistors & ICs

- 4 - TL072  
1 - 2N5088



Layout and presentation by Francisco Peña (2001 - 2003).  
 All rights reserved. Authorization for personal use only.  
 any commercial use is forbidden.  
 Permission for posting/serving limited to  
<http://www.tonypad.com>  
 Permission refused for posting from other sites.

