



Simulation d'une corde avec fortes déformations par
les séries de Volterra

Stage de Recherche
Master Recherche ATIAM
Université Pierre et Marie Curie, IRCAM
Juin 2006

David Roze

Responsables du stage à l'Ircam : Joël Bensoam et Thomas Hélie

Table des matières

Remerciements	4
1 Introduction	5
1.1 Sujet	5
1.2 Plan du document	6
2 Description du problème et introduction aux séries de Volterra	8
2.1 Problème posé	8
2.1.1 Modèle physique de corde non linéaire amortie	9
2.1.2 Problème adimensionné	10
2.2 Représentation en séries de Volterra	11
2.2.1 Définition et notations	11
2.2.2 Norme, fonction caractéristique et notion de convergence	12
2.2.3 Lois d'interconnexion	12
3 Corde non linéaire avec conditions de Dirichlet homogènes	14
3.1 Résolution du problème de Dirichlet homogène	14
3.1.1 Equation satisfaite par les noyaux dans le domaine de Laplace	14
3.1.2 Résolution sous forme intégrale	16
3.1.3 Projection sur les déformées modales	17
3.1.4 Développement de l'équation de récurrence	19
3.2 Représentation temporelle et simulation numérique pour la synthèse sonore	23
3.2.1 Identification d'une structure en filtres linéaires et non linéarités instantanées	23
3.2.2 Réalisation temporelle	24
3.2.3 Discrétisation	26
3.2.4 Application et simulation temporelle	27
3.2.5 Commentaires et observations	28

4	Généralisation au problème avec conditions aux limites non homogènes	38
4.1	Introduction	38
4.2	Résolution formelle pour des conditions aux limites représentées par des séries de Volterra	39
4.3	Séries de Volterra multi-entrées	40
4.3.1	Représentation du problème aux limites	40
4.4	Résolution	42
4.4.1	Conditions de Dirichlet non homogènes aux deux extrémités	42
4.4.2	Condition de Dirichlet en $x=0$ et de Neumann en $x=1$	44
4.4.3	Projection modale	44
4.5	Représentation temporelle et simulation numérique	45
5	Conclusion	48
5.1	Bilan	48
5.2	Discussion des résultats	48
5.3	Perspectives	49
	Annexes	49
	Diagonalisation de la matrice A	50
	Nullité des noyaux d'ordre pair	50
	Lois d'interconnexion pour les noyaux multi-entrées	51
	Notations	54
	Références	56

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu, mes deux responsables de stages, Thomas Hélié et Joël Bensoam. Leur présence et leur soutien n'ont fait que renforcer ma motivation pour ce travail. Ce fut un vrai plaisir de découvrir le vaste monde des séries de Volterra et leurs applications, et je leur suis reconnaissant de m'avoir accordé leur confiance.

Merci à René Caussé, Xavier Rodet ainsi qu'à Hugues Vinet pour leur aide et leurs conseils.

Ce stage cloture une année de Master ATIAM, durant laquelle Cyrille Defaye et Gérard Assayag ont toujours été présents. Merci à eux deux, ainsi qu'à toute l'équipe enseignante, pour cette année riche et intense.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Sujet

La modélisation des vibrations de systèmes mécaniques est réalisable par un grand nombre de méthodes numériques. Certaines méthodes sont privilégiées en fonction des exigences sur les résultats de l'approximation, ou, des hypothèses nécessaires à leur convergence.

La résolution des systèmes linéaires est déjà utilisée dans le domaine de la synthèse sonore pour déterminer les modes propres des structures choisies et déterminer les couplages entre différents systèmes. La généralisation de la géométrie étudiée ne pose pas de problème particulier grâce à l'utilisation des méthodes par éléments finis ou différences finies (cf. [1]). Cependant, l'étude de systèmes linéaires impose un grand nombre de contraintes :

- loi de comportement linéaires (matériau élastique)
- travail en petits déplacements et petites déformations afin de négliger l'ordre 2 et de garder le domaine invariant
- conditions aux limites conservatives (n'évoluent pas durant le calcul).

L'acoustique instrumentale, qui consiste à modéliser les instruments de musiques pour comprendre les phénomènes physiques à l'origine du son, ne peut se permettre de rester sous de telles hypothèses. Les travaux d'Olivier Thomas et Cyril Touzé ([10] et [11]) sur les vibrations non linéaires du gong sont un bon exemple de la nécessité d'utiliser des méthodes de résolution de systèmes non linéaires. Tous les instruments de musique tirent leur richesse de phénomènes non linéaires qu'il est important de modéliser pour la synthèse sonore (enrichissement du spectre en fonction de la nuance pour les cuivres, bifurcations pour les bois, vibration de la table d'harmonie précontrainte du piano...).

Plusieurs méthodes de résolution de problèmes non linéaires sont des méthodes itératives en temps afin de prendre en compte la variation du domaine (grands déplacements, grandes rotations) ou les termes de déformations du second ordre (grandes déformations). Dans le cas des éléments finis, la

structure est discrétisée spatialement et représentée dans un système matriciel de masse, amortissement et raideur. Ces matrices (dont la taille dépend du nombre de noeuds) sont inversées et mises à jour (modification du domaine) à chaque pas de temps. Ces techniques nécessitent des temps calculs importants dès que la discrétisation devient fine.

Les outils de synthèses sonores doivent diminuer le plus possible les temps de résolution pour déterminer le comportement du système. En effet, des compositeurs ont des demandes sur la possibilité de travailler en “temps-réel”. Ce terme signifie la possibilité pour l'utilisateur de modifier un paramètre du système et d'entendre “instantanément” la répercussion sonore de cette modification.

Dans cette optique de synthèse sonore en temps réel, les séries de Volterra se présentent comme un outil potentiellement intéressant de résolution de systèmes non linéaires. En effet, pour le problème de la corde non linéaire on verra que cette méthode permet de s'affranchir d'une discrétisation spatiale puisqu'elle caractérise le système dans son ensemble. Le calcul des noyaux permet de représenter le système complet, il est alors possible d'effectuer la synthèse en un point choisi.

La particularité de cet outil est transformer la résolution d'une équation non linéaire en une infinité d'équations linéaires. La définition des séries de Volterra et l'application des lois d'interconnexion permet de trouver ces équations linéaires. Après la projection des noyaux sur une base modale une relation de récurrence purement algébrique sera établie.

La simulation de la dynamique nécessite une reformulation de cette récurrence afin de modéliser les ordres de non-linéarité par des successions de filtres et de produits instantanés. A terme, cette structure de réalisation temporelle sera utilisée pour faire de la synthèse sonore en temps réel.

Les noyaux de Volterra ont déjà été appliqués à la résolution de problèmes uni- ou bi-dimensionnels. Ce travail permet d'envisager une généralisation de l'outil à des géométries 3D quelconques.

Cette étude rentre dans le cadre des travaux réalisés à l'IRCAM et contribue au projet CONSONNES, financé par l'ANR.

1.2 Plan du document

Ce rapport présente l'étude d'une équation de corde (établie par Kirchoff) non linéaire avec différentes configurations de conditions limites. Cette équation ne se veut pas un modèle exhaustif des non-linéarités de la corde (l'hypothèse des petites rotations est toujours présente dans ce modèle). Cependant, le terme intégral issu de la variation de tension est un point de départ intéressant pour l'application des séries de Volterra à la dynamique des solides.

La première partie présentera le modèle de corde. Puis, les séries de Volterra seront définies ainsi que leurs propriétés.

Dans la deuxième partie, une représentation en séries de Volterra va permettre l'étude du problème avec des conditions de Dirichlet homogènes pour calculer analytiquement les noyaux grâce à une relation de récurrence sur les projections modales. Une première simulation permettra d'observer et d'écouter les résultats obtenus, tout en sachant que la démonstration de la convergence de la série ne sera pas effectuée dans le cadre de ce rapport.

Finalement, la troisième partie présentera les noyaux de Volterra multi-entrées. Ces noyaux sont une extension des séries de Volterra, destinée à accepter plusieurs entrées au système. Il sera alors possible de prendre en compte des conditions aux limites non homogènes pour imposer des déplacements ou des forces issus de mise en relation avec d'autres systèmes.

Chapitre 2

Description du problème et introduction aux séries de Volterra

Ce chapitre présente le modèle de corde choisi pour l'étude, puis, introduira les séries de Volterra et leurs propriétés. Cette partie présente les outils théoriques mis en oeuvre durant le stage. L'application à l'équation de Kirchoff sera réalisée dans le chapitre 3.

2.1 Problème posé

Description de la non-linéarité A partir de l'équation linéaire des vibrations de la corde

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (2.1.1)$$

avec ρ : masse volumique et A : section de la corde, on sait que pour un déplacement transversal y , la tension T du petit élément de corde crée une force dans la direction transverse. L'hypothèse des petites rotations permet d'écrire cette force sous la forme

$$T \sin \alpha \simeq T \frac{\partial y}{\partial x}$$

avec α , l'angle formé entre l'axe de la corde et le petit élément de longueur.

Cette formulation suppose la tension T constante sur le petit élément de longueur et permet d'obtenir une équation de la dynamique de la corde sans amortissement.

Il est toutefois possible de supposer que T varie et prendre en compte un allongement de la corde

$$T = T_0 + E \frac{\Delta l}{l}$$

Soit un petit élément de corde dl , sa longueur est définie par

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{dx^2 + dy^2} \\ &= dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}. \end{aligned}$$

L'allongement s'écrit

$$\Delta l = \int_0^l \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx - l.$$

La nouvelle expression de la tension est

$$T = T_0 + \frac{E}{l} \left[\int_0^l \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx - l \right]. \quad (2.1.2)$$

L'hypothèse des petites rotations permet de réécrire la variation de tension par un développement limité

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \frac{E}{l} \left[\int_0^l dx - l + \int_0^l \frac{1}{2} \left| \frac{dy}{dx} \right|^2 dx \right] \\ &= T_0 + \frac{E}{2l} \int_0^l \left| \frac{dy}{dx} \right|^2 dx \end{aligned}$$

L'ajout d'un amortissement constant et l'expression non linéaire de T permettent de retrouver l'équation de Kirchoff.

2.1.1 Modèle physique de corde non linéaire amortie

Le problème étudié est la résolution temporelle d'une équation intégral-différentielle établie par Kirchoff (cf. [5]) pour la synthèse sonore. Cette équation modélise les vibrations transversales d'une corde dans un plan, en prenant en compte, l'élasticité longitudinale, donc la variation de tension. Elle s'écrit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\delta \frac{\partial u}{\partial t} = \left[c^2 + b \int_0^l \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e, \quad 0 < x < l, t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1.3)$$

avec les constantes

$$c^2 = \frac{T_0}{\rho A}, \quad (2.1.4)$$

$$b = \frac{E}{2\rho l}, \quad (2.1.5)$$

où T_0 , ρ , A , E et l sont respectivement, la tension initiale axiale, la masse volumique, la section, le module d'Young et la longueur de la corde.

L'excitation est définie par

$$e(x, t) = \phi(x)f(t), \quad x \in]0; l[, \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1.6)$$

où la force $f(t)$ est distribuée spatialement par $\phi(x)$. La fonction $f(t)$ est exprimée en Newton.

Les conditions aux limites et initiales sont dans un premier temps

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 0 \quad \forall (x, t) \in \{0, l\} \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_t^k u(x, t) &= 0 \quad \forall (x, t) \in [0; l] \times \{0\} \quad \text{pour } k=0 \text{ et } k=1. \end{aligned}$$

Cette hypothèse permet des calculs plus simples, mais aussi réalistes si l'on suppose la corde fixée sur un support très rigide.

Dans un second temps, les conditions aux limites non homogènes seront étudiées. En effet, dans l'objectif de réaliser de la synthèse sonore, il est important de prévoir une connexion entre différents systèmes. Cette connexion peut prendre la forme d'une impédance/admittance (supposée connue) ou de condition de Dirichlet/Neumann non homogènes. Ce dernier cas généralise l'expression des noyaux et sera étudié dans la partie 4.

2.1.2 Problème adimensionné

On définit le changement de variable

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= \frac{x}{l} \quad 0 < \tilde{x} < 1, \\ \tilde{t} &= \frac{ct}{l} \quad \tilde{t} \in \mathbb{R}^+, \end{aligned}$$

et

$$\tilde{u}(\tilde{t} = \frac{ct}{l}, \tilde{x} = \frac{x}{l}) = u(t, x). \quad (2.1.7)$$

On a alors les correspondances suivantes

$$u \equiv \tilde{u} \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{c}{l} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \quad (2.1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}}. \quad (2.1.10)$$

Le problème se récrit

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t}^2} + \alpha \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} = \left[1 + \epsilon \int_0^1 \left| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} \right|^2 d\tilde{x} \right] \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{\phi}(\tilde{x}) \tilde{f}(\tilde{t}) \quad (2.1.11)$$

avec des conditions initiales inchangées et les conditions aux limites qui s'écrivent

$$\tilde{u}(x, t) = 0 \quad \forall (\tilde{x}, \tilde{t}) \in \{0, 1\} \times \mathbb{R}^+.$$

Les nouvelles constantes du problème sont

$$\alpha = 2\delta \frac{l}{c} \quad (2.1.12)$$

$$\epsilon = \frac{b}{lc^2} \quad (2.1.13)$$

$$\tilde{\phi}(\tilde{x}) = \frac{l^2}{c^2} \phi(\tilde{x}). \quad (2.1.14)$$

Toute la suite du rapport portera sur le problème adimensionné. Pour des questions de lisibilité et alléger la notation, les tildes seront supprimés.

2.2 Représentation en séries de Volterra

Les séries de Volterra sont un outil de résolution rapide de certains systèmes non linéaires. Les premières applications ont été réalisées dans le domaine de l'électronique (cf. [6], [9] et [4]).

2.2.1 Définition et notations

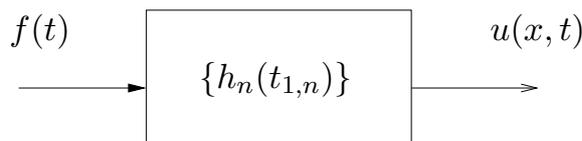


FIG. 2.1 – Définition des noyaux de Volterra associés au système

Le système de la figure 2.1 est décrit par les séries de Volterra si (cf. [6][9][7])

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(\tau_{1,n}) f(t - \tau_1) \dots f(t - \tau_n) d\tau_{1,n} \quad (2.2.1)$$

où on note

$$\begin{aligned} (\tau_{1,n}) &= (\tau_1, \dots, \tau_n) \\ d\tau_{1,n} &= d\tau_1 \dots d\tau_n. \end{aligned}$$

La résolution consiste à déterminer les noyaux $h_n(\tau_{1,n})$ représentant le système.

Pour un système causal stable, la transformée de Laplace des noyaux, $H_n(s_{1,n})$ est analytique dans $(\mathbb{C}_0^+)^n$ où

$$\mathbb{C}_0^+ = s \in \mathbb{C} / \Re(s) \geq 0.$$

Cette transformée est définie par

$$H_n(s_{1,n}) = \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} h_n(\tau_{1,n}) e^{-(s_1 \tau_1 + \dots + s_n \tau_n)} d\tau_1 \dots d\tau_n, \quad \text{pour } (s_{1,n}) \in (\mathbb{C}_0^+)^n$$

où $h_n(\tau_{1,n}) = h_n^{(x)}(\tau_1, \dots, \tau_n)$ est le noyau de Volterra temporel d'ordre n et $H_n(s_{1,n}) = H_n^{(x)}(s_1, \dots, s_n)$ le noyau de Volterra d'ordre n dans le domaine de Laplace.

2.2.2 Norme, fonction caractéristique et notion de convergence

L'étude de la convergence nécessite de définir deux normes pour les noyaux de Volterra (cf. [6]). Soit :

$$h_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Les normes L^1 et L^∞ sont définies par

$$\| h_n \|_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} | h_n(\tau_{1,n}) | d\tau_1 \dots d\tau_n \quad (2.2.2)$$

$$\| h_n \|_\infty = \sup_{\tau_{1,n}} | h_n(\tau_{1,n}) |. \quad (2.2.3)$$

La fonction caractéristique associée au noyau de Volterra h_n est

$$\psi(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \| h_n \|_1 z^n \quad (2.2.4)$$

et a un rayon de convergence ρ de $\psi(x)$ égal à celui de la série de Volterra. Si l'entrée $f(t)$ respecte l'inégalité

$$\| f \|_\infty < \rho, \quad (2.2.5)$$

alors, la sortie $u(t)$ du système existe et est bornée par $\psi(\| f \|_\infty)$.

L'étude de la convergence de la série ne sera pas effectuée dans le cadre de ce rapport.

2.2.3 Lois d'interconnexion

Soient deux séries de noyaux de Volterra $\{f_n\}$ et $\{g_n\}$.

– La somme des deux sorties définit encore un système en série de Volterra (figure 2.2)

$$H_n(s_{1,n}) = F_n(s_{1,n}) + G_n(s_{1,n}). \quad (2.2.6)$$

– De même le produit des deux sorties permet d'écrire (figure 2.3)

$$H_n(s_{1,n}) = \sum_{p=1}^{n-1} F_p(s_{1,p}) G_{n-p}(s_{p+1,n}). \quad (2.2.7)$$

- Enfin, la cascade de $\{f_n\}$ et d'un système linéaire $\{g_1\}$ (figure 2.4) définit un nouveau système de Volterra

$$H_n(s_{1,n}) = F_n(s_{1,n})G_1(\widehat{s}_{1,n}) \quad (2.2.8)$$

avec

$$\widehat{s}_{1,n} = s_1 + \dots + s_n.$$

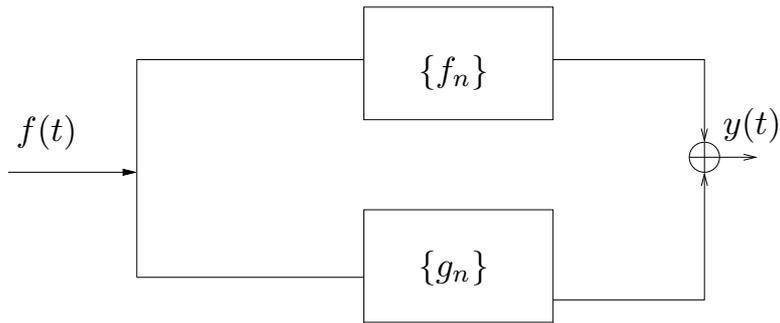


FIG. 2.2 – Somme des sorties de deux noyaux

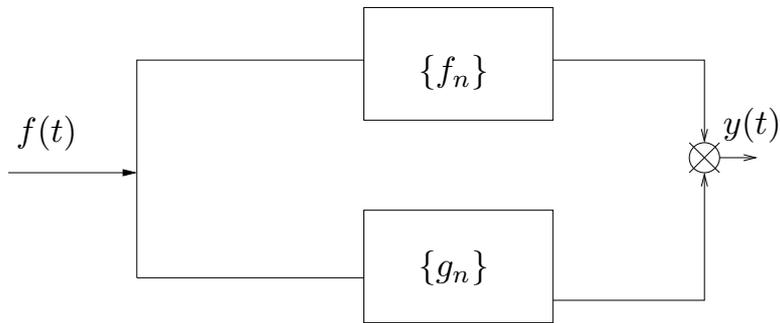


FIG. 2.3 – Produit des sorties de deux noyaux

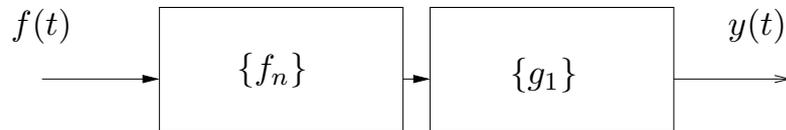


FIG. 2.4 – Cascade de deux noyaux

Chapitre 3

Corde non linéaire avec conditions de Dirichlet homogènes

Dans ce chapitre commence le travail réalisé durant le stage. L'application des séries de Volterra à l'équation de la corde va nous permettre de calculer analytiquement les premiers noyaux avant de réaliser une simulation temporelle pour faire de la synthèse sonore.

3.1 Résolution du problème de Dirichlet homogène

3.1.1 Equation satisfaite par les noyaux dans le domaine de Laplace

On représente la solution de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} = \left[1 + \epsilon \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x)f(t), \quad (3.1.1)$$

par un système d'entrée $f(t)$, de sortie $u(x, t)$ décrit par une série de Volterra de noyaux paramétrées par x

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} h_n^{(x)}(\tau_{1,n}) f(t - \tau_1) \dots f(t - \tau_n) d\tau_{1,n}. \quad (3.1.2)$$

Les conditions aux limites sur $u(x, t)$ sont

$$u(0, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1.3)$$

$$u(1, t) = 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.1.4)$$

Les équations (3.1.1), (3.1.3) peuvent être représentées sous la forme des trois schéma blocs des figures 3.1, 3.2 et 3.3. Les noyaux et différents

opérateurs sont exprimés dans le domaine de Laplace, alors que les signaux d'entrée et de sortie sont dans le domaine temporel. La résolution numérique se fera de manière temporelle avec des filtres ARMA, représentant les noyaux.

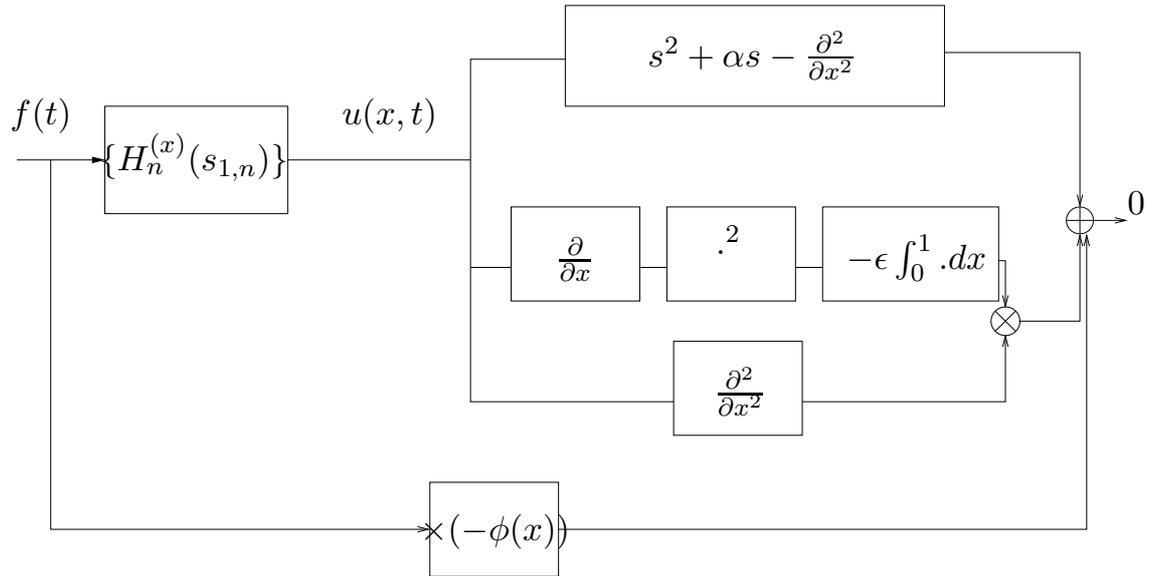


FIG. 3.1 – Décomposition de l'équation aux dérivées partielles

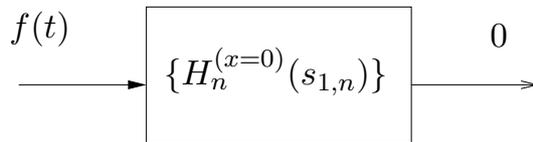


FIG. 3.2 – Condition à la frontière en x=0

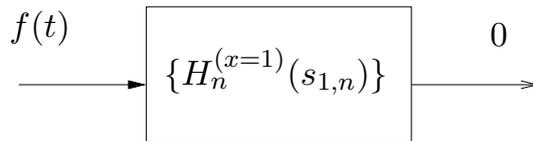


FIG. 3.3 – Condition à la frontière en x=1

La mise en équation des noyaux de Volterra est réalisée grâce aux lois

d'interconnexions vues à la section 2.2.3, pour des conditions initiales nulles

$$\begin{aligned} & \forall (s_{1,n}) \in (\mathbb{C}_0^+)^n, \forall x \in [0; 1], \left[(\widehat{s_{1,n}})^2 + \alpha \widehat{s_{1,n}} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] H_n^{(x)}(s_{1,n}) \quad (3.1.5) \\ & - \epsilon \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \int_0^1 \left[\frac{\partial H_p^{(x)}(s_{1,p})}{\partial x} \frac{\partial H_q^{(x)}(s_{p+1,p+q})}{\partial x} \right] dx \frac{\partial^2 H_r^{(x)}(s_{p+q+1,n})}{\partial x^2} = \phi(x), \end{aligned}$$

avec $s_{1,n} = (s_1, \dots, s_n)$ et $\widehat{s_{1,n}} = s_1 + \dots + s_n$.

Pour un ordre $n \geq 2$ donné, l'équation (3.1.5) permet d'exprimer le noyau d'ordre n en fonction de $\phi(x)$ et des noyaux d'ordre inférieurs, déjà calculés. Ainsi, on a

$$(\widehat{s_{1,n}}^2 + \alpha \widehat{s_{1,n}}) H_n^{(x)}(s_{1,n}) - \frac{\partial^2 H_n^{(x)}(s_{1,n})}{\partial x^2} = E_n^{(x)}(s_{1,n}), \quad (3.1.6)$$

avec

$$\begin{aligned} E_1^{(x)}(s_1) &= \phi(x) \quad (3.1.7) \\ \forall n \geq 2 \quad E_n^{(x)}(s_{1,n}) &= \epsilon \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \int_0^1 \left[\frac{\partial H_p^{(x)}(s_{1,p})}{\partial x} \frac{\partial H_q^{(x)}(s_{p+1,p+q})}{\partial x} \right] dx \frac{\partial^2 H_r^{(x)}(s_{p+q+1,n})}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

On obtient un système d'équations différentielles ordinaires en espace.

3.1.2 Résolution sous forme intégrale

L'équation (3.1.6) peut être réduite à une équation différentielle ordinaire d'ordre un de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{H}_n^{(x)}(s_{1,n})}{\partial x} - \mathbf{A}(\widehat{s_{1,n}}) \mathbf{H}_n^{(x)}(s_{1,n}) = \mathbf{B} E_n^{(x)}(s_{1,n}),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_n^{(x)}(s_{1,n}) &= \begin{bmatrix} H_n^{(x)}(s_{1,n}) \\ \frac{\partial H_n^{(x)}(s_{1,n})}{\partial x} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{A}(\widehat{s_{1,n}}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Gamma^2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \Gamma^2 &= (\widehat{s_{1,n}})^2 + \alpha \widehat{s_{1,n}}, \\ \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dont la solution générale est :

$$\mathbf{H}_n^{(x)}(s_{1,n}) = \int_0^x e^{\mathbf{A}(\widehat{s_{1,n}})(\xi-x)} \mathbf{B} E_n^{(\xi)}(s_{1,n}) d\xi + e^{\mathbf{A}(\widehat{s_{1,n}})x} \mathbf{H}_n^{(x=0)}(s_{1,n}) \quad (3.1.8)$$

avec

$$\forall s \in \mathbb{C}, e^{Asx} = \begin{bmatrix} \cosh(\Gamma(s)x) & \frac{\sinh(\Gamma(s)x)}{\Gamma(s)} \\ \Gamma(s)\sinh(\Gamma(s)x) & \cosh(\Gamma(s)x) \end{bmatrix} \text{ cf. Annexes 5.3.} \quad (3.1.9)$$

et

$$\Gamma(s) = \sqrt{s^2 + \alpha s}. \quad (3.1.10)$$

Cette solution intégrale dépend du vecteur $\mathbf{H}_n^{(x=0)}(s_{1,n})$ qui est pour l'instant indéterminé. Les conditions aux limites définies en $x=0$ et $x=1$ vont permettre de calculer $\mathbf{H}_n^{(x=0)}(s_{1,n})$ et $\mathbf{H}_n^{(x=1)}(s_{1,n})$ pour trouver une solution particulière.

Ces conditions sont

$$\mathbf{H}_n^{(x=0)}(s_{1,n}) = \begin{bmatrix} H_n^{(x=0)}(s_{1,n}) \\ \frac{\partial H_n^{(x=0)}(s_{1,n})}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Gamma(\widehat{s_{1,n}})}{\sinh(\Gamma(\widehat{s_{1,n}}))} \int_0^1 \frac{\sinh(\Gamma(\widehat{s_{1,n}})(\xi-1))}{\Gamma(\widehat{s_{1,n}})} E_n^{(\xi)}(s_{1,n}) d\xi \end{bmatrix}. \quad (3.1.11)$$

Finalement l'écriture générale des noyaux de Volterra pour tout ordre n avec des conditions de Dirichlet homogènes est

$$H_n^{(x)}(s_{1,n}) = \frac{\sinh(\Gamma x)}{\sinh(\Gamma)} \int_0^1 \frac{\sinh(\Gamma(\xi-1))}{\Gamma} E_n^{(\xi)}(s_{1,n}) d\xi - \int_0^x \frac{\sinh(\Gamma(\xi-x))}{\Gamma} E_n^{(\xi)}(s_{1,n}) d\xi. \quad (3.1.12)$$

où $\Gamma = \Gamma(\widehat{s_{1,n}})$. Cette solution peut être simulée avec des modèles d'intégration numérique, cependant la projection des noyaux sur une base modale permet d'obtenir une relation algébrique.

Le calcul de cette décomposition par la théorie des résidus a permis de déterminer une base modale qui respecte les conditions aux limites imposées aux noyaux.

3.1.3 Projection sur les déformées modales

Les conditions de Dirichlet homogènes aux deux extrémités permettent de décomposer l'expression des noyaux sur une base hilbertienne de \mathcal{L}^2 orthonormée (cf. [2])

$$e_k(x) = \sqrt{2} \sin(k\pi x). \quad (3.1.13)$$

et d'écrire

$$H_n^{(x)}(s_{1,n}) = \sum_k H_{n,k}(s_{1,n}) e_k(x) \quad k \in \mathbb{N}^* \quad (3.1.14)$$

$$E_n^{(x)}(s_{1,n}) = \sum_k E_{n,k}(s_{1,n}) e_k(x) \quad k \in \mathbb{N}^*. \quad (3.1.15)$$

avec

$$\begin{aligned} H_{n,k}(s_{1,n}) &= \langle H_n^{(x)}(s_{1,n}), e_k(x) \rangle \\ &= \int_0^1 H_n^{(x)}(s_{1,n}) e_k(x) dx. \end{aligned}$$

L'équation (3.1.6) devient

$$(\widehat{s_{1,n}}^2 + \alpha \widehat{s_{1,n}}) \sum_k H_{n,k}(s_{1,n}) e_k(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_k H_{n,k}(s_{1,n}) e_k(x) = \sum_k E_{n,k}(s_{1,n}) e_k(x) \quad (3.1.16)$$

Sa projection sur e_k conduit à

$$\begin{aligned} (\widehat{s_{1,n}}^2 + \alpha \widehat{s_{1,n}} + k^2 \pi^2) H_{n,k}(s_{1,n}) &= E_{n,k}(s_{1,n}) \\ H_{n,k}(s_{1,n}) &= \frac{E_{n,k}(s_{1,n})}{P_k(\widehat{s_{1,n}})}. \end{aligned} \quad (3.1.17)$$

car $\frac{\partial^2 e_k(x)}{\partial x^2} = -k^2 \pi^2 e_k(x)$.

Les fonctions $E_{n,k}(s_{1,n})$ sont données par :

– Pour $n=1$, d'après (3.1.7) on a

$$E_{1,k}(s) = phi_k \quad (3.1.18)$$

– Pour $n \geq 2$, $E_{n,k}$ est associé aux noyaux d'ordres inférieurs (cf 3.1.7) et s'écrit

$$\begin{aligned} E_{n,k}(s_{1,n}) &= \int_0^1 \epsilon \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \sum_{l \in \mathbb{N}^+} [l^2 \pi^2 H_{p,l}(s_{1,p}) H_{q,l}(s_{p+1,p+q})] \\ &\quad \sum_{m \in \mathbb{N}^+} -m^2 \pi^2 H_{r,m}(s_{p+q+1,n}) e_m(x) e_k(x) dx \\ &= -\epsilon k^2 \pi^2 \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \sum_{l \in \mathbb{N}^+} [l^2 \pi^2 H_{p,l}(s_{1,p}) H_{q,l}(s_{p+1,p+q})] H_{r,k}(s_{p+q+1,n}) \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

Ainsi d'après (3.1.17), (3.1.18) et (3.1.19), on aboutit aux relations purement algébriques (et non plus différentielles ou intégrales) suivantes, $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$$H_{1,k}(s) = \frac{-\phi_k}{P_k(s)} \quad (3.1.20)$$

$$H_{n,k}(s_{1,n}) = \frac{-\epsilon}{P_k(\widehat{s_{1,n}})} k^2 \pi^4 \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \left[\sum_{l \in \mathbb{N}^*} l^2 H_{p,l}(s_{1,p}) H_{q,l}(s_{p+1,p+q}) \right] H_{r,k}(s_{p+q+1,n})$$

Dans la suite de ce rapport on utilisera cette relation en décomposition modale.

Calcul des premiers noyaux

$$\begin{aligned}
H_{3,k}(s_{1,3}) &= \frac{-\epsilon}{P_k(\widehat{s_{1,3}})} k^2 \pi^4 \left[\sum_{l \in \mathbb{N}^*} l^2 H_{1,l}(s_1) H_{1,l}(s_2) \right] H_{1,k}(s_3) \\
H_{5,k}(s_{1,5}) &= \frac{-\epsilon}{P_k(\widehat{s_{1,5}})} k^2 \pi^4 \left[\sum_{l \in \mathbb{N}^*} l^2 H_{3,l}(s_{1,3}) H_{1,l}(s_4) \right] H_{1,k}(s_5) \\
&+ \frac{-\epsilon}{P_k(\widehat{s_{1,5}})} k^2 \pi^4 \left[\sum_{l \in \mathbb{N}^*} l^2 H_{1,l}(s_1) H_{3,l}(s_{2,4}) \right] H_{1,k}(s_5) \\
&+ \frac{-\epsilon}{P_k(\widehat{s_{1,5}})} k^2 \pi^4 \left[\sum_{l \in \mathbb{N}^*} l^2 H_{1,l}(s_1) H_{1,l}(s_2) \right] H_{3,k}(s_{3,5}).
\end{aligned}$$

3.1.4 Développement de l'équation de récurrence

La formule de récurrence (3.1.20) fait apparaître une infinité de termes structurée par une combinatoire. Cette infinité structurée est due aux modes ($l \in \mathbb{N}^*$) d'une part, et à l'hérédité créée par la non-linéarité ($p, q, r \geq 1, p + q + r = n$) d'autre part.

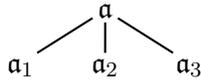
Pour mieux séparer les aspects algébriques (résolution de l'EDP linéaire avec second membre) des aspects combinatoires (récurrence sur les E_n), nous proposons une seconde écriture qui isole chaque terme de (3.1.20). Chaque contribution est indexée par une seule "hérédité modale" et une seule combinaison de noyaux d'ordre (p, q, r) .

Cette écriture qui permet d'exprimer les relations entre les différents modes d'une manière directe nécessite de définir une indexation à l'aide d'arbres comme le précisent les définitions et le théorème ci-dessous. Puis une illustration sera faite pour les premiers noyaux avant de donner la preuve.

Définition 1

Soit un arbre ternaire \mathbf{a} .

On note $k(\mathbf{a})$ la fonction qui renvoie l'élément le plus à droite de \mathbf{a} . On note $n(\mathbf{a})$ la fonction qui renvoie le nombre de feuilles de \mathbf{a} . Enfin, on adopte la notation $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ et \mathbf{a}_3 pour référencer les trois sous arbres de \mathbf{a} comme ci-dessous



Définition 2

L'ensemble des arbres \mathbb{A}_n est défini par :

$$\mathbb{A}_1 = \mathbb{N}^*,$$

et pour n supérieur ou égal à 2,

$$\mathbb{A}_n = \bigcup_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \mathbb{A}_{p,q,r},$$

avec

$$\mathbb{A}_{p,q,r} = \{(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \in \mathbb{A}_p \times \mathbb{A}_q \times \mathbb{A}_r / k(\mathbf{a}_1) = k(\mathbf{a}_2)\}.$$

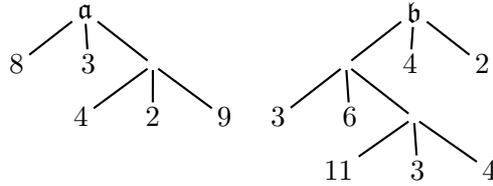
Remarques : \mathbb{A}_1 est un ensemble d'arbres à une feuille (arbres unaires). Les ensembles \mathbb{A}_n avec n pair sont vides. Les ensembles \mathbb{A}_n avec $n \geq 3$ et n impair sont des ensembles d'arbres constitués de trois sous-arbres (arbres ternaires).

Définition 3

Pour $a \in \mathbb{A}_n$ (n impair), on note e_a la fonction de base e_k d'index $k = k(a)$. Les éléments de la base modale sont

$$e_{k(\mathbf{a})}(x) = e_{\mathbf{a}}(x) \quad \forall x \in]0; 1[.$$

Illustration



Exemple 1 : $\mathbf{a}_1 = 8 \in \mathbb{A}_1$

$\mathbf{a}_2 = 3 \in \mathbb{A}_1$

$\mathbf{a}_3 \notin \mathbb{A}_3$ car $4 \neq 2$

$k(\mathbf{a})=9$

$n(\mathbf{a})=5$

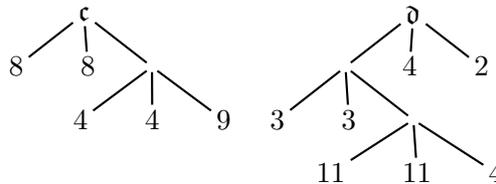
Exemple 2 : $\mathbf{b}_1 \notin \mathbb{A}_5$

$\mathbf{b}_2 = 4 \in \mathbb{A}_1$

$\mathbf{b}_3 = 2 \in \mathbb{A}_1$

$k(\mathbf{b})=2$

$n(\mathbf{b})=7$



Les arbres \mathbf{c} et \mathbf{d} appartiennent respectivement aux ensembles \mathbb{A}_5 et \mathbb{A}_7 , car ils respectent la condition $k(\mathbf{a}_1) = k(\mathbf{a}_2)$.

Théorème 1

Les noyaux $\{H_n^{(x)}\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ se décomposent sous la forme (cf. [7])

$$H_n^{(x)}(s_{1,n}) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n} H_{\mathbf{a}}(s_{1,n}) e_{\mathbf{a}}(x), \quad (3.1.22)$$

où pour $n=1, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{A}_1, H_{\mathbf{a}}(s_1) = \frac{-\phi_{\mathbf{a}}}{P_{\mathbf{a}}(s_1)}$ et pour $n \geq 3, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{A}_n$

$$H_{\mathbf{a}}(s_{1,n}) = \frac{-\epsilon}{P_{\mathbf{a}}(s_{1,n})} (\pi^2 k(\mathbf{a}_1) k(\mathbf{a}_3))^2 H_{\mathbf{a}_1}(s_{1,n(\mathbf{a}_1)}) H_{\mathbf{a}_2}(s_{n(\mathbf{a}_1)+1, n(\mathbf{a}_2)}) H_{\mathbf{a}_3}(s_{n(\mathbf{a}_1)+n(\mathbf{a}_2)+1, n(\mathbf{a}_3)}) \quad (3.1.23)$$

Remarque $n(\mathbf{a})=n$

Illustration : avant de prouver le résultat, illustrons cette construction pour les premiers noyaux.

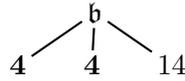
Ordre 1 $\forall k \in \mathbb{N}^*,$ l'arbre $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_1$ est représenté par



L'arbre \mathbf{a} appartient à l'ensemble \mathbb{A}_1 défini par l'ensemble des entiers naturels. L'étiquette $k = k(\mathbf{a})$ référence le numéro du mode tel que, d'après l'équation (3.1.18)

$$H_{\mathbf{a}}(s_1) = \frac{-\phi_{\mathbf{a}}}{P_{\mathbf{a}}(s_1)} = \frac{-\phi_k}{P_k(s_1)}$$

Ordre 3



L'arbre $\mathbf{b} \in \mathbb{A}_3$. A cet ordre les termes de combinatoire sont encore simples. En effet $p + q + r = 3$ et $p, q, r \geq 1$ imposent le triplet (1,1,1) comme seule combinaison possible, ce que l'architecture de l'arbre illustre bien.

Les termes à l'ordre 3 impliquent d'utiliser la récurrence établie dans la démonstration du théorème (cf. équation (3.1.29))

$$H_{\mathbf{a}}(s_1, s_2, s_3) = \frac{-\epsilon \pi^4}{P_{\mathbf{a}}(\widehat{s_{1,3}})} (k(\mathbf{a}_1) k(\mathbf{a}_3))^2 H_{\mathbf{a}_1}(s_{1,n(\mathbf{a}_1)}) H_{\mathbf{a}_2}(s_{n(\mathbf{a}_1)+1, n(\mathbf{a}_2)}) H_{\mathbf{a}_3}(s_{n(\mathbf{a}_1)+n(\mathbf{a}_2)+1, n(\mathbf{a}_3)}), \quad (3.1.24)$$

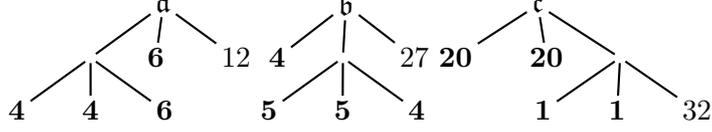
avec

$$k(\mathbf{a}_1) = k(\mathbf{a}_2). \quad (3.1.25)$$

Le noyau s'écrit

$$H_3(s_{1,3}) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_3} H_{\mathbf{a}}(s_{1,3}) e_{\mathbf{a}}(x). \quad (3.1.26)$$

Ordre 5



Les trois arbres \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} appartiennent à \mathbb{A}_5 . Ils représentent les trois possibilités d'architecture possibles pour représenter la combinatoire

- (3,1,1)
- (1,3,1)
- (1,1,3).

L'expression du noyau d'ordre 5, nécessite de prendre en compte les trois possibilités d'architecture de l'arbre

$$H_5(s_{1,5}) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_5} H_{\mathbf{a}}(s_{1,5})e_{\mathbf{a}}(x) = H_{\mathbf{a}}(s_{1,5})e_{\mathbf{a}}(x) + H_{\mathbf{b}}(s_{1,5})e_{\mathbf{b}}(x) + H_{\mathbf{c}}(s_{1,5})e_{\mathbf{c}}(x). \quad (3.1.27)$$

Preuve 1

Démonstration par récurrence : Pour $n=1$: l'identification est immédiate.

Soit $n \geq 3$: on suppose l'hypothèse à l'ordre m vérifiée pour $m < n$.

Alors d'après (3.1.17)

$$\begin{aligned} E_n^{(x)}(s_{1,n}) &= \epsilon \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \int_0^1 \partial_x \left[\sum_{\mathbf{b} \in \mathbb{A}_p} H_{\mathbf{b}}(s_{1,p})e_{\mathbf{b}}(x) \right] \\ &\quad \partial_x \left[\sum_{\mathbf{c} \in \mathbb{A}_q} H_{\mathbf{c}}(s_{p+1,p+q})e_{\mathbf{c}}(x) \right] dx \\ &\quad \sum_{\mathbf{d} \in \mathbb{A}_n} H_{\mathbf{d}}(s_{p+q+1,n})\partial_x^2 e_{\mathbf{d}}(x) \\ &= \epsilon \sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \sum_{\substack{(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \\ \in \mathbb{A}_p \times \mathbb{A}_q \times \mathbb{A}_r}} H_{\mathbf{b}}(s_{1,p})H_{\mathbf{c}}(s_{p+1,p+q})H_{\mathbf{d}}(s_{p+q+1,n})\mathcal{K}_{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}}(x) \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{K}_{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}}(x) = -(\pi^2 k(\mathbf{b})k(\mathbf{d}))^2 \delta_{k(\mathbf{b}), k(\mathbf{c})} e_{\mathbf{d}}(x).$$

Or, $\sum_{\substack{p,q,r \geq 1 \\ p+q+r=n}} \sum_{(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) \in \mathbb{A}_p \times \mathbb{A}_q \times \mathbb{A}_r} \equiv \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n} \text{avec } \mathbf{b} = \mathbf{a}_1, \mathbf{c} = \mathbf{a}_2, \mathbf{d} = \mathbf{a}_3 \text{ et } p = n(\mathbf{a}_1), q = n(\mathbf{a}_2), r = n(\mathbf{a}_3).$

Connaissant la relation entre $H_{n,k}(s_{1,n})$ et $E_{n,k}(s_{1,n})$ le noyau à l'ordre n s'écrit

$$H_n^{(x)}(s_{1,n}) = \sum_{\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n} H_{\mathbf{a}}(s_{1,n})e_{\mathbf{a}}(x) \quad (3.1.28)$$

avec

$$\boxed{H_{\mathbf{a}}(s_{1,n}) = \frac{-\epsilon}{P_{\mathbf{a}}(s_{1,n})} (\pi^2 k(\mathbf{a}_1) k(\mathbf{a}_3))^2 H_{\mathbf{a}_1}(s_{1,p}) H_{\mathbf{a}_2}(s_{p+1,q}) H_{\mathbf{a}_3}(s_{p+q+1,n})}. \quad (3.1.29)}$$

L'hypothèse à l'ordre m est vérifiée.

3.2 Représentation temporelle et simulation numérique pour la synthèse sonore

3.2.1 Identification d'une structure en filtres linéaires et non linéarités instantanées

Principe L'expression du noyau linéaire est assimilable à un filtre (cf. figure 3.4). La simulation temporelle reposera sur l'utilisation de filtres linéaires dont les sorties sont sommées et multipliées échantillon par échantillon afin de créer des non linéarités instantanées d'ordre supérieur (cf. figure 3.5).

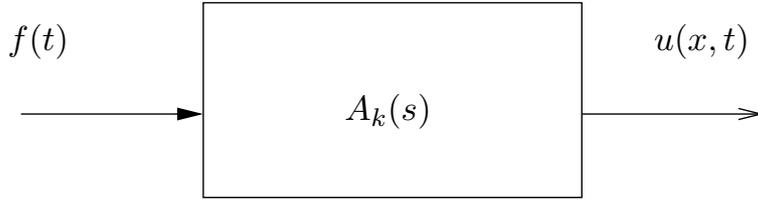


FIG. 3.4 – Filtre linéaire

Identification La relation (3.1.29) exprime les noyaux d'ordres supérieurs en fonction de produits et de sommations sur les arbres \mathbf{a} .

A l'ordre 1 le filtre s'écrit

$$A_k(s) = \frac{-k\phi_k}{P_k(s)} \quad (3.2.1)$$

D'après la formule de récurrence issue de l'écriture sous forme d'arbres, les sorties de ce filtre associées à chaque mode sont sommées et multipliées pour être injectées dans un filtre similaire pour simuler l'ordre 3¹ sur les K premiers modes

$$H_{3,k}(s_{1,3}) = C_k(s) B_k(s) \sum_{k=1}^K A_k^2(s) \quad (3.2.2)$$

¹Les noyaux d'ordre pair sont nuls (cf. annexe 5.3)

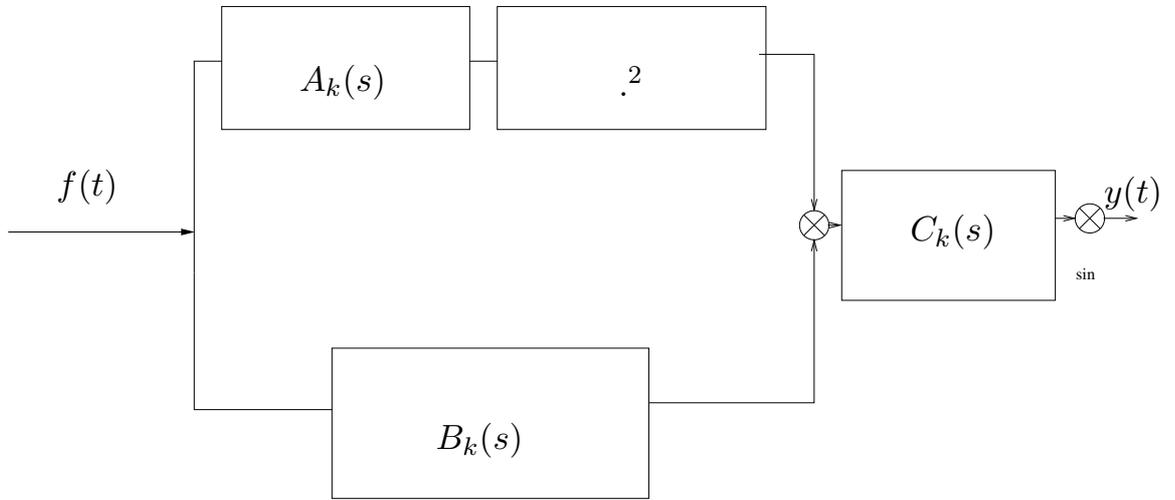


FIG. 3.5 – Filtres linéaires avec produits instantanés

On en déduit d'après (3.1.29)

$$\begin{aligned}
 A_k(s) &= \frac{-k(\mathbf{a}_1)\phi_k}{P_{\mathbf{a}_1}(s)} \\
 B_k(s) &= \frac{-k(\mathbf{a}_3)\phi_k}{P_{\mathbf{a}_3}(s)} \\
 C_k(s) &= \frac{-\epsilon}{P_{\mathbf{a}}(s_{1,n})} \pi^4 k(\mathbf{a}_3)
 \end{aligned}$$

3.2.2 Réalisation temporelle

Détermination de l'équation d'état du filtre Soit

$$A(\widehat{s}_{1,n}) = \frac{-\phi_k}{\widehat{s}_{1,n}^2 + \alpha\widehat{s}_{1,n} + k^2\pi^2} = -\phi_k \frac{1}{\widehat{s}_{1,n}^2 + \alpha\widehat{s}_{1,n} + k^2\pi^2} = \frac{S}{X} \frac{X}{E}, \quad (3.2.3)$$

avec $X(s)$ est la transformée de Laplace de la variable d'état à déterminer. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{S}{X} &= -\phi_k \\
 \frac{X}{E} &= \frac{1}{\widehat{s}_{1,n}^2 + \alpha\widehat{s}_{1,n} + k^2\pi^2}.
 \end{aligned}$$

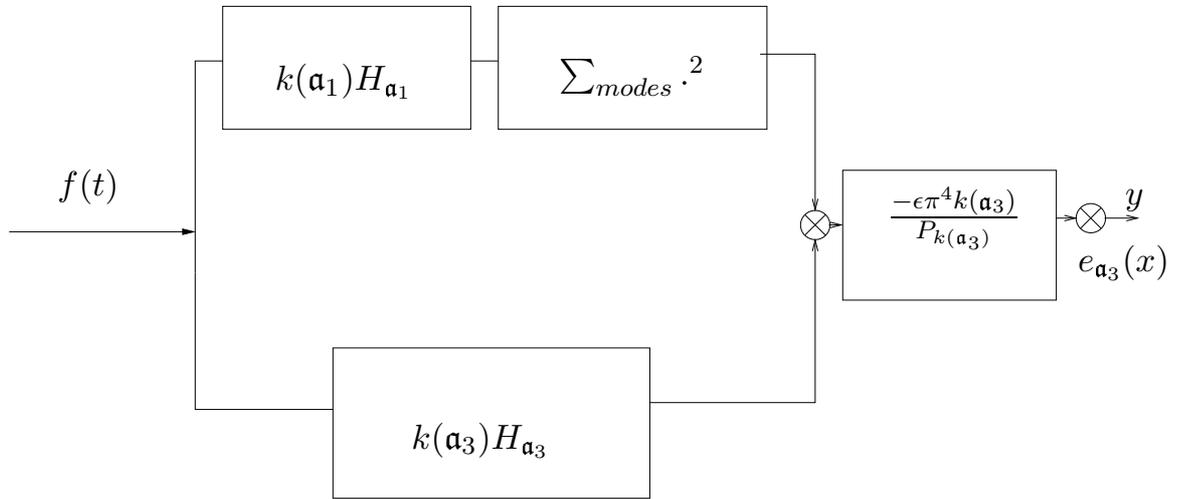


FIG. 3.6 – Noyau à l'ordre n écrit sous forme d'arbres

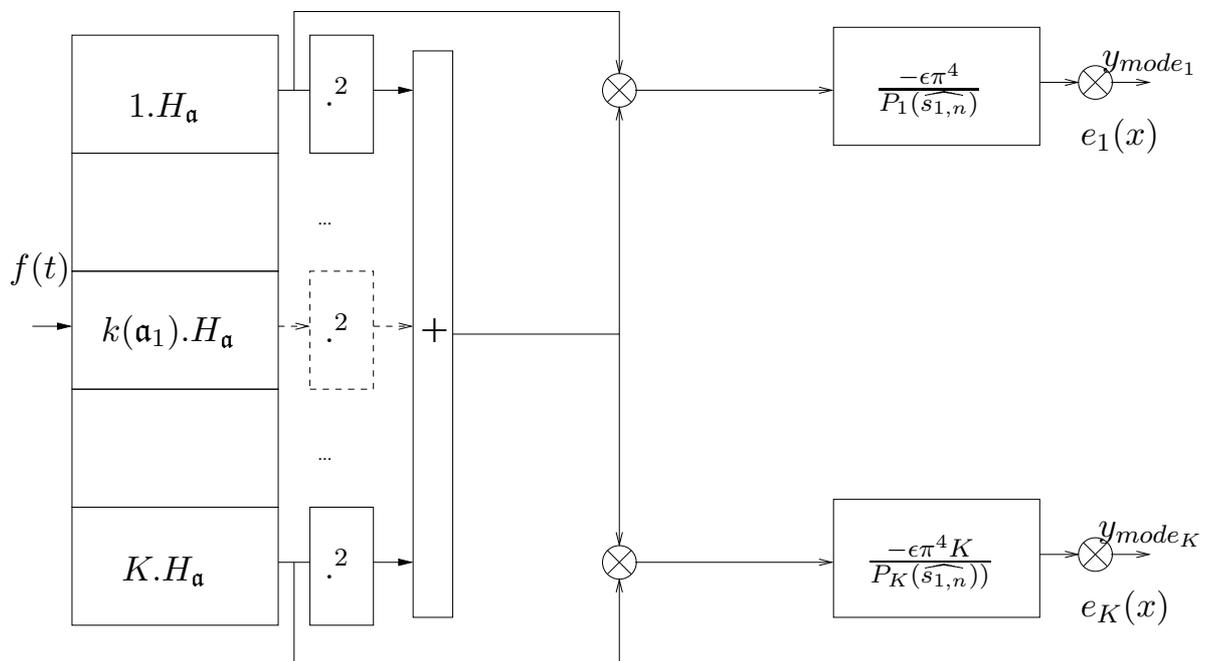


FIG. 3.7 – Noyau écrit sur les K premiers modes

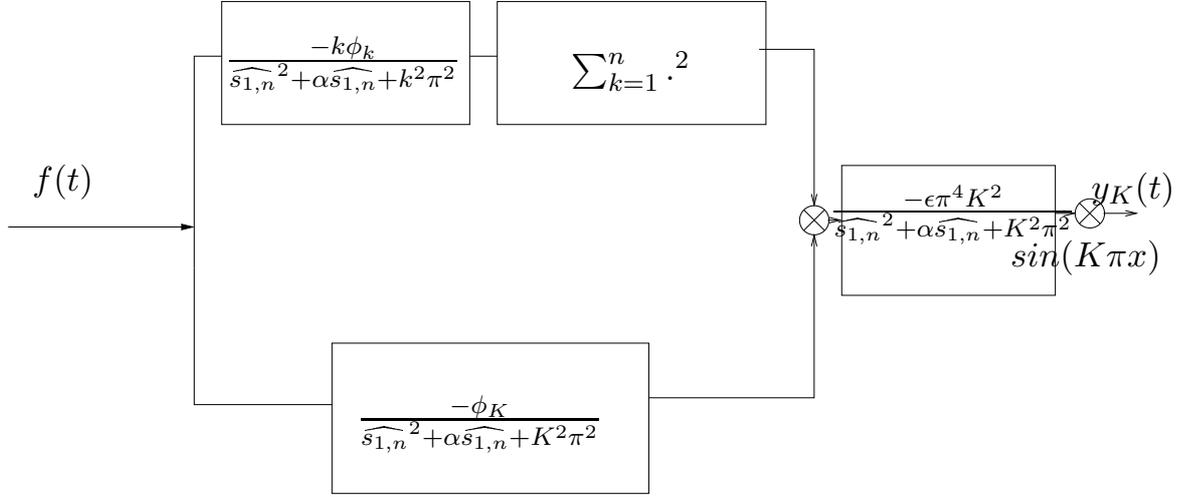


FIG. 3.8 – Filtrés appliqués pour calculer la projection sur le mode K du noyau d'ordre 3

En revenant dans le domaine temporel, la fonction de transfert devient

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} + k^2 \pi^2 y(t) \\ s(t) &= -\phi_k y(t). \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Une réalisation d'état standard conduit à

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix}. \quad (3.2.5)$$

Les équations (3.2.4) se réécrivent

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k^2 \pi^2 & -\alpha \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \\ &= \mathbf{A} \mathbf{X}(t) + \mathbf{B} f(t) \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$s(t) = \begin{bmatrix} -\phi_k & 0 \end{bmatrix} \mathbf{X}(t). \quad (3.2.7)$$

3.2.3 Discrétisation

Plusieurs méthodes existent pour réaliser la discrétisation temporelle (Euler, trapèze) le plus souvent à l'ordre un ou deux.

Soit

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} AY(t) dt,$$

la méthode d'Euler approxime l'intégrale par $Te.A.Y(t_n)$ ce qui donne

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = Te.A.Y(t_n).$$

La méthode du trapèze fournit l'approximation suivante

$$Y(t_{n+1}) - Y(t_n) = \frac{Te}{2} A((t_{n+1}) + Y(t_n)).$$

Cependant, ces schémas présentent l'inconvénient de modifier les fréquences du signal. L'objectif de la synthèse sonore nous mène à privilégier une méthode conservant les fréquences.

C'est le cas de la résolution exacte des oscillations libres avec approximation de l'entrée. L'équation (3.2.6) discrétisée en temps est résolue par le schéma numérique suivant

$$\mathbf{X}_{n+1} = e^{\mathbf{A} \cdot Te} \mathbf{X}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{\mathbf{A}(t_{n+1}-\tau)} \mathbf{B} f(t) d\tau. \quad (3.2.8)$$

En approximant l'entrée à l'ordre 1,

$$e(t) \simeq e(t_n) + \frac{e(t_{n+1}) - e(t_n)}{Te},$$

l'équation(3.2.8) s'écrit

$$\mathbf{X}_{n+1} = e^{\mathbf{A} \cdot Te} \mathbf{X}_n + (f(t_{n+1}) - f(t_n)) \left[\frac{\mathbf{A}^{-2} \mathbf{B} - \mathbf{A}^{-2} e^{\mathbf{A} \cdot Te} \mathbf{B}}{Te} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \right]. \quad (3.2.9)$$

Une fois cette formulation discrète programmée il faut définir les variables d'entrées nécessaires à la simulation. La fonction $e(x,t)$ est définie par

$$e(x,t) = f(t)\phi(x) \quad t \in \mathbb{R}^+, x \in]0; 1[\quad (3.2.10)$$

où $\phi(x)$ est la fenêtre spatiale d'excitation et $f(t)$ la force d'excitation.

3.2.4 Application et simulation temporelle

Ce schéma de résolution a été programmé dans Matlab afin de pouvoir visualiser et entendre les résultats.

Afin de se baser sur des données proches de la réalité les paramètres physiques d'une corde de guitare en acier ont été choisis, à savoir :

- Module de Young : $E = 200 \text{ GPa}$
- Masse volumique : $\rho = 7900 \text{ kg.m}^{-3}$
- Longueur de la corde : $l = 655 \text{ mm}$
- Amortissement : $\delta = 3 \text{ s}^{-1}$ (durée du son : environ 1 s.)
- Célérité : $c = 2.f.l$

Les variables de la simulations sont résumées dans le tableau 3.1. avec x_0 : abscisse de l'excitation.

Configuration	Fonction d'excitation temporelle	Fonction d'excitation spatiale	Nombre de modes
Forte	de 0 à 0.5 N	$\cos(\frac{x-x_0}{0,04}\pi)$ sur $[x_0 - 0,02; x_0 + 0,02]$	3
Piano	de 0 à $10^{-2}N$	$\cos(\frac{x-x_0}{0,04}\pi)$ sur $[x_0 - 0,02; x_0 + 0,02]$	3
Forte	de 0 à 0.1 N	$\cos(\frac{x-x_0}{0,04}\pi)$ sur $[x_0 - 0,02; x_0 + 0,02]$	45
Piano	de 0 à $10^{-2}N$	$\cos(\frac{x-x_0}{0,04}\pi)$ sur $[x_0 - 0,02; x_0 + 0,02]$	45

TAB. 3.1 – Paramètres des simulations de cordes réalisées

3.2.5 Commentaires et observations

Différents sons ont été synthétisés avec ces configurations. Il est important de ne pas comparer les résultats avec les sons d'instruments. En effet, ce modèle suppose que la corde est encastrée à ses extrémités. De plus aucune interaction n'est prise en compte avec un chevalet ou un corps résonnant, le son provient donc directement de l'écoute de la vitesse sans prise en compte de rayonnement.

Remarque La simulation a permis de vérifier que la rotation (exprimée comme la dérivée spatiale du déplacement) était bien négligeable devant 1.

En tenant compte de ces précisions nous pouvons commencer à observer les résultats des différentes configurations.

La première remarque concerne les forces maximales pour obtenir des sons forts. N'ayant pas encore étudié la convergence de la série, les sons sont considérés comme forts lorsque l'amplitude des non-linéarités est du même ordre de grandeur que l'amplitude de la solution linéaire. Cette approximation devra être confirmée, ou non, lors de l'étude de la convergence.

Les sons *piano* sont choisis pour une excitation telle que l'amplitude des ordres 3 et 5 est 10^3 à 10^4 fois plus faible que la partie linéaire.

Les forces imposées pour les calculs sur 3 et 45 modes sont différentes, en effet plus le nombre de modes est importants, plus les non-linéarités seront fortes avec le terme de sommation des carrés de tous les modes (cf. équation (3.1.20)).

Les figures 3.9, 3.10, 3.11 et 3.12 permettent de voir l'influence du nombre de modes sur les paramètres du son. A l'écoute, ces sons sont très différents. En amplitude, en fonction de la nuance de jeu, mais aussi dans le spectre. Les sons *pianos* ont des réponses non linéaires négligeables en gain, ce qui valide l'hypothèse de linéarité pour ce mode de jeu. Pour les sons *forte*, au contraire, les réponses aux ordres 3 et 5 constituent le spectre du son, malgré le même ordre de grandeur en amplitude avec la sortie à l'ordre 1.

Dans ce modèle l'amortissement est constant, ce qui donne un son où toutes les harmoniques aiguës sont présentes au même niveau.

Une amélioration peut être effectuée en prenant en compte l'amortisse-

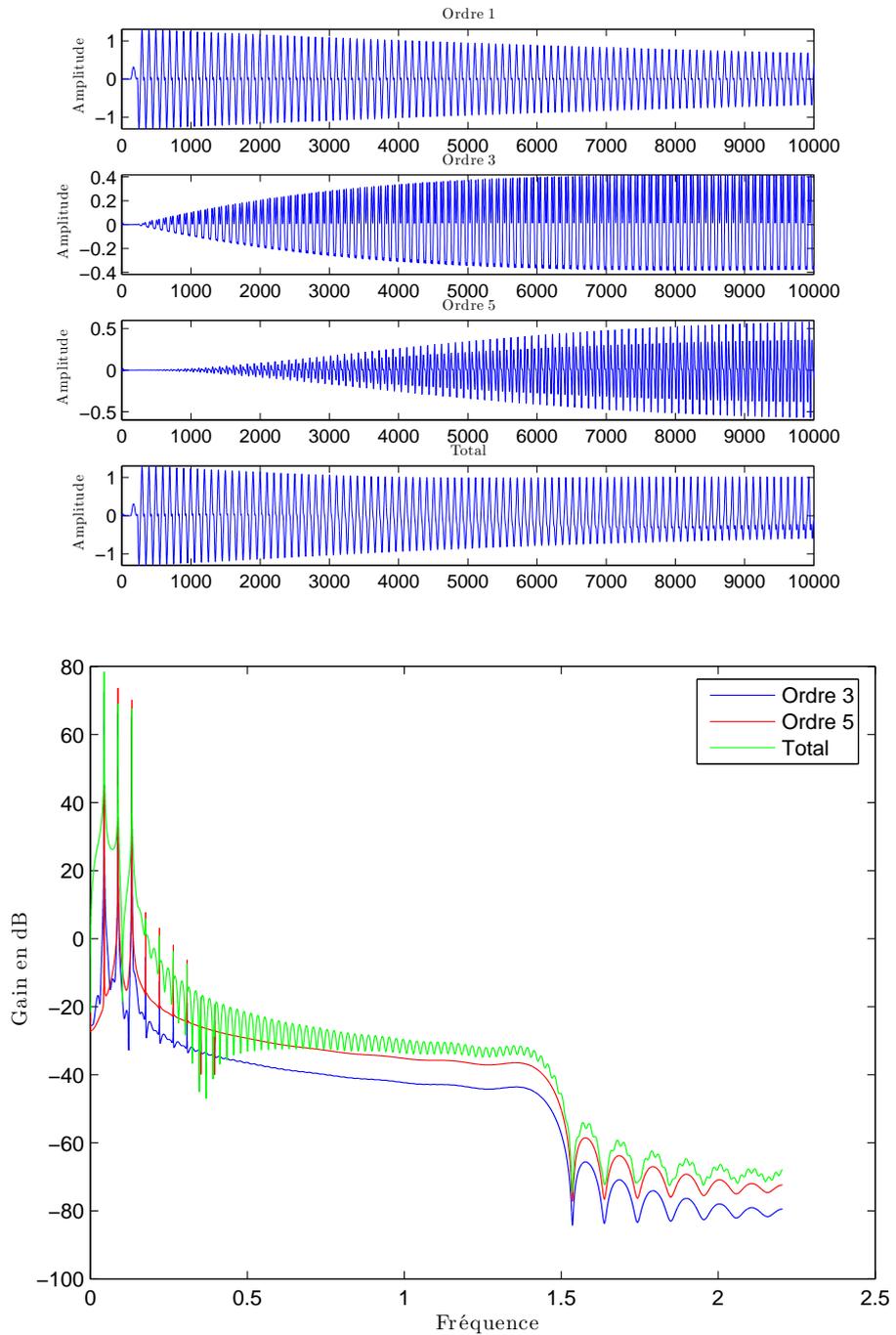


FIG. 3.9 – Son de corde *forte* (3 modes)

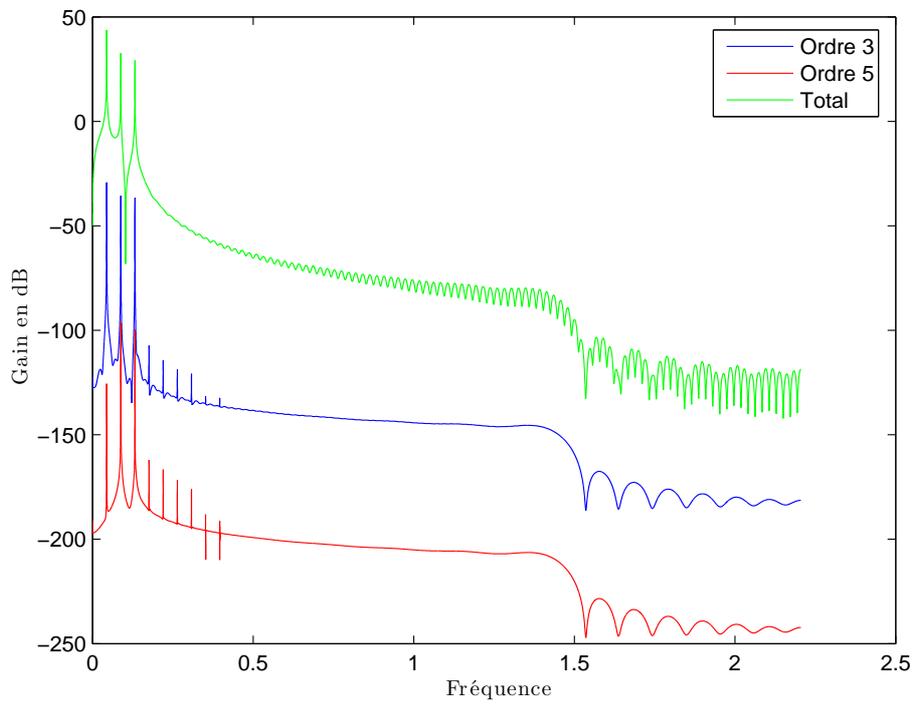
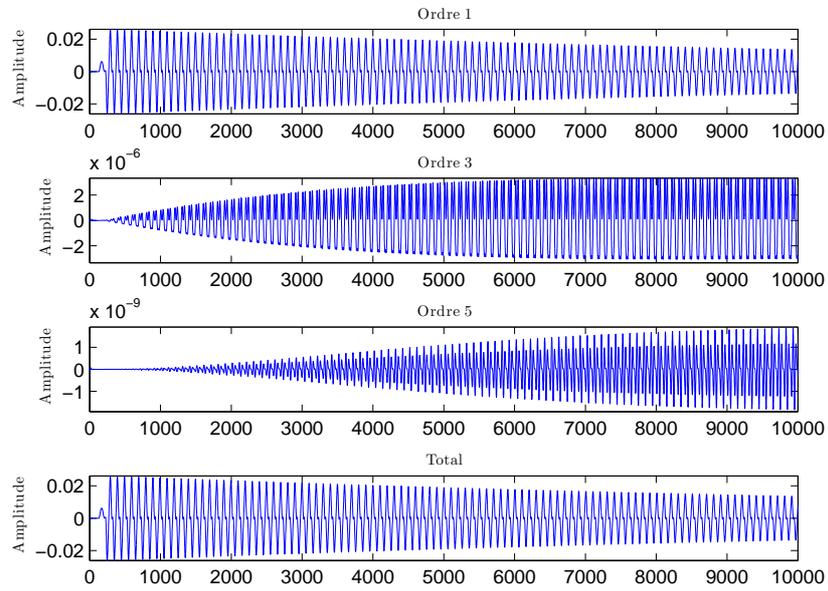


FIG. 3.10 – Son de corde *piano* (3 modes)

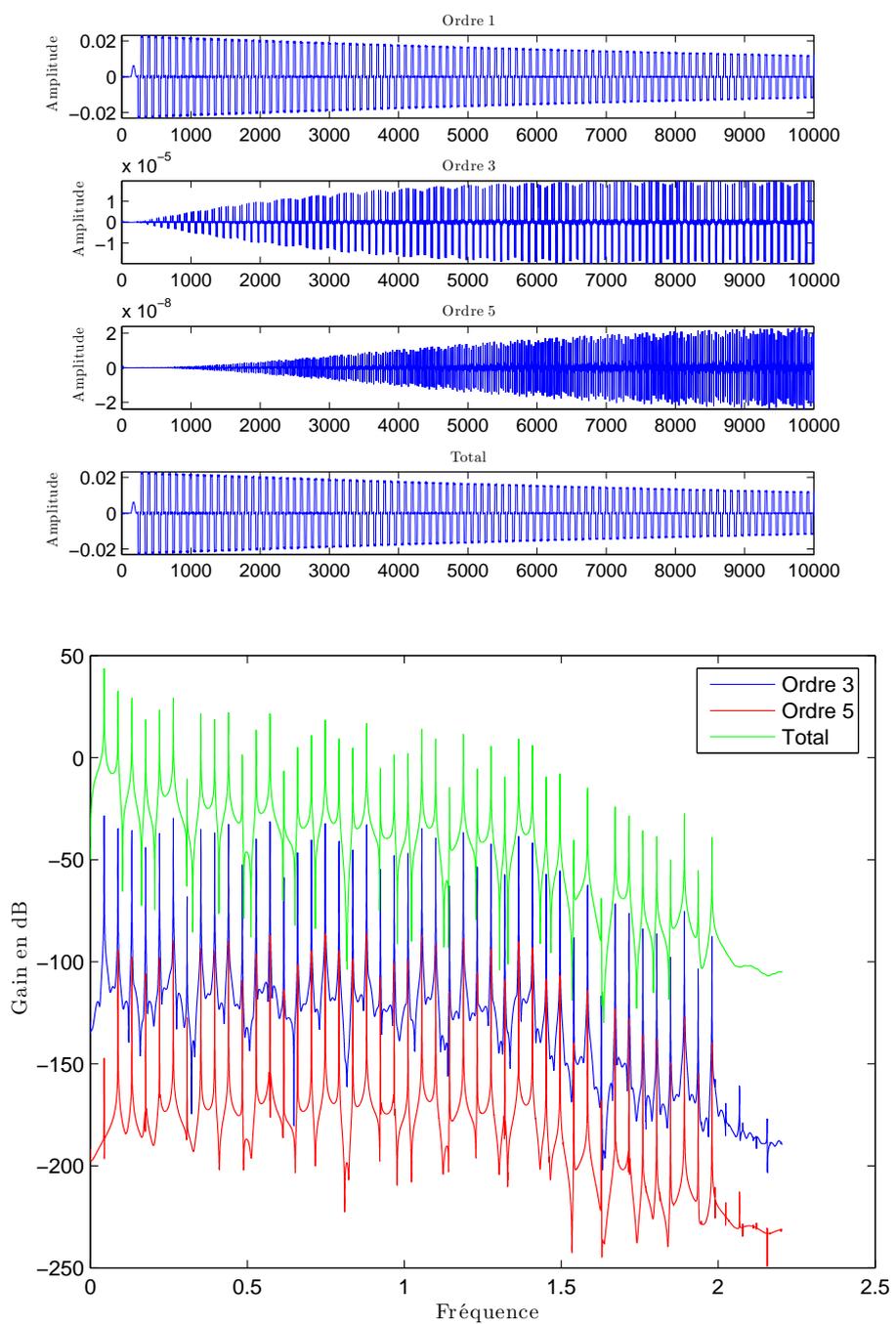


FIG. 3.11 – Son de corde *piano* (45 modes)

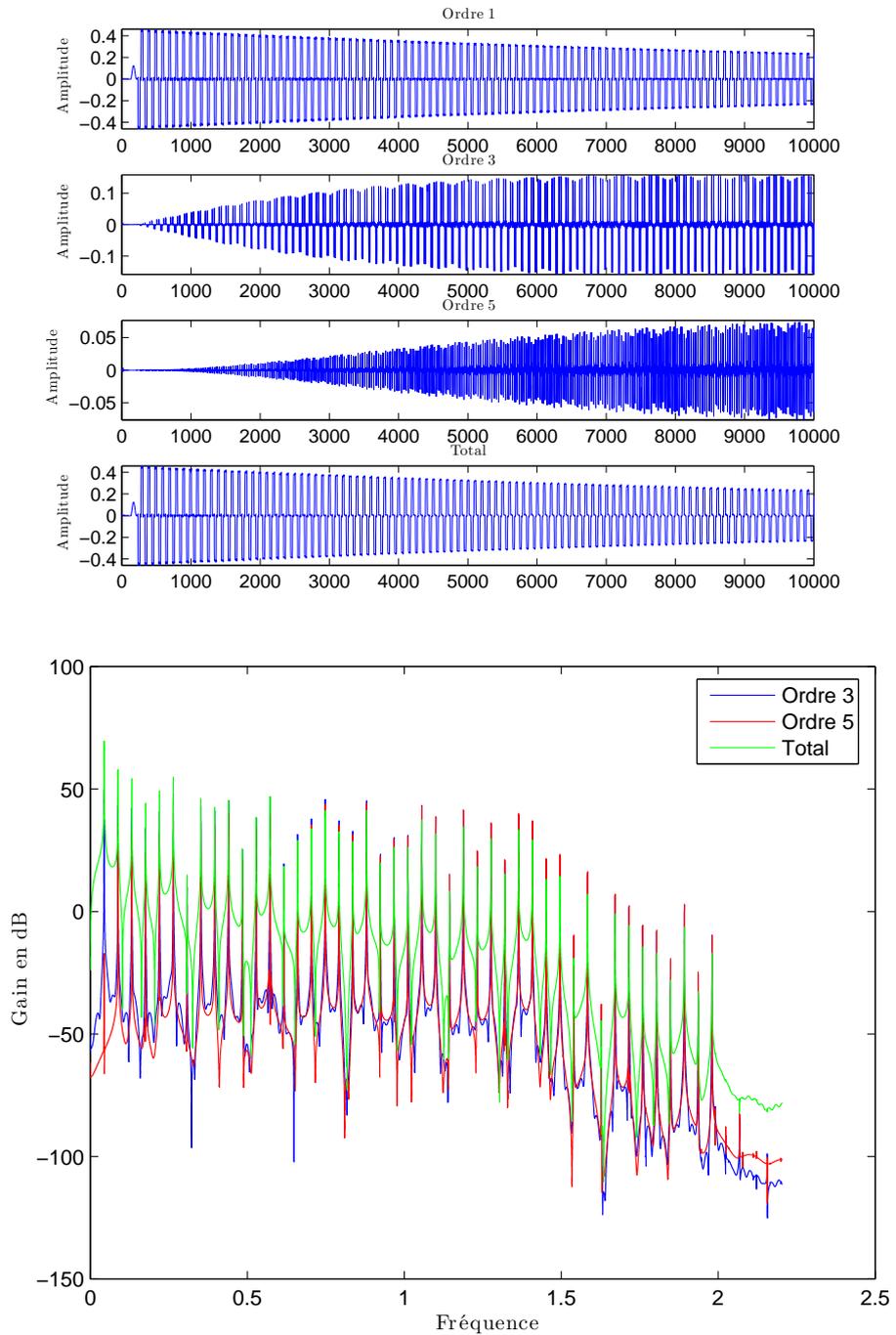


FIG. 3.12 – Son de corde *forte* (45 modes)

ment structurel β qui dépend de la fréquence.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \left[1 + \epsilon \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(x)f(t)$$

Comme le montrent les figures 3.13 et 3.14, l'amortissement structurel permet de reproduire une décroissance du gain avec le rang des harmoniques. De plus, le son est beaucoup plus court, ce qui permet de mieux entendre l'attaque et l'influence du nombre de modes.

Modulation de fréquence La figure 3.15 présente la variation de la fréquence fondamentale (mesurée en octaves) au cours du temps (en échantillons), détectée par le programme Yin ([3]). Cette variation très peu décelable à l'oreille peut être influencée par différents paramètres :

- un amortissement important augmente cette modulation,
- les calculs à des ordres plus élevés, doivent permettre également de d'amplifier ce phénomène (cf. [7] sur un autre modèle).

La figure 3.15 montre la modulation de fréquence pour un son fort constitué de trois modes, avec non-linéarités jusqu'à l'ordre 5 et sans non-linéarité. La courbe de droite montre l'absence de variation de la fréquence fondamentale pour la réponse linéaire. La modulation de fréquence est donc le résultat de la prise en compte des réponses non linéaires par les séries de Volterra.

Comparaisons avec une autre méthode Une formulation variationnelle de l'équation de la corde (2.1.3) peut également être écrite. Cette formulation associée à une discrétisation spatiale permet de résoudre le problème par la méthode des éléments finis, où trois matrices (masse M , raideur K et amortissement C) représentent le système.

Michel Raous ([8]) utilise la θ -méthode pour réaliser la discrétisation temporelle avec l'approximation suivante

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f ds \simeq h(\theta f(t_{i+1}) + (1 - \theta)f(t_i)),$$

avec h : pas de temps de la discrétisation, et θ paramètre qui conditionne la caractéristique implicite ou explicite du schéma, et sa stabilité.

La résolution dans le cadre d'une équation de corde est de la forme

$$\tilde{F}(t_{i+1}) = [M - h(1 - \theta)C - h^2\theta(1 - \theta)K] \frac{\partial u}{\partial t}(t_i) - hKu(t_i) + h[\theta F(t_{i+1}) + (1 - \theta)F(t_i)],$$

avec

$$\tilde{M} \frac{\partial u}{\partial t}(t_{i+1}) = \tilde{F}(t_{i+1}),$$

et

$$\tilde{M} = M + h\theta C + h^2\theta^2 K.$$

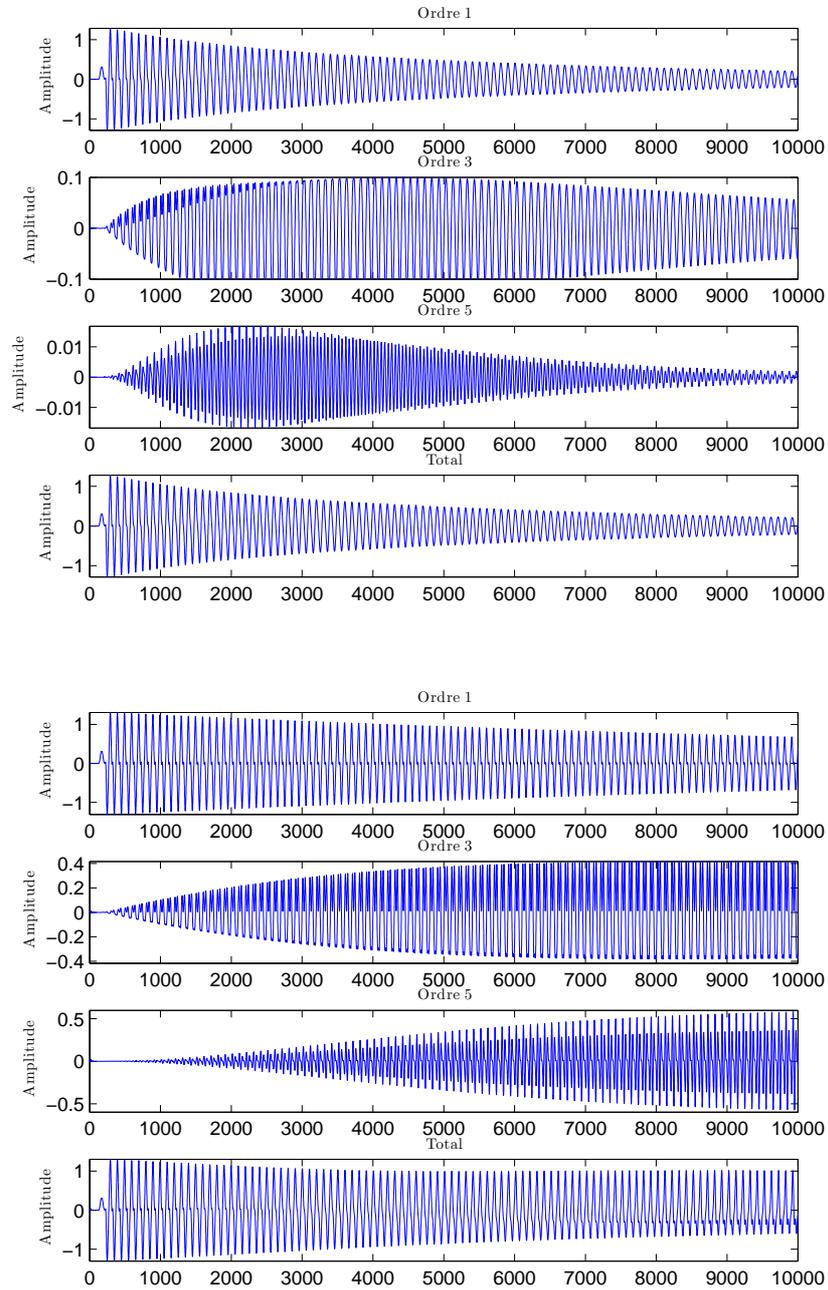


FIG. 3.13 – Son de corde *forte* (3 modes) avec et sans amortissement structural ($\beta = 10^{-3}$)

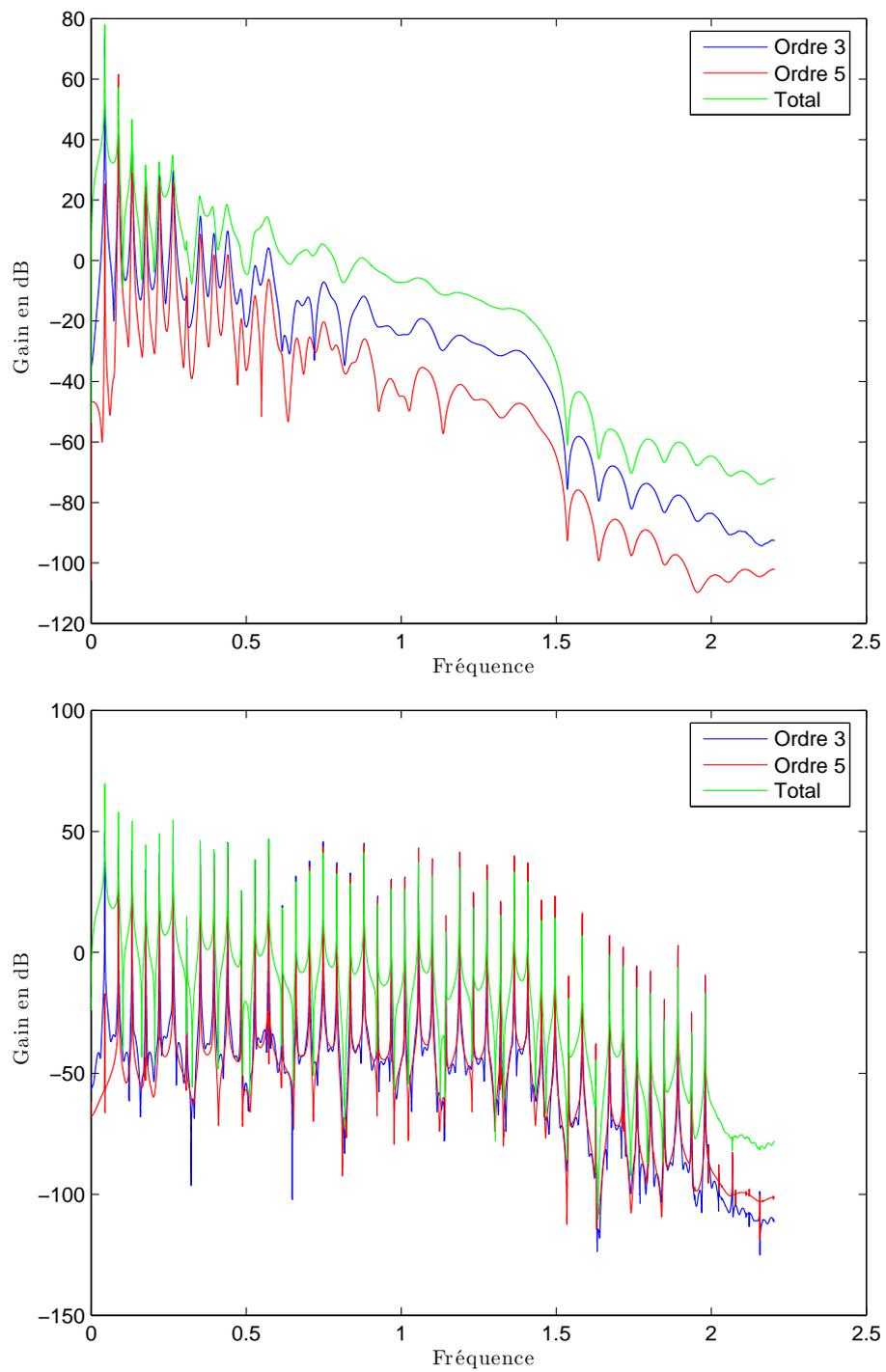


FIG. 3.14 – Spectres des sons (45 modes) avec et sans amortissement structural ($\beta = 10^{-3}$)

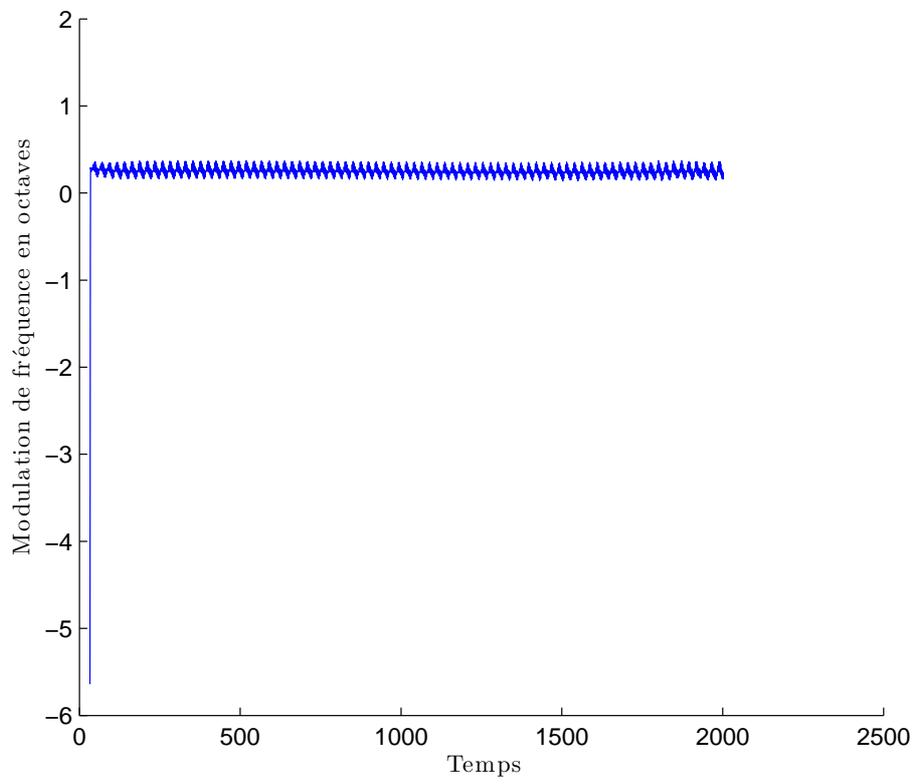
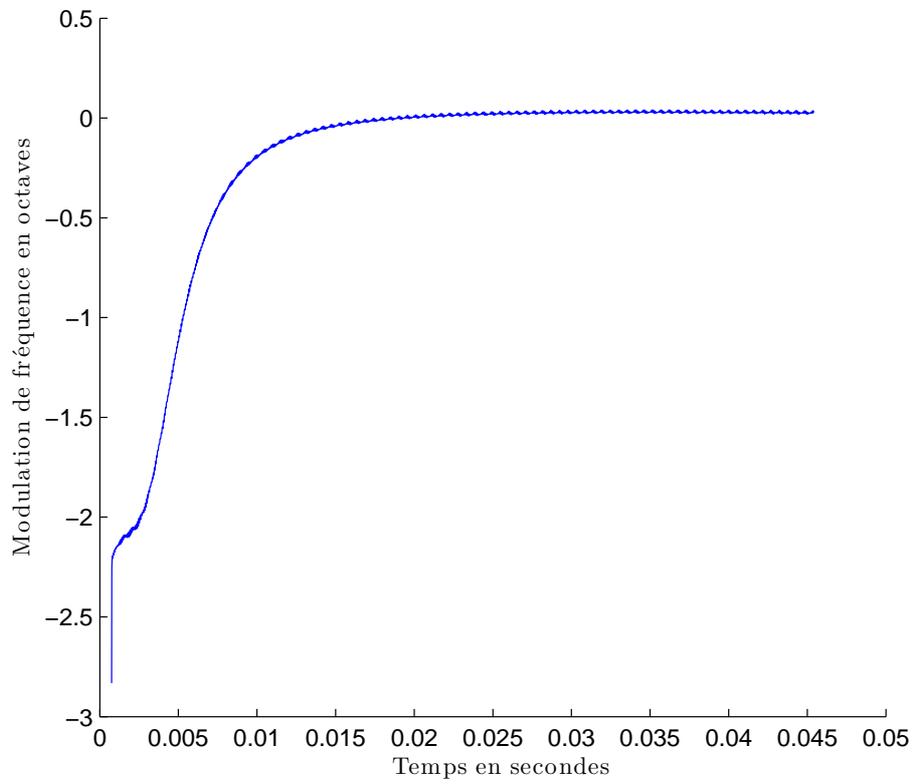


FIG. 3.15 – Evolution temporelle de la fréquence fondamentale d'un son synthétisé avec des non-linéarités jusqu'à l'ordre 5 et sans non-linéarités

Ce schéma est en cours de réalisation pour déterminer le paramètre θ adapté au problème et ainsi obtenir une autres simulation de la dynamique de la corde.

Chapitre 4

Généralisation au problème avec conditions aux limites non homogènes

4.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de généraliser l'expression des conditions aux limites possibles pour la corde. Ces conditions aux limites peuvent prendre plusieurs formes.

Des impédances/admittances connues peuvent être définies comme conditions aux limites grâce aux lois d'interconnexion. La résolution est alors similaire à celle du chapitre précédent. Ceci est également vrai si ces impédances/admittances sont non linéaires, issues d'un autre système de Volterra. Il est alors possible, comme le montrera la section suivante, de déterminer les nouveaux noyaux.

Cependant, ces modèles fonctionnent correctement à une dimension mais se révéleront sans doute être très complexes pour des géométries surfaciques ou volumiques. De plus, l'impédance ou l'admittance sont rarement connues, ou sont données sous d'autres formes. Il est nécessaire de généraliser la représentation des séries de Volterra, avec des noyaux multi-entrées. La première entrée $f(t)$ appliquée sur la corde sera conservée. Les autres entrées $e_0(t)$ et $e_1(t)$ représentent respectivement, l'évolution des conditions aux limites en $x=0$, et en $x=1$. Pour être dans un cas le plus général possible, les conditions de Dirichlet en $x=0$ et de Neumann en $x=1$, seront imposées. La section suivante présentera la prise en compte de conditions aux limites sous forme d'impédance. Puis, la suite du chapitre sera consacrée à la définition et à la détermination des noyaux de Volterra multi-entrées.

4.2 Résolution formelle pour des conditions aux limites représentées par des séries de Volterra

La modification des conditions aux limites doit permettre de calculer les noyaux pour des cas plus complexes que l'appui simple aux extrémités. En supposant que ces extrémités ont une impédance mécanique représentée sous la forme

$$Z = \frac{F}{V} = \frac{N^{(x)}(s)}{D^{(x)}(s)}, \quad (4.2.1)$$

en $x=0$ et $x=1$, on peut écrire

$$D^{(x)}(s)F - N^{(x)}(s)V = 0. \quad (4.2.2)$$

La détermination des noyaux se base alors sur le système de la figure 4.1 où E et A sont respectivement le module de Young et la section de la corde.

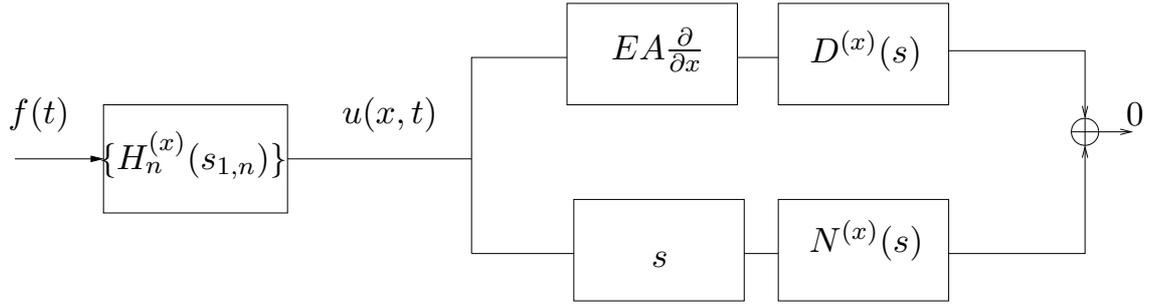


FIG. 4.1 – Conditions d'impédance en $x=0$ et $x=1$

$$EA \frac{\partial H_n^{(x)}(s_{1,n})}{\partial x} D^{(x)}(\widehat{s_{1,n}}) - \widehat{s_{1,n}} H_n^{(x)}(s_{1,n}) N^{(x)}(\widehat{s_{1,n}}) = 0.$$

En $i=0$ ou 1 , les nouveaux noyaux aux ordres un et trois sont solutions de

$$EA \frac{\partial H_1^{(i)}(s_1)}{\partial x} D^{(i)}(s_1) - s_1 H_1^{(i)}(s_1) N^{(i)}(s_1) = 0$$

$$EA \frac{\partial H_3^{(i)}(s_{1,3})}{\partial x} D^{(i)}(\widehat{s_{1,3}}) - (\widehat{s_{1,3}}) H_3^{(i)}(s_{1,3}) N^{(i)}(\widehat{s_{1,3}}) = 0$$

Cette représentation peut être généralisée. En effet, si l'on remplace les termes linéaires de l'impédance par des séries de Volterra $D_n^{(x)}(s_{1,n})$ et $N_n^{(x)}(s_{1,n})$ pour représenter les conditions aux bords, il est possible d'expri-

mer les noyaux en fonction de ces “impédances non linéaires”

$$\sum_{p=1}^n \sum_{\substack{\widehat{m}_{1,p}=n \\ m_{1,p} \geq 1}} EA \frac{\partial}{\partial x} H_{m_1}^{(0)}(s_{1,m_1}) \times \dots \times EA \frac{\partial}{\partial x} H_{m_p}^{(0)}(s_{m_1+\dots+m_{p-1}+1,n})$$

$$D_p^{(0)}(\widehat{s}_{1,m_1}, \dots, \widehat{s}_{m_1+\dots+m_{p-1}+1,n})$$

$$-(\widehat{s}_{1,m_1}) H_{m_1}^{(0)}(s_{1,m_1}) \times \dots \times (s_{m_1+\dots+m_{p-1}+1,n}) H_{m_p}^{(0)}(s_{m_1+\dots+m_{p-1}+1,n})$$

$$N_p^{(0)}(\widehat{s}_{1,m_1}, \dots, \widehat{s}_{m_1+\dots+m_{p-1}+1,n}) = 0$$

En $i=0$ ou 1 , les nouveau noyaux aux ordres un et trois sont solutions de

$$EA \frac{\partial H_1^{(i)}(s_1)}{\partial x} D_1^{(i)}(s_1) - s_1 H_1^{(i)}(s_1) N_1^{(i)}(s_1) = 0$$

$$EA \frac{\partial H_3^{(i)}(s_{1,3})}{\partial x} D_1^{(i)}(\widehat{s}_{1,3}) - (\widehat{s}_{1,3}) H_3^{(i)}(s_{1,3}) N_1^{(i)}(\widehat{s}_{1,3}) = -(EA)^3 \frac{\partial H_1^{(i)}(s_1)}{\partial x} \frac{\partial H_1^{(i)}(s_2)}{\partial x} \frac{\partial H_1^{(i)}(s_3)}{\partial x} D_3^{(i)}(\widehat{s}_{1,3})$$

$$+ s_1 s_2 s_3 H_1^{(i)}(s_1) H_1^{(i)}(s_2) H_1^{(i)}(s_3) N_3^{(i)}(\widehat{s}_{1,3})$$

4.3 Séries de Volterra multi-entrées

La définition des séries de Volterra vue à la section 2.2.1 peut être généralisée à plusieurs entrées, le déplacement de la corde est représenté par (cf. [7])

$$u(t) = \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{m}|}} h_{\underline{m}}(t_{1,m_1}, \tau_{1,m_2}, \theta_{1,m_3}) f(t-t_1) \dots f(t-t_{m_1}) \quad (4.3.1)$$

$$u_0(t-\tau_1) \dots u_0(t-\tau_{m_2}) f_1(t-\theta_1) \dots f_1(t-\theta_{m_3}) dt_{1,m_1} d\tau_{1,m_2} d\theta_{1,m_3},$$

avec

$$|\underline{m}| = m_1 + m_2 + m_3 \quad (4.3.2)$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad , \quad \mathbb{M}_k = \{(m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k / m_1 + \dots + m_k \geq 1\}. \quad (4.3.3)$$

L'ordre n du noyau devient un n -uplet $\underline{m} = (m_1, \dots, m_n)$ dont la somme $|\underline{m}| = m_1 + \dots + m_n$ définit l'ordre de la non-linéarité.

Les lois d'interconnexions sont généralisées et démontrées en annexes 5.3.

4.3.1 Représentation du problème aux limites

La dynamique des conditions aux limites est représentée par deux entrées supplémentaires (cf. figure 4.2)

- $e_0(t)$: entrée en $x=0$ associée au noyau $H_{(0,1,0)}^{(x)}(s)$

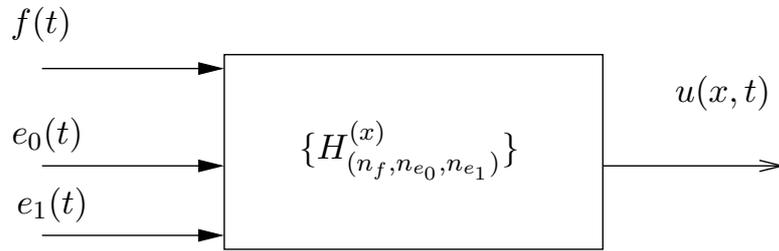


FIG. 4.2 – Noyau de Volterra multi-entrées

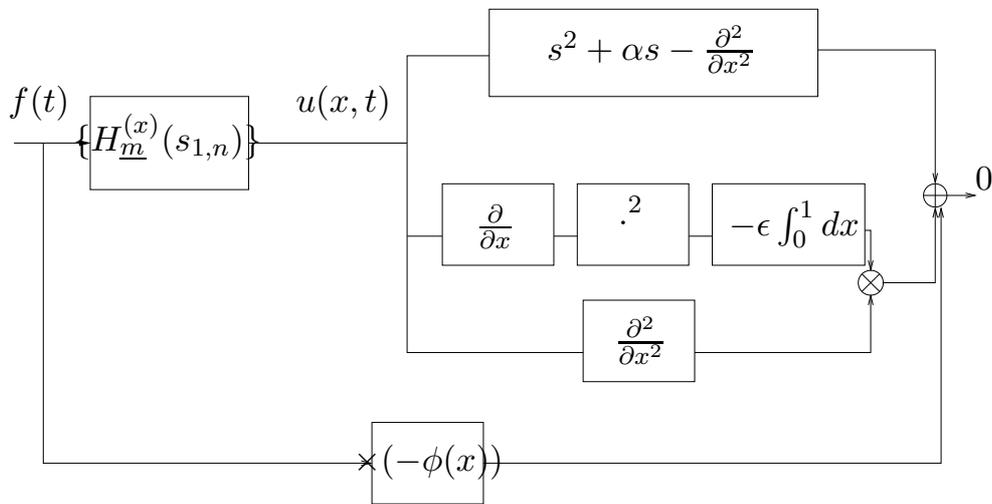


FIG. 4.3 – Décomposition de l'équation aux dérivées partielles

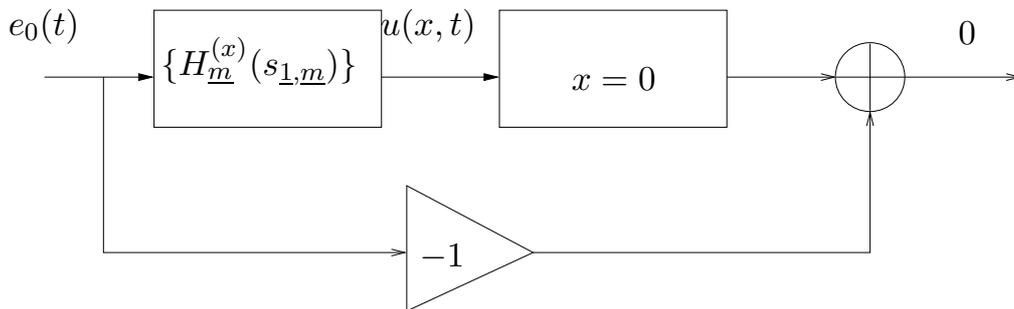


FIG. 4.4 – Système définissant le noyau pour une condition de Dirchlet en $x=0$

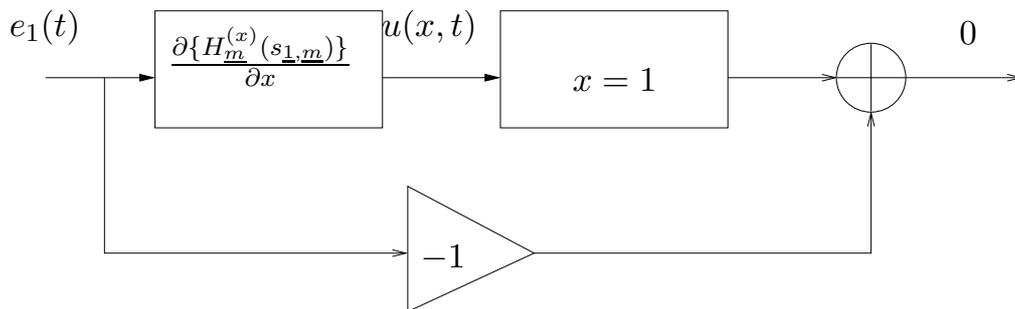


FIG. 4.5 – Système définissant le noyau pour une condition de Neumann en $x=1$

– $e_1(t)$: entrée en $x=1$ associée au noyau $H_{(0,0,1)}^{(x)}(s)$.

Les lois d'interconnexion appliquées aux noyaux multi-entrées permettent d'écrire la nouvelle version de l'équation des noyaux pour $m_1 > 1$ (3.1.6)

$$((\widehat{s_{1,m}})^2 + \alpha \widehat{s_{1,m}} - \partial_x^2) H_{\underline{m}}^{(x)}(s_{1,m}) = \epsilon \sum_{\substack{\underline{p}, \underline{q}, \underline{r} \in \mathbb{M}_3^3 \\ \underline{p} + \underline{q} + \underline{r} = \underline{m}}} \int_0^1 \frac{\partial H_{\underline{p}}^{(x)}(s_{1,p})}{\partial x} \frac{\partial H_{\underline{q}}^{(x)}(s_{p+1,p+q})}{\partial x} dx \frac{\partial^2 H_{\underline{r}}^{(x)}(s_{p+q+1,m})}{\partial x^2}, \quad (4.3.4)$$

Notation spécifique aux n-uplets

$$\widehat{s_{l,m}} = (s_{1,l_1} + \dots + s_{1,m_1} + s_{2,l_2} + \dots + s_{2,m_2} + \dots + s_{n,l_n} + \dots + s_{n,m_n})$$

4.4 Résolution

4.4.1 Conditions de Dirichlet non homogènes aux deux extrémités

Cette configuration permet de résoudre le problème multi-entrée dans la continuité du problème homogène. $e_1(t)$ est donc défini comme un déplacement imposé $u_1(t)$. En effet, dans cette formulation, le noyau de Volterra associé à l'excitation sur la corde est conservé. Les trois noyaux linéaires sont solutions de

$$(s^2 + \alpha s - \frac{\partial^2}{\partial x^2}) H_{(1,0,0)}^{(x)}(s) = \phi(x) \quad (4.4.1)$$

$$H_{(0,1,0)}^{(x=0)}(s) = 1 \quad (4.4.2)$$

$$H_{(0,0,1)}^{(x=1)}(s) = 1. \quad (4.4.3)$$

L'expression générale de la solution (équation (3.1.8)) nécessite de connaître $\mathbf{H}_m^{(0)}$.

$$H_{(1,0,0)}^{(1)}(s) = \int_0^1 \frac{-\sinh(\Gamma(\xi - 1))}{\Gamma} \phi(\xi) d\xi + \frac{\sinh(\Gamma)}{\Gamma} \frac{\partial H_{(1,0,0)}^{(0)}(s)}{\partial x} = 0 \quad (4.4.4)$$

permet d'écrire

$$\frac{\partial H_{(1,0,0)}^{(0)}(s)}{\partial x} = \frac{\Gamma}{\sinh(\Gamma)} \int_0^1 \frac{\sinh(\Gamma(\xi - 1))}{\Gamma} \phi(\xi) d\xi. \quad (4.4.5)$$

Le noyau $H_{(1,0,0)}^{(x)}(s)$ est donc le noyau $H_1^{(x)}(s)$ calculé dans le chapitre précédent

$$H_{(1,0,0)}^{(x)}(s) = \frac{\sinh(\Gamma x)}{\sinh(\Gamma)} \int_0^1 \frac{\sinh(\Gamma(\xi - 1))}{\Gamma} \phi(\xi) d\xi - \int_0^x \frac{\sinh(\Gamma(\xi - x))}{\Gamma} \phi(\xi) d\xi. \quad (4.4.6)$$

Pour le noyau $H_{(0,1,0)}^{(x=0)}$, il n'y a pas de fonction d'excitation $E_{(0,1,0)}^{(x)}(s)$, l'intégrale de l'équation (3.1.8) est donc nulle :

$$\mathbf{H}_{(0,1,0)}^{(x)}(s) = e^{\mathbf{A}(s)x} \mathbf{H}_{(0,1,0)}^{(0)}(s). \quad (4.4.7)$$

En $x=1$, ce noyau vaut zéro (pour appliquer le théorème de superposition) ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} H_{(0,1,0)}^{(1)}(s) &= \cosh(\Gamma) H_{(0,1,0)}^{(0)}(s) + \frac{\sinh(\Gamma)}{\Gamma} \frac{\partial H_{(0,1,0)}^{(0)}(s)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial H_{(0,1,0)}^{(0)}(s)}{\partial x} &= -\frac{\cosh(\Gamma)\Gamma}{\sinh(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Le noyau de la condition à la limite $x=0$ s'écrit

$$H_{(0,1,0)}^{(x)}(s) = \cosh(\Gamma x) - \frac{\sinh(\Gamma x)\cosh(\Gamma)}{\sinh(\Gamma)} \quad (4.4.8)$$

$H_{(0,0,1)}^{(x)}(s)$ est le noyau associé à la condition en $x=1$, tout comme le noyau $H_{(0,1,0)}^{(x)}$, il est de la forme :

$$\mathbf{H}_{(0,0,1)}^{(x)}(s) = e^{\mathbf{A}(s)x} \mathbf{H}_{(0,0,1)}^{(0)}(s) \quad (4.4.9)$$

avec

$$\begin{aligned} H_{(0,0,1)}^{(1)}(s) &= \cosh(\Gamma) H_{(0,0,1)}^{(0)}(s) + \frac{\sinh(\Gamma)}{\Gamma} \frac{\partial H_{(0,0,1)}^{(0)}(s)}{\partial x} = 1 \\ \frac{\partial H_{(0,0,1)}^{(0)}(s)}{\partial x} &= \frac{\Gamma}{\sinh(\Gamma)}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\boxed{H_{(0,0,1)}^{(x)}(s) = \frac{\sinh(\Gamma x)}{\sinh(\Gamma)}}. \quad (4.4.10)$$

4.4.2 Condition de Dirichlet en $x=0$ et de Neumann en $x=1$

En suivant le même raisonnement, les noyaux avec une condition de Neumann en $x=1$ peuvent être calculés par la résolution de

$$\begin{aligned} (s^2 + \alpha s - \frac{\partial^2}{\partial x^2})H_{(1,0,0)}^{(x)}(s) &= \phi(x), \\ H_{(0,1,0)}^{(x=0)}(s) &= 1, \\ \frac{\partial H_{(0,0,1)}^{(x=1)}(s)}{\partial x} &= 1, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{(1,0,0)}^{(1)}(s)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H_{(0,1,0)}^{(1)}(s)}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial H_{(0,0,1)}^{(1)}(s)}{\partial x} &= 1. \end{aligned}$$

Les noyaux s'écrivent alors

$$H_{(1,0,0)}^{(x)}(s) = \int_0^x \frac{-\sinh(\Gamma(\xi - x))}{\Gamma} \phi(\xi) d\xi + \frac{\sinh(\Gamma x)}{\Gamma \cosh(\Gamma)} \int_0^1 \cosh(\Gamma(\xi - 1)) \phi(\xi) d\xi$$

$$H_{(0,1,0)}^{(x)}(s) = \cosh(\Gamma x) - \frac{\sinh(\Gamma x) \sinh(\Gamma)}{\cosh(\Gamma)} \quad (4.4.12)$$

$$H_{(0,0,1)}^{(x)}(s) = \frac{\sinh(\Gamma x)}{\Gamma \cosh(\Gamma)} \quad (4.4.13)$$

4.4.3 Projection modale

La projection des noyaux multi-entrées sur les déformées modales est plus complexe. En effet, il n'y a pas de base orthonormée commune aux trois noyaux qui respecterait à la fois les conditions homogènes pour le noyau $H_{(1,0,0)}^{(x)}(s)$ et les mêmes conditions non homogènes pour les deux autres.

Le fait de prendre trois bases différentes n'est pas souhaitable car l'orthogonalité des modes ne sera plus conservée entre tous les noyaux, ce qui complexifie non seulement les relations de récurrence mais aussi la réalisation temporelle.

Nous choisissons d'effectuer la projection sur la base pour une condition de Dirichlet en $x = 0$ et de Neumann en $x = 1$

$$e_k(x) = \sqrt{2} \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x\right). \quad (4.4.14)$$

L'intérêt est d'abord pédagogique puisqu'il combine deux possibilités.

Les inconvénients de la décomposition sur une base modale sont d'avoir une convergence faible (\mathcal{L}^2) qui n'assure pas une *convergence simple*. Plus précisément, cette décomposition crée deux contradictions *ponctuellement* : en $x = 0$, des déformées modales sont nulles de sorte que $u(x = 0) = 0$ par construction, alors qu'un déplacement $u_0(t) \neq 0$ est imposé ; de même, la dérivée spatiale des déformées en $x = 1$ est nulle de sorte que $f(x = 1) = 0$ malgré la force $f_1(t) \neq 0$ imposée à cette extrémité.

Bref, vive l'effet " L^2 ", connu aussi plus généralement sous l'appellation "effet de Gibbs" ! Pour une description plus scientifique, disons que la convergence sur \mathcal{L}^2 étant *faible*, la troncature de la base empêche la bonne représentation des conditions aux limites dans la simulation.

4.5 Représentation temporelle et simulation numérique

Une fois les trois noyaux linéaires et leurs projections modales calculés, la formule de récurrence peut être utilisée

$$H_{\underline{m},k}(s_{\underline{1},\underline{m}}) = \frac{-\epsilon\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^4}{\widehat{s_{\underline{1},\underline{m}}}^2 + \alpha \widehat{s_{\underline{1},\underline{m}}} + \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2} \sum_{\substack{p,q,r \in \mathbb{M}_3^3 \\ \underline{p} + \underline{q} + \underline{r} = \underline{m}}} \sum_{l \in \mathbb{N}^*} \left(l + \frac{1}{2}\right)^2 H_{\underline{p},l}(s_{\underline{1},\underline{p}}) H_{\underline{q},l}(s_{\underline{p}+\underline{1},\underline{p}+\underline{q}}). \quad (4.5.1)$$

La réalisation temporelle (cf. figure 4.6) repose sur la nouvelle base modale

$$e_k(x) = \sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x\right). \quad (4.5.2)$$

Les projections des trois noyaux linéaires sur cette base sont

$$\begin{aligned} H_{(1,0,0),k}(s) &= \frac{-\phi_k}{P_k(s)}, \\ H_{(0,1,0),k}(s) &= \frac{\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi}{P_k(s)}, \\ H_{(0,0,1),k}(s) &= \frac{(-1)^k}{P_k(s)}, \end{aligned}$$

avec

$$P_k(s) = s^2 + \alpha s + \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2.$$

La figure 4.6 présente deux termes de la construction de noyaux d'ordre 3

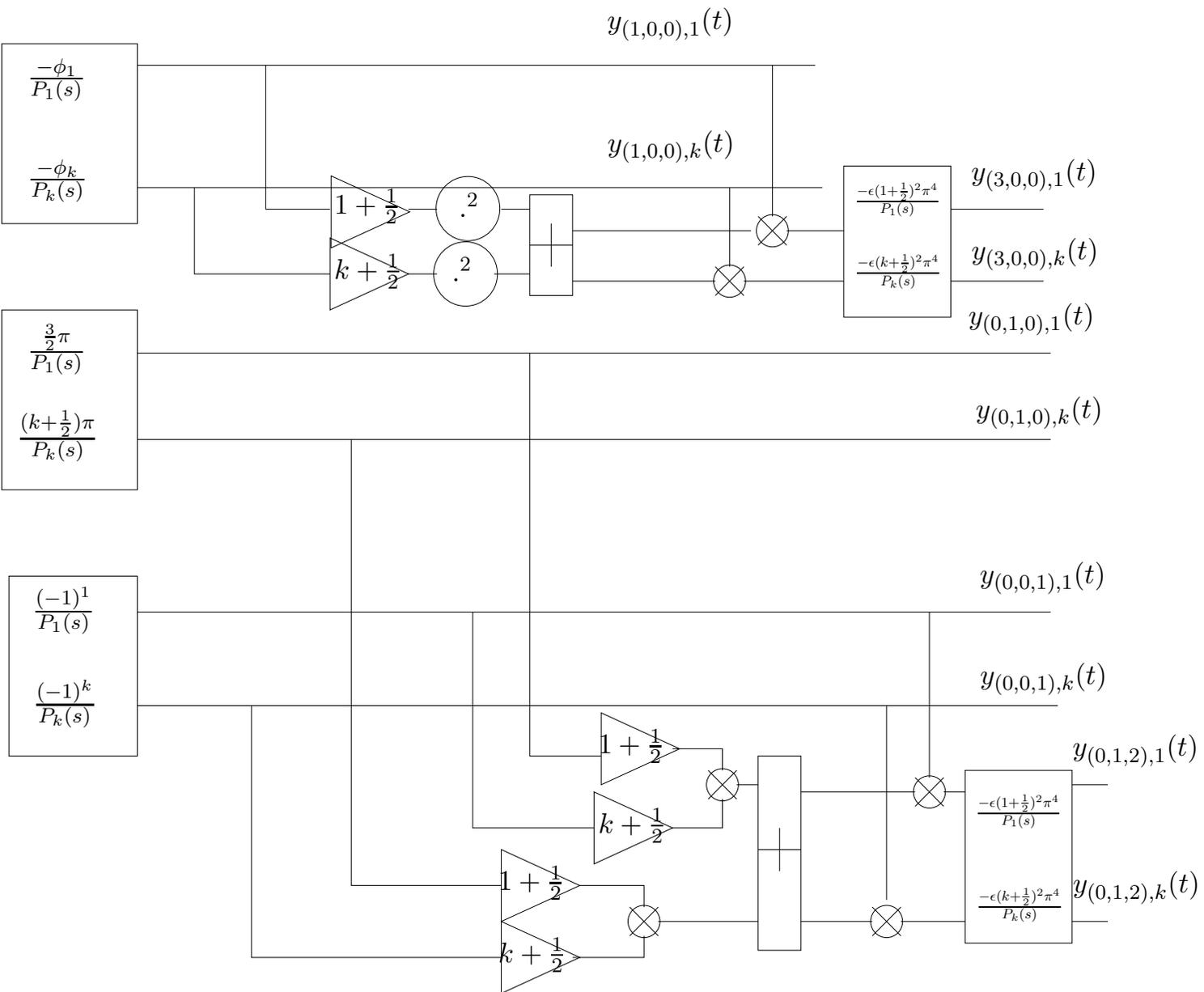


FIG. 4.6 – Construction mode par mode de deux noyaux multi-entrées d'ordre 3

parmi les 6 termes qui existent.

Faute de temps, la simulation n'a pu être réalisée pour le rapport mais est planifiée pour la suite du stage.

Chapitre 5

Conclusion

5.1 Bilan

Cette étude permet de poser des bases pour l'application des séries de Volterra à la résolution de problème de dynamique des solides.

Pour l'équation de la corde de Kirchoff, le calcul analytique des 2 premiers noyaux a été réalisé. Leur projection sur les déformées modales a permis de déterminer une relation de récurrence entre les ordres de non-linéarité. Une première simulation a été réalisée sur ces noyaux mono entrée grâce à une réécriture sous forme de filtres et de produits instantanés.

Ce travail a permis la généralisation aux noyaux de Volterra multi-entrée et donc à une extension des conditions aux limites possibles. Les noyaux linéaires ont été calculés analytiquement pour deux types de conditions aux limites (Dirichlet/Dirichlet et Dirichlet/Neumann).

5.2 Discussion des résultats

L'ordre de cette non-linéarité a beaucoup d'importance puisqu'elle est la cause de plusieurs phénomènes observés.

- Pour des excitations assez fortes, une modulation de fréquence (inaudible mais détectable par traitement du signal) apparaît. Cette modulation est d'un grand intérêt pour les applications à la synthèse sonore et aura toute sa place dans la section suivante "Perspectives".
- Les réponses non-linéaires arrivent avec un retard par rapport à l'excitation et à la réponse linéaire. Ce décalage non présent dans les systèmes avec non-linéarités d'ordre 2 (propagation des ondes pour les sons cuivrés) doit être étudié pour mieux en comprendre les causes.

Malgré l'absence de l'étude de la convergence, quelques repères montrent que les forces d'excitations sont limitées en amplitude sous peine de voir les réponses d'ordre supérieur à 1 "exploser" rendant la réponse linéaire négligeable et donc l'attaque du son inaudible. Ceci empêche d'entendre une

modulation de fréquence qui pourrait être obtenue pour des forces beaucoup plus importantes.

5.3 Perspectives

Ces résultats et observations constituent en fait, une ouverture vers différents sujets qui méritent d'être approfondis :

- La modulation de fréquence est un résultat remarquable de la prise en compte de la variation de tension de la corde. Ce phénomène peut avoir beaucoup d'intérêt pour la synthèse sonore. Cependant, seuls des calculs sur des ordres de non linéarité élevés ou avec des amortissements forts permettent de le mettre en valeur pour l'instant.
- La synthèse sonore avec modification des paramètres en "temps-réel" est un objectif clairement affiché des séries de Volterra. Pour ce faire, la réalisation temporelle doit être réécrite et programmée dans un langage de plus bas niveau que Matlab afin d'optimiser les temps de calculs.
- Enfin, c'est ce qui constituera la suite de ce stage, la généralisation des systèmes mécaniques est envisagée. Dans le contexte du travail de Joël Bensoam sur les noyaux de Poisson, les séries de Volterra seront appliquées à des géométries tridimensionnelles quelconques et à la connexion entre les systèmes grâce aux noyaux multi-entrées.

Annexes

Diagonalisation de la matrice A

Soit la matrice A définie à la section 3.1.2

$$\mathbf{A}(s) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Gamma^2(s) & 0 \end{bmatrix}$$

avec

$$\Gamma^2(s) = s^2 + \alpha s$$

Si A est diagonalisable par le changement de base de la matrice des vecteurs propres P, alors

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= P e^{\mathbf{D}} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Gamma & -\Gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\Gamma} & 0 \\ 0 & e^{-\Gamma} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \Gamma^{-1} \\ 1 & -\Gamma^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \Gamma & -\Gamma \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{\Gamma} & \frac{e^{\Gamma}}{\Gamma} \\ e^{-\Gamma} & \frac{-e^{-\Gamma}}{\Gamma} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cosh(\Gamma) & \frac{\sinh(\Gamma)}{\Gamma} \\ \Gamma \sinh(\Gamma) & \cosh(\Gamma) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nullité des noyaux d'ordre pair

L'équation (3.1.20) permet de voir que $H_2^{(x)}(\underline{s})$ est nul. Tous les noyaux d'ordre pair sont alors nuls.

Démonstration par récurrence L'hypothèse de récurrence est la suivante à l'ordre n

$$\forall p \quad 1 \leq p \leq n \quad H_{2p}(\underline{s}) = 0 \quad (.0.1)$$

A l'ordre 1, la vérification de l'hypothèse est évidente :

$$H_2(s_1, s_2) = 0 \quad (.0.2)$$

Si l'hypothèse est vérifiée à l'ordre n , alors

$$H_{2(n+1)}(\underline{s}) = -\epsilon \frac{k^2 \pi^4}{P_k(s)} \sum_{\substack{p,q,r \\ p+q+r=2(n+1)}} \left[\sum_l l^2 H_{p,l}(\underline{s}_p) H_{q,l}(\underline{s}_q) \right] H_{r,k}(\underline{s}_r) \quad (.0.3)$$

La somme $p + q + r$ est paire si et seulement si un seul terme ou les trois termes sont pairs. En effet

$$p + q + r = 2(n + 1) \quad p, q, r, n \in \mathbb{N}^*$$

implique que p, q ou r est pair. Chaque terme de l'équation (.0.3) contient un ou trois facteurs nuls. Par conséquent

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_{2(n+1)}(\underline{s}) = 0$$

L'hypothèse est vérifiée à l'ordre $n+1$.

Lois d'interconnexion pour les noyaux multi-entrées

Somme de sorties Soient $e_0(t)$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$ les entrées du système représenté figure 1 telle que les séries de Volterra $\{f_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}})\}$ et $\{g_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}})\}$ convergent. La sortie $y(t)$ est définie par [7]

$$\begin{aligned} y(t) &= y_f(t) + y_g(t) \\ &= \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{m}|}} f_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}}) e_0(t - t_1) \dots e_0(t - t_{m_1}) e_1(t - t_1) \dots e_1(t - t_{m_2}) \\ &\quad e_2(t - t_1) \dots e_2(t - t_{m_3}) dt_{\underline{1},\underline{m}} \\ &+ \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{m}|}} g_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}}) e_0(t - t_1) \dots e_0(t - t_{m_1}) e_1(t - t_1) \dots e_1(t - t_{m_2}) \\ &\quad e_2(t - t_1) \dots e_2(t - t_{m_3}) dt_{\underline{1},\underline{m}} \\ &= \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{m}|}} (f_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}}) + g_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}})) \\ &\quad e_0(t - t_1) \dots e_0(t - t_{m_1}) e_1(t - t_1) \dots e_1(t - t_{m_2}) e_2(t - t_1) \dots e_2(t - t_{m_3}) dt_{\underline{1},\underline{m}} \end{aligned}$$

si les séries sont absolument convergentes.

Le noyau $h_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}})$ est donc égal à la somme des noyaux $f_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}}) + g_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}})$.

Produit de sorties Soient $e_0(t)$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$ les entrées du système représenté figure 2 telle que les séries de Volterra $\{f_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}})\}$ et $\{g_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}})\}$

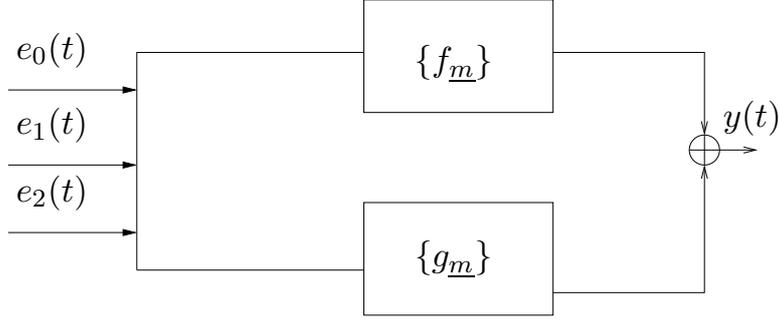


FIG. 1 – Somme des sorties de deux noyaux

convergent. La sortie $y(t)$ est définie par

$$\begin{aligned}
y(t) &= y_f(t) \cdot y_g(t) \\
&= \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{m}|}} f_{\underline{m}}(t_{\underline{1}, \underline{m}}) e_0(t - t_1) \dots e_0(t - t_{m_1}) e_1(t - t_1) \dots e_1(t - t_{m_2}) \\
&\quad e_2(t - t_1) \dots e_2(t - t_{m_3}) dt_{\underline{1}, \underline{m}} \\
&\quad \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{m}|}} g_{\underline{m}}(t_{\underline{1}, \underline{m}}) e_0(t - t_1) \dots e_0(t - t_{m_1}) e_1(t - t_1) \dots e_1(t - t_{m_2}) \\
&\quad e_2(t - t_1) \dots e_2(t - t_{m_3}) dt_{\underline{1}, \underline{m}} \\
&= \sum_{\underline{p} \in \mathbb{M}_3} y_{f_{\underline{p}}}(t) \sum_{\underline{q} \in \mathbb{M}_3} y_{g_{\underline{q}}}(t) \\
&= \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \sum_{\substack{\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{M}_3^2 \\ \underline{p} + \underline{q} = \underline{m}}} y_{f_{\underline{p}}}(t) y_{g_{\underline{q}}}(t) \\
&= \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \sum_{\substack{\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{M}_3^2 \\ \underline{p} + \underline{q} = \underline{m}}} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{p}|}} f_{\underline{p}}(t_{\underline{1}, \underline{p}}) e_0(t - t_1) \dots e_0(t - t_{p_1}) e_1(t - t_1) \dots e_1(t - t_{p_2}) \\
&\quad e_2(t - t_1) \dots e_2(t - t_{p_3}) dt_{\underline{1}, \underline{p}} \\
&\quad \int_{\mathbb{R}^{|\underline{q}|}} g_{\underline{q}}(t_{\underline{1}, \underline{q}}) e_0(t - t_1) \dots e_0(t - t_{q_1}) e_1(t - t_1) \dots e_1(t - t_{q_2}) \\
&\quad e_2(t - t_1) \dots e_2(t - t_{q_3}) dt_{\underline{1}, \underline{q}}.
\end{aligned}$$

On définit le changement de variable

$$(t_{\underline{1}, \underline{q}}) = (t_{\underline{p}+1, \underline{m}}).$$

On peut regrouper les intégrales en une seule car les variables sont séparées, puis on fait commuter la somme finie et l'intégrale qui est absolument conver-

gente :

$$= \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{m}|}} \sum_{\substack{\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{M}_3^2 \\ \underline{p} + \underline{q} = \underline{m}}} f_{\underline{p}}(t_{\underline{1}, \underline{p}}) g_{\underline{q}}(t_{\underline{p} + \underline{q}, \underline{m}}) e_0(t - t_1) \dots e_0(t - t_{m_1}) e_1(t - t_1) \dots e_1(t - t_{m_2}) e_2(t - t_1) \dots e_2(t - t_{m_3}) dt_{\underline{1}, \underline{m}}$$

Finalement

$$h_{\underline{m}}(t_{\underline{1}, \underline{m}}) = \sum_{\substack{\underline{p}, \underline{q} \in \mathbb{M}_3^2 \\ \underline{p} + \underline{q} = \underline{m}}} f_{\underline{p}}(t_{\underline{1}, \underline{p}}) g_{\underline{q}}(t_{\underline{p} + \underline{q}, \underline{m}}) \quad (.0.4)$$

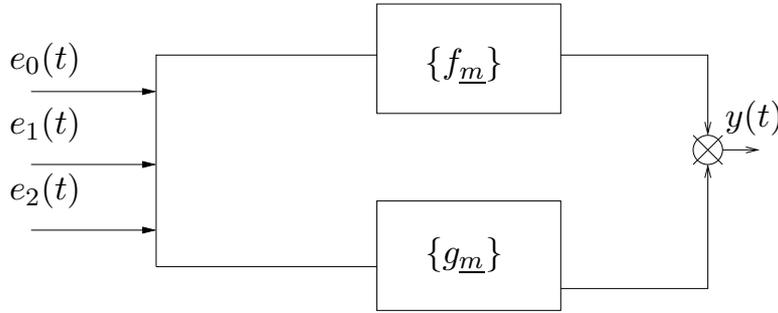


FIG. 2 – Produit des sorties de deux noyaux

Cascade avec un noyau linéaire Soient $e_0(t)$, $e_1(t)$ et $e_2(t)$ les entrées du système représenté figure 3 tel que la série de Volterra $\{f_{\underline{m}}(t_{\underline{1}, \underline{m}})\}$ converge. La sortie $y(t)$ s'écrit

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_1(\xi) y_f(t - \xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_1(\xi) \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{m}|}} f_{\underline{m}}(t_{\underline{1}, \underline{m}}) e_0(t - \xi - t_1) \dots e_0(t - \xi - t_{m_1}) e_1(t - \xi - t_1) \dots e_1(t - \xi - t_{m_2}) \\ &\quad e_2(t - \xi - t_1) \dots e_2(t - \xi - t_{m_3}) dt_{\underline{1}, \underline{m}} d\xi. \end{aligned}$$

Soit

$$\xi_{\underline{k}} = \xi + t_{\underline{k}},$$

la sortie devient

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_1(\xi) \sum_{\underline{m} \in \mathbb{M}_3} \int_{\mathbb{R}^{|\underline{m}|}} f_{\underline{m}}(\xi_{\underline{1}, \underline{m}} - \xi) e_0(t - \xi_1) \dots e_0(t - \xi_{m_1}) e_1(t - \xi_1) \dots e_1(t - \xi_{m_2}) \\ &\quad e_2(t - \xi_1) \dots e_2(t - \xi_{m_3}) d\xi_{\underline{1}, \underline{m}} d\xi. \end{aligned}$$

Le noyau modélisant la cascade s'écrit :

$$h_{\underline{m}}(t_{\underline{1},\underline{m}}) = \int_{\mathbb{R}} g_1(\xi) f_{\underline{m}}(\xi_{\underline{1},\underline{m}} - \xi) d\xi$$

dans le domaine temporel et

$$H_{\underline{m}}(s_{\underline{1},\underline{m}}) = G_1(s_1 + \dots + s_{m_1} + s_{m_1+1} + \dots + s_{m_1+m_2} + \dots + s_{m_1+m_2+m_3}) \\ F_{\underline{m}}(s_1, \dots, s_{m_1}, s_{m_1+1}, \dots, s_{m_1+m_2}, \dots, s_{m_1+m_2+m_3})$$

dans le domaine de Laplace.

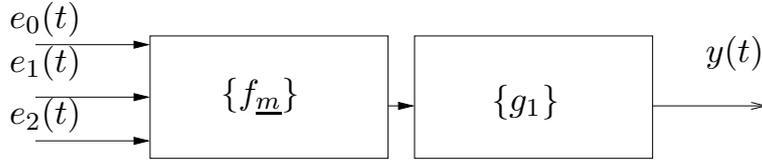


FIG. 3 – Cascade de deux noyaux

Notations

Les fonctions dans le domaine temporel sont en minuscules tandis que les fonctions du domaine de Laplace sont en majuscules.

Noyaux multi-entrées Les noyaux multi-entrées permettent de définir toutes les possibilités d'écritures nécessaires. Dans le domaine de Laplace, ils s'écrivent $H_{\underline{m}}^{(x)}(s_{\underline{1},\underline{m}})$ avec

$$\underline{1} = (1, 1, 1) \in \mathbb{M}_3 \\ \underline{m} = (m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{M}_3 \\ |\underline{m}| = m_1 + m_2 + m_3.$$

avec

$$\mathbb{M}_k = \{(m_1, \dots, m_k) \in (\mathbb{N}^*)^k / m_1 + \dots + m_k \geq 1\}$$

Les arguments de noyaux sont des vecteurs écrits sous la forme

$$\underline{(s_{\underline{p},\underline{q}})} = (s_{1,p_1}, \dots, s_{1,q_1}, s_{2,p_2}, \dots, s_{2,q_2}, \dots, s_{n,p_n}, \dots, s_{n,q_n}) \quad (\underline{p}, \underline{q}) \in (\mathbb{M}_n)^2, \\ \widehat{\underline{(s_{\underline{p},\underline{q}})}} = (s_{1,p_1} + \dots + s_{1,q_1}, s_{2,p_2} + \dots + s_{2,q_2}, \dots, s_{n,p_n} + \dots + s_{n,q_n}), \\ \widehat{\underline{(s_{\underline{p},\underline{q}})}} = (s_{1,p_1} + \dots + s_{1,q_1} + s_{2,p_2} + \dots + s_{2,q_2} + \dots + s_{n,p_n} + \dots + s_{n,q_n}).$$

Noyaux mono entrée L'écriture est simplifiée pour les noyaux de Volterra mono entrée, où l'ordre de la non-linéarité est défini par un scalaire n . Les paramètres du noyau sont écrits sous la forme

$$\begin{aligned} s_{p,q} &= s_p, \dots, s_q \quad (p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2, \\ \widehat{s_{p,q}} &= s_p + \dots + s_q. \end{aligned}$$

Les variables en caractères gras définissent un vecteur ou une matrice, pour les représentation dans les espaces d'état, par exemple

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} H_n \\ \frac{\partial H_n}{\partial x} \end{bmatrix}$$

Décomposition modale Soit une base modale orthonormée $\phi_k(x)$ et le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Les projections des noyaux sur les déformées modales seront notées

$$\begin{aligned} h_{n,k}(s_{1,n}) &\triangleq \langle h_n^{(x)}(s_{1,n}), \phi_k(x) \rangle \\ h_{\underline{m},k}(s_{\underline{1},\underline{m}}) &\triangleq \langle h_{\underline{m}}^{(x)}(s_{\underline{1},\underline{m}}), \phi_k(x) \rangle \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Joël Bensoam. *Représentation intégrale appliquée à la synthèse sonore par modélisation physique*. PhD thesis, Université du Maine, 2003.
- [2] H. Brézis. *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Dunod, 1999.
- [3] A. de Cheveigné et H. Kawahara. Yin, a fundamental frequency estimator for speech and music. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111 :1917–1930, Avril 2002.
- [4] Th. Hélie et M. Hasler. Volterra series for solving weakly non-linear partial differential equations : application to a dissipative burger’s equation. *International Journal of Control*, 77(12) :1071–1082, 2004.
- [5] G. C. Gorain et S. K. Bose. Uniform stability of damped nonlinear vibrations of an elastic string. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 113(4) :443–449, November 2003.
- [6] Martin Hasler. *Systèmes non linéaires*. 1999.
- [7] Thomas Hélie. Documentation interne. IRCAM.
- [8] Michel Raous. Dynamical frictionnal problem. *Revue européenne des éléments finis*, 7, 1998.
- [9] Wilson J. Rugh. Nonlinear system theory. Web Version, 2002.
- [10] Olivier Thomas. *Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques - Application aux instruments de percussion*. PhD thesis, ENST, 2001.
- [11] Cyril Touzé. *Analyse et modélisation de signaux acoustiques et vibratoires chaotiques. Application aux instruments de percussion non-linéaires*. PhD thesis, ENST, 2001.