

# Non-linéarités et rôle du matériau dans la reproduction sonore par un haut-parleur électrodynamique

Nicolas Quaegebeur

DEA ATIAM  
Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

Laboratoire d'accueil : Unité de Mécanique (UME) ENSTA  
Responsable : Antoine CHAIGNE



Mars - Août 2004  
Version 26 août 2004



# Remerciements

Je tiens à remercier tout particulièrement Antoine Chaigne pour son encadrement tout au long de ce stage, sa patience vis à vis des dizaines de questions posées et surtout sa curiosité scientifique qui m'ont permis de réaliser ce travail.

Je voudrais également dire un grand merci à Cyril Touzé qui a toujours pris le temps de répondre à mes questions avec le sourire.

Un grand merci à tous les membres du département UME-DFA pour leur accueil chaleureux, à savoir, sans ordre de préférence, Christophe Stoelinga pour avoir réussi à me supporter 6 mois dans son bureau, Thierry Pichon, Michel Ferré et Olivier Cadot. Je tiens également à saluer tous les autres stagiaires de passage, à savoir Bastien Fluchiron, Samuel Rodriguez et Thomas Carrier pour leur compagnie et leurs pique-niques improvisés.

Enfin, je tiens à remercier Gilles Millot et François Malbos d'Harman pour le prêt du prototype étudié ainsi que Xavier Boutillon de m'avoir permis d'effectuer des mesures à l'Ecole Polytechnique.



---

# Résumé

Si le haut-parleur est devenu un objet d'utilisation courante, il est néanmoins peu connu : Que se passe-t-il lorsque j'augmente le volume de mon amplificateur ? Pourquoi le son est-il différent selon que je me trouve dans l'axe ou sur les cotés d'un haut-parleur ? Pourquoi une telle disparité dans les formes et les matériaux utilisés dans sa conception ?

La modélisation la plus utilisée repose sur la Théorie de Thiele & Small [15] qui n'est valable que dans un domaine d'amplitudes et de fréquences donné. La dynamique est en effet restreinte à la limite de fonctionnement linéaire du haut-parleur et la bande passante à la limite de fonctionnement en piston plan de la membrane.

Cette étude vise, dans un premier temps, à étendre la modélisation aux plus grandes amplitudes de déplacement. L'idée consiste à modéliser le comportement des différents éléments de la structure en régime de grande amplitude par des non-linéarités quadratiques et cubiques. On se ramène alors à une équation de type équation de Duffing pour le déplacement membranaire qui permet la détermination rapide des coefficients du modèle. Ce modèle permet alors de prédire le comportement du haut-parleur en régime de grande amplitude dans l'hypothèse de fonctionnement piston plan. On aboutira au résultat que les non-linéarités proviennent principalement de la suspension et du facteur de force.

Ensuite, afin d'étendre la bande passante d'étude, il est intéressant d'observer le comportement de la membrane au delà de la limite de fonctionnement piston plan. Cela consiste en une étude expérimentale et numérique des modes de la membrane pour 2 haut-parleurs. L'étude numérique permettra de mettre en évidence l'importance de la suspension sur le comportement de la membrane en basses fréquences. On verra également les différences entre ces deux haut-parleurs de conception différente.

Ces 2 haut-parleurs possèdent des paramètres proches mais semblent avoir un comportement très différent. Il semble alors nécessaire d'inclure à la modélisation l'influence du matériau et de la forme sur la reproduction sonore. Cette modélisation permet de prédire le comportement vibratoire et spatial de la membrane du haut-parleur dans une gamme de fréquence bornée par le nombre de modes à considérer. Ensuite, par résolution de l'intégrale de Rayleigh, on aboutit à une modélisation du champ de pression en espace libre. Cette modélisation est confrontée à des mesures expérimentales de directivité. On aboutit à la conclusion que les modes de la structure ont une influence en régime linéaire. Cela se traduit au niveau spectral par une élévation du niveau sonore au passage par les fréquences de la structure et au niveau spatial par une modification du diagramme de directivité. De plus on observe une élévation des non-linéarités au passage par les modes de la structure. Cela se traduit au niveau spatial par des zones de "fortes distorsions" où la restitution sera moins fidèle et des zones de "faibles distorsions" où la reproduction à forte amplitude sera plus fidèle.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Résumé</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 La transduction électro-acoustique idéale . . . . .	1
1.2 Le Haut parleur électrodynamique . . . . .	1
1.3 Modèle de piston plan. . . . .	3
1.4 Modèle proposé . . . . .	4
1.5 Organisation de l'étude . . . . .	5
<b>2 Non-linéarités Electro-Mécaniques</b>	<b>7</b>
2.1 Mesures de distorsion . . . . .	7
2.2 Modélisation de la transduction Electro-Mécanique . . . . .	10
2.3 Estimation des paramètres linéaires . . . . .	12
2.4 Estimation des paramètres non-linéaires . . . . .	13
2.4.1 Principe de l'estimation . . . . .	13
2.4.2 Estimation des non-linéarités de la suspension . . . . .	14
2.4.3 Estimation des non-linéarités de l'amortissement . . . . .	16
2.4.4 Estimation des non-linéarités de la force excitatrice. . . . .	17
2.5 Résultats de la modélisation . . . . .	18
<b>3 Analyse modale de la membrane</b>	<b>21</b>
3.1 Principe d'identification des modes de la structure . . . . .	21
3.2 Conventions et nomenclature des modes . . . . .	21
3.3 Analyse modale HP Harman . . . . .	22
3.3.1 Modes dans le spectre audible . . . . .	22
3.3.2 Modes de membrane . . . . .	24
3.4 Analyse Modale HP SP165 PA . . . . .	25
3.5 Modélisation numérique par éléments finis. . . . .	27
<b>4 Rayonnement et directivité du haut-parleur</b>	<b>33</b>
4.1 Expression du champ de pression . . . . .	33
4.2 Mode de piston plan . . . . .	34

4.3	Projection sur le mode (m,n) . . . . .	36
4.4	Calcul des impédances modales de rayonnement . . . . .	37
4.5	Application au haut-parleur considéré . . . . .	40
4.5.1	Amplitudes d'excitation des modes . . . . .	40
4.5.2	Action du fluide sur la structure . . . . .	40
4.5.3	Calcul de la vitesse membranaire . . . . .	42
4.6	Calcul du champ de pression . . . . .	43
4.6.1	Rayonnement modal . . . . .	43
4.6.2	Champ total . . . . .	47
4.7	Non-linéarités et rayonnement . . . . .	50
4.8	Validation : Mesures de directivité . . . . .	51
4.8.1	Mesures effectuées . . . . .	51
4.8.2	Résultats . . . . .	51
4.8.3	Analyse des résultats . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Conclusion : Non-linéarités et rôle du matériau</b>	<b>59</b>
5.1	Modes de la structure . . . . .	59
5.2	Non-linéarités . . . . .	59
5.3	Une solution ? . . . . .	60
	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>63</b>
	<b>A Vibration d'une plaque sphérique incurvée</b>	<b>65</b>
	<b>B Comportement vibroacoustique</b>	<b>69</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>73</b>



# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 La transduction électro-acoustique idéale

Par transduction électro-acoustique, on sous-entend transformation d'un signal électrique  $I(t)$  délivré par un amplificateur en un signal de pression acoustique  $P(t)$ . Afin de conserver toutes les propriétés temporelles du signal, on souhaiterait effectuer une transduction 'parfaite'. Ainsi, au sens de Fourier, on recherche à obtenir un signal de pression tel que, au moins en un point de l'espace et pour une gamme de fréquence donnée, on ait les relations suivantes en module et en phase  $\Phi$  :

$$\begin{cases} |P(\omega)| \propto |I(\omega)| \\ \Phi(P) = \Phi(I) + \omega\tau \quad \text{avec } \tau = \text{Cte (retard)} \end{cases}$$

Ces relations impliquent ainsi une totale linéarité dans la transduction et une courbe en réponse en fréquences de  $P$  plate (indépendante de la fréquence).

En ce qui concerne la reproduction spatiale, on souhaiterait atteindre une description omnidirectionnelle qui permettrait une reproduction sonore fidèle dans un espace d'écoute plus important.

### 1.2 Le Haut parleur électrodynamique

#### Présentation

Le Haut-Parleur électrodynamique (HP) est le moyen le plus couramment utilisé pour réaliser la transduction électro-mécanique. Celui-ci est constitué d'une bobine située à l'intérieur d'un champ magnétique radial créé par un aimant permanent. La bobine, pilotée en courant par un amplificateur de puissance, est constituée d'un enroulement de spires et est fixée à son extrémité à la membrane. Cette dernière (souvent en kevlar, fibre de carbone, aluminium ou carton) est alors retenue par le spider (qui joue le rôle d'un ressort assez raide) qui l'empêche de quitter l'axe de l'aimant. Le cône central permet de

rigidifier l'ensemble et protège ainsi la structure des particules extérieures. Un schéma en coupe est présenté figure 1.1.

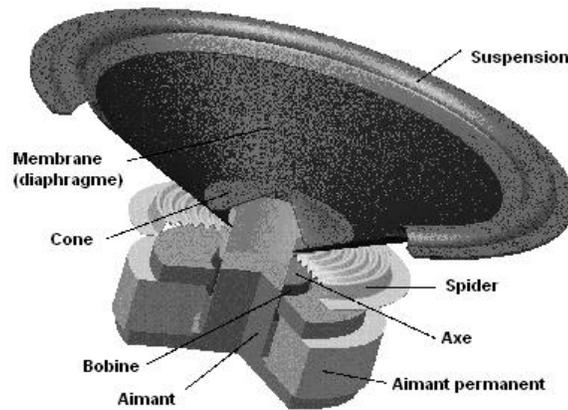


FIG. 1.1 – Plan en coupe d'un haut-parleur électrodynamique

### Haut-Parleurs étudiés

Cette étude est fondée sur la comparaison de deux haut-parleurs. Le premier est un haut-parleur de type SP-165 PA construit par Stageline de forme classique (cf figure 1.1) et de diamètre de 13 cm. Le second haut-parleur utilisé est un prototype développé par *HARMAN – CARDON* de 7cm de diamètre dont la spécificité est d'avoir supprimé le spider et le cône central. De plus, ils proposent l'utilisation d'une membrane sphérique en verre (ce matériau a été choisi pour ses caractéristiques de rigidité et masse volumique). Le schéma du prototype est présenté figure 1.2.

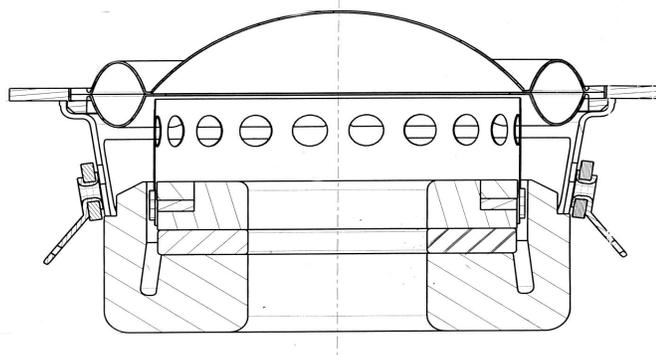


FIG. 1.2 – Plan en coupe du prototype étudié

### 1.3 Modèle de piston plan.

En basses fréquences (c'est à dire pour les longueurs d'ondes supérieures aux dimensions du haut-parleur), on peut considérer que la membrane se comporte comme un piston plan. Si on suppose que l'on a une parfaite linéarité au sens de la transduction électro-mécanique, et au niveau de la transduction mécano-acoustique, il devient possible de modéliser la transduction électro-mécano-acoustique de manière très simple en utilisant des schémas électriques équivalents (théorie de Thiele & Small [15]). Un exemple réalisé sous Pspice est représenté figure 1.3.

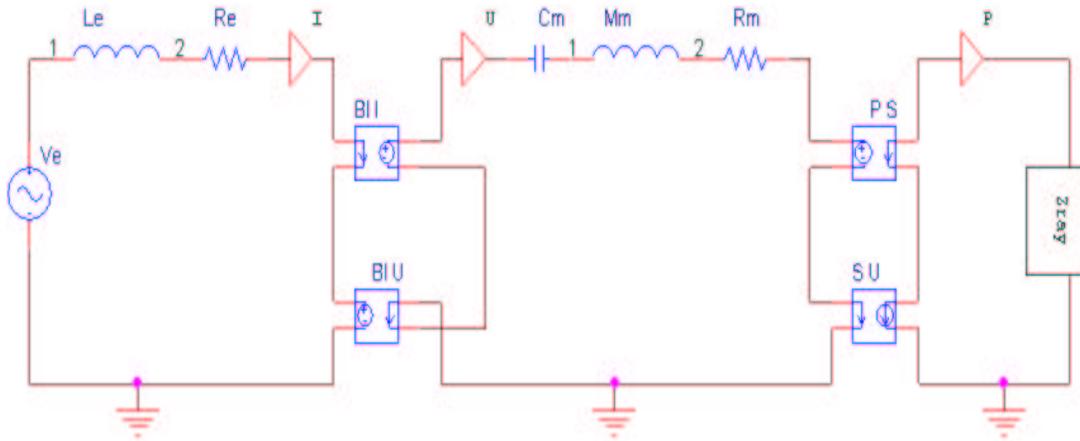


FIG. 1.3 – Schéma électrique équivalent d'un Haut-Parleur électrodynamique

avec :

$I$  : Courant parcourant la bobine

$Bl$  : Facteur de force (couplage électro-mécanique le force  $F = BlI$ )

$R_e$  : Résistance de la partie électrique

$L_e$  : Inductance de la bobine

$R_m$  : Résistance mécanique (principalement pertes dans la suspension)

$M_m$  : Masse mobile

$C_m$  : Compliance de la suspension

$U$  : Vitesse membranaire

$P$  : Pression rayonnée

$S$  : Surface de la membrane

$Z_{Ray}$  : Impédance de rayonnement (calculée à partir de l'impédance de rayonnement du piston plan)

Cette théorie très répandue permet de décrire le comportement mécanique du haut-parleur à l'aide de paramètres peu représentatifs. Néanmoins, elle permet de rendre compte que la transduction électro-mécanique par un haut-parleur électrodynamique

obéit, dans une gamme de fréquence ( $ka \ll 1$  où  $k$  désigne le nombre d'onde et  $a$  le rayon de la membrane), aux relations suivantes :

$$\begin{cases} |P(\omega)| = A(\omega)|I(\omega)| & \implies \text{Linéarité mais dépendance en fréquence} \\ \Phi(P) = B(\omega)\Phi(I) & \implies \text{Pas de linéarité de la phase} \end{cases}$$

Ces relations engendrent l'existence d'une réponse impulsionnelle du système non nulle et dans ce cas, les transitoires seront mal reproduits par le système.

En ce qui concerne la répartition spatiale du champ sonore, la référence a été décrite par Rayleigh qui a permis la formulation du champ sonore rayonné par un piston plan.

## 1.4 Modèle proposé

La modélisation précédente est représentative du fonctionnement d'un haut-parleur électrodynamique dans une gamme de fréquence et d'amplitude restreinte. En effet, elle ne rend compte du comportement du haut parleur pour une gamme de fréquence  $[0; f_2]$  où  $f_2$  est la limite de comportement de la membrane en piston plan. De plus, elle suppose une transduction électro-mécanique totalement linéaire, ce qui n'est valable qu'en régime de faible amplitude. Afin d'élargir la modélisation au régimes de grande amplitude, il est nécessaire d'imposer au niveau de la transduction électro-mécanique (EM) en basses fréquences :

$$|V(\omega)| = A(\omega, I)|I(\omega)| \implies \text{Non-linéarités dans la transduction EM}$$

De plus, afin d'élargir le domaine de fréquence étudié, il est nécessaire de considérer les modes de la structure qui apparaissent pour  $ka \gg 1$  (dans tout le spectre audible). On va ainsi introduire les paramètres du matériau (module d'Young  $E$ , densité  $\rho$ , coefficient de Poisson  $\nu$ ) ainsi que des paramètres géométriques (rayon  $a$ , épaisseur  $h$ , courbure  $R$ ) qui vont déterminer les premiers modes de vibration de la membrane et ainsi permettre de décrire le comportement vibratoire de celle-ci (cf figure 1.4). Dans ce cas, on se place dans l'hypothèse qu'en tout point de l'espace on peut écrire :

$$|P(\omega)| = A(\omega, I, \text{Matériau})|I(\omega)| \implies \text{Non-linéarités et rôle du matériau}$$

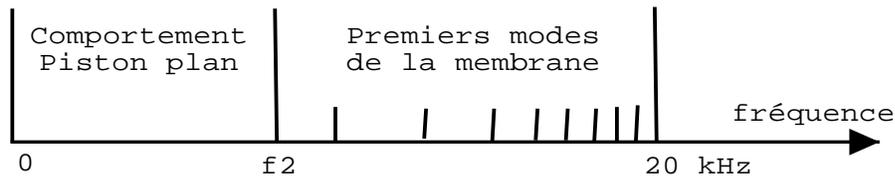


FIG. 1.4 – Elargissement de la bande passante d'étude.

Au niveau temporel, le fait d'introduire des non-linéarités et le rôle du matériau va modifier le contenu spectral : on observera ainsi la génération d'harmoniques, l'apparition d'intermodulations (combinaison des fréquences émises) ou encore l'amplification de certaines fréquences particulières. Tous ces phénomènes vont participer à la spécificité de chaque haut-parleur.

Au niveau spatial, la prise en compte du matériau permet de prédire le diagramme de directivité de la source sonore en fonction de la fréquence, de la position de l'auditeur et de l'amplitude de l'excitation. En particulier, il devient possible de relier distorsions et directivité.

Ces hypothèses permettent dans un premier temps de définir un domaine spatial d'écoute, la dynamique admissible ou encore la bande passante associée à un haut-parleur donné puis dans un second temps de répondre à la question : "Quelle différence y a-t-il entre deux haut-parleurs différents au niveau de la forme ou du matériau mais possédant les mêmes paramètres électro-mécaniques ?"

## 1.5 Organisation de l'étude

La première partie de cette étude repose sur la compréhension des phénomènes non-linéaires au niveau de la transduction électro-mécanique. On obtient ainsi la formulation du taux de distorsion en fonction de la fréquence et de l'amplitude d'excitation. Cette modélisation sera confrontée aux mesures effectuées sur des signaux de vitesse membranaire (chapitre 2).

Dans un second temps, sera étudié le comportement de la membrane lorsque celle-ci n'obéit plus au mouvement de piston plan. Ceci a été réalisé par une étude expérimentale et numérique des modes de la structure (chapitre 3).

Enfin, on aboutit à la formulation du champ sonore en espace libre en régime de grande amplitude et pour tout le spectre audible. Cette modélisation est confrontée aux relevés de directivité effectués en chambre sourde qui confirment bien l'influence du matériau sur la fidélité de la reproduction sonore (chapitre 4).



## Chapitre 2

# Non-linéarités Electro-Mécaniques

### 2.1 Mesures de distorsion

Afin de mettre en évidence les différents régimes de fonctionnement du haut-parleur (HP) en question, il est nécessaire d'effectuer des relevés de distorsion en fonction de la fréquence et de l'amplitude d'entrée. Pour ce faire, on pilote le HP par un générateur sinusoïdal (Bruel & Kjaer Modèle 1051) dont la tension est mesurée par un PC (grâce à l'interface PULSE). Les mesures de distorsion ont été effectuées sur le signal de vitesse membranaire au centre mesurée par vibrométrie laser (Polytec OFV 056).

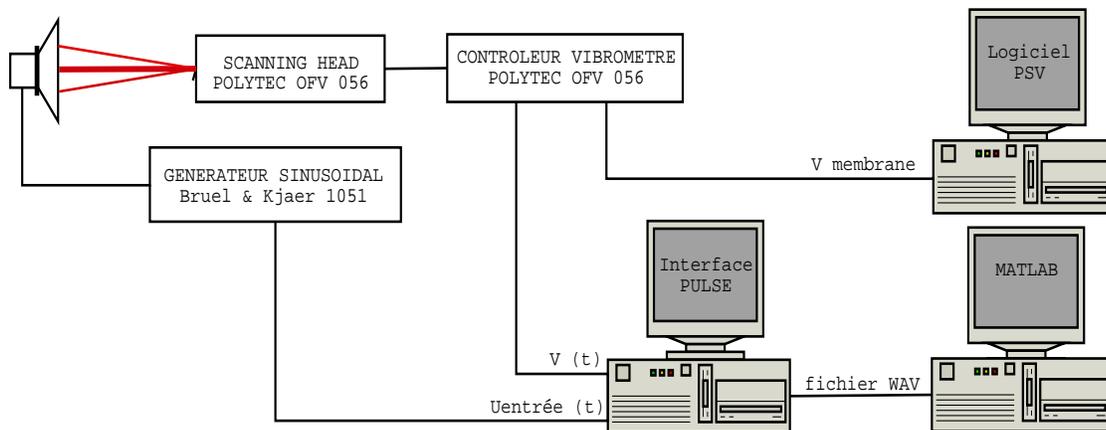


FIG. 2.1 – Schéma du dispositif expérimental

Ce banc de mesure permet de caractériser la transduction électro-mécanique par des mesures de tension d'entrée et de vitesse de l'équipage mobile. Cette partie ne prend pas en compte la transduction mécano-acoustique.

Toutes les mesures ont été réalisées sous l'interface PULSE puis exportées en fichiers WAV. Une interface développée sous Matlab permet ensuite une analyse temps-fréquence du signal délivré par le générateur (Tension à l'entrée du HP) et du signal du laser (mesure de la vitesse membranaire). Dans un premier temps, a été étudié le comportement en fréquence du HP. Pour ce faire, il suffit de programmer un balayage en fréquences (sweep) sur la bande 20-6000Hz. sur le générateur puis ensuite d'analyser pour chaque fréquence le niveau du fondamental et des harmoniques d'ordre supérieurs. On observe alors que dans la gamme des tensions explorées (de 0 à 5 V<sub>eff</sub>), seuls les 4 premiers harmoniques sont à prendre en compte puisque le niveau des harmoniques d'ordre supérieur n'est pas observable (confondu avec le bruit de mesures).

On aboutit alors à une "cartographie" des distorsions observées en fonction de la fréquence et de la tension d'entrée. Les résultats sont présentés figure 2.2.

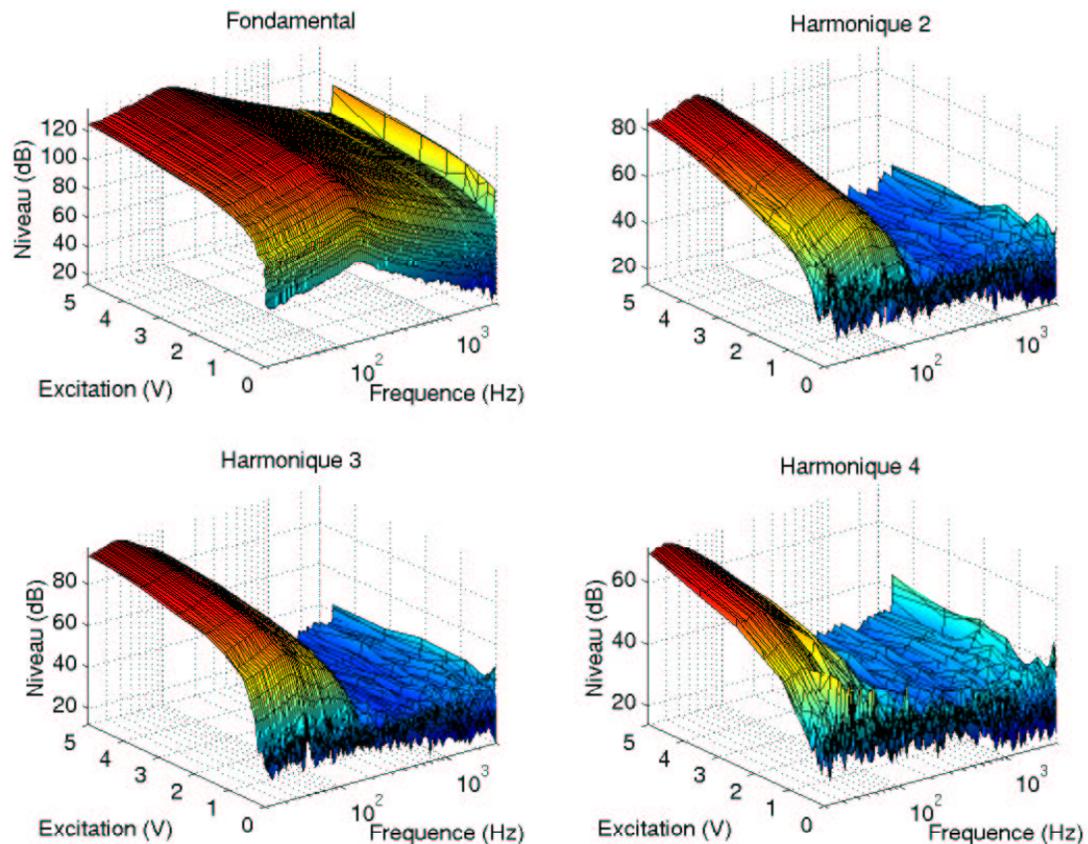


FIG. 2.2 – Vitesse (dB) en fonction de la fréquence (échelle log) et de la tension d'entrée. La référence (0dB) est de  $125.10^{-3} \text{ mm.s}^{-1}$ .

Ces relevés comportent des pics pour certaines fréquences (50 Hz, 100 Hz et 150 Hz) qui sont en réalité des parasites dûs au champ magnétique ambiant capté par la bobine du HP. Pour remédier à ces parasites, il suffit d'entourer l'aimant de  $\mu$  métal (isolant magnétique pour protéger l'aimant et la bobine du champ extérieur).

Cette première analyse a permis de comprendre les phénomènes mis en jeu : les distorsions apparaissent prépondérantes aux basses fréquences. En effet, à partir d'une fréquence dépendant de l'amplitude d'entrée, le niveau des harmoniques générées est quasi-nul (ou confondu avec le bruit de mesure). On observe alors différents régimes de fonctionnement selon la gamme d'amplitude d'excitation :

- Pour des faibles excitations (de 0 à 0.5 V), les distorsions sont très faibles (ou non mesurables)
- Pour de fortes excitations (de 1V à 5V), les distorsions interviennent de manière prépondérante en basses fréquences (20-1000 Hz).

## 2.2 Modélisation de la transduction Electro-Mécanique

Le but de l'étude est de comprendre les différentes sources de non-linéarités au sein du haut-parleur considéré. La plupart des études considèrent le schéma global de la transduction électro-mécanique selon la théorie de Thiele & Small [15] :

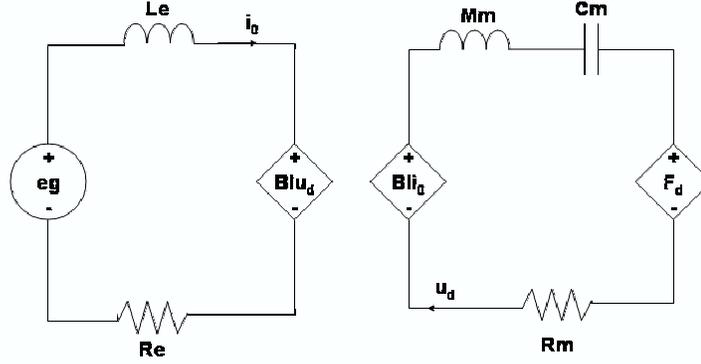


FIG. 2.3 – Transduction Electro-mécanique

où  $Bl$  désigne le facteur de force,  $R_e$  la résistance de la partie électrique,  $L_e$  l'inductance de la bobine,  $R_m$  la résistance mécanique,  $M_m$  la masse mobile,  $C_m$  la compliance de la suspension,  $F_d$  l'impédance de rayonnement et  $u_d$  la vitesse membranaire.

Le but de cette partie est d'établir l'expression de la vitesse membranaire  $u_d$  en régime de grande amplitude. Au regard des études précédentes [1][2][12], il apparaît que les principales sources de non-linéarités sont situées au niveau de la suspension (ce qui suppose que  $C_m = C_m(\omega, e_g)$ ) et au niveau de la bobine (cad  $Bl = B(\omega, e_g)l$ ). On aboutit alors au système différentiel suivant :

$$Bl(e_g)u_d + R_e i_0 + L_e(e_g) \frac{di_0}{dt} = e_g \quad (2.1)$$

$$f_d + R_m u_d + M_m \frac{du_d}{dt} + C_m(e_g) \int u_d = Bl(e_g) i_0 \quad (2.2)$$

En introduisant la variable  $x = \int u_d$ , on aboutit alors à l'équation suivante :

$$i_0(t) = \frac{M_m \ddot{x} + R_m \dot{x} + C_m(e_g)x}{Bl(e_g)}$$

$$\frac{di_0(t)}{dt} = \frac{M_m \ddot{x} + R_m \dot{x} + C_m(e_g)\dot{x} + \dot{C}_m(e_g)x}{Bl(e_g)} - \frac{\dot{Bl}(e_g)(M_m \ddot{x} + R_m \dot{x} + C_m(e_g)x)}{Bl(e_g)^2}$$

En réinjectant ces équations dans (2.1) on aboutit alors à l'équation différentielle du troisième ordre :

$$\alpha(e_g)\ddot{x} + \beta(e_g)\dot{x} + \gamma(e_g)x = e_g Bl(e_g)^2 \quad (2.3)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha(e_g) &= Bl(e_g)L_e M_m \\ \beta(e_g) &= R_m Bl(e_g)L_e + Bl(e_g)M_m R_e - \dot{Bl}(e_g)L_e M_m \\ \gamma(e_g) &= C_m(e_g)Bl(e_g)L_e + R_m Bl(e_g)R_e - Bl(e_g)R_m L_e + Bl(e_g)^3 \\ \delta(e_g) &= \dot{C}_m(e_g)Bl(e_g)L_e + C_m(e_g)Bl(e_g)R_e - C_m(e_g)\dot{Bl}(e_g)L_e \end{aligned}$$

Cette équation peut alors être reformulée de la sorte :

$$(1 - \sigma(e_g)) [M_m \ddot{x} + R_m \dot{x} + C_m x] + \frac{L_e}{R_e} \left[ M_m \ddot{x} + R_m \ddot{x} + \left( C_m + \frac{Bl^2}{L_e} \right) \dot{x} + \dot{C}_m x \right] = e_g \frac{Bl}{R_e}$$

soit :

$$\boxed{(1 - \sigma(e_g))\mathcal{A}(x, e_g) + \frac{1}{\Omega}\mathcal{B}(x, e_g) = e_g \frac{Bl}{R_e}} \quad (2.4)$$

avec :

$$\sigma(e_g) = \frac{L_e \dot{Bl}}{R_e Bl}$$

$$\Omega = R_e / L_e$$

$$\mathcal{A}(x, e_g) = M_m \ddot{x} + R_m \dot{x} + C_m x$$

$$\mathcal{B}(x, e_g) = M_m \ddot{x} + R_m \ddot{x} + \left( C_m + \frac{Bl^2}{L_e} \right) \dot{x} + \dot{C}_m x$$

On a séparé l'équation différentielle en deux termes d'ordres différents selon la gamme de fréquence considérée. En effet, on peut calculer l'ordre de grandeur de chaque terme de l'équation afin de distinguer différents régimes de fonctionnement. En régime de faible distorsion et compte tenu des valeurs des paramètres linéaires calculés dans la partie suivante (cf 2.3), on peut affirmer que :

$$\begin{cases} \dot{C}_m \simeq 0 \\ C_m \simeq 10^3 \gg Bl^2/L_e \simeq 10^1 \\ \sigma(e_g) \ll 1 \end{cases}$$

Ce qui permet de comparer les 2 termes  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  de l'équation différentielle 2.4 :

$$\left| \frac{\Omega \mathcal{A}(x, \omega)}{\mathcal{B}(x, \omega)} \right| \simeq \frac{\Omega}{\omega} \quad (2.5)$$

On peut alors distinguer deux régimes de fonctionnement dépendant de  $\Omega$  :

- en très basses fréquences, c'est à dire pour  $\omega \ll \Omega$ , on peut considérer que l'équation de départ est équivalente à une équation du second ordre en  $x$  :

$$\boxed{M_m \ddot{x} + R_m \dot{x} + C_m x = e_g \frac{Bl}{R_e(1 - \sigma(e_g))}} \quad (2.6)$$

- en moyennes et hautes fréquences, c'est à dire pour  $\omega \gg \Omega$ , on peut considérer que l'équation de départ est équivalente à une équation du troisième ordre en  $x$  :

$$\boxed{M_m \ddot{x} + R_m \dot{x} + \left(C_m + \frac{Bl^2}{L_e}\right) \dot{x} + C_m x = e_g Bl L_e} \quad (2.7)$$

### 2.3 Estimation des paramètres linéaires

L'étude menée par S-T Park [12] propose une estimation des non linéarités en deux étapes : on estime tout d'abord les paramètres linéaires puis les paramètres non linéaires comme perturbation de l'état linéaire.

En considérant la transduction comme totalement linéaire, on peut exprimer les fonctions  $e_g(t)$ ,  $i_0(t)$  et  $x(t)$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} e_g(t) &= |E| \cos(\omega t) \\ i_0(t) &= |I_0| \cos(\omega t + \phi_i) \\ x(t) &= |X| \cos(\omega t + \phi_x) \end{aligned}$$

En utilisant les équations (2.1) et (2.2), on aboutit au système suivant :

$$\begin{aligned} j\omega L_e I_0 + R_e I_0 + Bl X &= E \\ -\omega^2 M_m X + j\omega R_m X + C_m X &= Bl I_0 \end{aligned}$$

qui s'exprime sous forme matricielle :

$$AS = B \quad (2.8)$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} j\omega I_0 & I_0 & 0 & 0 & 0 & j\omega X \\ 0 & 0 & -\omega^2 X & j\omega X & X & -I_0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} \\ S &= (L_e \quad R_e \quad M_m \quad R_m \quad C_e \quad Bl)^T \end{aligned}$$

Ce système peut alors s'inverser en utilisant la pseudo-inverse de  $A$  définie de la manière suivante :

$$A^\dagger = (A^T A)^{-1} A^T$$

ce qui permet d'inverser le système (2.4) afin d'obtenir l'estimation des paramètres linéaires :

$$\boxed{S = A^\dagger B} \quad (2.9)$$

Le principe est ainsi d'effectuer plusieurs mesures à des fréquences différentes (de 50 à 300 Hz) et des excitations différentes (en fonctionnement linéaire), de mesurer les grandeurs  $E$ ,  $X$  et  $I_0$  puis de calculer pour chaque mesure le jeu de paramètres  $S$  associé au modèle. On aboutit alors pour les HP considérés :

Paramètre	Unité	HP Harman	HP SP165
$L_e$	$mH$	6.7	3.1
$R_e$	$\Omega$	6.04	10.01
$M_m$	$g$	3.7	3.9
$R_m$	$N.s/m$	3.48	5.16
$C_m$	$N/m$	2179	4604
$Bl$	$N/A$	3.96	4.79

On peut alors déterminer la limite  $\Omega$  de fonctionnement entre équation du second ou du troisième ordre. On aboutit alors au résultat suivant en désignant par  $f_c = \frac{\Omega}{2\pi}$  la fréquence de changement de régime :

Paramètre	Unité	HP Harman	HP SP165
$\Omega$	$s^{-1}$	1040	3239
$f_c$	$Hz$	166	515

## 2.4 Estimation des paramètres non-linéaires : Approximation basses fréquences

### 2.4.1 Principe de l'estimation

Au vu des résultats du paragraphe 2.3, il apparaît raisonnable de négliger, en basses fréquences, cad pour  $\omega \ll \Omega$ , le terme d'ordre 3 ( $\mathcal{B}$ ) dans l'équation 2.4 afin de pouvoir se ramener à l'équation d'un oscillateur non-linéaire à un degré de liberté (équation de Duffing) en prenant comme variable  $x = \int u_d$  et comme excitation  $E(x, t) = E(x) \cos(\omega t)$  avec  $E(x) = \frac{e_g Bl}{R_e}$  :

$$\boxed{M_m \ddot{x} + R_m(x) \dot{x} + C_m(x) x = E(x) \cos(\omega t)} \quad (2.10)$$

On peut alors obtenir des solutions approchées de cette équation par la méthode de l'équilibrage harmonique. Cette méthode est adaptée à notre étude puisque l'on connaît la

nature de la réponse du système : la plupart des non linéarités sont dues aux harmoniques supérieurs (Harmoniques 2 et 3) et dans ce cas, on cherche une solution du type :

$$x(t, E, \omega) = x_0(\omega, E) + x_1(\omega, E)\cos(\omega t) + x_2(x_1, \omega)\cos(2\omega t) + x_3(x_1, \omega)\cos(3\omega t) \quad (2.11)$$

Le fait d'introduire  $x_0$  (déplacement de la membrane de l'ordre de quelques mm) a été observé par W. Klippel [1][2]. Ce déplacement apparaît néanmoins dans son étude comme étant indépendant de la fréquence d'excitation. Le taux de distorsion mesuré étant faible (-40 dB entre le fondamental et les harmoniques supérieurs), il est naturel d'imposer les relations d'échelle suivantes :

$$\begin{cases} x_2 \ll x_1 \\ x_3 \ll x_1 \end{cases}$$

Notre étude propose une méthode d'évaluation des paramètres non-linéaires en vue de proposer un modèle pour les distorsions observées en basses fréquences. Toutes les estimations ont uniquement été réalisées sur le prototype Harman à dôme.

### 2.4.2 Estimation des non-linéarités de la suspension

Une manière très simple de mettre en évidence les non-linéarités dans le haut-parleur est de considérer l'évolution de la fréquence de résonance de la partie mobile composée de la suspension, de la membrane et de la bobine. En effet, si ce système était parfaitement linéaire, on devrait avoir une fréquence de résonance :

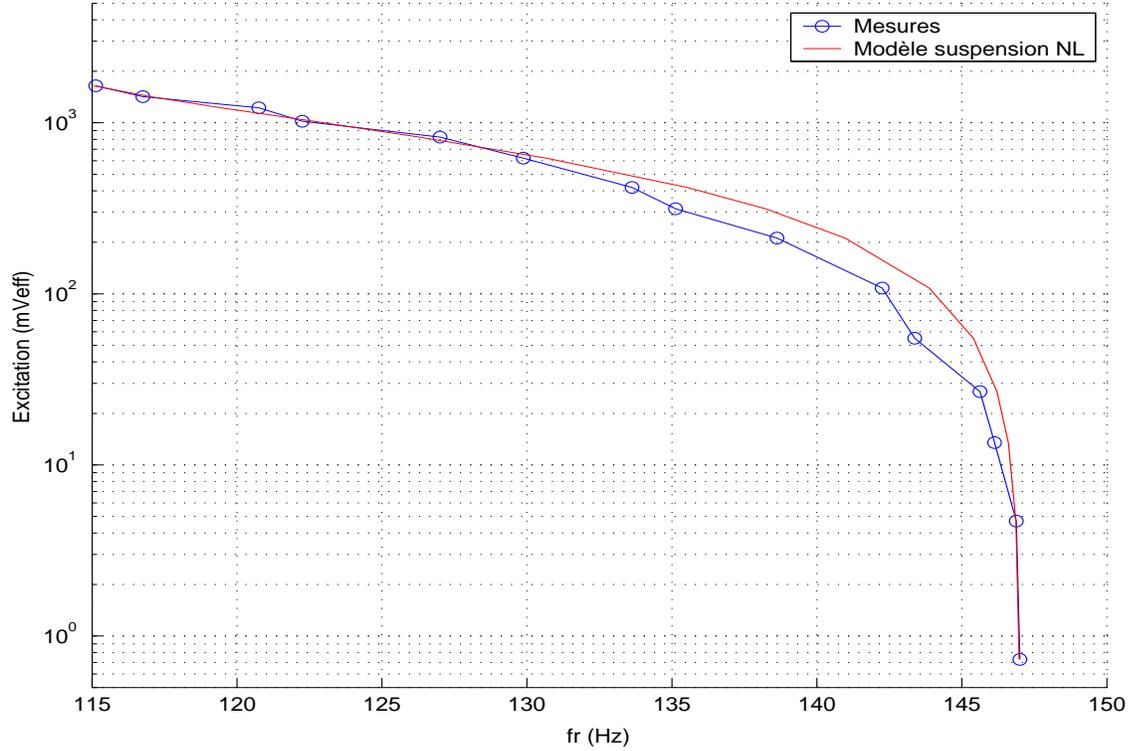
$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C_m}{M_m}} \quad (2.12)$$

où  $C_m$  désigne la raideur de la suspension et du diaphragme et  $M_m$  la Masse de l'équipage mobile.

Si on effectue une série de mesure de la fréquence de résonance à différentes amplitudes, on s'aperçoit qu'il y a un déplacement non négligeable de la fréquence de résonance (maximum de l'amplitude) en fonction de l'amplitude de l'excitation. On arrive ainsi à une diminution de 20% à très fort niveau (figure 2.4). On aurait ainsi un assouplissement de la partie mobile (de la suspension a priori) à fort niveau. Ceci laisse penser qu'il existe des sources de non linéarité au niveau de la suspension (raideur dépendant de l'amplitude) ou de la masse (masse mobile dépendant de l'excitation ?).

On peut ainsi trouver une relation simple qui puisse expliquer les variations de fréquence de résonance en fonction de l'amplitude d'excitation. Ceci a été réalisé sous Matlab par ajustement de la courbe mesurée avec un modèle de non-linéarité cubique et quadratique pour la raideur en fonction du déplacement membranaire et une masse constante (hypothèse la plus vraisemblable) :

$$C_m(x) = k_0(1 + \epsilon_2 x + \epsilon_3 x^2)$$


 FIG. 2.4 – Déplacement de la fréquence de résonance en fonction de  $U_{ent}$ 

Au premier ordre, on peut supposer que  $x \simeq x_1$  d'où le modèle suivant pour la suspension dépendant de  $x_1$  :

$$C_m(x_1) = k_0(1 + \epsilon_2 x_1 + \epsilon_3 x_1^2)$$

ce qui conduit à :

$$f_0(x_1) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_0}{M_m} (1 + \epsilon_2 x_1 + \epsilon_3 x_1^2)}$$

On peut ainsi ajuster les paramètres  $f_0(0)$ ,  $\epsilon_2$  et  $\epsilon_3$  pour faire correspondre le modèle aux relevés. On aboutit ainsi aux résultats suivants :

$$\begin{cases} f_0(0) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_0}{M_m}} = 143.88 \text{ Hz} \\ \epsilon_2 = -8.705 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \\ \epsilon_3 = 3.927 \cdot 10^{-9} \text{ m}^{-2} \end{cases}$$

Le fait que  $\epsilon_2$  soit négatif montre bien l'effet assouplissant de la suspension à fort niveau.

Les résultats tendent ainsi à expliquer le déplacement de la fréquence de résonance comme étant principalement dû à la non linéarité quadratique et cubique de la suspension pour une faible amplitude d'excitation et due à la non linéarité cubique pour une excitation plus importante.

### 2.4.3 Estimation des non-linéarités de l'amortissement

Le modèle défini précédemment suppose l'existence d'une suspension non-linéaire mais ne prend pas en compte les variations d'amortissement en fonction de l'excitation d'entrée. En effet, au regard des relevés (courbes 3D), on remarque que la résonance est plus accrue pour une faible excitation : on doit donc s'attendre à avoir une suspension non linéaire qui traduirait une augmentation de  $R_m$  (amortissement) défini dans l'équation 2.10 avec l'amplitude de l'excitation.

En jouant sur les coefficients du modèle, on peut estimer cette élévation de  $R_m$  de l'ordre de 30 % entre le fonctionnement linéaire et le régime de distorsion (tension d'entrée de 5V), ce qui n'est pas négligeable. Près de la résonance, on a :

$$x_1(\omega, Ue) = \frac{U_e}{\omega^2 - \omega_r^2(x_1) - jR_m(x_1)\omega_r\omega}$$

on a ainsi :

$$|x_1(\omega_r, Ue)| \simeq \left| \frac{U_e}{R_m(x_1)\omega_r^2} \right|$$

Les coefficients  $\omega_r$  ayant été calculés précédemment, par une simple mesure du rapport  $U_e/x_1$  à la résonance, on obtient la valeur de  $R_m$  :

Afin de modéliser les variations de l'amortissement, on suppose que l'on peut exprimer la raideur sous la forme :

$$C_m(x_1, \omega) = k_0(1 + \epsilon_2 x_1 + \epsilon_3 x_1^2)(1 + j\eta(x_1)\omega)$$

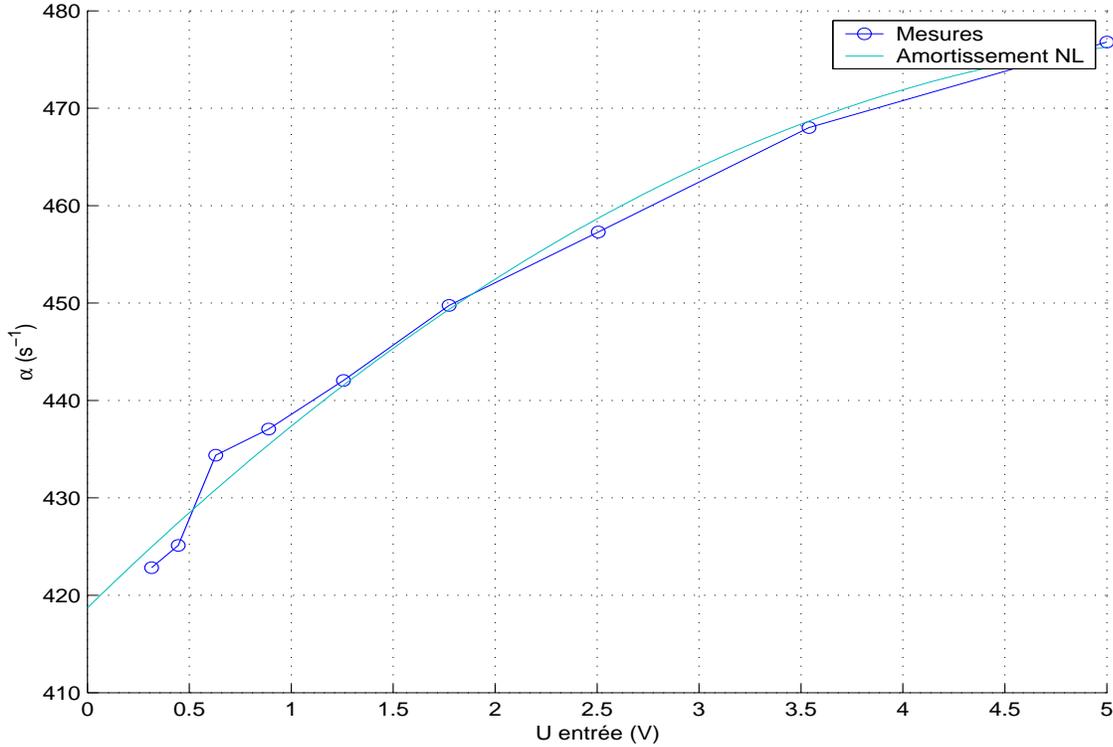
Ce qui conduit alors à un coefficient d'amortissement tel que :

$$R_m(x_1) = k_0\eta(1 + 2\epsilon_2 x_1 + 3\epsilon_3 x_1^2)$$

On peut ainsi ajuster le paramètre  $\eta$  pour faire correspondre notre modèle aux mesures effectuées. On aboutit alors à :

$$R_m(0) = k_0\eta = 418s^{-1}$$

Néanmoins, la modélisation finale, par souci de simplicité, ne tient pas compte de la dépendance de  $R_m$  par rapport à  $x_1$ .

FIG. 2.5 – Variations de l’amortissement en fonction de  $U_{ent}$ .

#### 2.4.4 Estimation des non-linéarités de la force excitatrice.

Dans son étude sur la calibration d’un excitateur électro-magnétique [10], O. Thomas insiste sur le fait qu’il faut prendre en compte les non-linéarités dues aux variations de champ magnétique suivant la position de la bobine. En effet, le champ magnétique n’est pas uniforme au sein de l’entrefer (le champ est maximal au centre) et dans ce cas, pour de grandes excursions, la force de rappel devient moins importante. Pour modéliser ces effets, on peut considérer un modèle simple de non-linéarités de la force d’excitation :

$$E(x) = \frac{e_g B l_0}{R_e} (1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2)$$

Il n’existe guère de moyens simples pour estimer ces paramètres autrement qu’en calculant directement les variations de champ magnétique aux extrémités de l’aimant (effets de bord). Ceci ne faisant pas l’objet du stage, les coefficients  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ont été estimés de manière empirique. Pour ce faire, on peut observer l’influence de ces deux paramètres sur les résultats de la simulation de la vitesse membranaire (cf paragraphe 2.5). Cependant, le choix de ces 2 variables doit respecter le fait que  $E(x) \leq E_0$ , cad  $\gamma_1 < 0$ .

## 2.5 Résultats de la modélisation

Il devient alors possible d'inclure les paramètres estimés dans un modèle de type équation de Duffing pour le déplacement de la membrane tel que :

$$\boxed{M_m \ddot{x} + R_m \dot{x} + k_0(1 + \epsilon_2 x + \epsilon_3 x^2)x = \frac{e_g B l_0}{R_e}(1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2) \cos \omega t} \quad (2.13)$$

On peut alors obtenir des solutions approchées de cette équation par la méthode de l'équilibrage harmonique. Pour ce faire, on décompose  $x(t)$  selon ses 3 premiers harmoniques :

$$x(t, E, \omega) = x_0(\omega, E) + x_1(\omega, E) \cos \omega t + x_2(x_1, \omega) \cos 2\omega t + x_3(x_1, \omega) \cos 3\omega t$$

On résout ces équations pour le régime statique, ce qui nous permet d'obtenir une équation pour  $x_0$  :

$$\omega_r^2(x_0 + \epsilon_2(x_0^2 + \frac{x_1^2}{2}) + \epsilon_3(x_0^3 + \frac{x_0 x_1^2}{2})) = E_0 \frac{R_m}{2M_m}$$

ce qui permet d'aboutir au système suivant après linéarisation :

$$\begin{pmatrix} A_1(\omega, x_1) & A_2(\omega, x_1) \\ A_3(\omega, x_1) & A_4(\omega, x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B(\omega, x_1)$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1(\omega, x_1) &= \omega_r^2(1 + \frac{3}{2}\epsilon_3 x_1^2 + \epsilon_2 x_0) - 4\omega^2 + 2j\alpha\omega - E_0\gamma_2 x_1 \\ A_2(\omega, x_1) &= \omega_r^2(\epsilon_2 x_1 + 3\epsilon_3 x_0 x_1) - E_0(\frac{\gamma_1}{2} + 2\gamma_2 x_0) \\ A_3(\omega, x_1) &= 2\omega_r^2(\epsilon_2 x_1 + 3\epsilon_3 x_0 x_1) - E_0(\frac{\gamma_1}{2} + \gamma_2 x_0) \\ A_4(\omega, x_1) &= \omega_r^2(1 + \frac{3}{2}\epsilon_3(x_1^2 + 2x_0^2)) + 2\epsilon_2 x_0 - 9\omega^2 + 3j\alpha\omega - E_0\gamma_2 x_1 \end{aligned}$$

$$B(\omega, x_1) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2E_0\gamma_1 x_1 - 2\omega_r^2(\epsilon_2 x_1^2 + 6\epsilon_3 x_0 x_1^2) \\ E_0\gamma_2(x_1^2 + x_0 x_1) - \epsilon_3 \omega_r^2 x_1^3 \end{pmatrix}$$

L'estimation des non-linéarités s'effectue donc en prenant comme paramètre le niveau du fondamental ( $V_{memb}$  mesuré), la fréquence considérée  $\omega$  et les paramètres du modèle estimés qui sont :  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$ ,  $R_m$ ,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  et le facteur d'échelle Ech défini par :

$$Ech = \frac{j\omega x_1}{V_{memb}}$$

Il devient alors possible d'effectuer une représentation 3D (fréquence, Uentrée, niveau des harmoniques générés) et de les comparer aux résultats mesurés directement sur le HP (figure 2.6).

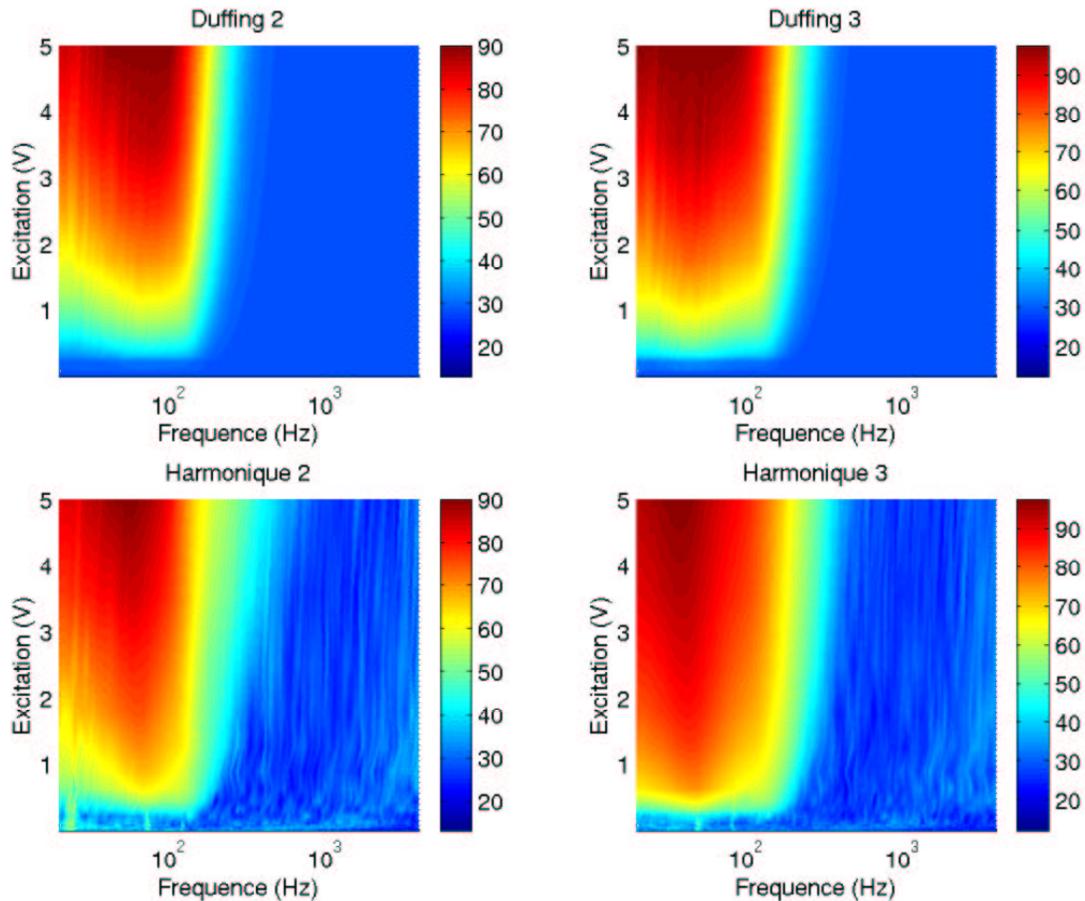


FIG. 2.6 – Vitesse membranaire (dB) pour les harmoniques 2 et 3 en fonction de la fréquence (échelle log) et de l’amplitude d’excitation. En haut : résultats de la simulation par l’équation de Duffing à 1 degré de liberté. En bas : résultats expérimentaux.

La restriction au domaine des basses fréquences (pour  $\omega \ll \Omega$ ) permet d’obtenir une bonne modélisation des non-linéarités dues à la suspension et la force d’excitation. On peut ainsi modéliser de manière correcte la génération des distorsions harmoniques en basses fréquences par une équation de type Duffing. Par manque de temps, je n’ai pas pu aborder le mécanisme de génération d’harmoniques en utilisant l’équation du troisième ordre en  $x$ .



## Chapitre 3

# Analyse modale expérimentale et numérique de la membrane

### 3.1 Principe d'identification des modes de la structure

En effectuant des relevés de vitesse au centre de la membrane (figure 3.4), on s'aperçoit que la réponse en fréquence comporte des pics qui correspondent aux différents modes de la structure en mouvement.

Pour chaque mode de la structure, il est nécessaire d'effectuer des relevés des déformées au niveau de la suspension et de la membrane, afin de pouvoir observer l'ordre d'apparition des modes. Ceci a été réalisé par balayage de la surface membranaire en utilisant la vibrométrie laser (mesure instantanée de la vitesse sans contact). On obtient ainsi, après analyse par le logiciel PSV, la visualisation 2D et 3D des déformées modales de la structure et l'identification des modes s'effectue de manière visuelle.

### 3.2 Conventions et nomenclature des modes

Dans toute cette étude, nous distinguons les différents modes en différenciant les modes axisymétriques et asymétriques. Ainsi, on nommera par  $(m, n)$  le mode possédant  $m$  lignes modales et  $n$  cercles nodaux. Les modes  $(0, n)$  correspondent ainsi à des modes axisymétriques purs et les modes  $(m, 0)$  à des modes asymétriques purs.

De plus, il est intéressant de diviser la structure en 2 sous-structures, à savoir la membrane désignée par  $m$  et la suspension désignée par  $s$ . La membrane étant considérée comme une coque circulaire encadrée à ses extrémités, tous les modes de membrane (indexés par  $m$ ) possèdent un cercle nodal (périphérie de la coque). Ainsi, le mode  $(1, 1)m$  correspond au mode de membrane possédant un cercle nodal (donc à la périphérie de la membrane) et un diamètre nodal. On se ramène ainsi au mode de la figure (3.8.d).

### 3.3 Analyse modale HP Harman

#### 3.3.1 Modes dans le spectre audible

On peut caractériser chaque 'pic' sur la courbe d'amplitude en fonction de la fréquence (vitesse membranaire au centre et sur la suspension pour  $f$  de 20 Hz à 5 kHz) et identifier les modes de la structure :

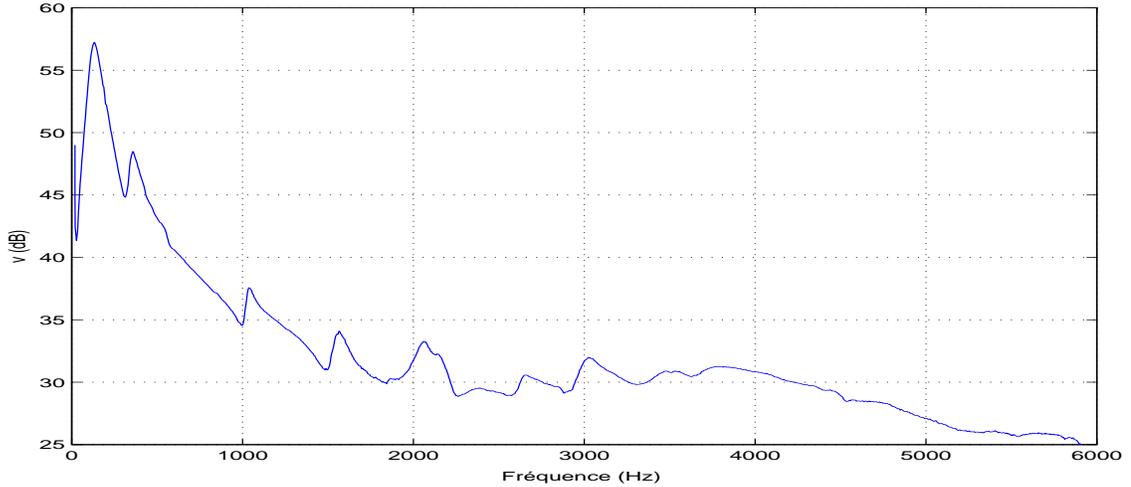


FIG. 3.1 – Mesures de la vitesse (dB) en fonction de la fréquence pour la suspension du prototype Harman. La référence (0 dB) est de  $125 \text{ mm.s}^{-1}$

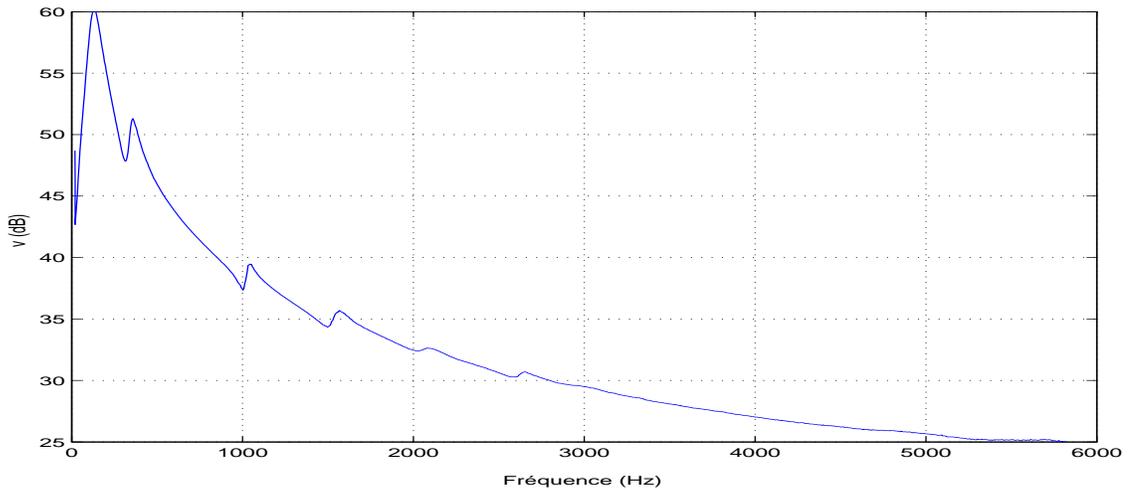


FIG. 3.2 – Mesures de la vitesse (dB) en fonction de la fréquence pour la membrane du prototype Harman. La référence (0 dB) est de  $125 \text{ mm.s}^{-1}$

On obtient alors l'ordre suivant pour le HP considéré :

Fréquence (Hz)	Mode Suspension	Mode Membrane	Mode Structure	Déformée Modale
141.5	(0,0)	(0,0)	(0,0)	
389.9	(1,0)	(0,0)	(1,0)s	
1043.7	(2,0)	(0,0)	(2,0)s	
1573.5	(3,0)	(0,0)	(3,0)s	
2048.5	(0,1)	(0,0)	(0,1)s	
2342.0	(1,1)	(0,0)	(1,1)s	
2688.0	(4,0)	(0,0)	(4,0)s	
3012.0	(0,2)	(0,0)	(0,2)s	

TAB. 3.1 – Modes de la structure (suspension+membrane) entre 0 et 6kHz.

Il est très difficile d'identifier les modes pour une fréquence supérieure à 3 kHz car il s'agit de modes de suspension qui sont très amortis et étant donnée la géométrie de celle-ci, la visualisation était assez peu fiable.

Il est intéressant de noter un couplage important entre la membrane et la suspension. En effet, les modes de la suspension, présents pour des fréquences inférieures à 6 kHz, vont légèrement influencer le mouvement de piston plan. Il est donc impossible de dissocier les deux éléments en vue d'effectuer une analyse modale. Cependant, il apparait que certains modes concernent uniquement la suspension : en effet, il s'agit d'un solide extrêmement élastique et on peut observer que les modes (0,1) et (0,2) engendrent uniquement un déplacement de la suspension alors que la membrane se comporte quasiment comme un solide rigide dans le domaine étudié (0 à 6 kHz).

On remarque également que les premiers modes de la structure sont plus marqués sur les relevés effectués sur la suspension (figure 3.1). Ceci est dû au fait que cette structure est moins amortie que la membrane donc les pics s'en détachent mieux.

### 3.3.2 Modes de membrane

En regardant les premiers modes de la structure, on est tout de suite étonné de remarquer que seuls les modes de suspension apparaissent dans le spectre audible. En effet, on pourrait s'attendre à observer les modes de la membrane pour des longueurs d'onde de l'ordre de quelques centimètres (typiquement en moyennes et hautes fréquences). La figure 3.3 montre l'apparition des modes de la membrane et leur influence sur la vitesse membranaire jusqu'à 25 kHz.

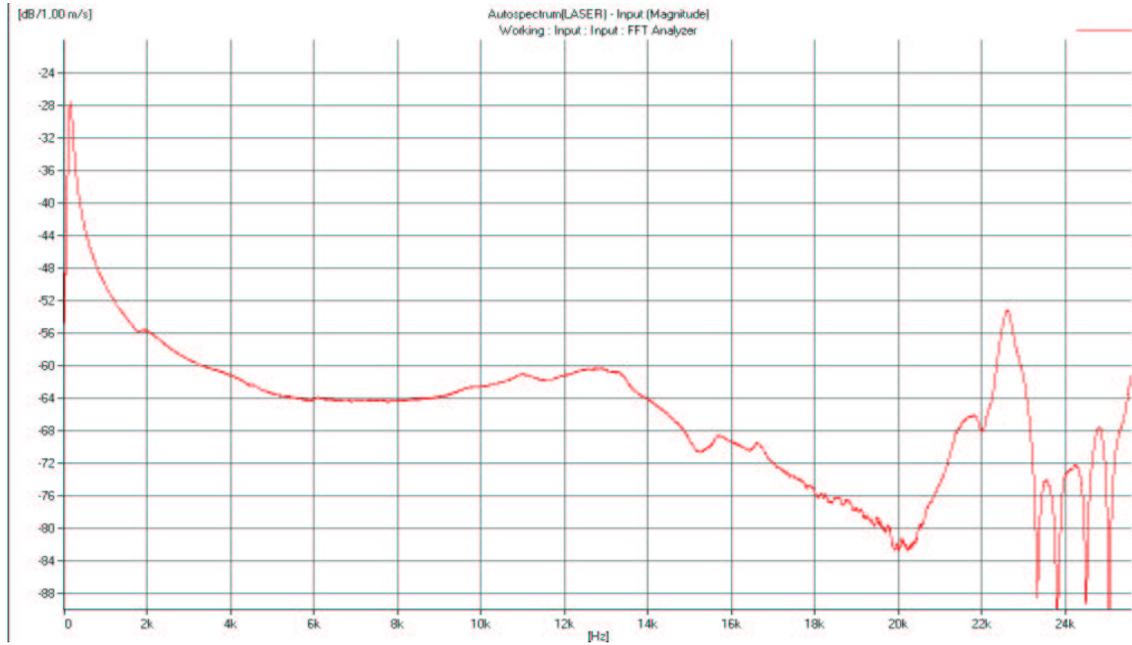


FIG. 3.3 – Mesures de vitesse membranaire (dB) au centre pour  $f \leq 25.6kHz$

On observe ainsi que les deux premiers modes de la membrane (modes  $(0,1)m$  à  $f=11055$  Hz et  $(1,1)m$  à  $f=13179$  Hz) à apparaître sont très amortis comparés aux modes axisymétriques. Ceci est apparemment dû à la présence de nombreux modes de suspension couplés aux premiers modes de la membrane (hypothèse difficilement vérifiable).

Les modes ainsi identifiés peuvent être ainsi classés suivant le critère suivant :

- pour  $f \ll 10kHz$ , les modes intervenant sont les modes de la suspension qui perturbent peu le déplacement membranaire.

- pour  $f \gg 10kHz$ , les modes intervenant sont les modes de la membrane qui ont un effet plus important sur la réponse en fréquence du système.

Fréquence (kHz)	Mode Suspension	Mode Membrane	Mode Structure	Déformée Modale
11,055	(0,0)	(0,1)	(0,1)m	
13,179	(0,0)	(1,1)	(1,1)m	
15,710	(0,1)	(1,1)	(1,2)ms	
21,760	(0,0)	(2,1)	(2,1)m	
22,590	(0,0)	(0,2)	(0,2)m	
23,550	(0,0)	(0,3)	(0,3)m	
24,250	(0,0)	(0,4)	(0,4)m	
24,840	(0,0)	(0,5)	(0,5)m	

TAB. 3.2 – Modes de la structure (suspension+membrane) entre 10 kHz et 25,6kHz.

### 3.4 Analyse Modale HP SP165 PA

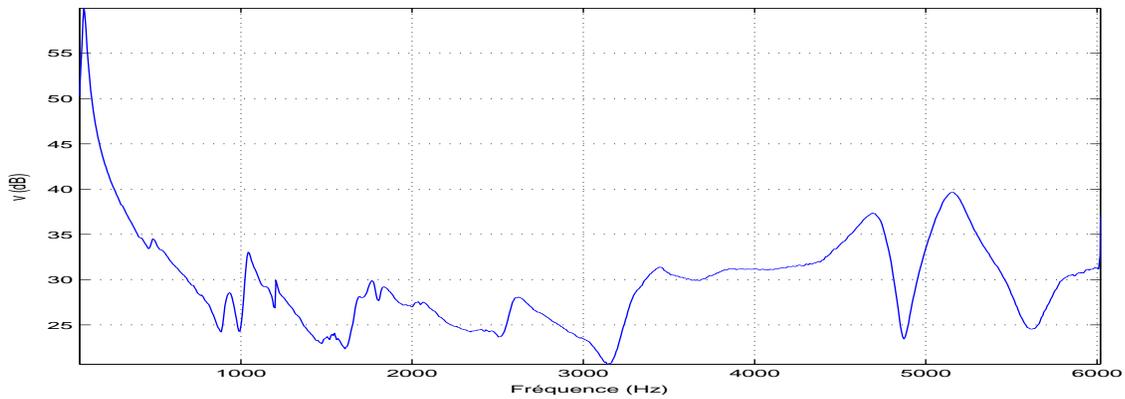
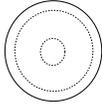
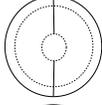
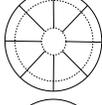
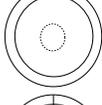
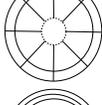
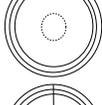
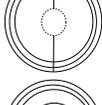
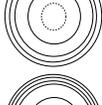
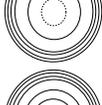
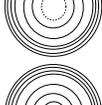
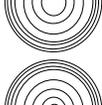
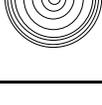


FIG. 3.4 – Mesures de vitesse (dB) au centre de la membrane du HP SP165 PA en fonction de la fréquence. La référence (0dB) est de  $125 \text{ mm.s}^{-1}$

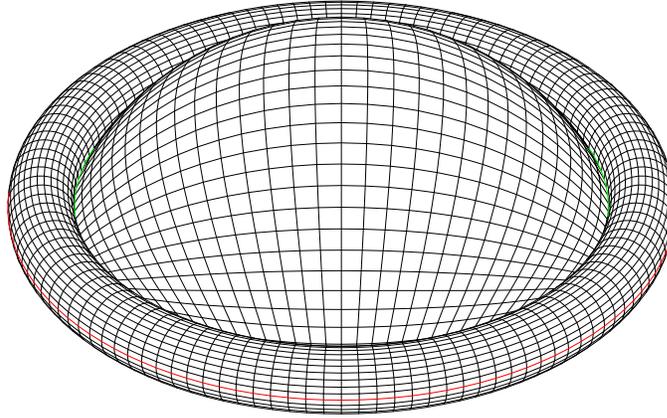
Fréquence (Hz)	Mode Suspension	Mode Membrane	Mode Cône	Déformée Modale
79	(0,0)	(0,0)	(0,0)	
531	(1,0)	(1,0)	(0,0)	
727	(4,0)	(0,0)	(0,0)	
1040	(0,1)	(0,0)	(0,0)	
1211	(4,1)	(4,0)	(0,0)	
1767	(0,2)	(0,0)	(0,0)	
1851	(1,2)	(1,0)	(0,0)	
2611	(0,2)	(0,1)	(0,0)	
3456	(0,3)	(0,1)	(0,0)	
4691	(0,3)	(0,2)	(0,0)	
5161	(0,3)	(0,3)	(0,0)	
5946	(0,3)	(0,3)	(0,1)	

TAB. 3.3 – Modes des différentes sous-structures pour le HP SP165 PA.

Au vu de ces résultats, il apparaît que les mode de membrane du HP Stage-Line SP165PA apparaissent à des fréquences nettement inférieures à celles du prototype à dôme. La conséquence principale sera une modification de la réponse en fréquence dans la gamme de fréquence 0-6 kHz.

### 3.5 Modélisation numérique par éléments finis.

Afin de pouvoir bien observer et comprendre l'ordre d'apparition des modes, il est intéressant d'effectuer la simulation numérique sous CASTEM 2002 des modes propres de la structure membrane + suspension. J'ai utilisé des éléments de type coques minces et la liaison entre les 2 matériaux (verre et caoutchouc) a été modélisée par des conditions de blocage en rotation suivant les axes UY et UX (plan du HP).



GIBI FECHT

FIG. 3.5 – Maillage de la simulation numérique.

Afin d'effectuer une modélisation réaliste de l'équipage mobile, il est nécessaire de prendre en compte la masse de la bobine et du raccord bobine-membrane. Cela est réalisé par addition d'une masse ajoutée sur la périphérie de la membrane (à la jonction membrane-suspension). Afin de calibrer la simulation numérique, j'ai donc dû mesurer avec précision la masse totale de l'équipage mobile. Cette mesure a été effectuée par ajout d'une masse sur la membrane. En effet, si l'on considère une masse  $M'$  ajoutée au système, on observe un décalage de la fréquence de résonance de l'oscillateur :

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K}{M + M'}}$$

On peut alors estimer la masse de l'équipage mobile par mesure du décalage de fréquence de résonance. Ceci a été réalisé avec 2 masses différentes (1g et 2g) pour

différentes tensions d'entrée. On aboutit alors à la valeur moyenne de :

$$M = M' \left( \frac{f'^2}{f^2 - f'^2} \right) = 3.577 \text{ g } (\pm 0.1 \text{ g})$$

En ce qui concerne les matériaux utilisés, j'ai dû adapter les modules d'Young afin de faire correspondre les fréquences observées et les fréquences données par la simulation numérique (recalage de la simulation numérique). On aboutit alors aux résultats suivants, à comparer avec les relevés effectués sur la membrane (figure 3.4) et la suspension (figure 3.1). Le sigle *nég* signifie que le déplacement est négligeable. L'absence de fréquence signifie que le mode n'a pas été observé expérimentalement :

<i>Fréquence calculée(Hz)</i>	<i>Fréquence mesurée(Hz)</i>	<i>Mode</i>	<i>Déplacement Suspension</i>	<i>Déplacement Membrane</i>
137	141	(0, 0) <i>sm</i>	✓	✓ <i>nég</i>
444	389	(1, 0) <i>sm</i>	✓	✓ <i>nég</i>
926	1043	(2, 0) <i>sm</i>	✓	✓ <i>nég</i>
1406	1573	(3, 0) <i>sm</i>	✓	✓ <i>nég</i>
1408		(1, 2) <i>sm</i>	✓	✓ <i>nég</i>
1857		(2, 1) <i>s</i>	✓	
1859		(3, 1) <i>s</i>	✓	
1892		(1, 1) <i>s</i>	✓	
1907	2048	(0, 1) <i>s</i>	✓	
1926		(4, 1) <i>s</i>	✓	
1976		(5, 1) <i>s</i>	✓	
2184	2342	(1, 1) <i>sm</i>	✓	✓ <i>nég</i>
2196		(6, 1) <i>s</i>	✓	
2304		(4, 2) <i>sm</i>	✓	✓ <i>nég</i>
2455		(7, 1) <i>s</i>	✓	
2733		(8, 1) <i>s</i>	✓	
14745	11055	(0, 0) <i>m</i>		✓
15276	13179	(1, 0) <i>m</i>		✓
21918	22590	(0, 1) <i>m</i>		✓
22272		(1, 1) <i>m</i>		✓
22655	23550	(0, 2) <i>m</i>		✓
22676		(2, 1) <i>m</i>		✓
22700		(1, 2) <i>m</i>		✓
22745		(2, 2) <i>m</i>		✓
23210	24250	(0, 3) <i>m</i>		✓

TAB. 3.4 – Comparaison entre fréquences propres mesurées et calculées sous CASTEM.

On peut ensuite calculer les premières déformées modales de la structure, comme le montrent les figures 3.6 à 3.8. Les résultats semblent assez proches mais compte tenu du nombre de paramètres à recalculer, on se contentera de cette modélisation qui permet de comprendre l'ordre d'apparition des modes :

- Les 5 premiers modes entraînent des déformations des 2 parties (suspension et membrane) et dans ce cas, les modes ont un impact direct sur la réponse en fréquence du HP. Néanmoins, on peut considérer que le mouvement reste celui d'un piston plan car les déplacements membranaires sont négligeables.

- Pour  $f \in [2; 12] \text{ kHz}$ , la plupart des modes sont des modes de suspension qui n'ont pas d'incidence (ou peu) sur le déplacement de la membrane. Les effets de ces modes sont difficilement observables.

- Pour  $f \gtrsim 14 \text{ kHz}$ , on a apparition des modes axisymétriques et asymétriques de la membrane qui vont influencer le rayonnement de manière importante.

Cette étude expérimentale et numérique montre ainsi qu'il existe bien une limite de fonctionnement au mode de piston plan, située dans le spectre audible, qui correspond à la fréquence du premier mode de la membrane. Elle met également l'accent sur le fait que ces deux haut-parleurs, bien que possédant des paramètres électromécaniques proches (cf chapitre 2), ont un comportement vibratoire totalement différent. Il est donc nécessaire de s'intéresser à ce qui fait vraiment la différence entre 2 haut-parleurs, à savoir la forme (la taille) et le matériau utilisés dans leur conception.

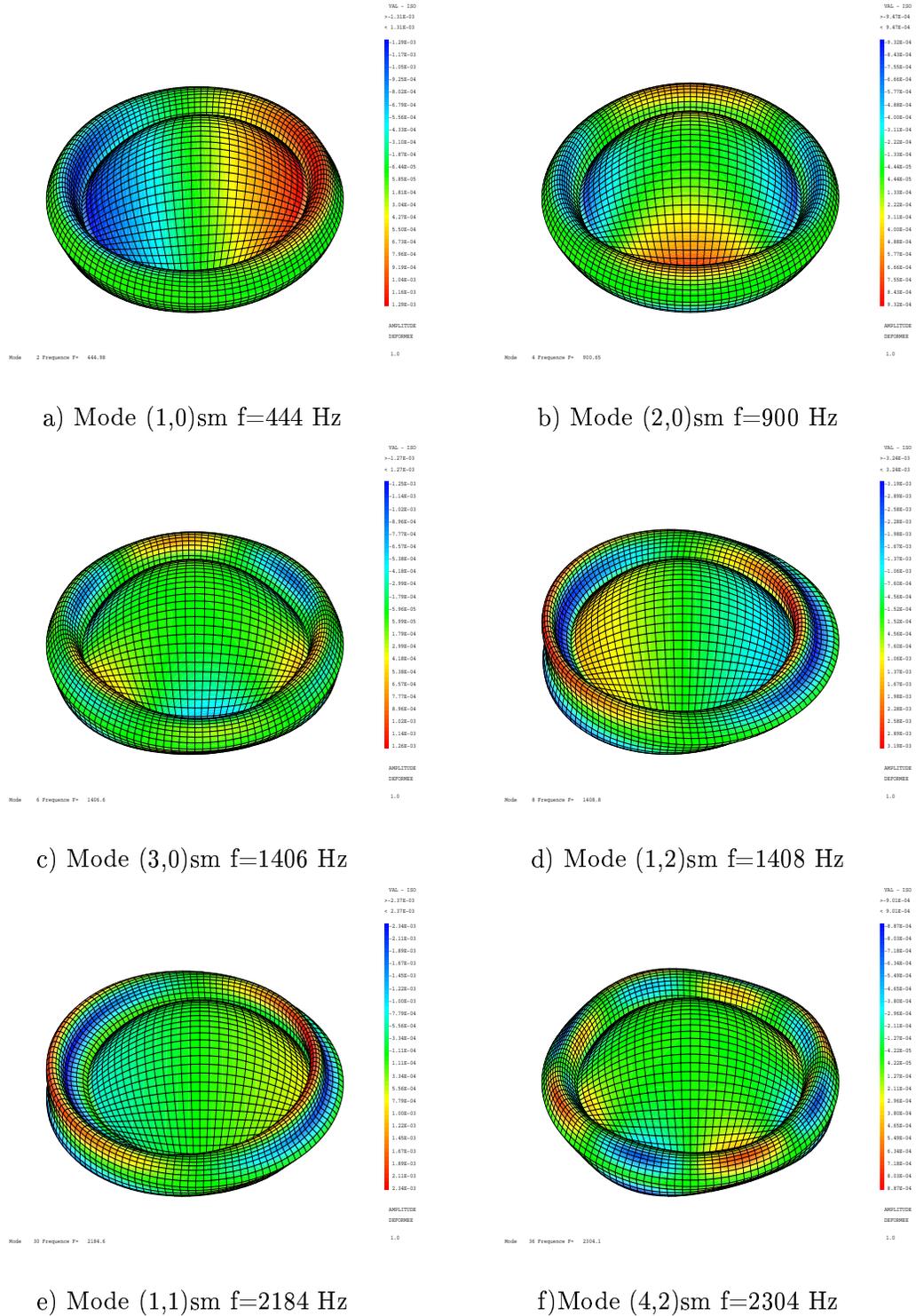


FIG. 3.6 – Modes de la structure complète et fréquences calculés sous CASTEM. Les sigles  $m$  et  $s$  désignent respectivement une déformation de la membrane ou de la suspension.

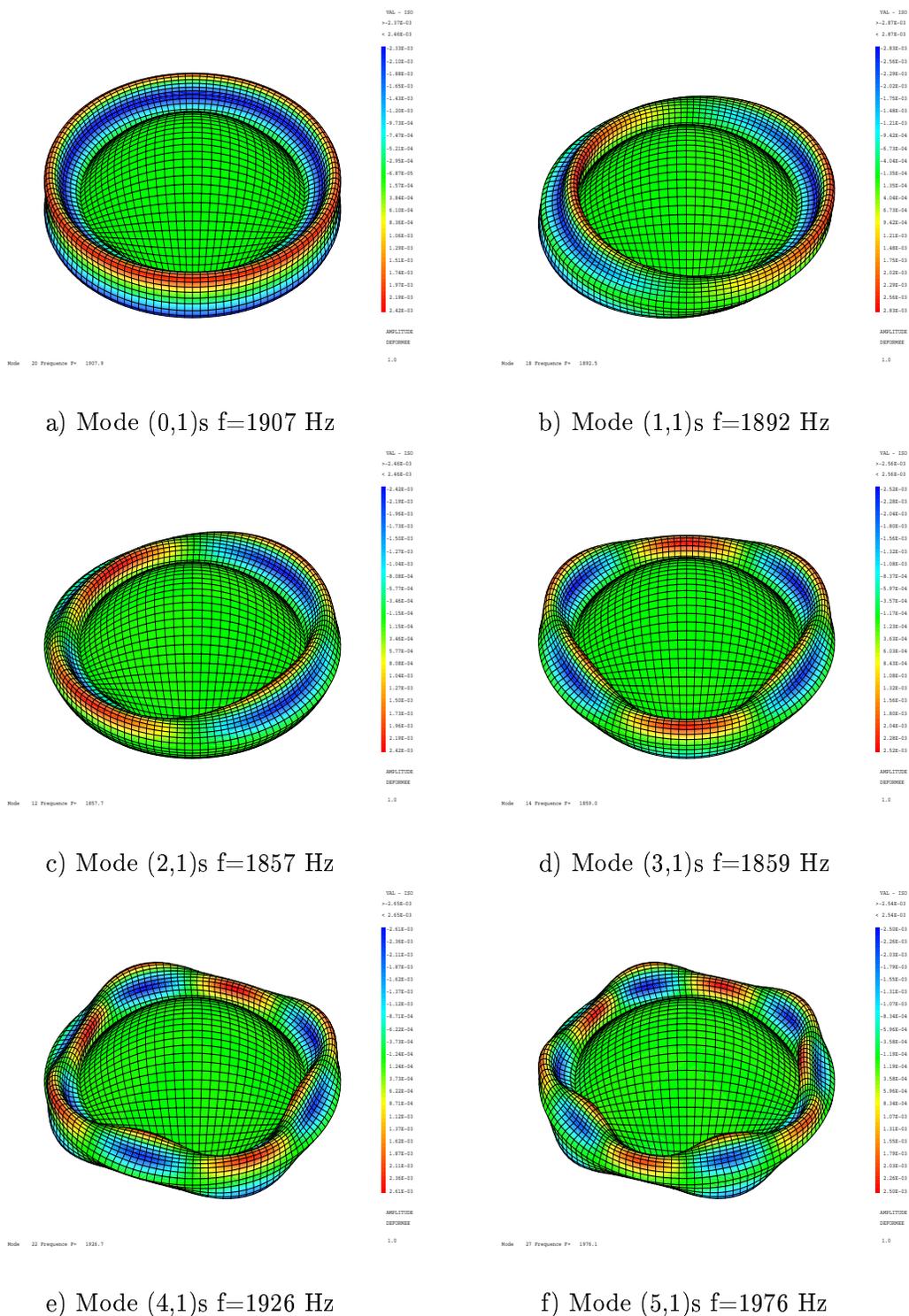


FIG. 3.7 – Modes de suspension et fréquences calculés sous CASTEM. Les sigles  $m$  et  $s$  désignent respectivement une déformation de la membrane ou de la suspension.

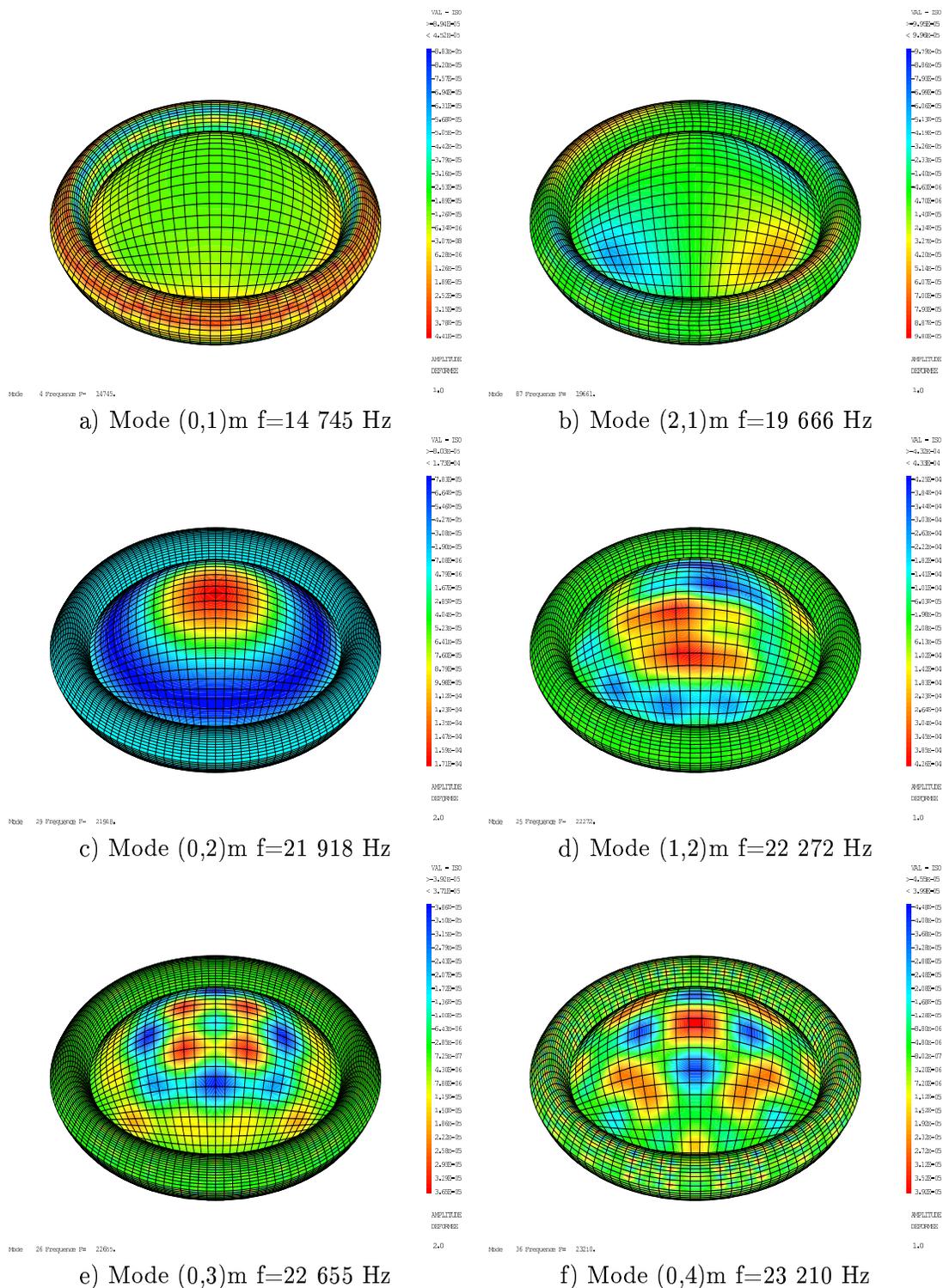


FIG. 3.8 – Modes de membrane et fréquences calculés sous CASTEM. Les sigles  $m$  et  $s$  désignent respectivement une déformation de la membrane ou de la suspension.

## Chapitre 4

# Rayonnement et directivité du haut-parleur

### 4.1 Expression du champ de pression

Le fait d'introduire les modes de la structure dans le schéma global du Haut-Parleur va permettre de calculer le champ de pression rayonnée en chaque point de l'espace : on passe ainsi d'un modèle 1D (Thiele & Small) à un modèle 2D en considérant les modes axisymétriques et asymétriques de la structure. Afin d'implémenter la partie acoustique, il est obligatoire d'effectuer le calcul du champ de pression par résolution de l'intégrale [14] :

$$\boxed{P(M, t) = \rho_{air} \omega^2 \int_S G(M, Q) U(Q, t) dQ} \quad (4.1)$$

$$G(M, Q) = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-j\omega/c\|MQ\|}}{\|MQ\|}$$

où  $U(Q, t)$  désigne le déplacement de la membrane au point  $Q$  et  $G(M, Q)$  la fonction de Green pour un point source dans le plan de la membrane. On peut alors décomposer le mouvement de la membrane en un mouvement d'ensemble (mouvement de piston plan) noté  $U_0$  et un déplacement vibratoire noté  $\tilde{U}(Q)$  :

$$U(Q, t) = \left( U_0 + \tilde{U}(Q) \right) \cos \omega t \quad (4.2)$$

On décompose ensuite  $\tilde{U}(Q)$  selon les déformées propres de la structure (calcul en Annexe A) :

$$\tilde{U}(Q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} U_{mn}(Q) \quad (4.3)$$

$$U_{mn}(Q) = \left( J_m \left( A_{mn} \frac{r}{a} \right) - \frac{J_m(A_{mn})}{I_m(A_{mn})} I_m \left( A_{mn} \frac{r}{a} \right) \right) \cos m\theta \quad (4.4)$$

Dans cette expression,  $a_{mn}$  désigne l'amplitude d'excitation du mode  $(m, n)$ .  
On aboutit ainsi à la formulation suivante pour le champ de pression totale :

$$P(M, t) = \rho_{air} \omega^2 \left( U_0 \int_S G(M, Q) dQ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} \int_S G(M, Q) U_{mn}(Q) dQ \right) \quad (4.5)$$

La résolution de cette expression nécessite donc la connaissance de  $U_0$  ainsi que l'expression des amplitudes  $a_{mn}$ .

## 4.2 Mode de piston plan

Dans le cas du mode de piston plan, on peut se ramener (cf Annexe B) à l'équation modale suivante :

$$M_m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\eta_0\omega\omega_0)U_0 = F_0 - 2j\omega \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn}^0 a_{mn} + Z_0^R U_0 \right) \quad (4.6)$$

avec :

$M_m = \int_S \rho h$  : masse de l'équipage mobile.

$C_m = \int_S C_0$  : Compliance de la suspension.

$\omega_0^2 = \frac{C_m}{M_m}$  : fréquence de résonance de l'équipage mobile.

$\eta_0$  : amortissement interne au niveau de la suspension.

$Z_{mn}^0 = j\rho_{air}\omega \int_S \int_S G(Q, Q') U_{mn}(Q') dQ dQ'$  : Impédance croisée du mode de piston plan avec le mode  $(m, n)$ .

$Z_0^R = j\rho_{air}\omega \int_S \int_S G(Q, Q') dQ dQ' = j\rho\omega c S \left[ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + j \frac{S_1(2ka)}{ka} \right]$  : Impédance de rayonnement du mode de piston plan.

On remarque que pour les modes asymétriques, l'impédance croisée  $Z_{(p,q)}^0$  est nulle. En revanche, pour les modes axisymétriques, celle-ci n'est pas nulle mais peut être négligée en première approximation devant l'impédance de rayonnement du piston plan. La figure 4.1 montre la comparaison entre l'impédance de rayonnement du mode de piston plan et l'impédance de rayonnement croisée du mode de piston plan avec le mode  $(0, 1)$ . Ces résultats sont à comparer avec la courbe d'impédance de rayonnement réduite pour le mode de piston plan.

On peut alors se ramener, pour le mode plan à l'équation "classique", en définissant l'impédance mécanique  $Z_0^M$  et l'impédance acoustique  $Z_0^R$  pour le mode de piston plan :

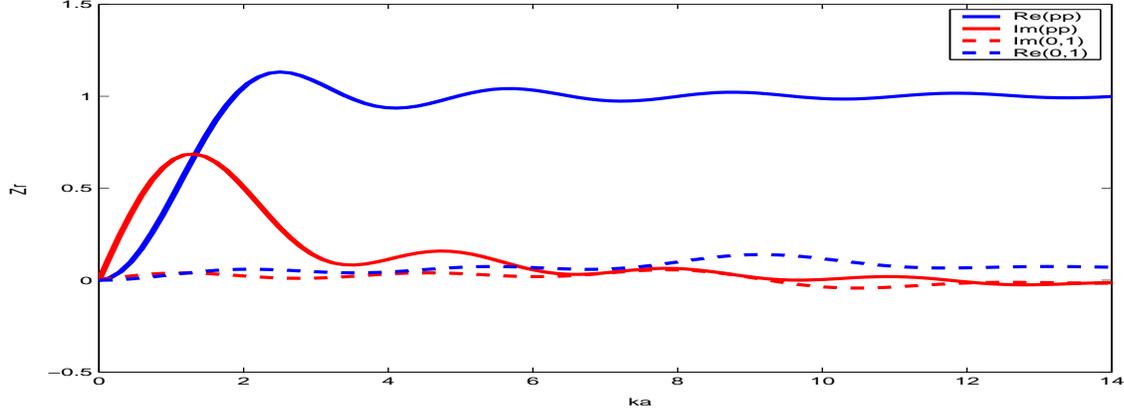


FIG. 4.1 – Impédance de rayonnement réduite croisée en fonction  $ka = wa/c$  : comparaison entre l'impédance de rayonnement du mode de piston plan (—) et l'impédance croisée entre le mode de piston plan et le mode (0,1) (- -).

$$U_0 = \frac{F_0}{j\omega M_m (Z_0^M + Z_0^R)} \quad (4.7)$$

avec :

$$Z_0^M = 2\eta_0\omega_0 - j \left( \frac{\omega_0^2}{\omega} - \omega \right)$$

$$Z_0^R = 2j\omega\rho cS \left[ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + j \frac{S_1(2ka)}{ka} \right]$$

Cette approche consiste donc à concevoir que le mode de piston plan n'est pas perturbé par les modes de la structure. En introduisant la transduction électro-mécanique, on obtient ainsi en fonctionnement linéaire l'expression du courant  $i(t)$  dans la bobine :

$$i(t) = \frac{e_g(t) - BlV_m(t)}{Z_E} \quad (4.8)$$

avec :

$$Z_E = R_E + j\omega L_E : \text{impédance électrique}$$

$$V_m(t) = j\omega \frac{\int_S U(Q,t) dQ}{S} : \text{valeur moyenne de la vitesse membranaire}$$

En première approximation et pour simplifier les calculs, on peut considérer que l'on a aucune réaction des modes de la membrane sur le courant induit dans la bobine. Cela revient à considérer que :

$$V_m(t) = V_0(t) = j\omega U_0$$

d'où le résultat bien connu :

$$U_0 = \frac{Ble_g}{j\omega Z_E \left( \frac{Bl^2}{Z_E} + Z_0^M + Z_0^R \right)} \quad (4.9)$$

### 4.3 Projection sur le mode (m,n)

On montre (cf calcul en Annexe B) que l'on peut se ramener, après projection sur le mode (m,n), à l'équation modale suivante :

$$\rho h N_{mn} a_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j\eta\omega) = F_{mn} - 2j\omega \left( \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} N_{mn} a_{mn} Z_{mn,pq} + U_0 Z_{mn}^0 \right) \quad (4.10)$$

avec :

$\omega_{mn}$  : pulsation propre du mode (m,n)

$\eta(\omega)$  : amortissement interne du matériau

$N_{mn} = \int_S U_{mn}(Q)^2 dQ$  : norme du mode (m,n)

$F_{mn} = \rho h \ddot{U}_0(t) \int_S U_{mn} dQ$  : force généralisée

$Z_{mn,pq} = \rho h \int_S \int_S \frac{j\rho\omega}{N_{mn}} U_{mn}(Q) G(Q, Q') U_{pq}(Q') dQ dQ'$  : impédance croisée du mode (m, n) et (p, q)

$Z_{mn}^0 = j\rho\omega \int_S \int_S G(Q, Q') U_{mn}(Q') dQ dQ'$  : impédance croisée du mode de piston plan avec le mode (m,n).

Il apparaît que pour les modes asymétriques, la force généralisée est nulle par symétrie de  $U_{mn}$  pour  $m \neq 0$ . Mais compte tenu que ces modes sont observables en réalité, on va les modéliser comme un défaut de l'excitation. Dans ce cas, on peut poser que pour les modes asymétriques, on a :

$$F_{mn} = \beta_{mn} \rho h \ddot{U}_0(t)$$

Dans ce cas, on pourra déterminer les coefficients  $\beta_{mn}$  grâce aux relevés de déplacement membranaire.

En définissant l'impédance mécanique  $Z_{mn}^M$  pour le mode  $(m,n)$ , on obtient :

$$j\omega \left( \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \rho h (Z_{mn}^M \delta_{mn,pq} + 2Z_{mn,pq}) a_{pq} + U_0 \frac{Z_{mn}^0}{N_{mn}} \right) = \frac{F_{mn}}{N_{mn}} \quad (4.11)$$

avec :

$$Z_{mn}^M = \eta \omega_{mn} - j \left( \frac{\omega_{mn}^2}{\omega} - \omega \right)$$

Dans le cas d'un fluide léger (typiquement l'air), le couplage intermodal ( $Z_{mn,pq}$  pour  $(m,n) \neq (p,q)$ ) est faible et les termes croisés sont alors négligeables. De plus, comme précédemment, on peut négliger l'impédance croisée du mode de piston plan avec les modes axisymétriques et asymétriques. En première approximation, on peut alors considérer que :

$$a_{mn} = \left( \frac{\int_S U_{mn}}{N_{mn}} \right) \frac{\ddot{U}_0}{j\omega (Z_{mn}^M + 2Z_{mn,mn})} \quad (4.12)$$

On peut alors décomposer l'impédance de rayonnement du mode  $(m,n)$  en une partie réelle notée  $R_{mn}$  constituant la résistance de rayonnement et une partie imaginaire notée  $I_{mn}$  constituant la réactance de rayonnement. On obtient alors :

$$a_{mn} = \frac{\alpha_{mn} \ddot{U}_0}{\omega_{mn}^2 - \omega^2 \left( 1 + \frac{M_{mn}}{\rho h} \right) + j\omega \omega_{mn} (\eta + \eta_{mn})} \quad (4.13)$$

où :

$$\alpha_{mn} = \left( \frac{\int_S U_{mn}}{N_{mn}} \right) \text{ pour les modes axisymétriques}$$

$$\alpha_{mn} = \left( \frac{\beta_{mn}}{N_{mn}} \right) \text{ pour les modes asymétriques.}$$

On distingue alors deux effets de l'action du fluide sur la structure :

- masse ajoutée :  $M_{mn} = \frac{I_{mn}}{\omega}$

- amortissement par rayonnement :  $\eta_{mn} = \frac{R_{mn}}{\rho h \omega_{mn}}$

## 4.4 Calcul des impédances modales de rayonnement

Afin de calculer les impédances modales de rayonnement, il faut résoudre l'intégrale suivante :

$$Z_{mn}^R = \int_S \int_S \frac{j\rho_{air}\omega}{N_{mn}} U_{mn}(Q) G(Q, Q') U_{mn}(Q') dQ dQ' \quad (4.14)$$

L'interprétation de l'impédance de rayonnement n'étant pas simple, il est plus com-  
mode d'exprimer l'impédance réduite de rayonnement :

$$zr_{mn}^R = \frac{Z_{mn}^R}{\rho_{air} c S} \quad (4.15)$$

Le calcul de cette intégrale a été effectué en utilisant un schéma de type trapèzes pour  
la résolution de l'intégrale en utilisant 30 points pour la résolution radiale et 100 points  
pour la résolution angulaire. Les figures suivantes montrent ainsi quelques exemples d'im-  
pédances de rayonnement modal pour les modes (0,1), (0,2), (1,0) et (2,0) :

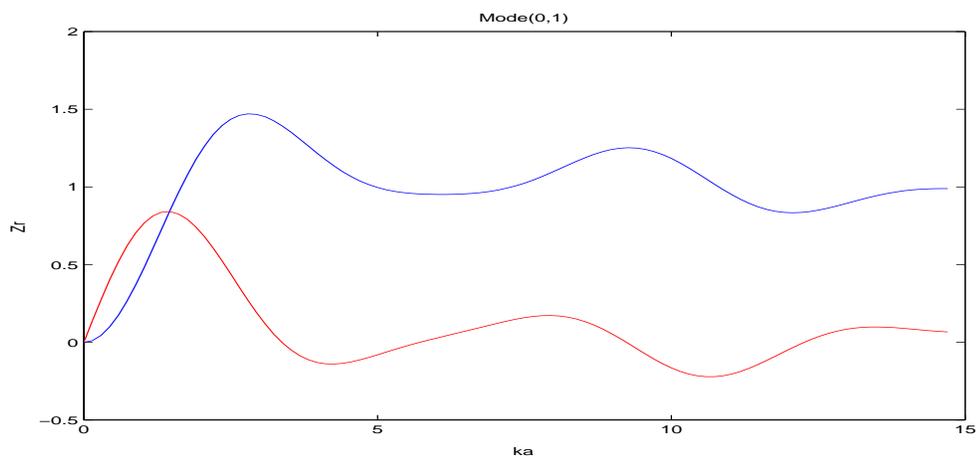


FIG. 4.2 – Impédance de rayonnement réduite du mode (0,1).

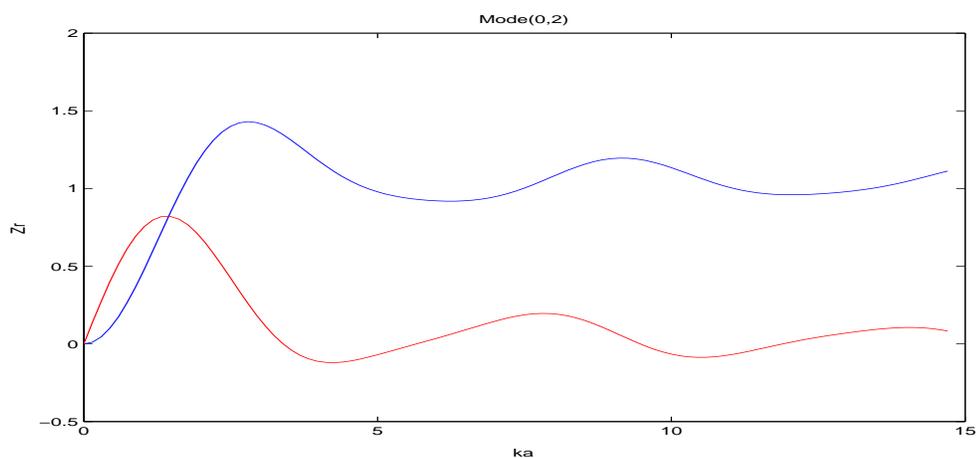


FIG. 4.3 – Impédance de rayonnement réduite du mode (0,2).

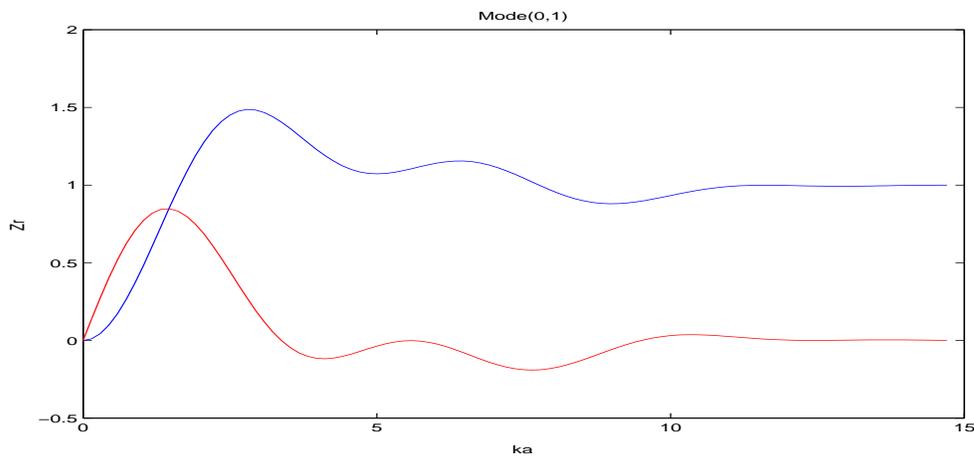


FIG. 4.4 – Impédance de rayonnement réduite du mode (1, 0).

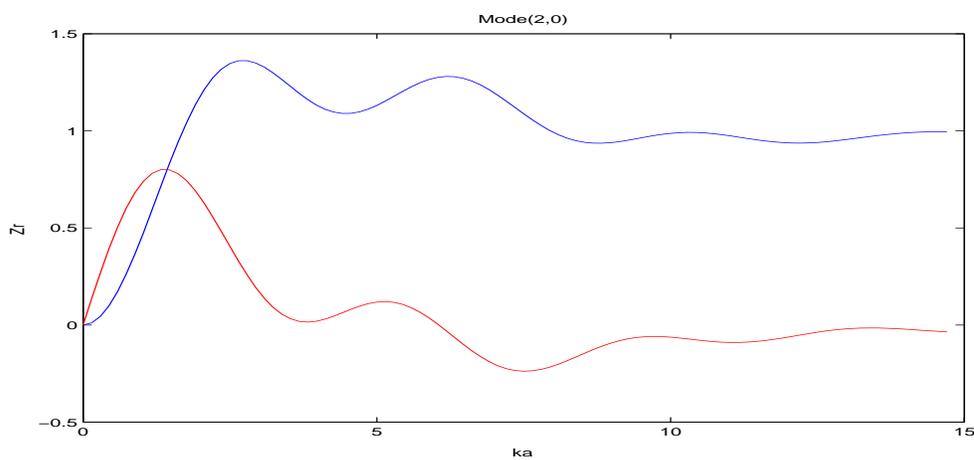


FIG. 4.5 – Impédance de rayonnement réduite du mode (2, 0).

On remarque que quel que soit le mode concerné, le rayonnement (partie réelle) sera maximal pour  $ka$  de l'ordre de 2 et que l'inertie du fluide vis-à-vis de la membrane sera maximale pour  $ka$  de l'ordre de 1. Les modes de la structure apparaissant autour de  $ka = 2$ , on aura alors une faible inertie du fluide et un faible rayonnement des mode de rang élevé.

## 4.5 Application au haut-parleur considéré

### 4.5.1 Amplitudes d'excitation des modes

Le calcul de la partie 4.3 montre qu'avec une excitation parfaitement uniforme, seuls les modes axisymétriques sont excités et que leur amplitude d'excitation dépend du rapport  $\alpha_{0n}$ . Le tableau suivant montre le calcul des  $\alpha_{0n}$  pour les modes axisymétriques.

<i>Mode</i> ( $m, n$ )	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)	(0, 7)	(0, 8)
$\alpha_{0n}$	1.61	1.29	1.08	0.95	0.86	0.79	0.73	0.69	0.65

Pour les modes asymétriques purs ( $m, 0$ ), on suppose que l'excitation des modes est inversement proportionnelle à la norme du mode considéré. Le tableau suivant montre le calcul de ces normes pour les modes asymétriques :

<i>Mode</i> ( $m, n$ )	(1, 0)	(2, 0)	(3, 0)	(4, 0)
$N_{mn}$	0.21	0.16	0.12	0.10

Enfin, pour les autres modes de la structure (qui sont difficilement observables), on suppose que l'on peut les exprimer sous la forme :

$$\alpha_{mn} = \frac{\beta_m \int_S U_{0n}}{N_{mn}}$$

Cette expression signifie que pour un mode mixte (combinaison asymétrique/axisymétrique), on peut découpler l'influence du mode asymétrique ( $\beta_{mn}$ ) du mode axisymétrique.

### 4.5.2 Action du fluide sur la structure

Le calcul des impédances de rayonnement modal va permettre de déterminer l'influence du fluide sur la vibration de la membrane. En effet, le fluide aura 2 effets distincts :

- L'apport d'une masse ajoutée  $M_{mn}(\omega)$  qui aura comme incidence un déplacement des fréquences de résonance :

$$\omega'_{mn} = \omega_{mn} \sqrt{\frac{\rho h}{\rho h + M_{mn}(\omega_{mn})}}$$

- L'apport d'un amortissement par rayonnement  $\eta_{(m,n)}(\omega)$  qui va ainsi modifier l'amortissement de chaque mode :

$$\eta'_{mn} = \eta_{matériau} + \eta_{mn}$$

Le coefficient de visco-élasticité du verre dépendant fortement de la fréquence, on adoptera pour cette étude la modélisation suivante décrite par C. Lambourg [16] :

$$\eta_{verre} = \mathcal{I}m \left( \frac{j\omega R_1}{j\omega + s_1} + \frac{j\omega R_2}{j\omega + s_2} \right)$$

avec les valeurs suivantes pour le verre considéré :  $R_1 = 1.63 \cdot 10^{-3}$ ,  $R_2 = 1.96 \cdot 10^{-3}$ ,  $s_1 = 5180 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $s_2 = 55100 \text{ rad.s}^{-1}$ .

Le tableau suivant traduit ainsi les effets du fluide sur la partie mécanique. Les valeurs de  $\eta_{(m,n)}$  sont à comparer à l'amortissement interne du verre  $\eta_{verre}$  :

Mode( $m, n$ )	$f_{(m,n)}$ (kHz) sans fluide	$f_{(m,n)}$ (kHz) avec fluide	$\eta_{verre}$ $\times 10^{-3}$	$\eta_{(m,n)}$ $\times 10^{-3}$
(0, 0)	17.27	17.25	0.87	8.9
(1, 0)	17.30	17.32	0.87	8.1
(2, 0)	17.36	17.38	0.87	8.4
(0, 1)	17.39	17.36	0.86	10.3
(0, 2)	17.88	17.88	0.85	10.2
(0, 3)	19.15	19.14	0.81	9.3
(0, 4)	21.57	21.59	0.74	7.5
(0, 5)	25.40	25.39	0.65	5.8

Les fréquences de résonance calculées ont été effectuées en considérant que la membrane se comporte comme une plaque circulaire encastrée possédant un rayon de courbure (cf Annexe A).

En hautes fréquences, la masse ajoutée représentée par la partie imaginaire de l'impédance de rayonnement apparaît comme négligeable. En revanche, l'amortissement interne du matériau étant très faible, c'est bien l'amortissement du fluide par rayonnement qui est prépondérant.

Au regard des résultats, il apparaît que les fréquences de résonance de la structure sont éloignées des observations : il semble assez difficile de modéliser le mouvement de la membrane par un disque encastré : Les conditions aux limites doivent sûrement être adaptées pour mieux représenter le comportement en fréquences. Néanmoins, il faut retenir que le fluide modifie très peu les fréquences propres de la structure. Afin de poursuivre notre étude, j'ai adapté les fréquences de résonance afin de les faire coïncider avec les observations.

Il apparaît que l'amortissement des modes n'est pas dû au matériau mais que ce sont les pertes par rayonnement qui vont "dicter" la réponse de la membrane (résonances plus ou moins accrues). On remarque aussi que d'après ce modèle, l'amortissement par rayonnement est plus important pour les modes (0,1) et (0,2). Dans ce cas, on doit s'attendre à ce que les pics de résonance de ces deux modes soient moins étroits.

### 4.5.3 Calcul de la vitesse membranaire

D'après l'étude précédente, il apparaît que l'on peut exprimer la vitesse membranaire de la manière suivante :

$$V(Q, t) = V_0 \left( 1 + j\omega\rho h \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{mn} U_{mn}(Q)}{Z_{mn}^M + Z_{mn}^R} \right) \quad (4.16)$$

avec :

$V(Q, t)$  : vitesse membranaire

$V_0 = j\omega U_0$  : vitesse d'ensemble de la partie mobile.

$\alpha_{0n} = \frac{\int_S W_{0n}}{\int_S U_{0n}^2}$  : coefficient d'excitation du mode axisymétrique  $n$

$\alpha_{mn} = \frac{\beta}{\int_S U_{mn}^2}$  : coefficient d'excitation du mode  $m, n$

$U_{mn}(Q)$  : déformée modale du mode  $(m, n)$

$Z_{mn}^R = R_{mn} + jI_{mn}$  : impédance de rayonnement du mode  $(m, n)$

$Z_{mn}^M = \rho h \left( \eta\omega_{mn} - j \left( \frac{\omega_{mn}^2}{\omega} - \omega \right) \right)$  : impédance mécanique du mode  $(m, n)$

On aboutit ainsi à l'expression suivante pour la vitesse membranaire en fonctionnement linéaire :

$$\boxed{V(Q) = \frac{Bl e_g}{Z_E} \left( \frac{1}{\frac{Bl^2}{Z_E} + Z_0^M + Z_0^R} \right) \left( 1 + j\omega\rho h \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_{mn} U_{mn}(Q)}{Z_{mn}^M + Z_{mn}^R} \right)} \quad (4.17)$$

La figure 4.6 montre les résultats de ce calcul au centre de la structure pour le prototype Harman. Cette simulation ne tient compte que des 5 premiers modes de la structure, à savoir les modes (0,1), (1,1), (0,2), (0,3) et (0,4).

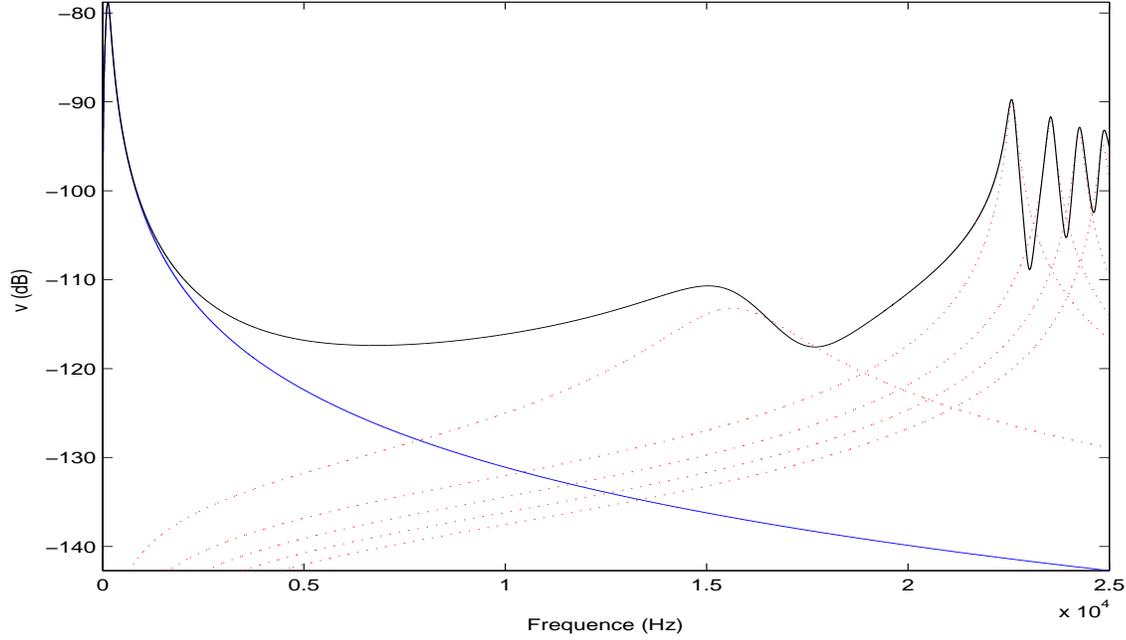


FIG. 4.6 – Vitesse membranaire au centre pour le HP Harman (bleu : Mode de piston plan, rouge : Modes de membrane, noir : Vitesse membranaire totale). On remarque qu'au delà de 10kHz, l'approche piston plan est insuffisante.

## 4.6 Calcul du champ de pression

### 4.6.1 Rayonnement modal

D'après l'équation (4.5), on peut décomposer le champ de pression en une contribution du mode de piston plan et une contribution des modes de la structure. Ainsi, on peut formuler le problème de la manière suivante :

$$P(M) = P_0(M) + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} P_{mn}(M) \quad (4.18)$$

$$P_{mn}(M) = \rho_{air} \omega^2 \int_S U_{mn}(Q) G(M, Q) dQ \quad (4.19)$$

Les figure 4.7 à 4.10 permettent de montrer les variations du rayonnement pour les modes (1,0) et (0,1) pour  $ka = 2$  et  $ka = 10$  en champ proche (figure du bas) et lointain (figure du haut). Les coordonnées correspondent aux distances d'observation réelles lorsque le haut-parleur est placé en  $z = 0$ .

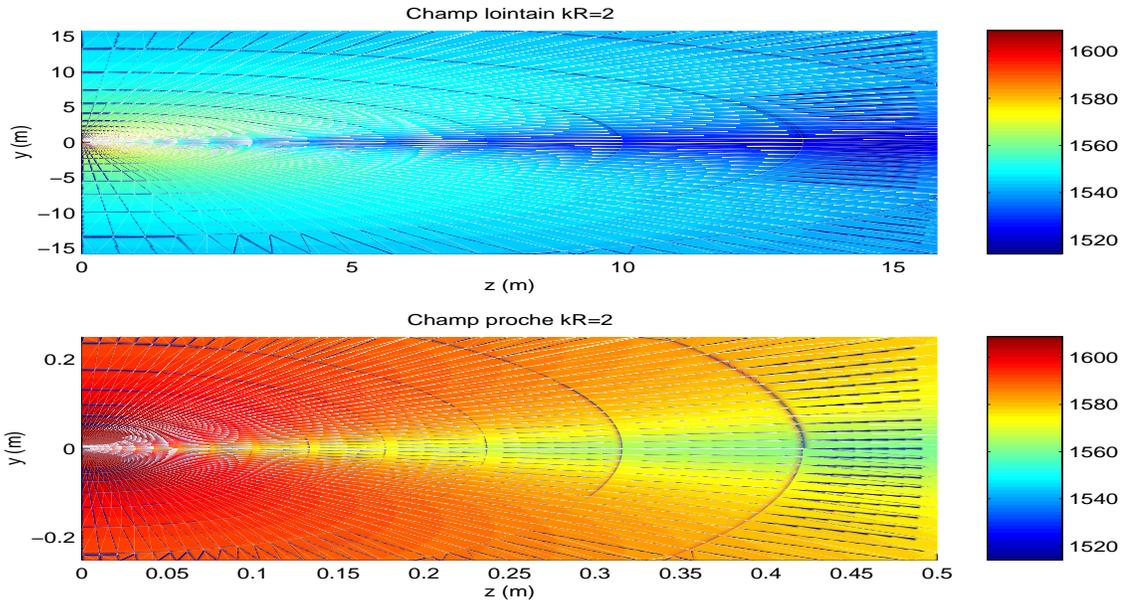


FIG. 4.7 – Champ de pression  $P_{mn}$  du mode (1,0) pour  $ka=2$  (basses fréquences). En haut : champ lointain. En bas : champ proche.

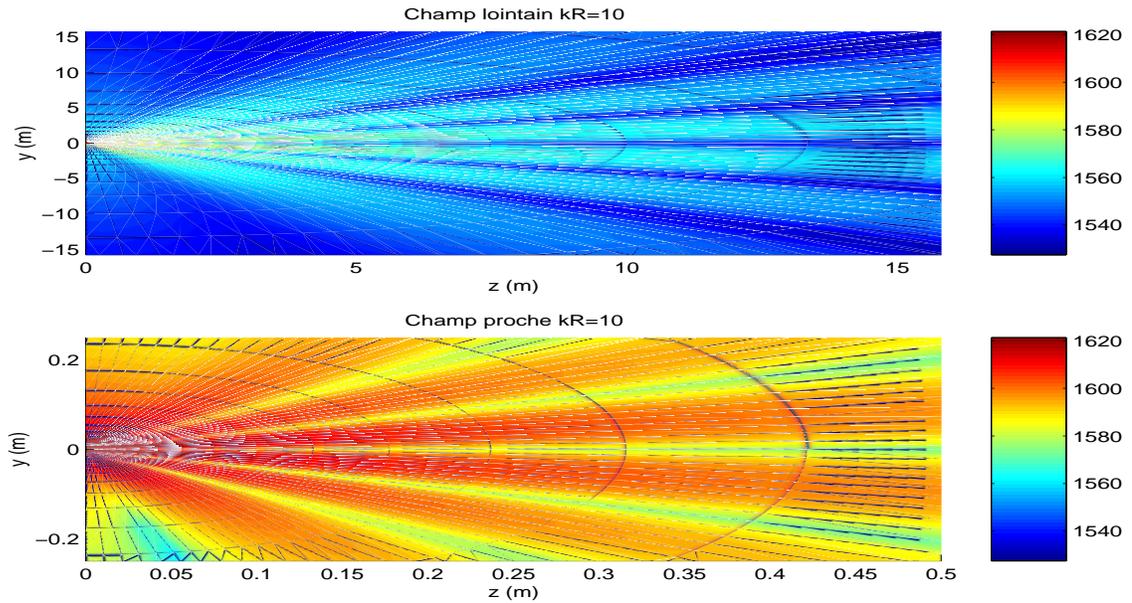


FIG. 4.8 – Champ de pression  $P_{mn}$  du mode (1,0) pour  $ka=10$  (hautes fréquences). En haut : champ lointain. En bas : champ proche.

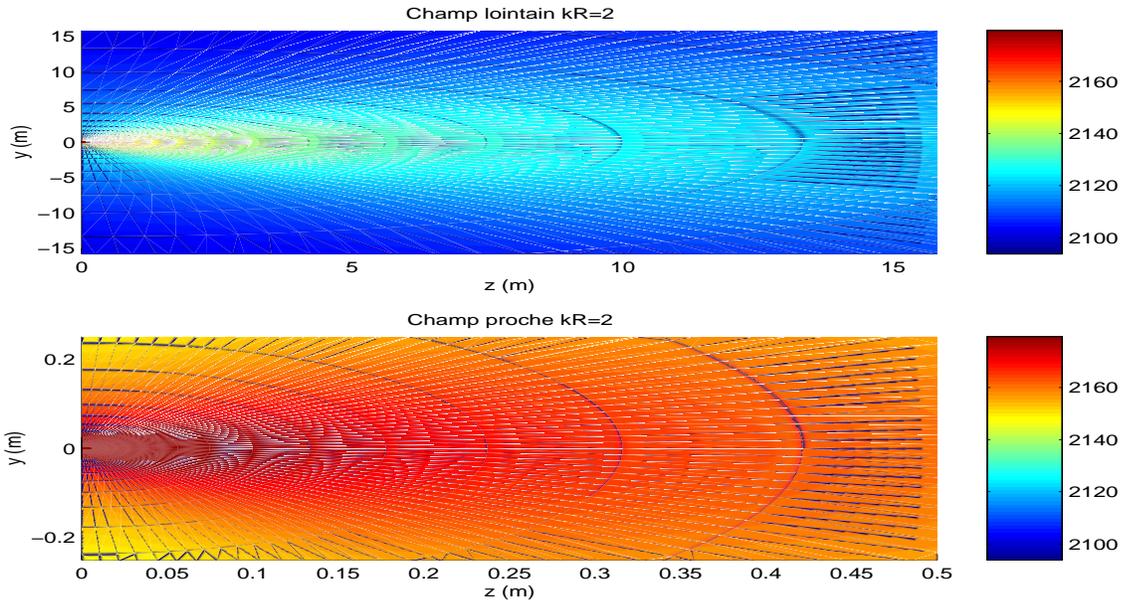


FIG. 4.9 – Champ de pression  $P_{mn}$  du mode (0,1) pour  $ka=2$  (basses fréquences). En haut : champ lointain. En bas : champ proche.

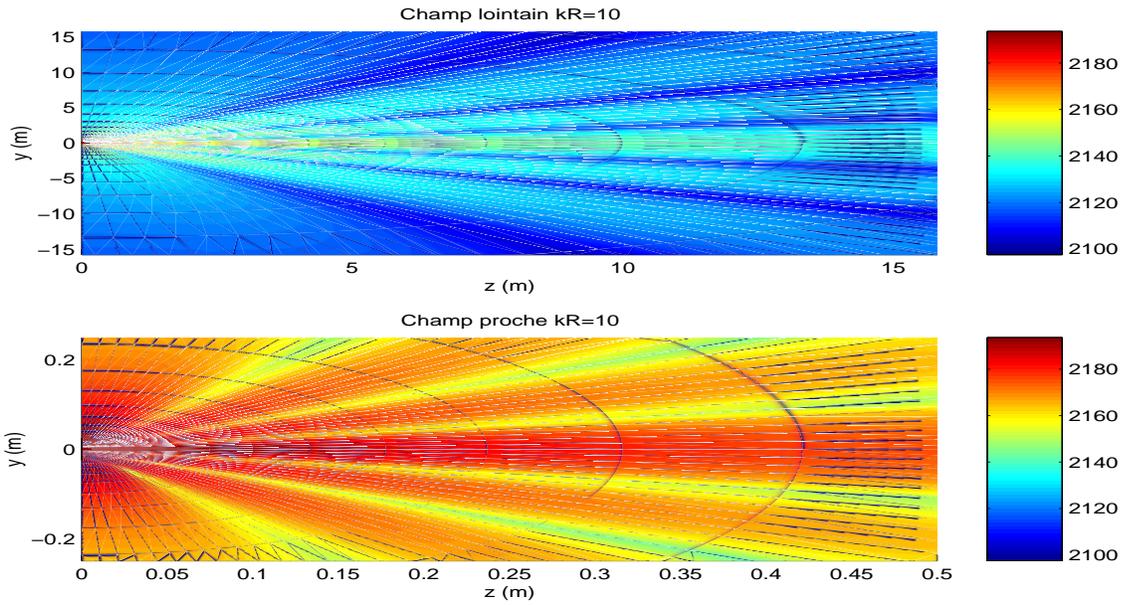


FIG. 4.10 – Champ de pression  $P_{mn}$  du mode (0,1) pour  $ka=10$  (hautes fréquences). En haut : champ lointain. En bas : champ proche.

Le premier résultat est que les modes asymétriques ne rayonnent pas dans l'axe du haut-parleur mais permettent d'augmenter le niveau sonore sur les cotés (on peut facilement les identifier sur les relevés de pression). Les modes axisymétriques, pour leur part, vont créer une augmentation du niveau sonore dans l'axe mais également la création de lobes secondaires.

## 4.6.2 Champ total

Afin de calculer le champ acoustique global, on considère le schéma suivant :

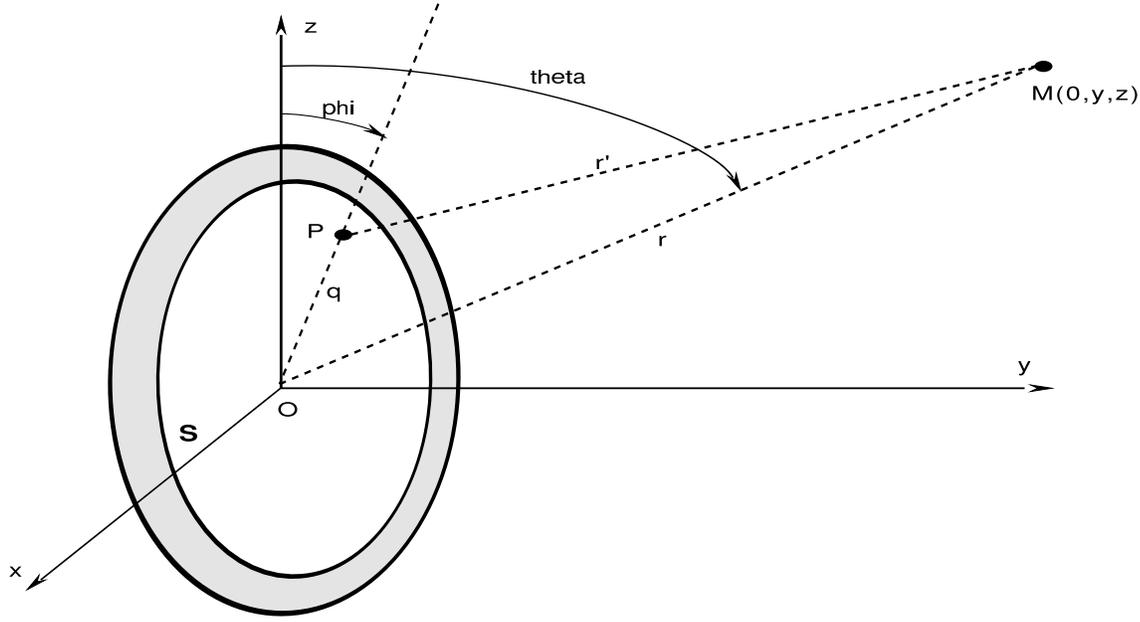


FIG. 4.11 – Repère pour calculer la pression en 1 point.

On choisit alors de placer l'observateur à 1m de la source dans le plan  $x = 0$  (cf figure 4.11) et on fait l'hypothèse du champ lointain. D'où :

$$r' = \sqrt{r^2 + q^2 - 2rq\cos(\theta)\cos(\psi)} \simeq r - q\cos(\theta)\cos(\psi)$$

$$dS = q dq d\psi$$

d'où les expressions suivantes dans l'équation (4.19) :

$$P_0(r, \theta) = \rho\omega^2 U_0 \frac{e^{-jkr}}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} q \frac{e^{jkq\cos\theta\cos\psi}}{r - q\cos\theta\cos\psi} d\psi dq$$

$$P_{mn}(r, \theta) = \rho\omega^2 a_n \frac{e^{-jkr}}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} q U_{mn}(q, \theta) \frac{e^{jkq\cos\theta\cos\psi}}{r - q\cos\theta\cos\psi} d\psi dq$$

On peut ainsi décomposer le champ acoustique en une contribution du rayonnement de piston plan (modèle de Thiele & Small) et une contribution du rayonnement des modes qui va perturber le champ 'piston plan'. Les figures 4.13 à 4.15 montrent ainsi la décomposition du champ total calculé figure 4.12 pour le prototype Harman à dôme.

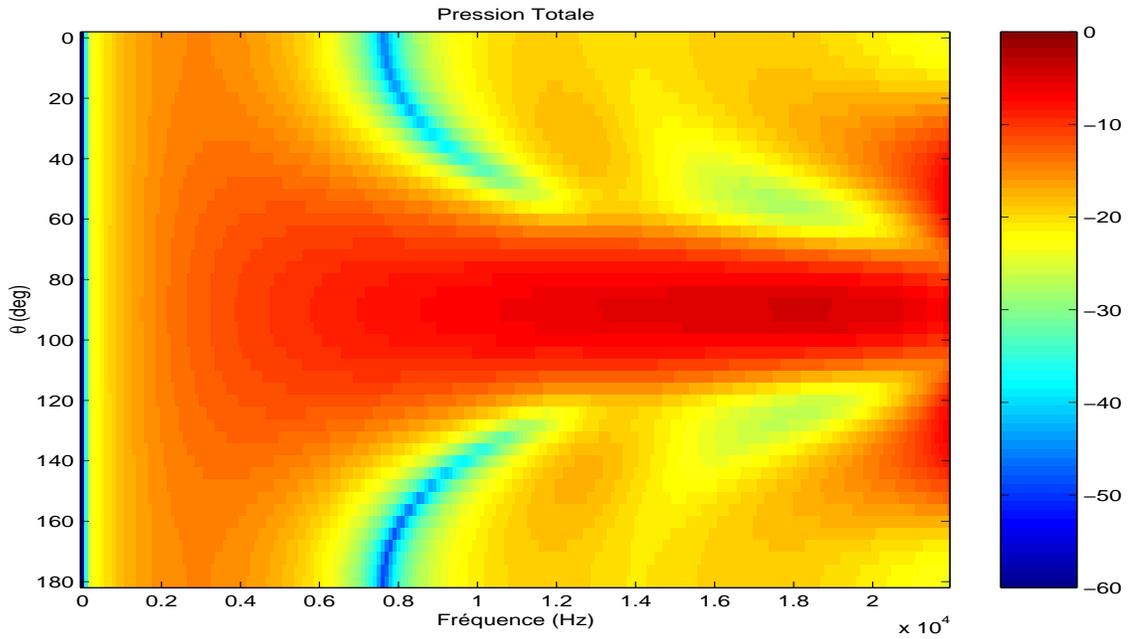


FIG. 4.12 – Pression totale calculée à 1m.

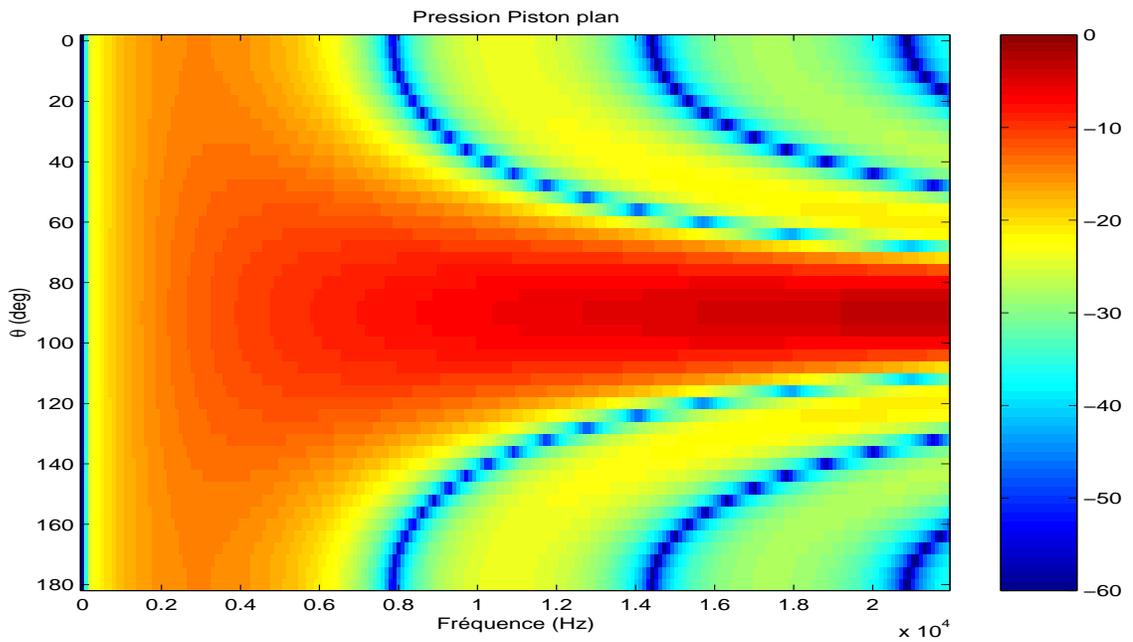


FIG. 4.13 – Pression rayonnée par le mode de piston plan.

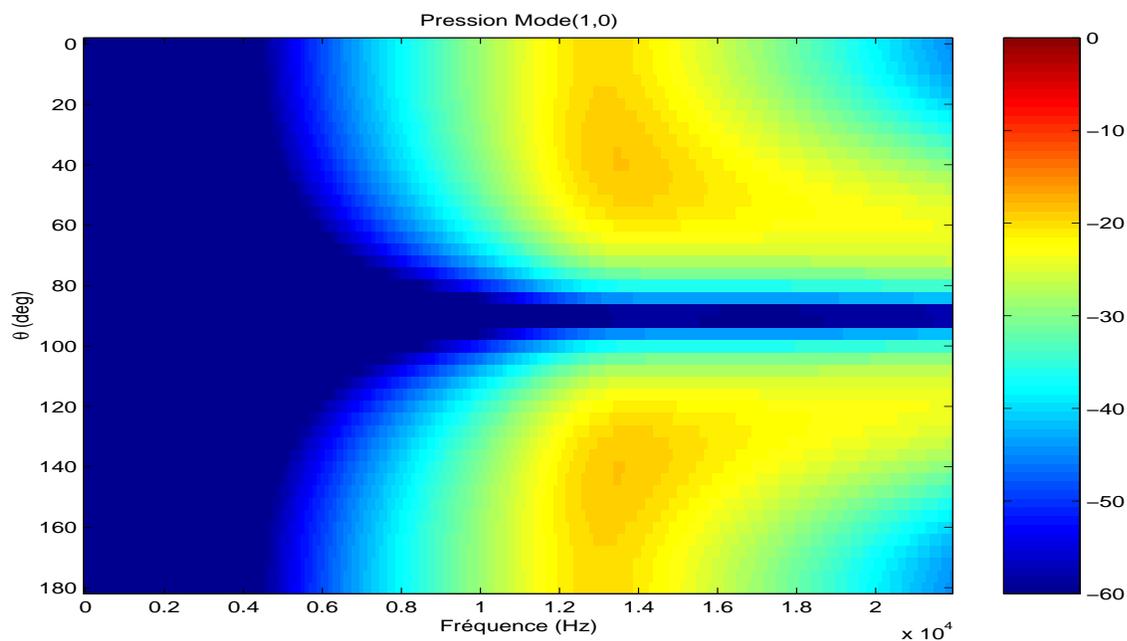


FIG. 4.14 – Pression rayonnée par le mode (1,0)m.

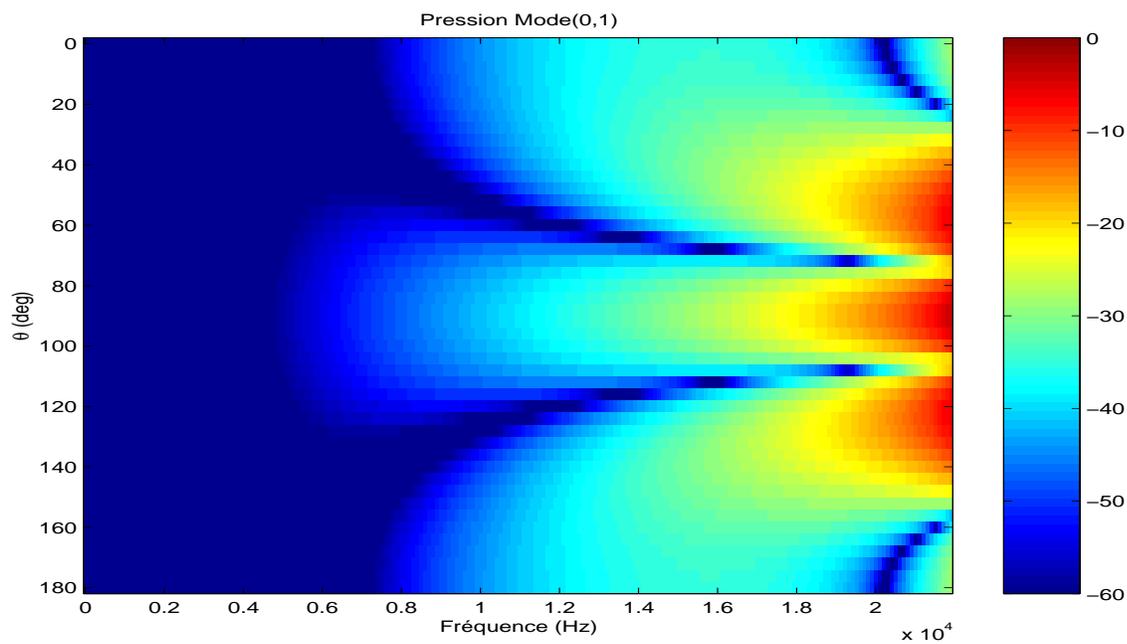


FIG. 4.15 – Pression rayonnée par le mode (0,1)m.

## 4.7 Non-linéarités et rayonnement

Grâce à ce modèle, il devient possible de calculer le champ sonore rayonné par le haut-parleur en régime de grande amplitude. La simulation présente ne permet pas de calculer le taux de distorsion mais il est possible de calculer le champ sonore rayonné en injectant une vitesse d'ensemble  $U_0$  possédant un train harmonique (harmoniques 2 et 3). Par exemple, pour un signal de vitesse possédant un taux de distorsion de 1 % tel que :

$$U_0 = \cos(\omega t) + 0.01\cos(2\omega t) + 0.01\cos(3\omega t)$$

La simulation donne ainsi le champ de pression donné de la manière suivante :

$$P_{tot} = P_1\cos(\omega t) + P_2\cos(2\omega t) + P_3\cos(3\omega t)$$

On définit alors le taux de distorsion de l'harmonique  $i$  noté  $THD_i$  pour le signal de pression par :

$$THD_i = \sqrt{\frac{P_i^2}{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}} \quad (4.20)$$

On peut alors calculer le champ de distorsion en fonction de l'angle d'observation  $\theta$  et de la fréquence  $f$ . On obtient alors les résultats de la figure 4.16 pour l'harmonique 3 qui vont permettre de comprendre les mécanismes en jeu :

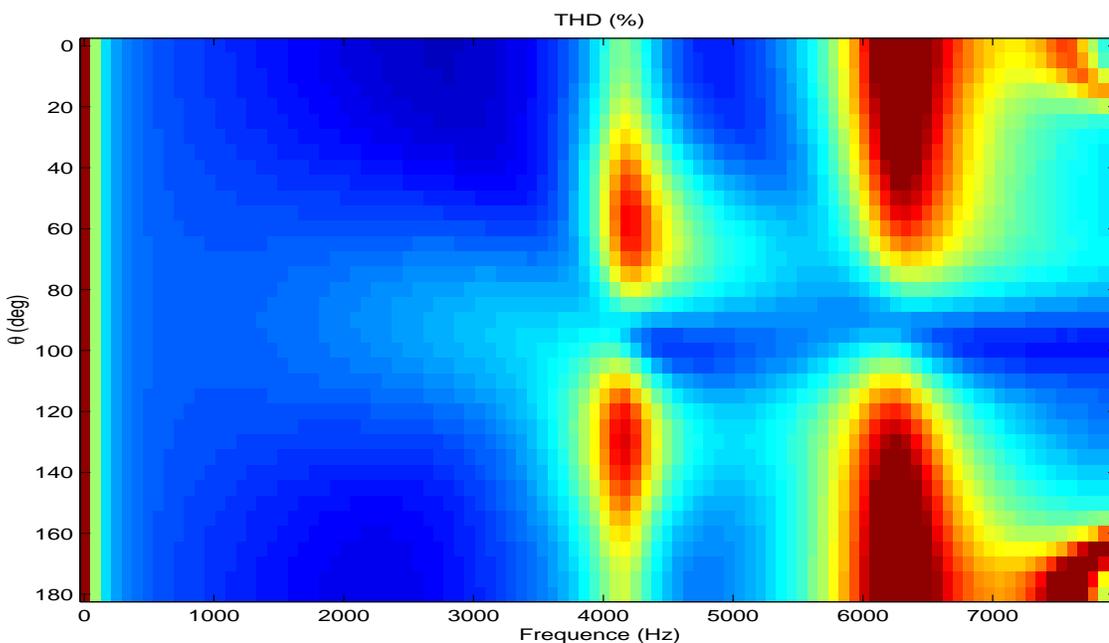


FIG. 4.16 –  $THD_3$  (%) à 1m.

On remarque ainsi un fort taux de distorsion au passage par les modes de la structure. Par exemple, au passage autour de  $f=4000$  Hz, l'harmonique 3 a une fréquence triple

( $f \simeq 12kHz$ ) proche de la fréquence de résonance du mode (1,0) ( $f_{(0,1)} = 13.7kHz$ ) et dans ce cas, le rayonnement correspond à celui du mode (1,0), c'est à dire que l'on aura un taux de distorsion plus important pour ce signal sur les cotés ( $\theta = 0^\circ$  ou  $180^\circ$ ).

## 4.8 Validation : Mesures de directivité

### 4.8.1 Mesures effectuées

Afin de visualiser les variations du champ de pression en fonction de l'excitation, j'ai effectué des mesures de directivité des deux haut-parleurs de l'étude. Ces mesures ont été effectuées dans une chambre semi-anéchoïque à l'école Polytechnique rendue anéchoïque par disposition de panneaux absorbant sur le sol. Le matériel utilisé est décrit ci-dessous :

Matériel	Constructeur	Référence
Microphone	<i>G.R.A.S.</i>	<i>26AJ</i>
Cellule	<i>G.R.A.S.</i>	<i>40AD</i>
Pré-amplificateur	<i>B&amp;K</i>	<i>NEXUS</i>
Table tournante	<i>B&amp;K</i>	<i>9640</i>
Amplificateur	<i>Alesis</i>	<i>RA100</i>
Carte Acquisition	<i>HP</i>	<i>165UD</i>
HP 1	<i>Harman</i>	<i>Prototype</i>
HP 2	<i>StageLine</i>	<i>SP165PA</i>

L'expérimentation consiste à relever la directivité du HP en fonctionnement linéaire, puis de la comparer avec celle obtenue en fonctionnement non-linéaire. On va ainsi pouvoir étudier si oui ou non les non-linéarités ont une incidence privilégiée. Pour ce faire, il suffit d'effectuer des mesures pour différentes incidences sur des sweep (balayage en fréquence) dans la gamme de fréquences 10 Hz - 6 kHz. On répète ensuite la même démarche pour des excitations différentes.

### 4.8.2 Résultats

Les relevés obtenus figure 4.17 à 4.24 montrent ainsi les variations du champ de pression en fonction de la fréquence (en abscisse) et de l'angle d'observation (en ordonnées). L'axe du haut-parleur est ainsi situé pour un angle  $\theta = 90^\circ$  et le plan du haut-parleur est représenté par les angles  $\theta = 0^\circ$  et  $\theta = 180^\circ$ .

HP Stage Line  $V_e = 9,4 V_{eff}$

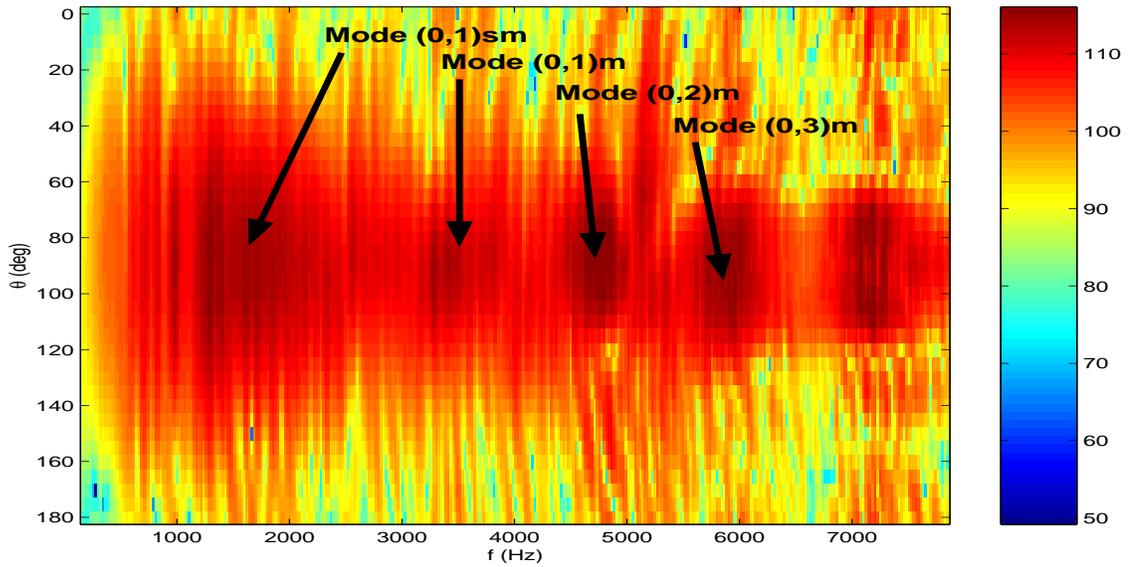


FIG. 4.17 – Niveau du fondamental à 1m en fonctionnement non-linéaire

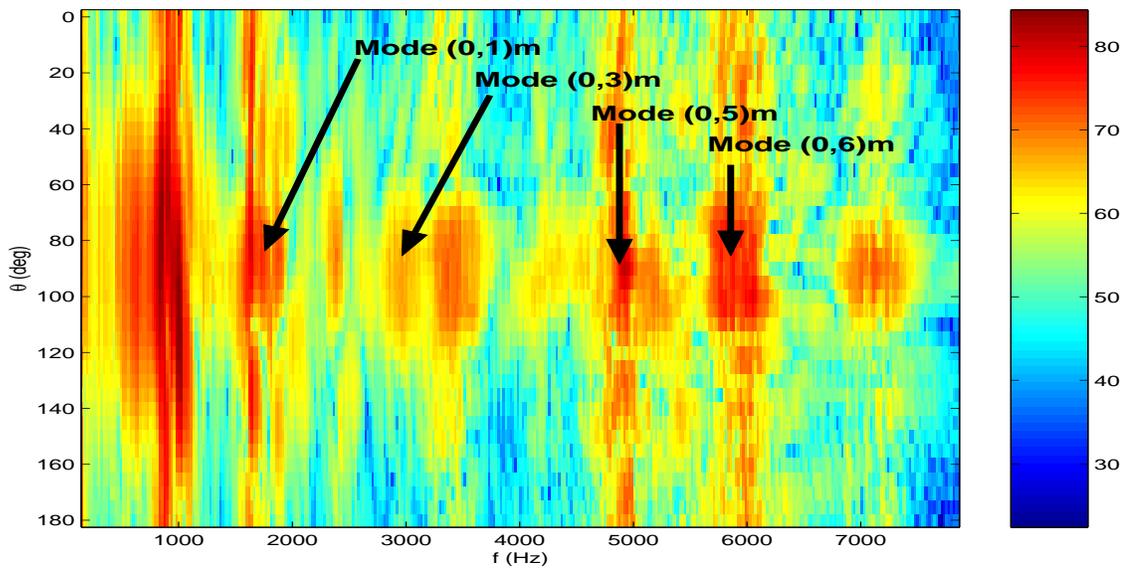


FIG. 4.18 – Niveau de l'harmonique 2 à 1m en fonctionnement non-linéaire

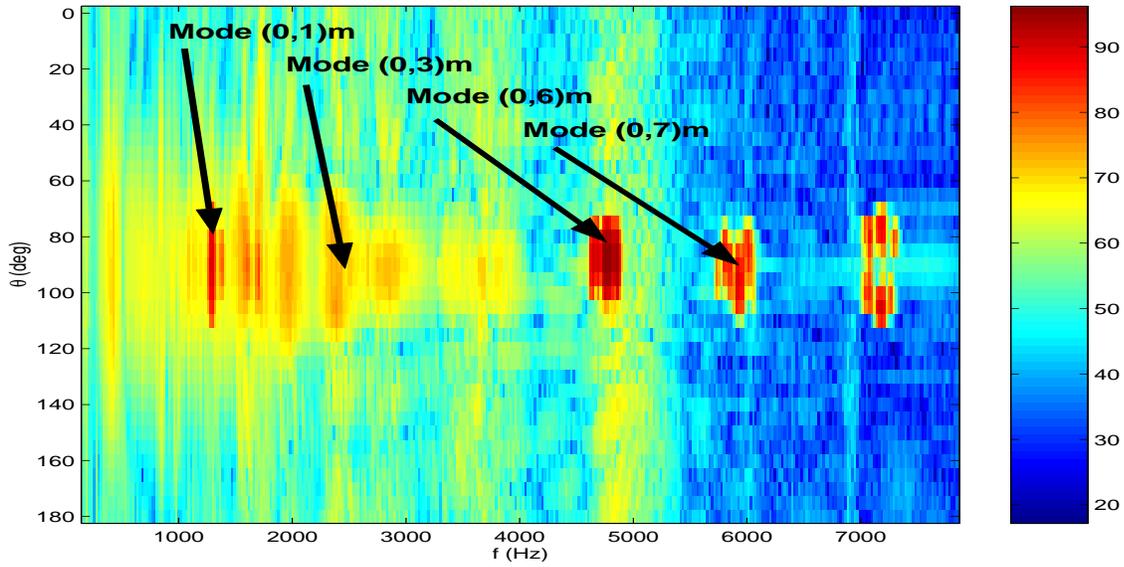


FIG. 4.19 – Niveau de l'harmonique 3 à 1m en fonctionnement non-linéaire

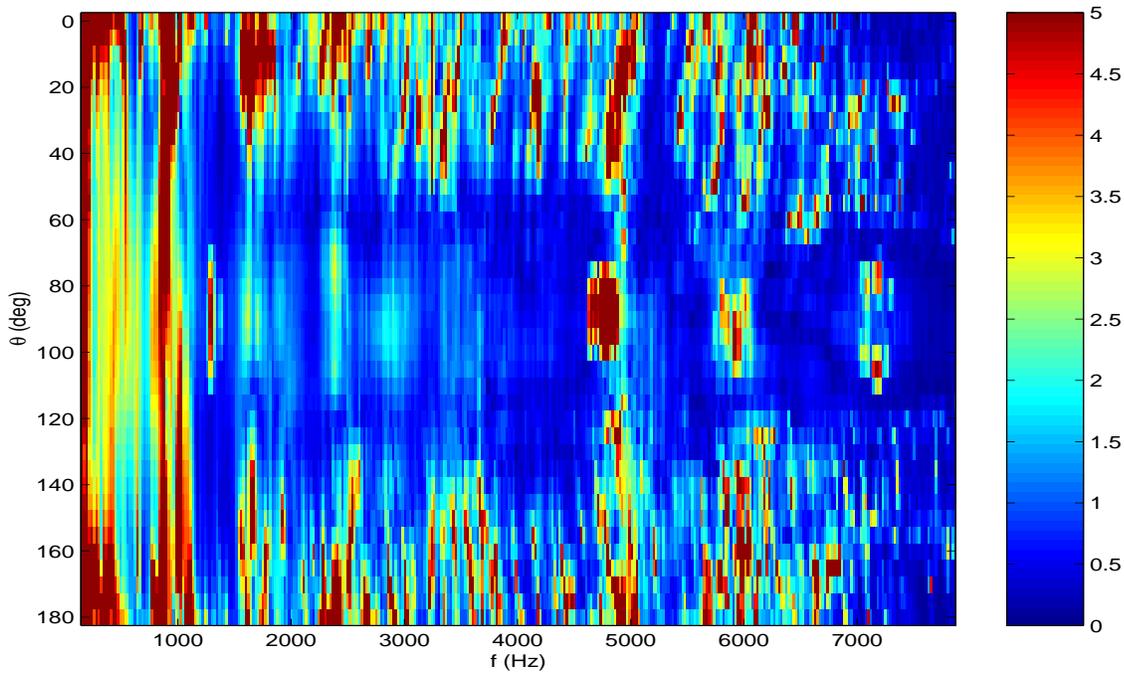


FIG. 4.20 – THD (%) à 1m en fonctionnement non-linéaire

Prototype Harman  $V_e=7,8$  V

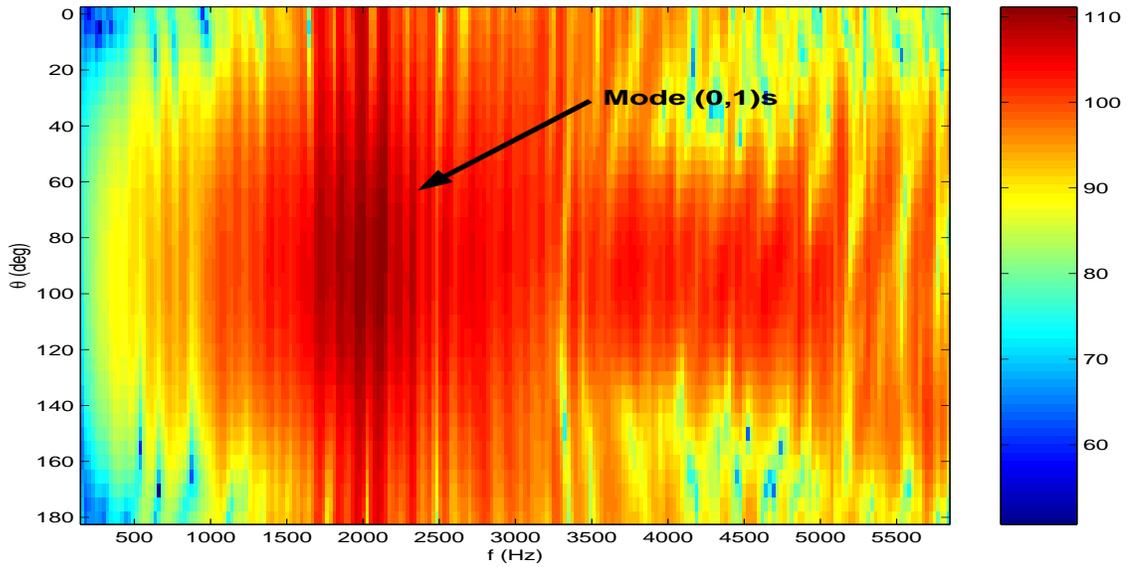


FIG. 4.21 – Niveau du fondamental à 1m en fonctionnement non-linéaire

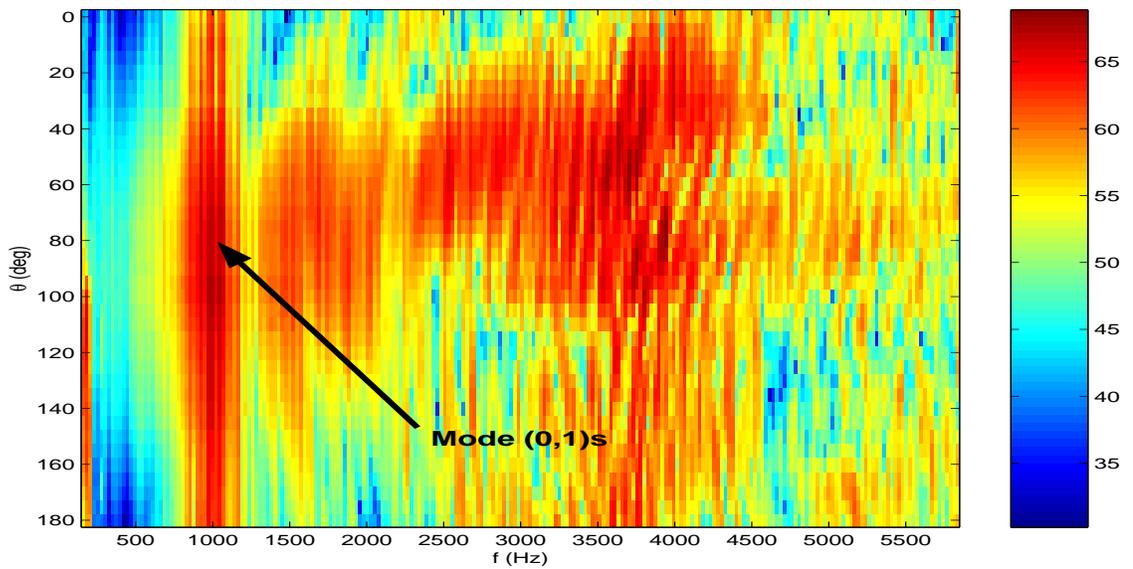


FIG. 4.22 – Niveau de l'harmonique 2 à 1m en fonctionnement non-linéaire

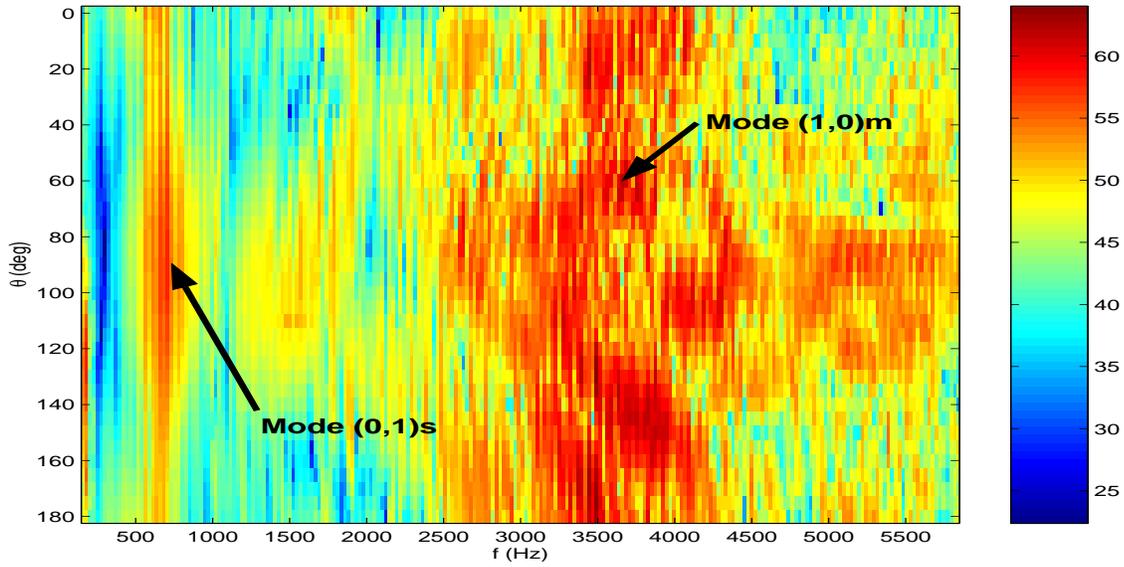


FIG. 4.23 – Niveau de l'harmonique 3 à 1m en fonctionnement non-linéaire

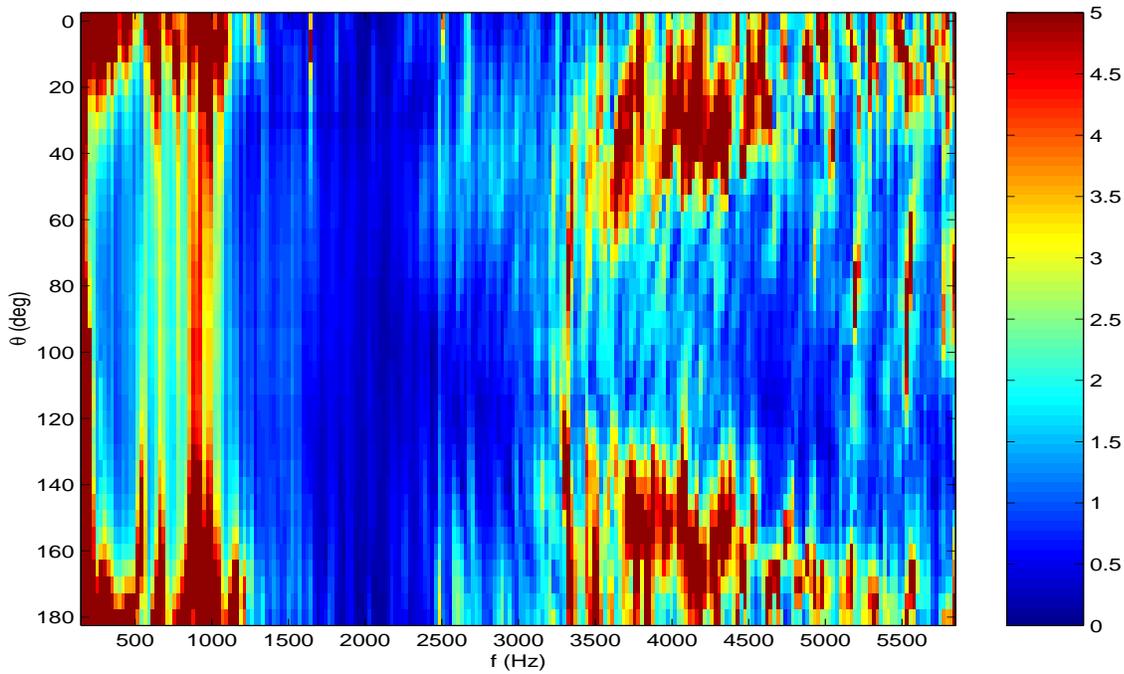


FIG. 4.24 – THD (%) à 1m en fonctionnement non-linéaire

### 4.8.3 Analyse des résultats

#### Influence des modes

L'influence des modes apparaît comme responsable de la non-uniformité de la réponse en fréquence du HP. En effet, pour le HP médium SP165 PA, on remarque une forte augmentation du niveau sonore dans certaines zones de l'espace pour les fréquences proches des fréquences de résonance de la structure mécanique. Ainsi, on remarque des pics pour  $f = 1kH$ ,  $1.8kH$ ,  $3.4kH$ , etc...

L'influence de ces modes se traduit aussi, outre une élévation du niveau sonore, par une modification du diagramme de directivité. Ceci est d'autant plus marqué que les modes sont rapprochés : par exemple, pour le HP médium (figure 4.17), le passage par des fréquences entre 5500 Hz et 6500 Hz montre une grande variation de directivité de la source correspondant à la première fréquence de résonance du cône (mode  $(0, 3)m$ ). Le passage par des modes asymétriques va ainsi perturber le champ sonore de manière particulière : on aura alors une augmentation du niveau sonore à droite puis à gauche selon si on se place à des fréquences légèrement supérieures ou inférieures à la fréquence de résonance du mode (par exemple sur le HP médium (figure 4.17) au passage autour de  $f=500$  Hz pour le mode  $(1,0)$  de la membrane ou  $f=1kHz$  pour les modes  $(4,0)$  et  $(6,0)$  de la membrane).

En ce qui concerne le prototype à coque sphérique, ces effets sont également visibles mais moins marqués : en effet, il s'agit plus de modes de suspension qui perturbent le champ acoustique de manière minime. Dans la gamme de fréquences étudiée, on peut ainsi considérer que la membrane se comporte quasiment comme un piston plan.

#### Fonctionnement non-linéaire

La première remarque qui s'impose d'elle même est que les non-linéarités ne sont pas uniquement présentes aux basses fréquences. En effet, on remarque que les niveaux des harmoniques 2 et 3 ne sont pas plus élevés en basses fréquences qu'en hautes fréquences. Il apparaît également que l'étude des non-linéarités d'un haut-parleur ne peut se restreindre aux effets dans l'axe d'écoute : on aura ainsi des directions privilégiées (figure 4.22).

En outre, on peut observer que les non-linéarités sont beaucoup plus marquées au passage par les modes de la structure (qui engendrent un fort déplacement membranaire). Ainsi, l'étude des non-linéarités n'est pas indépendante de l'étude des modes de la structure. Le concept de mode résulte certes de l'analyse du fonctionnement linéaire de la structure. On veut simplement souligner ici que le fonctionnement non-linéaire du haut-parleur, consécutif à un régime de grande amplitude, s'observe de manière privilégiée dans des domaines fréquentiels voisins des fréquences propres.

Afin de visualiser s'il existe ou non une direction privilégiée pour les non-linéarités, il suffit de regarder le diagramme du taux de distorsion (THD). On remarque alors trois régimes de fonctionnement pour le prototype Harman :

- en basses fréquences (de 10 Hz à 200Hz), la distorsion apparaît comme due aux non-linéarités de suspension puisque le taux de distorsion est également distribué sur le demi espace : on a un rayonnement omni-directionnel des non-linéarités.

- en moyennes fréquences (de 500 Hz à 1,5 kHz), on remarque l'apparition des modes de la suspension qui engendrent un fort déplacement de celle-ci. La principale conséquence est une forte génération d'harmoniques mais on n'observe aucune direction privilégiée puisque la membrane se comporte toujours comme un piston plan (par exemple pour  $f=2$  kHz sur le prototype Harman).

- en hautes fréquences (pour  $f \gg 3kHz$ ) l'apparition des modes de la membrane en verre engendre l'apparition de directions privilégiées pour le rayonnement des harmoniques générés. Par exemple, pour un signal de fondamentale 4000 Hz, l'harmonique 3 sera tel que  $f=12$  kHz , fréquence proche de la fréquence de résonance du mode (1,0) de la membrane pour le prototype Harman ( $f_{(1,1)m} = 13,1kHz$ ). Dans ce cas, on remarque que les non-linéarités prennent la direction privilégiée  $\theta \simeq 60^\circ$ .

Pour le HP médium, il est intéressant de noter que la présence de non-linéarités dans l'axe du HP est essentiellement due au passage par les modes axisymétriques de la structure. Le passage par des modes asymétriques produit des non-linéarités hors axe, voire même dans tout l'espace comme par exemple, pour les modes (1,0) et (2,0) autour de 2 kHz (figure 4.18).



## Chapitre 5

# Conclusion : Non-linéarités et rôle du matériau

### 5.1 Modes de la structure

Au vu de cette étude, il apparaît que les modes de la membrane ont une influence sur la reproduction sonore par un haut-parleur électro-dynamique. En effet, le modèle de rayonnement de type piston plan n'est plus suffisant à partir de la première fréquence de résonance de la membrane.

Les paramètres de matériau de la membrane ( $E, \nu, \rho$ ) et les paramètres de forme (rayon  $a$ , courbure  $R$ ) vont déterminer les fréquences de résonance de la structure. En les repoussant hors du spectre audible (en jouant sur la courbure ou sur le paramètre  $E/\rho$ ), on peut espérer obtenir un spectre plat.

Les paramètres de forme (diamètre du HP, fixation de la membrane, et les conditions aux limites) vont permettre de calculer les déformées propres et ainsi le rayonnement associé à chaque mode. Les paramètres du matériau n'influencent pas de manière directe la façon dont les modes rayonnent.

### 5.2 Non-linéarités

L'influence du matériau est déterminante dès que l'on passe en régime non-linéaire. En effet, si la génération d'harmoniques (typiquement harmonique 2 et 3) est liée aux non-linéarités de la suspension, le rayonnement va lui toujours s'effectuer selon les modes de la structure. Par exemple, pour le prototype Harman, si l'on envoie un signal de grande amplitude de fondamentale  $f=4\text{kHz}$ , l'harmonique 3 aura une fréquence de  $12\text{kHz}$  qui correspond au mode  $(1, 1)m$  de la structure. Dans ce cas, le rayonnement de l'harmonique 3 sera déterminé par le rayonnement modal du mode  $(1, 1)m$ . Ceci confirme que même si l'on repousse les modes de membrane hors du spectre audible (20-20000 Hz), l'influence

des modes est toujours audible. Pour un haut-parleur classique, on observe quasiment que des modes axisymétriques de la membrane qui vont alors rayonner dans l'axe du HP mais aussi hors axe (lobes secondaires).

### 5.3 Une solution ?

Afin de repousser les limites du comportement de piston-plan, on peut penser à repousser les modes de la structure au delà du spectre audible (voire encore plus haut pour éviter les distorsions au passage par un mode). Pour ce faire, on peut jouer sur :

- le matériau utilisé (il faut choisir un matériau avec un grand rapport  $E/\rho$ ),
- la forme de la membrane (on applique une forte courbure cad  $R \gg a$  ce qui permet de repousser les modes axisymétriques (cf Annexe A)).
- les dimensions du HP (dans ce cas, on a intérêt à réduire les dimensions du HP pour repousser les modes hors du spectre audible).

La figure 5.1 d'après M. Ashby [18] permet de classer différents types de matériaux selon leur module d'Young  $E$  en régime linéaire et leur masse volumique  $\rho$  :

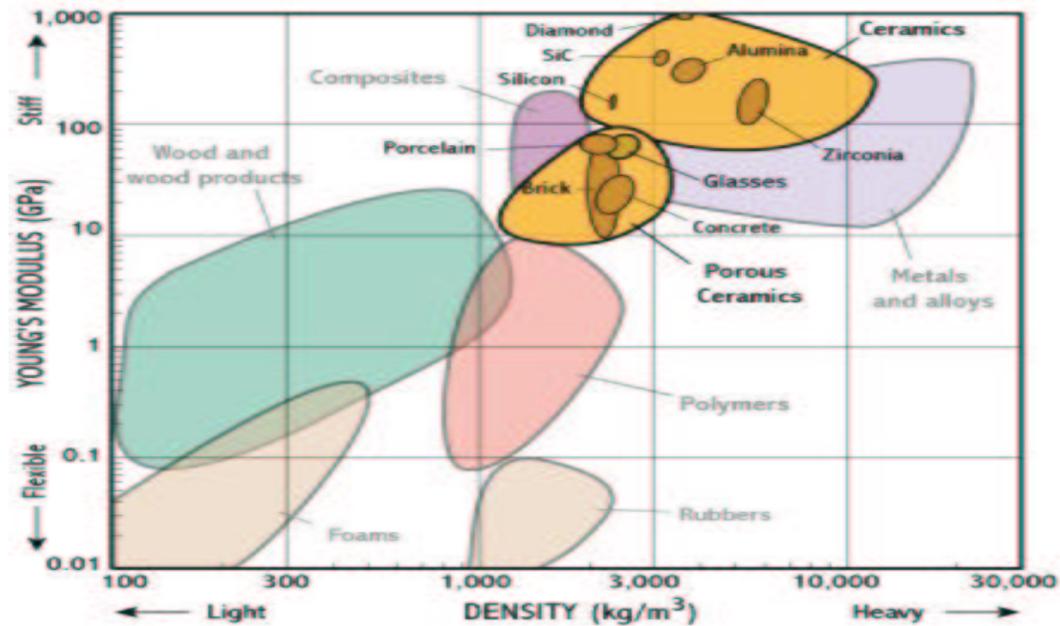


FIG. 5.1 – Module d'Young vs densité pour différents matériaux d'après M. Ashby.

On peut donc penser à utiliser des matériaux très rigides et peu denses comme le verre, les alliages de métaux, du silicium.

On peut également penser à chercher un matériau avec un fort coefficient d'amortissement  $\eta_{\text{matériau}} \gg \eta_{\text{air}} \simeq 10^{-3}$  en hautes fréquences afin d'amortir au plus les modes de la structure. A titre indicatif, la figure 5.2 indique les ordres de grandeur de l'amortissement interne de différents matériaux d'après la modélisation de C. Lambourg [16].

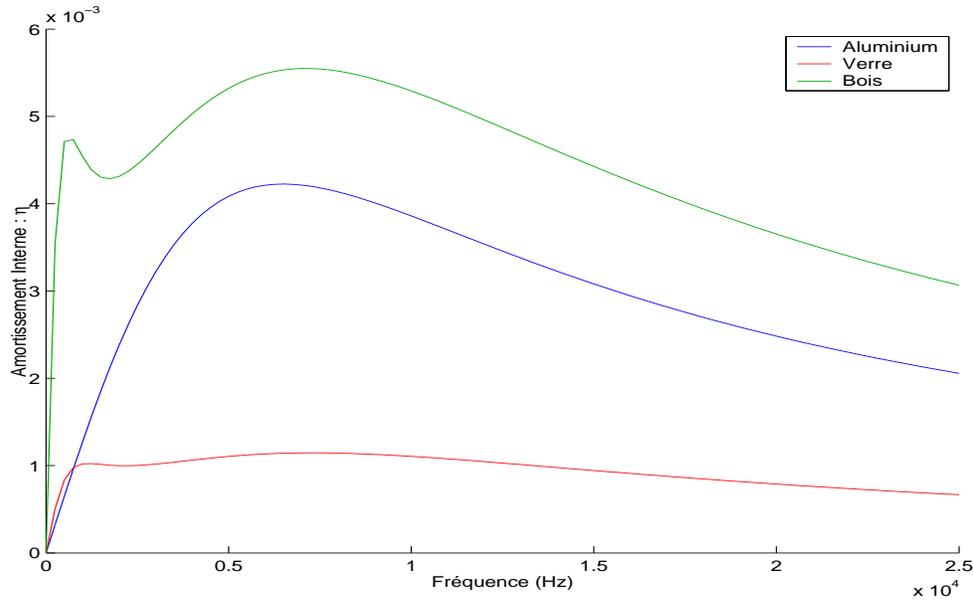


FIG. 5.2 – Amortissement interne en fonction de la fréquence pour différents matériaux

Pour une application musicale, il pourrait également être intéressant de rechercher une forme ou un matériau permettant d'obtenir des rapports entiers entre les fréquences des modes, ce qui permettrait de contrôler le "timbre" du haut-parleur.



# Conclusions et perspectives

Cette étude, orientée sur le rôle du matériau et des non-linéarités dans la reproduction sonore, a montré que les paramètres du matériau interviennent à différents niveaux. Tout d'abord, les paramètres de forme et les caractéristiques du matériau utilisé vont définir les modes propres de la structure. Cette structure, lorsqu'elle est excitée à des fréquences voisines des fréquences de résonance, va prendre une géométrie particulière, ce qui aura pour effet de modifier le rayonnement.

De plus, lorsque l'on augmente l'amplitude du déplacement membranaire, (écoute à fort niveau), on atteint très rapidement un régime de distorsion (production d'harmoniques). Ces distorsions, générées principalement par la suspension, seront plus ou moins audibles selon la position de l'auditeur par rapport au haut-parleur (on pourra même observer des directions privilégiées). Si de nombreux modèles ont été développés afin de comprendre et de prédire le taux de ces distorsions, tous se fondent sur les analogies de Thiele & Small, qui ne sont applicables qu'en basses fréquences.

La méthode plus générale décrite dans cette étude permet ainsi de comprendre les mécanismes de génération d'harmoniques en se restreignant à un domaine de fréquence (approximation basses fréquences autour de la première résonance de l'équipage mobile). Dans ce cas, on se ramène à une équation de type Duffing qui permet une bonne prédiction des harmoniques générés en basse fréquence (jusqu'à 500 Hz environ). La seconde partie de cette étude est consacrée à l'influence des caractéristiques du matériau sur la restitution sonore finale. On aboutit alors à une modélisation du champ sonore en espace libre qui montre l'existence de zones d'écoute de "faibles distorsions" et des zones d'écoute de "fortes distorsions" où l'écoute est perturbée par la production d'harmoniques supérieurs.

D'autres phénomènes non étudiés lors de ce stage peuvent gêner l'écoute à fort niveau, comme l'intermodulation (combinaisons linéaires des fréquences d'excitation) ou encore la génération de bruits aérodynamiques en basses fréquences. Il serait également envisageable par la suite d'inclure les mécanismes de génération de distorsions dans le modèle vibroacoustique étudié, de mettre en évidence les modes non-linéaires de coques (à un régime de plus grande amplitude) ou encore de s'intéresser à des géométries plus complexes.



## Annexe A

# Vibration d'une plaque sphérique incurvée

Considérons une plaque circulaire de rayon  $a$  et d'épaisseur  $h$ . Cette plaque obéit (dans l'hypothèse des petits déplacements) à l'équation de mouvement :

$$D\nabla^4 U + \rho h \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Les pertes par visco-élasticité sont modélisées par le terme  $\eta$  (partie imaginaire du module d'Young  $E$ ) dans l'équation :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} (1 + j\omega\eta)$$

en posant :

$$\lambda^4 = \frac{\rho h \omega^2}{D} = \frac{12\rho\omega^2(1-\nu^2)}{Eh^2}$$

on obtient alors le système suivant en régime harmonique de pulsation  $\omega$  :

$$(\nabla^2 \pm \lambda^2) U = 0 \quad (\text{A.2})$$

On peut alors chercher une solution à variables séparées :

$$U(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

pour obtenir finalement 2 équations pour chaque variable :

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + m^2 \Theta = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r} + (\pm \lambda^2 - \frac{m^2}{r^2}) R = 0 \quad (\text{A.4})$$

avec  $m = Cte$ . Ces 2 équation donnent alors des solutions analytiques :

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} \cos m\theta \\ \sin m\theta \end{cases}$$

$$R(r) = AJ_m(\lambda r) + BI_m(\lambda r) + CY_m(\lambda r) + DK_m(\lambda r)$$

où  $J_m$  et  $Y_m$  désignent les fonctions de Bessel d'ordre  $m$  et  $I_m$  et  $K_m$  les fonctions de Bessel modifiées d'ordre  $m$ . La fonction  $\Theta(\theta)$  devant être  $2\pi$  périodique, on doit donc imposer la condition que  $m$  est entier. De plus, la fonction  $R(r)$  doit être bornée en  $r = 0$ , ce qui impose alors que  $D = C = 0$ . Pour notre étude, nous n'allons considérer que le cas d'une plaque encastres à ses extrémités. On impose donc à la structure :

$$\begin{cases} R(a) = 0 & \implies \text{Déplacement nul à la périphérie} \\ \frac{\partial R}{\partial r}(a) = 0 & \implies \text{Courbure nulle à la périphérie} \end{cases}$$

Ces deux conditions aboutissent alors à l'équation suivante :

$$J_m(\lambda a) \frac{\partial I_m}{\partial r}(\lambda a) - \frac{\partial J_m}{\partial r}(\lambda a) I_m(\lambda a) = 0 \quad (\text{A.5})$$

dont le n-ième zéro notés  $A_{mn} = \lambda a_{mn}$  a été calculé sous Matlab :

n \ m	0	1	2	3	4
0	3.196	4.611	5.906	7.143	8.346
1	6.306	7.799	9.197	10.537	11.836
2	9.440	10.958	12.402	13.795	15.149
3	12.577	14.108	15.579	17.005	18.396
4	15.716	17.256	18.744	20.192	21.608
5	18.656	20.401	21.901	23.366	24.801
6	21.997	23.545	25.055	26.532	27.982

On obtient ainsi les valeurs des pulsations propres ainsi que les déformées modales de la structure considérée :

$$\omega_{0mn} = \frac{h(A_{mn})^2}{a^2} \sqrt{\frac{E}{12\rho(1-\nu^2)}} \quad (\text{A.6})$$

$$U_{mn}(r, \theta) = A \left( J_m(A_{mn} \frac{r}{a}) - \frac{J_m(A_{mn})}{I_m(A_{mn})} I_m(A_{mn} \frac{r}{a}) \right) \cos m\theta \quad (\text{A.7})$$

où  $h$  désigne l'épaisseur de la coque,  $a$  son rayon  $E$  son module d'Young,  $\nu$  son coefficient de Poisson,  $\rho$  sa masse volumique. Il est intéressant de noter que la forme des modes est indépendante des paramètres du matériau considéré. Le fait d'introduire un

rayon de courbure  $R$  dans la coque ne modifie pas les déformées modales mais modifie les fréquences propres de la structure de la manière suivante [17] :

$$\omega_{mn}^2 = \omega_{0mn}^2 + \frac{E}{\rho R^2} \text{ pour } n \in \{0; 1\}$$

Le Prototype à dôme en verre développé par Harman, possède les propriétés suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 25.75mm \\ R = 47mm \\ h = 0.14mm \\ E_{verre} = 6.5 \cdot 10^{10} Pa \\ \nu_{verre} = 0.33 \\ \rho_{verre} = 2500 kg.m^{-3} \\ \eta_{verre} = 10^{-2} \end{array} \right.$$

Ce qui permet de prédire les premières fréquences de résonance (en kHz) de la membrane dans le spectre audible :

m \ n	0	1	2
0	17.27	17.30	17.36
1	17.39	17.56	17.82
2	17.89	18.37	19.05
3	19.15	20.17	21.44
4	21.57	23.27	25.24
5	25.40	27.81	30.49

Les valeurs ainsi déterminées semblent éloignées des mesures (cf chapitre 3). De nombreuses raisons peuvent expliquer cette imprécision :

- On a négligé les effets de la suspension sur la vibration de la coque. Dans ce cas les conditions aux limites ne correspondent plus à un encastrement parfait mais on aura bien un couplage entre la suspension et la membrane.

- La coque est très incurvée (on est plus en déplacement uniquement transverse?).

- On a négligé l'influence du fluide environnant (peu d'influence sur le déplacement).



## Annexe B

# Comportement vibroacoustique

### Position du problème

Considérons maintenant la vibration de notre plaque encastrée en présence d'un milieu fluide environnant. On peut ainsi décomposer notre étude en 3 milieux :

Milieu 1 : Demi espace  $z > 0$

$$\left( \Delta + \left( \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right) p_1(M) = 0 \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial z}(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \notin S \\ \omega^2 \rho U(M) & \text{si } M \in S \end{cases}$$

Milieu 2 : Demi espace  $z < 0$

$$\left( \Delta + \left( \frac{\omega^2}{c^2} \right) \right) p_2(M) = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial z}(M) = \begin{cases} 0 & \text{si } M \notin S \\ -\omega^2 \rho U(M) & \text{si } M \in S \end{cases}$$

Milieu 3 : Plan  $z=0$

$$D\nabla^4 U(Q) + \rho h \frac{\partial^2 U(Q)}{\partial t^2} = (F_0 \cos \omega t - C_0 U_0) \delta(r = a) + p_1(Q, t) - p_2(Q, t) \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{cases} U(r = a) & = U_0 \cos \omega t \\ \frac{\partial U}{\partial r}(r = a) & = 0 \end{cases}$$

Dans cette expression  $U_0$  désigne le déplacement d'ensemble de la membrane,  $F_0$  la force d'excitation par élément de surface et  $C_0$  la raideur surfacique de la suspension. On peut alors décomposer le mouvement de la membrane comme le mouvement d'un piston plan perturbé par les déformations dues au matériau. Il devient alors possible de décomposer le déplacement en un point de la membrane selon les déformées propres :

$$U(Q, t) = \left( U_0 + \tilde{U}(Q) \right) \cos(\omega t) = \left( U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} U_{mn}(Q) \right) \cos \omega t \quad (\text{B.4})$$

$$U_{mn}(Q) = \left( J_m \left( A_{mn} \frac{r}{a} \right) - \frac{J_m(A_{mn})}{I_m(A_{mn})} I_m \left( A_{mn} \frac{r}{a} \right) \right) \cos m\theta \quad (\text{B.5})$$

La pression en un point  $M$  du milieu  $i$  est donnée par :

$$p_i(M) = (-1)^{i+1} \int_{V_i} \rho \omega^2 G(M, Q') U(Q') dQ' \quad (\text{B.6})$$

$$G(M, Q') = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-j\omega/c \|MQ'\|}}{\|MQ'\|}$$

où  $G$  est la fonction de Green pour un point source dans le plan de la plaque. On obtient ainsi l'expression suivante pour la différence de pression pariétale :

$$p_1(Q) - p_2(Q) = 2 \int_S \rho \omega^2 G(Q, Q') U(Q') dQ' \quad (\text{B.7})$$

$$p_1(Q) - p_2(Q) = 2\rho\omega^2 \left( \underbrace{U_0 \int_S G(Q, Q') dQ'}_{\text{mode piston plan}} + \underbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \int_S G(Q, Q') U_{mn}(Q') dQ'}_{\text{mode } (m,n)} \right) \quad (\text{B.8})$$

On aboutit alors au système suivant avec les variables  $U_0$  et  $\tilde{U}(Q)$  :

$$D\nabla^4 \tilde{U}(Q) + \rho h \frac{\partial^2 \tilde{U}(Q)}{\partial t^2} = \rho h \ddot{U}_0 + (F_0 \cos \omega t - C_0 U_0) \delta(r = a) + p_1(Q) - p_2(Q) \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{cases} \tilde{U}(r = a) = 0 \\ \frac{\partial \tilde{U}}{\partial r}(r = a) = 0 \end{cases}$$

## Projection sur le mode piston plan

On peut alors rechercher les solutions du mode de piston plan en regardant les solutions de l'équation précédente en  $r = a$ . On aboutit alors à l'équation suivante après intégration sur la surface :

$$\boxed{M_m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\eta_0 \omega \omega_0) U_0 = F_0 - 2j\omega \left( \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn}^0 a_{mn} + Z_0^R U_0 \right)} \quad (\text{B.10})$$

avec :

$M_m = \int_S \rho h$  : masse du piston plan.

$C_m = \int_S C_0$  : Compilance de la suspension.

$\omega_0^2 = \frac{C_m}{M_m}$  : fréquence de résonance de l'équipage mobile.

$\eta_0$  : amortissement interne au niveau de la suspension.

$Z_{pq}^0 = j\rho\omega \int_S \int_S G(Q, Q') U_{pq}(Q') dQ dQ'$  : Impédance croisée du mode de piston plan avec le mode (p,q).

$Z_0^R = j\rho\omega \int_S \int_S G(Q, Q') dQ dQ' = j\rho\omega cS \left[ 1 - \frac{J_1(2ka)}{ka} + j\frac{S_1(2ka)}{ka} \right]$  : Impédance de rayonnement du mode de piston plan.

On peut ainsi se ramener à une équation modale, formulation plus générale du problème qui reste valable que l'on considère une coque ou une plaque

## Projection sur le mode (m,n)

On peut alors projeter l'équation (5.16) suivant le mode (m,n) ( $\int_S U_{mn}$ (5.16)) pour se ramener à l'équation modale suivante :

$$\rho h N_{mn} a_{mn} (\omega_{mn}^2 - \omega^2 + j\eta\omega) = F_{mn} - 2j\omega \left( \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} N_{mn} a_{mn} Z_{mn,pq} + U_0 Z_{mn}^0 \right) \quad (\text{B.11})$$

avec :

$\eta(\omega)$  : amortissement interne du matériau

$N_{mn} = \int_S U_{mn}(Q)^2 dQ$  : norme du mode (m, n)

$F_{mn} = \rho h \ddot{U}_0(t) \int_S U_{mn} dQ$  : force généralisée

$Z_{mn,pq} = \rho h \int_S \int_S \frac{j\rho\omega}{N_{mn}} U_{mn}(Q) G(Q, Q') U_{pq}(Q') dQ dQ'$  : impédance croisée du mode (m, n) et (p, q)

$Z_{mn}^0 = j\rho\omega \int_S \int_S G(Q, Q') U_{mn}(Q') dQ dQ'$  : impédance croisée du mode de piston plan avec le mode (m,n).

Dans ce cas, on se ramène également à une formulation plus générale du problème qui ne tient plus compte de l'équation différentielle de départ.

# Bibliographie

- [1] W. Klippel “Diagnosis and remedy of nonlinearities in electrodynamic transducers”, AES Convention L.A., 2000.
- [2] W. Klippel “Active compensation of transducer nonlinearities”, AES 23rd International Conference, Copenhagen, Denmark, 2003 May 23-25.
- [3] H. Schurer “Linearisation of electroacoustic transducers”, Thesis University of Twente Enschede (NL), 1997.
- [4] A. Bright “Simplified loudspeaker Distorsion compensation by DSP”, AES 23rd International Conference, Copenhagen, Denmark, 2003 May 23-25.
- [5] P.F. Pai & S.Y. Lee “Non-linear structural dynamics characterization using a scanning laser vibrometer”, Journal of Sound and Vibration n°264, 2003 pp 657-687.
- [6] W. Marshall Leach “Loudspeaker voice-coil inductance losses”, Journal of the Audio Engineering Society Vol. 50 N°6, 2002 June.
- [7] J.L. Guyader “Analyse modale du comportement vibroacoustique des structures. Mécanismes et réduction du bruit généré”, Revue d’Acoustique n°79, 1986 pp 26-37.
- [8] E. B. Skrodzka & A. P. Sek “Comparaison of modal parameters of loudspeakers in different working conditions”, Applied Acoustics n°60, 2000 pp 267-277.
- [9] O. Thomas “Analyse et modélisation de vibrations non-linéaires de milieux minces élastiques”, thèse de l’UPMC, Octobre 2001.
- [10] O. Thomas “Calibration d’un excitateur électro-magnétique”, Rapport de stage Post-Doctoral ENSTA-UME, 2003.
- [11] J. F. Doyle “Nonlinear Analysis of Thin-Walled Structures”, Mechanical Engineering Series éd. Springer.
- [12] J. Park & Seok-Tae “Development of the two-stage harmonic balance method to estimate non-linear parameters of electrodynamic loudspeaker”, AES Vol 49 n°3, February 2001 pp 99-116.
- [13] D.J. Murphy “Axisymmetric Model of a Moving-Coil Loudspeaker”, AES Vol. 41 n°9, September 1993 pp 679-690.
- [14] M.C. Junger & D. Feit “Sound, Structures and their Interaction”, Acoustical Society of America through the American Institute of Physics 1993.
- [15] M. Rossi “Electroacoustique”, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne Volume XXI, 1986.

- [16] C. Lambourg “Modèle temporel pour la simulation numérique de plaques vibrantes”, Thèse de l’UPMC, Novembre 1996.
- [17] M. Fontaine “Etude théorique, numérique et expérimentale des vibrations linéaires de calottes sphériques minces élastiques”, Rapport de stage DEA ATIAM, 2001.
- [18] M. Ashby “Materials Selection in Engineering Design”, Butterworth Heinemann, 1999.

