

MEMOIRE de STAGE de DEA de l'UNIVERSITE PARIS 6

Spécialité :

Acoustique Traitement du signal et Informatique Appliqués à la
Musique

Présenté par

M. Eric HUMBERT

Sujet du stage :

Etude expérimentale et simulation
numérique de l'interaction marteau-corde du
piano en vue de la synthèse en temps réel

Soutenu le 13 Septembre 2002

Encadrants :

M. R. CAUSSE (IRCAM)
M. C. VERGEZ (LMA)

TRAVAIL EFFECTUÉ À L'IRCAM, CENTRE GEORGES POMPIDOU
1 Place Igor Stravinsky, 75004 Paris

Table des matières

Introduction	4
1 Mesures des caractéristiques du feutre	5
1.1 Historique des mesures	5
1.2 But des mesures	6
1.3 Le dispositif matériel	7
1.3.1 Protocole expérimental	7
1.3.2 Choix des marteaux	8
1.4 Le dispositif logiciel	8
1.4.1 L'acquisition	8
1.4.2 Post-traitement numérique	8
1.5 Déroulement typique d'une séance de mesures	10
1.6 Résultats des mesures	14
1.6.1 fiabilité et reproductibilité des mesures	14
1.6.2 Limites du dispositif	14
1.6.3 Influence du piquage	15
2 Modélisation de l'interaction marteau-corde	17
2.1 Le modèle physique	17
2.1.1 Le système	17
2.1.2 Géométrie et paramètres du système	17
2.2 La couche visco-élastique	18
2.2.1 Les caractéristiques du feutre	18
2.2.2 Le modèle de Stulov	19
2.2.3 Le modèle de Hunt-Crossley	20
2.3 Mise en équation : formalisme modal	20
3 Résolution numérique	22
3.1 Intégration de l'équation modale par schéma d'Euler modifié	22
3.2 Résolution exacte en position par convolution avec des fonctions de Green	23
3.2.1 Calcul des solutions exactes	23
3.2.2 Fonctions de Green de vitesse	24
3.3 Un banc d'oscillateurs	24
3.3.1 Calcul de la position	24
3.3.2 Calcul de la vitesse	26

3.4	Le calcul de la force d'interaction	26
3.4.1	Implémentation du modèle de Stulov	26
3.4.2	Implémentation du modèle de Hunt-Crossley	27
3.5	Architecture du calcul	27
4	Résultat des simulations	29
4.1	Comparaison avec les mesures de la littérature	29
4.1.1	Le modèle de Stulov	29
4.1.2	Le modèle de Hunt-Crossley	30
4.1.3	Conclusions	32
4.2	Confrontation des simulations et de nos mesures	33
4.2.1	Comparaison des deux modèles de feutre	33
4.2.2	Le diagramme force-compression : une caractérisation relative	37
4.3	Nos simulations avec une corde vibrante	38
4.3.1	Comparaison des deux méthodes de calcul	38
4.3.2	Synthèse sonore	39
	Conclusion et perspectives	40
A	Résolution numérique des équations modales par le schéma d'Euler implicite	41
B	L'importance du choix des constantes d'intégration	42

Introduction

Le présent rapport décrit le travail réalisé dans le cadre du stage de fin de DEA ATIAM (Acoustique, Traitement du signal et Informatique Appliqués à la Musique), qui s'est déroulé de mai à août 2002 dans l'équipe "Acoustique Instrumentale" de l'IRCAM sous l'encadrement de René Caussé et Christophe Vergez.

Ce stage poursuit une précédente collaboration dans le cadre d'un projet de 2ème année à l'Ecole Centrale Paris réalisé en alternance au long de l'année scolaire 2001 et portant sur la modélisation de l'interaction marteau-corde du piano. Ce travail théorique avait abouti à un modèle encourageant mais surtout, il avait fait apparaître le besoin d'un plus grand nombre de mesures du comportement du feutre du marteau de piano.

Le but du stage était donc de réaliser des manipulations expérimentales permettant de mieux caractériser les propriétés du feutre et d'améliorer la modélisation du système {marteau-feutre-corde} dans l'optique d'une synthèse temps-réel d'un son de piano par modèle physique.

La synthèse par modèle physique consiste à simuler numériquement le comportement vibratoire d'un instrument de musique en mettant en équations les phénomènes physiques qui s'y déroulent et en les résolvant. C'est une des méthodes de synthèse les plus prometteuses à l'heure actuelle. Des chercheurs synthétisent par cette méthode des sons d'excellente qualité pour des instruments tels que flûte, trompette, percussions etc... Pourtant, aucun modèle n'a à ce jour permis de reproduire convenablement le son du piano. La puissance des ordinateurs ouvrant la possibilité de simuler le comportement d'un instrument d'une telle complexité, les recherches sur le fonctionnement du piano s'intensifient partout dans le monde. Il est vrai que l'idée d'un piano numérique pouvant reproduire des subtilités d'interprétation inaccessibles aux modèles actuels est enthousiasmante.

Le plan du rapport rend compte des deux composantes du travail réalisé : d'une part la conception d'un protocole expérimental dédié à l'étude du comportement du feutre et d'autre part le travail théorique de modélisation de l'interaction marteau-corde et la recherche d'une implémentation numérique favorable à la synthèse temps-réel.

Chapitre 1

Mesures des caractéristiques du feutre

1.1 Historique des mesures

A notre connaissance, toutes les études expérimentales du comportement du feutre du marteau de piano menées jusqu'à ce jour ont consisté à mesurer la compression du feutre et la force à laquelle il est soumis lors d'un impact résultant du lancé du marteau sur une surface le plus souvent rigide et immobile. Yanagisawa et Nakamura ([1]) furent les premiers à effectuer de telles mesures. Leur montage expérimental consistait à fixer un accéléromètre sur la tête du marteau et à lancer ce dernier sur un capteur de force immobile. L'article décrivant ces mesures n'étant disponible qu'en japonais, il nous est difficile d'exploiter ces mesures. Ce protocole fut repris par Boutillon ([2]) puis Giordano et Winans ([3]).

Dans ce dernier article, les auteurs obtiennent des diagrammes force-compression différents de ceux obtenus par les auteurs précités ([1], [2]). Ils expliquent ces différences par le fait que leurs mesures sont plus précises, notamment en ce qui concerne la définition temporelle, et qu'elles mettent en évidence des phénomènes créateurs d'hystérésis relatifs au dispositif expérimental tels que la flexion du manche du marteau pendant l'impact et le temps que met l'onde de déformation pour se propager de la surface du feutre à l'arrière de la tête du marteau où est monté l'accéléromètre. Pour notre part, nous pensons que les diagrammes particuliers obtenus par Giordano et Winans sont erronés à cause d'une mauvaise détermination des constantes d'intégration de l'accélération mesurée. Nous l'avions pressenti à la lecture de l'article et avons constaté par la suite, lors de nos propres mesures, qu'une erreur d'offset dans la vitesse engendrait effectivement ce genre de diagramme force-compression (plus de détails sont donnés dans l'annexe B).

Giordano et Millis ([4]) ont réalisé des mesures de diagrammes force-compression d'un marteau lancé sur la corde mobile d'un "instrument" de laboratoire. Ces mesures leur ont servi à réfuter (de façon encore discutable, selon nous) un modèle de comportement du feutre (celui de Stulov [5]) mais ne sont en aucun cas réutilisables. Enfin Anatoli Stulov ([6]) a conçu un système (figure 1.1) très bien pensé et réalisé permettant de mesurer le diagramme force-compression du feutre d'un marteau lancé sur une surface rigide immobile. Cette fois, la compression du feutre est mesurée di-

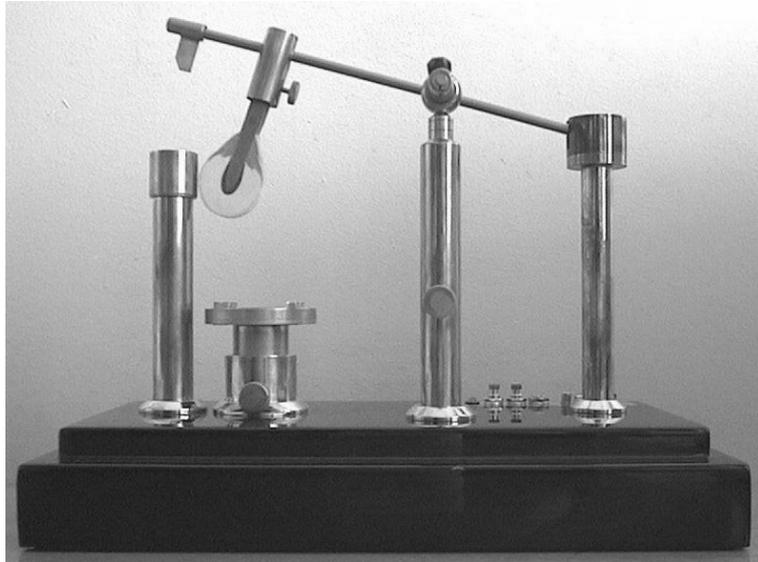


FIG. 1.1 – Appareil de mesure de la caractéristique force-compression du feutre conçu par Stulov pour le facteur de piano estonien Tallinn

rectement à l'aide d'un dispositif optique et le marteau est monté sur un manche en titane inflexible. Stulov a ainsi obtenu des mesures fiables d'impact et a eu la gentillesse de bien vouloir nous en envoyer.

Toutefois, ces mesures restent des mesures d'impact libre dans des conditions qui ne sont pas celles du piano puisque le marteau heurte une surface immobile et avec une forte inertie due à la surcharge du marteau (masse d'un accéléromètre ou d'un dispositif optique). Tant qu'à ne pas être dans les conditions d'impact du piano, nous pensons donc qu'il vaut mieux pouvoir produire des situations variées de compression. D'autant que certaines situations, comme des compressions très lentes ou très rapides, peuvent être très pratiques pour la recherche d'une modélisation du feutre ou la détermination des paramètres d'un tel modèle, en mettant en évidence des comportements asymptotiques.

Ainsi, nous avons voulu imaginer un protocole innovant, précis et utile.

1.2 But des mesures

Notre objectif est de réaliser des mesures fiables de la force appliquée au feutre et de la compression du feutre au cours du temps dans des situations plus diverses et maîtrisables que celle de l'impact du marteau lancé sur une surface rigide. Notre idée est d'imposer la compression du feutre à l'aide d'un pot vibrant. Ainsi, nous pouvons reproduire des situations intéressantes et pourtant inédites comme une très lente compression/détente du feutre (étude quasi-statique) ou, au contraire, une succession très rapide de compressions comme pourrait la produire la vibration d'un mode élevé de la corde. Ces mesures nous seront très utiles pour valider l'un ou l'autre des modèles de feutre existants et déterminer leurs paramètres.

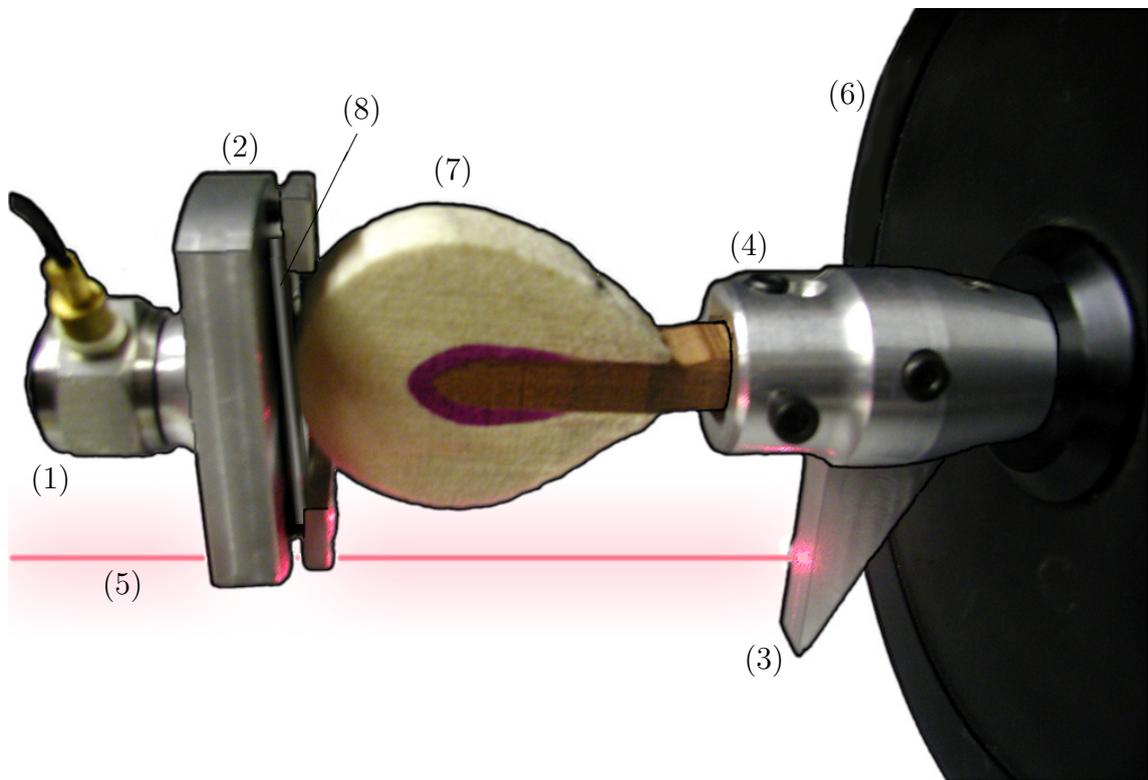


FIG. 1.2 – Montage expérimental : (1) Capteur de force Brüel & Kjær de type 8200, (2) Embout spécialement réalisé où le contact se fait sur une tige du diamètre de la corde, (3) Cible (solidaire de de la pièce 4), (4) Pièce spécialement réalisée pour pouvoir maintenir fermement tout type de marteau, (5) Laser, (6) Pot vibrant type 4809 de Brüel & Kjær. (7) Marteau, (8) Bout de corde ou tige métallique de même diamètre maintenu serré et collé contre le plateau de la pièce 2.

1.3 Le dispositif matériel

1.3.1 Protocole expérimental

Comme le montre la figure 1.2, le feutre est comprimé contre un bout de corde par un pot vibrant à différentes fréquences. La force est mesurée par un capteur piezo-électrique, tandis que la compression est déduite par intégration de la vitesse mesurée par vélocimétrie laser.

Nous avons porté une attention toute particulière à la rigidité du dispositif pour éviter des déformations de pièces ou des jeux entre pièces susceptibles de fausser les mesures. Nous avons aussi voulu que le dispositif puisse être utilisé rapidement et directement avec tout type de marteau. La pièce (4) peut donc maintenir n'importe quel marteau, tandis que la pièce (2) pourra accueillir la corde de diamètre correspondant. L'ensemble est maintenu par une structure hyper-rigide adaptable visible sur la photographie 1.3.

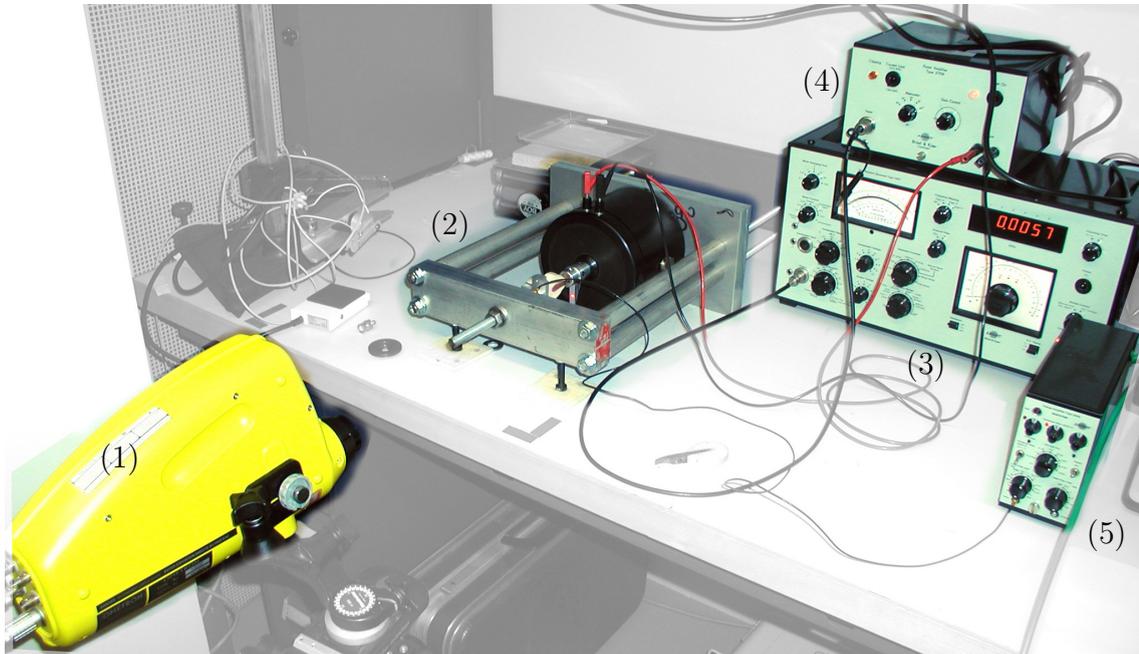


FIG. 1.3 – Dispositif expérimental : (1) Laser, (2) Structure rigide maintenant le montage expérimental, (3) Générateur alimentant le pot vibrant, (4) Amplificateur pour l'alimentation du pot vibrant, (5) Amplificateur de charge du capteur de force.

1.3.2 Choix des marteaux

Nous nous basons sur un piano demi-queue Steinway modèle B, dont les caractéristiques physiques des cordes nous sont connues et seront utilisées dans le modèle de synthèse.

1.4 Le dispositif logiciel

1.4.1 L'acquisition

L'acquisition des signaux de force et de vitesse se fait avec le logiciel *LabView* sur un PC doté de cartes *National Instruments*. Celles-ci ont des convertisseurs analogique/numérique 32 bits fonctionnant à des fréquences d'échantillonnage de 44,1 ou 25,6 kHz. Nous obtenons ainsi des données d'une très grande précision (parfois trop grande par rapport à la précision de la mesure). Ces données brutes sont ensuite traitées numériquement de manière automatique à l'aide de scripts et fonctions *Matlab* dédiés pour fournir finalement des jeux exploitables et cohérents de données.

1.4.2 Post-traitement numérique

Les signaux électriques issus du laser et du capteur de force donnent une image de la vitesse du marteau et de la force que celui-ci applique sur la corde. Les correspon-

dances entre le voltage de ces signaux et la valeur mesurée en millimètre par seconde ou en Newton sont indiquées par les constructeurs suite à un étalonnage en usine. D'après eux, ce calibrage d'usine est stable pendant plusieurs années. Nous avons tout de même vérifié la justesse de ce calibrage à l'aide d'un accéléromètre Brüel & Kær, lui aussi calibré en usine. Nous avons monté le capteur de force en sandwich entre le pot vibrant et une masse connue sur laquelle était fixé l'accéléromètre. Le laser pointait sur la masse. En faisant vibrer le pot vibrant à différentes fréquences et en appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse, nous avons pu vérifier la cohérence de l'ensemble des mesures. Nous avons pu aussi vérifier que les réponses des capteurs étaient linéaires et qu'aucune correction numérique n'était nécessaire.

Intégration de la vitesse

Pour l'intégration de la vitesse, nous avons choisi d'utiliser la méthode des trapèzes. Si le signal de vitesse n'est pas rigoureusement à valeur moyenne nulle, il est extrêmement important de lui soustraire son offset avant de l'intégrer. Pour des raisons propres au Laser ou au matériel d'acquisition, le signal de vitesse présentait souvent un très léger offset, lequel, nous le savons, n'est pas présent dans le signal d'origine puisque le dispositif ne s'est heureusement jamais mis en translation. Il a donc été nécessaire de ramener numériquement le signal de vitesse à une valeur moyenne nulle. Il nous a fallu coder pour cela une méthode automatique de recherche de la période du signal utilisant la transformée de Fourier et la détection des passages par zéro.

Filtrage inverse

Un autre problème vient de l'amplificateur de charge du capteur de force qui ne laisse pas passer le continu : Il a une fréquence de coupure en basse fréquence de $0,1Hz$. Comme nous ne pouvions nous en procurer un autre ne présentant pas cette limitation, nous avons cherché à corriger numériquement l'erreur commise. La présence de cette limite en basse fréquence se manifeste tout d'abord par un signal de mesure de force à valeur moyenne nulle. Ainsi, pour un instant où il n'y a pas contact, la force a une valeur mesurée négative au lieu d'être nulle. Ceci n'est pas grave : il suffit de translater la force pour que son minimum soit nul. Par contre, pendant ces instants de non-contact la force mesurée n'est pas constante ! Elle nous semble plutôt être une branche d'exponentielle résultant de la décharge d'un condensateur dans une résistance. Cela indiquerait que le filtre présent dans l'amplificateur de charge est de type passe-haut d'ordre 1, mais nous n'avons pas pu obtenir de confirmation par le constructeur. Notre intuition est cependant renforcée par le fait que l'identification avec une courbe exponentielle décroissante de la forme $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ donne une constante de temps $\tau = 1,4s$ ce qui correspond à une fréquence de coupure de $0,11Hz$.

Le filtre inverse du passe-haut d'ordre 1 a pour fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{1 + j\omega\tau}{j\omega\tau} \quad (1.1)$$

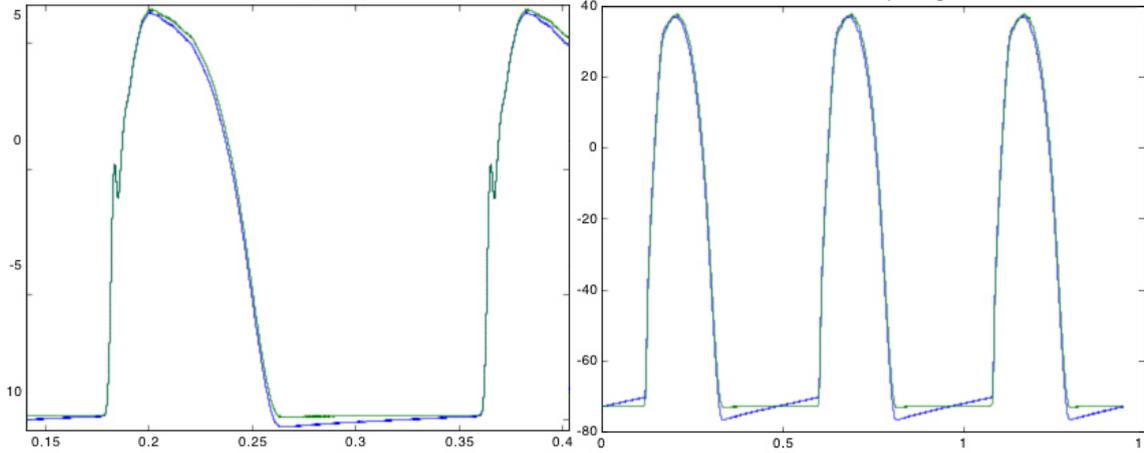


FIG. 1.4 – Deux exemples de correction numérique du signal de force par filtrage inverse. Les mesures avant correction sont en bleu, tandis que les mesures corrigées sont en vert.

En effectuant dans l'égalité (1.1) la transformation bilinéaire :

$$j\omega = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (1.2)$$

où $c = \frac{1}{\tau} \cot\left(\frac{1}{2\tau F_e}\right)$ nous obtenons le filtre numérique équivalent suivant :

$$H(z) = \frac{\tau c(1 - z^{-1})}{(1 + \tau c) + (1 - \tau c)z^{-1}} \quad (1.3)$$

La figure (1.4) montre comment ce filtrage nous a permis de corriger les mesures.

Lissage

Nous avons également lissé les courbes pour atténuer le bruit de mesure (figure 1.5). Celui-ci est très faible mais, pour le faible signal de force entre deux contacts, son atténuation permet de déterminer plus précisément le début du contact. Pour cela nous avons écrit une fonction qui moyenne chaque échantillon avec ses n voisins grâce à un filtre à réponse impulsionnelle finie :

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-2n}}{2n + 1} \quad (1.4)$$

dont nous décalons la réponse de n échantillons. Le paramètre n est ajustable suivant les mesures.

Comme pour le filtrage inverse, il est nécessaire d'enlever la composante continue avant le lissage.

1.5 Déroulement typique d'une séance de mesures

Le feutre du marteau de piano étant loin d'avoir livré tous ses mystères, le dispositif de mesure que nous avons réalisé est voué à une longue utilisation. Tout a

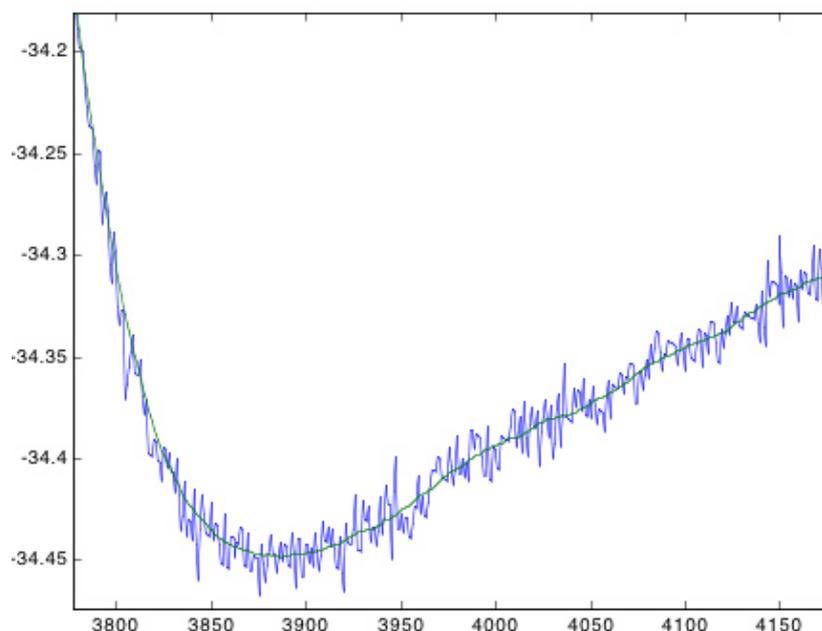


FIG. 1.5 – Lissage par filtrage RIF ajustable

donc été fait pour que son utilisation soit facile et donne rapidement des mesures fiables et exploitables. Voici la procédure à suivre :

- Focaliser le Laser sur la cible.
 - Lancer *capture4* le programme d'acquisition de *LabView*.
 - Pousser le pot vibrant au maximum de ses capacités en augmentant l'amplificateur de puissance.
 - Visualiser les signaux sur le PC. choisir sur l'amplificateur de charge le gain maximum pour lequel le signal acquis de la force n'est pas écrêté.
 - Si le signal acquis de la vitesse est écrêté (rare avec ce pot vibrant), insérer un atténuateur de tension (pont diviseur) entre le laser et le PC et noter la valeur de son gain.
 - Faire une acquisition (bouton GEL) en régime établi, c'est à dire après avoir attendu au moins trois secondes, constante de temps du filtre passe-haut de l'amplificateur de charge.
 - Choisir le *nom* de la mesure et enregistrer la vitesse sous le nom *vnom* et la force sous le nom *fnom*.
 - Dans *Matlab* lancer la fonction "mesures.m" de la façon suivante :
`[f v p fe]=mesures('nom');`
 - Cette fonction interagit avec l'utilisateur pour convertir les mesures dans leurs unités réelles, déterminer la période pour enlever l'offset de la vitesse avant de l'intégrer et effectuer le filtrage inverse de la force.
- Cela donne par exemple :

```
»[f v p fe]=mesures('test18h');
-----> Rentrez le gain en force (10, 31.6 ou 100 mV) : 10
```

----> Rentrez le gain en vitesse (par défaut 1) :

gainv =

1

fe =

44100

tol =

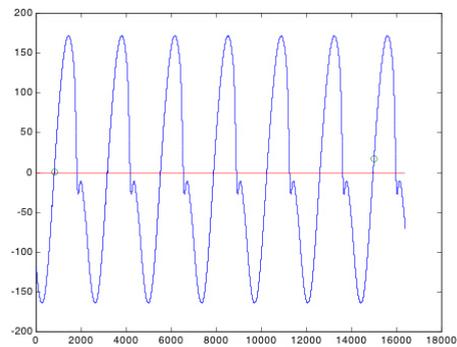
50

premierzero =

802

deuxiemezero =

14996



----> Y a t il un nombre entier de periode (o/n) ? n

----> Tapez t pour changer la tolerance de recherche automatique du deuxieme zero ou tapez directement l indice du deuxieme zero, ou ENTER pour garder l offset : t

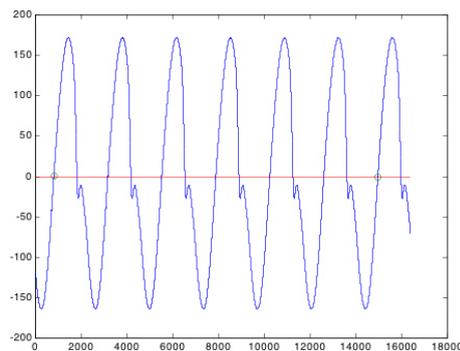
----> Rentrez la nouvelle tolerance : 100

premierzero =

802

deuxiemezero =

14959

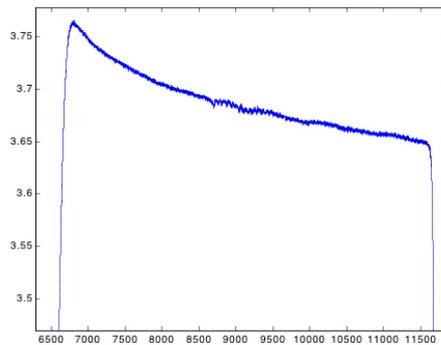


----> Et maintenant ? (o/n) : o

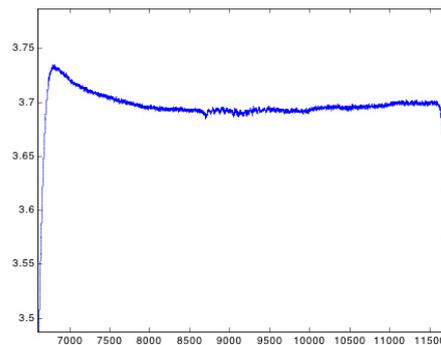
----> Faut-il filtrer la force (inutile en haute frequence) ? (o/n) : o

tau =

1.4200



-----> C est bon? (o/n) : n
 -----> Entrez une nouvelle valeur de tau : 1.1



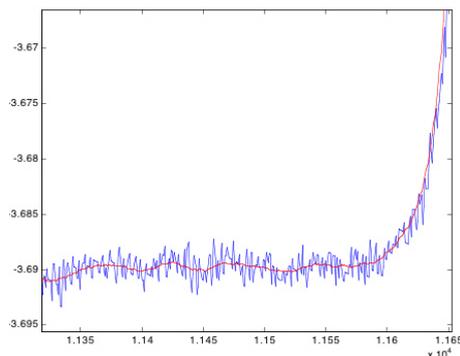
-----> C est bon? (o/n) : o

»

- Il faut ensuite lancer la fonction "cycle.m" qui interagit avec l'utilisateur pour isoler un contact (lissant s'il le faut les données), et renvoie un couple exploitable de compressions et forces pendant ce contact. La fonction trace également le diagramme force-compression (le cycle).

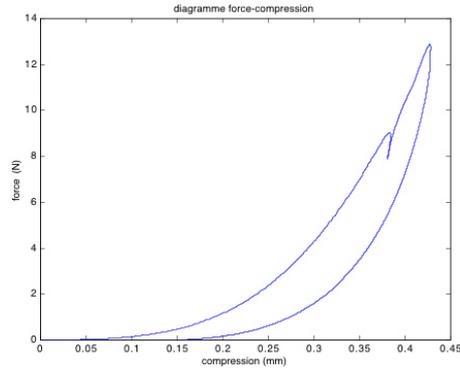
Par exemple :

»[pc,fc]=cycle(p,f);
 -----> Coefficient de lissage? (si c est bon : ENTER, pas de lissage : 0) : 12



-----> Coefficient de lissage? (si c est bon : ENTER pas de lissage : 0) :
 -----> Rentrez le début du contact (trace tout par défaut) : 11630

»



1.6 Résultats des mesures

1.6.1 fiabilité et reproductibilité des mesures

Les diagrammes force-compression obtenus à partir des mesures post-traitées sont d'allure tout à fait similaire à ceux relatifs aux impacts disponibles dans la littérature. Une autre satisfaction vient du fait que les différentes périodes d'un jeu de mesures décrivent des cycles force-compression superposables (figure 1.6).

Enfin nous avons effectué deux fois la même mesure en ayant démonté et remonté chacune des pièces. Nous avons alors pu constater qu'il fallait porter une grande attention au parallélisme entre la corde et le plan du mouvement du marteau. En effet, la figure (1.7) montre qu'un défaut de parallélisme modifie la forme du diagramme force-compression en augmentant sa raideur. L'explication vient du fait que dans une telle situation la surface de contact est plus grande.

En faisant bien attention à ce parallélisme, réglable au niveau de la liaison {capteur de force}-{structure rigide}, nous obtenons une reproductibilité satisfaisante.

1.6.2 Limites du dispositif

Une principale limitation de notre installation est liée au pot vibrant. Celui-ci a un débattement qui baisse avec l'augmentation de fréquence et nos mesures en hautes fréquences correspondent donc à des compressions très faibles.

De plus, un autre problème survient en haute fréquence : la vibration de la structure. Nous avons en effet observé que par propagation le long de la structure métallique le capteur de force vibre. La pièce 2 de la figure 1.2 subit donc une accélération et applique sur le capteur une force $f = ma$. Cette force peut être mesurée "à vide" en reculant l'ensemble capteur+pièce 2 pour éviter le contact avec le marteau (La distance pièce 2 - marteau est en effet réglable pour pouvoir s'adapter à tout type de marteau). A $200Hz$, fréquence limite où les mesures sont encore intéressantes puisque la compression maximum du feutre n'est déjà plus que de $0.2mm$, nous

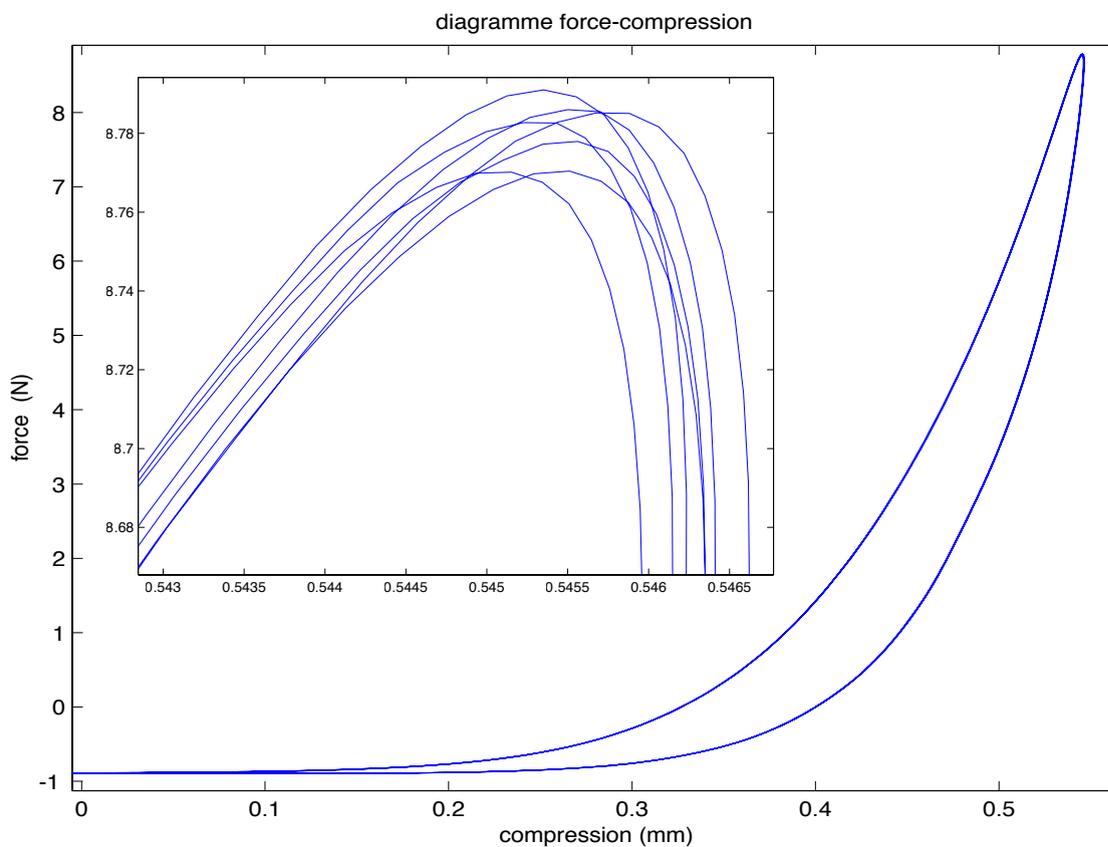


FIG. 1.6 – Fiabilité de la mesure : les sept cycles sont superposables.

mesurons une force parasite de $0,15N$ pour une force de compression maximale de $8N$. Cela crée donc une incertitude de 2% sur la valeur de la force. Cette valeur est acceptable et ce grâce à la précaution que nous avons prise de réaliser la pièce 2 la plus légère possible. Celle-ci présente des évidements et est en aluminium, métal usuel possédant le plus grand rapport rigidité/poids.

1.6.3 Influence du piquage

Nous avons fait venir un préparateur de piano et avons pu mesurer l'influence du piquage. La figure 1.8 montre le cycle mesuré avant piquage, après un premier piquage latéral, et après un second piquage sur la zone de contact. Nous remarquons l'importance du piquage des zones latérales sur la raideur globale du feutre : le feutre piqué est évidemment plus souple.

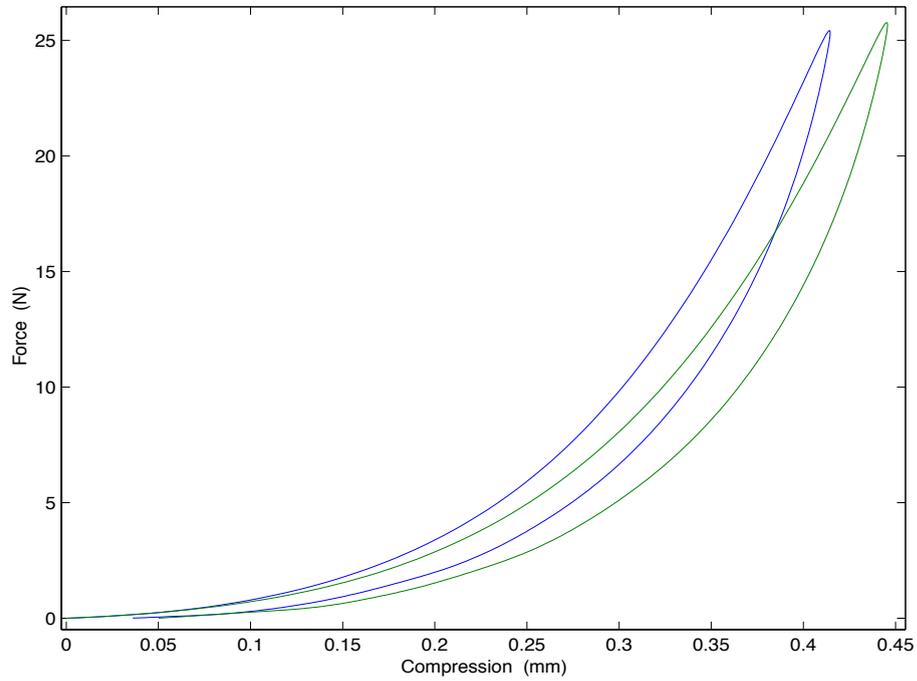


FIG. 1.7 – Effet d'un défaut de parallélisme : le cycle bleu est celui d'un marteau heurtant une corde bien positionnée, tandis que le cycle vert correspond à une corde légèrement inclinée par rapport au plan de mouvement du marteau.

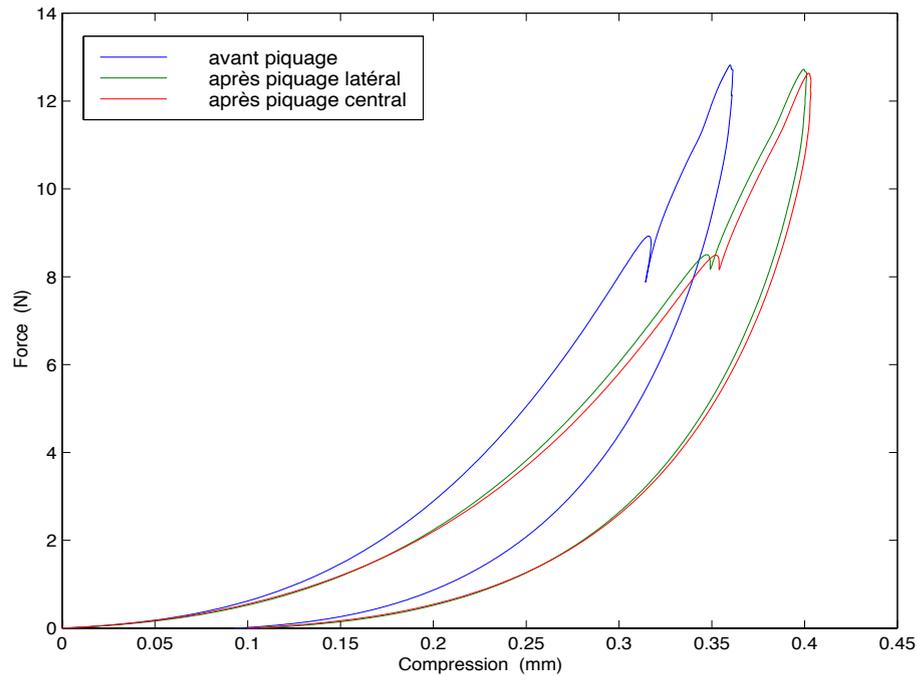


FIG. 1.8 – Influence du piquage

Chapitre 2

Modélisation de l'interaction marteau-corde

2.1 Le modèle physique

2.1.1 Le système

Notre système comprend un marteau et une corde, décrits par leurs caractéristiques modales (il serait intéressant de considérer ensuite deux ou trois cordes couplées et légèrement désaccordées entre elles comme dans un piano réel). Les données modales de la corde sont celles données par *Modalys*[©] pour les paramètres physiques de la corde réelle (par résolution analytique de l'équation d'onde dans une corde avec raideur). La corde est discrétisée spatialement en N points. Le marteau est pour l'instant modélisé par la structure résonnante la plus simple : deux masses M et m reliées par un ressort de raideur k . Il faut s'imaginer le marteau et la corde évoluant parallèlement et lorsqu'il doit y avoir contact, nous calculons la force d'interaction et l'appliquons à la corde, et son opposée au marteau. Le feutre n'a pas de modèle modal : c'est une couche visco-élastique sans masse. Sa présence intervient dans la connexion, c'est à dire dans le calcul de la force d'interaction. Ce choix se justifie par le fait que le feutre ne vibre pas (on l'utilise d'ailleurs souvent pour étouffer les vibrations) et donc ne s'entend pas (mais on entend bien sur ses effets sur la corde). De plus cette façon de procéder aboutit à un algorithme de calcul relativement simple et modulable pouvant utiliser les différentes lois de compression du feutre proposées dans les articles.

2.1.2 Géométrie et paramètres du système

Le choix des positions et vitesses initiales du marteau et de la corde comme paramètres de contrôle et leur valeur nous ont été inspirés par le fonctionnement d'un piano à queue. L'étude de celui-ci montre que le marteau se désolidarise du reste du mécanisme du clavier peu avant l'impact avec la corde. Nous avons donc considéré que le marteau est « lancé » à partir de cette position avec une vitesse initiale v vers la corde et qu'en dehors de la force d'interaction pendant le contact, il n'est soumis qu'à son propre poids. La longueur du bras de levier d'un marteau réel

étant bien supérieure à son déplacement vertical pendant le contact (5 mm/ 20 cm), nous avons considéré que le mouvement du marteau était vertical. Le paramètre qui traduit la force avec laquelle le pianiste appuie sur une touche est la vitesse initiale du marteau v . Dans la réalité, le marteau est recouvert d'une couche de feutre d'épaisseur e de l'ordre du centimètre, et la corde est disposée horizontalement à une hauteur h au-dessus du point où se trouve le marteau lorsqu'il se désolidarise du reste du mécanisme. Dans notre modèle, nous avons noté $y(1, t)$ (resp. $y(2, t)$) la cote de la masse M (resp. m) du marteau à l'instant t et $Y(p, t)$ la cote du point p de la corde à l'instant t par rapport à sa position d'équilibre. Le marteau frappe la corde au point p et le contact est déterminé par la condition :

$$Y(p, t) + h - y(2, t) < e$$

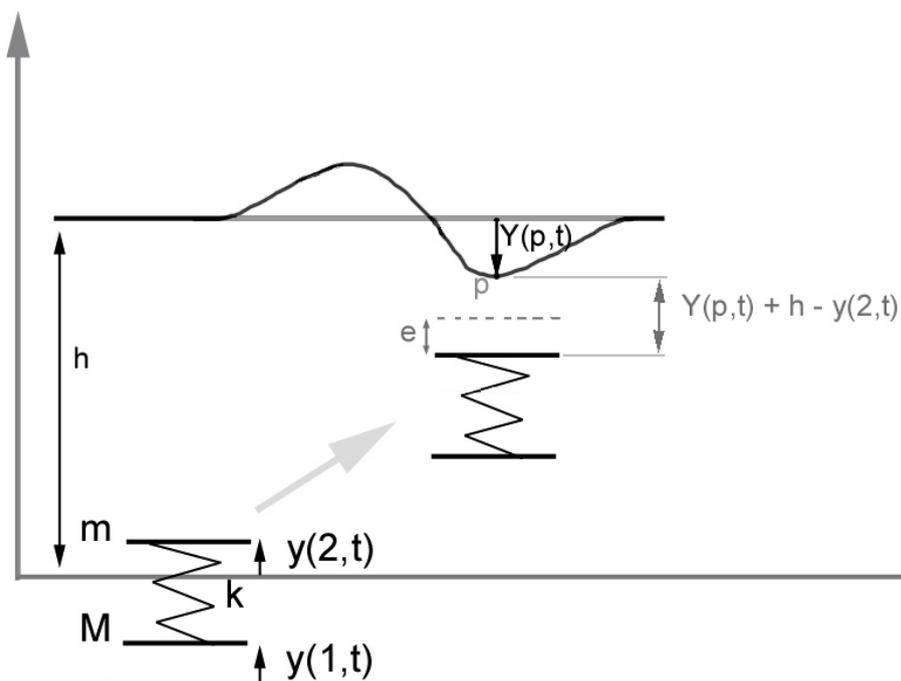


FIG. 2.1 – Le système comprend un marteau mono-mode, une corde multi-mode et une couche visco-élastique d'épaisseur e modélisant le feutre

2.2 La couche visco-élastique

2.2.1 Les caractéristiques du feutre

L'interaction marteau-corde dans le son du piano a déjà fait l'objet de nombreuses études. Le premier à s'atteler au problème fut sans doute Von Helmholtz

([7]). Un des premiers modèles proposés, celui de Kaufmann ([8]), introduit un marteau totalement rigide, assimilable à un point matériel, qui vient frapper une corde de longueur finie. Même si le modèle reste simpliste, il sera utilisé pendant plus de soixante ans pour son bon rapport résultat/simplicité. L'étape suivante fut franchie par Hall ([9], [10]) qui, s'appuyant sur les travaux expérimentaux de nombreux auteurs, réfléchit au problème de la déformation du feutre sous l'effet de la force exercée par la corde. Il fit de nombreuses simulations numériques de l'interaction marteau-corde, mais toujours avec un modèle simple de marteau : masse ponctuelle ou système masse-ressort linéaire. Des mesures plus précises sur le comportement du feutre ont été effectuées par Yanagisawa et Nakamura ([1]). Suzuki et Nakamura les ont analysées dans un long article ([11]). Ces expériences ont révélé que :

- Le diagramme force-compression n'est pas linéaire.
- Le feutre présente un comportement d'hystérésis qui se traduit par des courbes de compression et de détente du feutre qui ne se superposent pas.
- La pente à l'origine de la courbe force-compression dépend fortement de la vitesse initiale du marteau.

Au vu de ces conclusions, plusieurs modèles de feutre ont été proposés à la fin des années 1980. Ainsi Hall et Askenfelt ont considéré une loi élastique non-linéaire de compression du feutre $F = A.U^\alpha$. Ils ont mesuré la valeur de α pour différents marteaux et ont obtenu des valeurs variant de 1.5 à 3.5 sans évolution particulière quand on passe du grave à l'aigu. Hall ([12]) a ensuite simulé numériquement l'interaction marteau/corde à l'aide de ce modèle et obtenu une meilleure concordance avec la réalité que ses modèles précédents. Dans le même temps Suzuki ([13]) a utilisé un modèle de marteau non linéaire en $F = K_1.U + K_2.U^2 + K_3.U^3$ pour simuler l'interaction mais son modèle n'était pas satisfaisant pour les faibles déformations du feutre puisqu'il introduisait une force négative (K_1 étant négatif). En même temps que Hall, Boutillon ([2]) développe un modèle de marteau en $F = A.U^\alpha$, mais il utilise un coefficient α variable pour tenir compte de l'hysteresis.

En 1995, Anatoli Stulov ([5]) a proposé un nouveau modèle de feutre basé sur les propriétés des matériaux à mémoire. Depuis, il a effectué des mesures très précises de diagrammes forces-compression de différents marteaux frappant une surface rigide et montré que son modèle permettait d'obtenir des courbes similaires à celles mesurées ([6]). Enfin, alors que Giordano ([3]) met en doute l'existence même d'une loi de compression, Rocchesso et Avanzini ([14]) ont proposé très récemment d'utiliser une loi introduite originellement par Hunt et Crossley ([15]) pour modéliser les chocs amortis en robotique. Nous avons testé les modèles de Stulov et Hunt-Crossley dans notre simulation numérique sous *Matlab*. Les deux donnent de bons résultats pour approcher les quelques mesures dont nous disposons. Il nous faut réaliser nos propres mesures pour déterminer la meilleure loi et en estimer les paramètres.

2.2.2 Le modèle de Stulov

Stulov ([5]) préconise de se servir d'un modèle simple de matériaux à mémoire établi par Rabotnov pour prendre en compte les effets visco-élastiques. Il s'agit de remplacer les paramètres élastiques du solide en question par des opérateurs dépendants du temps. Ainsi dans le cas à une dimension d'une déformation longitu-

dinale, le module d'Young n'est plus une constante mais un opérateur

$$Y(t) = Y_0[1 - R(t)*] \quad (2.1)$$

où $*$ est le produit de convolution.

En prenant la loi de compression :

$$F(u) = CY.u^\alpha \quad (2.2)$$

où u est la compression du feutre, il obtient :

$$F(u(t)) = F_0[u(t)^\alpha - R(t) * u(t)^\alpha] \quad (2.3)$$

Enfin, il choisit un noyau exponentiel de la forme :

$$R(t) = \frac{\epsilon}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.4)$$

ce qui donne finalement :

$$F(u(t)) = F_0 \left[u(t)^\alpha - \frac{\epsilon}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^t u(\xi)^\alpha \exp\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi \right] \quad (2.5)$$

2.2.3 Le modèle de Hunt-Crossley

Hunt et Crossley ([15]) ont proposé en 1975 une loi modélisant un choc amorti en robotique. Rocchesso et Avanzini ([14]) ont utilisé récemment cette loi pour faire de la synthèse physique de sons percussifs et ont montré que l'on obtenait des diagrammes force-compression de même allure que ceux des marteaux de piano. Selon cette loi, la force dépend de la compression u et de la vitesse de compression \dot{u} de la manière suivante :

$$F(u, \dot{u}) = F_0 u^\alpha (1 + \mu \dot{u}) \quad (2.6)$$

Une des raisons ayant poussé Hunt et Crossley à proposer cette loi est qu'elle vérifie la conservation de l'énergie : l'aire du cycle d'hystérésis du diagramme force-compression, c'est à dire l'énergie dissipée par viscosité pendant le contact, est du même ordre que la perte d'énergie cinétique résultant du choc.

Il est à noter, que dans la forme générale de la loi proposée, le terme de vitesse \dot{u} est en fait à la puissance β , avec β positif. Bienqu'il soit couramment choisi à 1, un autre choix pour β pourrait être judicieux.

2.3 Mise en équation : formalisme modal

Dans la théorie classique des éléments finis, toute structure vibrante est régie par un ensemble d'équations différentielles du second ordre faisant intervenir des termes de masse, de raideur, et d'amortissement. Ces équations peuvent se mettre sous une forme matricielle bien connue :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathcal{U}} + \mathbb{D}\dot{\mathcal{U}} + \mathbb{K}\mathcal{U} = \mathcal{F} \quad (2.7)$$

où \mathbb{M} est la matrice de masse, \mathbb{D} la matrice d'amortissement, \mathbb{K} la matrice de raideur, \mathcal{U} le vecteur de déformation et \mathcal{F} le vecteur des forces extérieures appliquées aux noeuds du système.

Dans le cadre de notre modèle les structures ne vibrent que selon une seule dimension et nous noterons donc :

$$\mathbb{M}\ddot{\mathcal{Y}} + \mathbb{D}\dot{\mathcal{Y}} + \mathbb{K}\mathcal{Y} = \mathcal{F} \quad (2.8)$$

où \mathcal{Y} est le vecteur des déplacements de chaque noeud selon la direction du mouvement. On démontre qu'il existe une base diagonalisante orthogonale pour \mathbb{M} et \mathbb{K} (qui sont symétriques réelles...) appelée base modale. Notons Φ la matrice de passage de la base réelle dans la base modale. Ses colonnes sont des vecteurs propres de \mathbb{M} et \mathbb{K} . Physiquement, ce sont les déformées modales de la structure.

En normalisant la base modale par rapport à la masse, la matrice Φ vérifie les équations :

$$\begin{cases} \Phi^t \mathbb{M} \Phi = \mathcal{I}_d \\ \Phi^t \mathbb{K} \Phi = \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \omega_k^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.9)$$

Pour pouvoir résoudre le système, nous supposons que \mathbb{D} peut s'exprimer comme un combinaison linéaire de \mathbb{M} et de \mathbb{K} (on parle alors d'amortissement proportionnel) :

$$\mathbb{D} = \alpha\mathbb{M} + \beta\mathbb{K} \quad (2.10)$$

L'équation (2.8) devient alors :

$$\mathbb{M}(\ddot{\mathcal{Y}} + \alpha\dot{\mathcal{Y}}) + \mathbb{K}(\beta\dot{\mathcal{Y}} + \mathcal{Y}) = \mathcal{F} \quad (2.11)$$

En multipliant à gauche cette équation par Φ^t et en y faisant apparaître $\Phi\Phi^{-1}$ ($= \mathcal{I}_d$), nous reconnaissons les formules de changement de bases (2.9) :

$$\Phi^t \mathbb{M} \Phi \Phi^{-1} (\ddot{\mathcal{Y}} + \alpha\dot{\mathcal{Y}}) + \Phi^t \mathbb{K} \Phi \Phi^{-1} (\beta\dot{\mathcal{Y}} + \mathcal{Y}) = \Phi^t \mathcal{F} \quad (2.12)$$

$$\ddot{\mathcal{Y}}_m + \alpha\dot{\mathcal{Y}}_m + \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \omega_k^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} (\beta\dot{\mathcal{Y}}_m + \mathcal{Y}_m) = \Phi^t \mathcal{F} \quad (2.13)$$

où $\mathcal{Y}_m = \Phi^{-1}\mathcal{Y}$ est le vecteur des déformations exprimé dans la base modale. Nous aboutissons ainsi à un système d'équations différentielles indépendantes.

$$\forall k = 1 \dots N, \quad \ddot{\mathcal{Y}}_m^k(t) + (\alpha + \omega_k^2 \beta) \dot{\mathcal{Y}}_m^k(t) + \omega_k^2 \mathcal{Y}_m^k(t) = (\Phi^t \mathcal{F})^k(t) \quad (2.14)$$

où \mathcal{Y}_m^k et $(\Phi^t \mathcal{F})^k$ sont les $k_{\text{èmes}}$ composantes de \mathcal{Y}_m et $\Phi^t \mathcal{F}$.

Nous introduisons $\zeta_k = \frac{\alpha + \omega_k^2 \beta}{2\omega_k}$, coefficient d'amortissement du mode k pour obtenir la forme canonique :

$$\forall k = 1 \dots N, \quad \ddot{\mathcal{Y}}_m^k(t) + 2\omega_k \zeta_k \dot{\mathcal{Y}}_m^k(t) + \omega_k^2 \mathcal{Y}_m^k(t) = (\Phi^t \mathcal{F})^k(t) \quad (2.15)$$

Nous pouvons facilement et indépendamment déterminer chacune des composantes de \mathcal{Y}_m et en déduire $\mathcal{Y} = \Phi \mathcal{Y}_m$. Nous traiterons de la résolution numérique de ces équations différentielles dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Résolution numérique

3.1 Intégration de l'équation modale par schéma d'Euler modifié

L'équation 2.15 peut se résoudre par différences finies. Nous discrétisons le temps avec un pas Δt et notons, par abus de notation, $\mathcal{Y}_m^k(t+1)$ en temps discret, qui correspond à $\mathcal{Y}_m^k(t+\Delta t)$ en temps continu. La résolution s'effectue en approximant les dérivées par un schéma aux différences finies. Les plus simples de ses schémas sont les schémas d'Euler explicite et implicite. Selon le schéma d'Euler explicite :

$$\ddot{\mathcal{Y}}_m^k(t+1) = \frac{\dot{\mathcal{Y}}_m^k(t+1) - \dot{\mathcal{Y}}_m^k(t)}{\Delta t} \quad (3.1)$$

et de même :

$$\mathcal{Y}_m^k(t+1) = \Delta t \dot{\mathcal{Y}}_m^k(t+1) + \mathcal{Y}_m^k(t) \quad (3.2)$$

En substituant ces deux grandeurs dans l'équation 2.15 réécrite à l'instant $t+1$, nous obtenons :

$$\forall k = 1 \dots N, \quad \dot{\mathcal{Y}}_m^k(t+1) = \frac{(\phi^t \mathcal{F})^k(t+1) + \frac{\mathcal{Y}_m^k(t)}{\Delta t} - \omega_k^2 \mathcal{Y}_m^k(t)}{\frac{1}{\Delta t} + 2\omega_k \zeta_k + \omega_k^2 \Delta t} \quad (3.3)$$

C'est la relation utilisée dans *Modalys* : connaissant la position et la vitesse initiale de chaque point de la structure, nous pouvons, grâce à cette dernière relation et à la relation 3.2, calculer de proche en proche les positions et vitesses à tout instant, si la force est connue à cet instant. Malheureusement cette force n'est justement pas connue dans notre cas et nous avons dû faire l'approximation de remplacer $\mathcal{F}^k(t+1)$ dans la relation 3.3 par $\mathcal{F}^k(t)$. Ainsi, dans les cas où l'on a une relation pour calculer la force en fonction du déplacement ou de la vitesse (comme c'est le cas dans notre modèle où les objets interagissent au niveau d'une couche visco-élastique, mais pas dans *Modalys*), cela permet de dissocier le calcul de la force et de la position de la manière suivante :

$$\mathcal{Y}(t) \rightarrow \mathcal{F}(t) \rightarrow \mathcal{Y}(t+1) \rightarrow \mathcal{F}(t+1) \dots \quad (3.4)$$

Pour corriger l'erreur due au schéma d'Euler explicite (qui se traduit par une perte

d'énergie dans le système), nous avons modifié, comme dans *Modalys* les pulsations ω_k et amortissements ζ_k avant tout calcul.

Il faut ensuite multiplier à gauche \mathcal{Y}_m et $\dot{\mathcal{Y}}_m$ par ϕ pour obtenir les positions \mathcal{Y} et vitesses réelles $\dot{\mathcal{Y}}$.

Remarque : Nous nous sommes aperçus qu'en utilisant le schéma d'Euler implicite nous obtenons directement une relation du même type que la relation 3.3 où n'apparaît que $\mathcal{F}^k(t)$ et nous pouvons donc sans autres approximations dérouler les calculs selon la boucle 3.4. La démonstration de ce résultat se trouve dans l'annexe A, mais nous n'avons pas testé cette méthode dans *Matlab* car nous en avons trouvé une qui nous semble encore meilleure. Il est en effet possible, comme nous allons le voir dans la suite, de résoudre exactement le problème grâce au formalisme de Green et cette méthode permet aussi de séquencer les calculs selon la boucle 3.4 pendant le contact.

3.2 Résolution exacte en position par convolution avec des fonctions de Green

3.2.1 Calcul des solutions exactes

Au lieu d'utiliser un schéma numérique par différences finies nous pouvons essayer de résoudre les équations différentielles de façon analytique en se servant de la transformée de Fourier. Dans le domaine de Fourier l'équation 2.12 devient :

$$\phi^t \mathbb{M} \phi \phi^{-1} (-\omega^2 Y + \alpha i \omega Y) + \phi^t \mathbb{K} \phi \phi^{-1} (\beta i \omega Y + Y) = \phi^t F \quad (3.5)$$

$$\text{où } Y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{Y}(t) e^{-i\omega t} dt \text{ et } F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Et, avec la propriété 2.9, il vient :

$$\left(\mathcal{I}_d(-\omega^2 + \alpha i \omega) + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_k^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} (\beta i \omega + 1) \right) \phi^{-1} Y = \phi^t F \quad (3.6)$$

C'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \omega_k^2 + 2i\omega\omega_k\zeta_k - \omega^2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \phi^{-1} Y = \phi^t F \quad (3.7)$$

Nous pouvons alors en déduire Y :

$$Y = \phi \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \frac{1}{\omega_k^2 + 2i\omega\omega_k\zeta_k - \omega^2} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \phi^t F \quad (3.8)$$

En notant $G(\omega) = \phi \begin{bmatrix} \ddots & & & \\ & \frac{1}{\omega_k^2 + 2i\omega\omega_k\zeta_k - \omega^2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \phi^t$ la matrice de transfert de la structure, la solution du système dans le domaine de Fourier est :

$$Y = GF \quad (3.9)$$

La transformée de Fourier inverse de cette égalité permet de trouver la solution dans le domaine temporel sous forme d'un produit de convolution :

$$\mathcal{Y} = \mathcal{G} * \mathcal{F} \quad (3.10)$$

Si nous voulons observer le déplacement du nœud e consécutif à une force appliquée au nœud p , il ne reste qu'une convolution : $\mathcal{Y}(e, t) = (\mathcal{G}(e, p) * \mathcal{F}(p))(t)$. Nous en déduisons la signification physique de la fonction de Green $\mathcal{G}(e, p)$:

$\mathcal{G}(e, p)$ est la réponse en e à une impulsion en p .

Nous obtenons, pour expression de ces réponses impulsionnelles (après calcul) :

$$\mathcal{G}(e, p)(t) = \sum_{k=1}^N \phi(e, k) \phi(p, k) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega_k^2 + 2i\omega\omega_k\zeta_k - \omega^2} e^{i\omega t} d\omega \quad (3.11)$$

Les intégrales se calculent par la méthode des résidus (voir [16]) et nous obtenons, dans un cas d'amortissement non-critique ($\zeta_k < 1$) :

$$\mathcal{G}(e, p)(t) = Heav(t) \sum_{k=1}^N \frac{\phi(e, k) \phi(p, k)}{\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2}} e^{-\omega_k \zeta_k t} \sin\left(\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} t\right) \quad (3.12)$$

3.2.2 Fonctions de Green de vitesse

Nous pouvons aussi très simplement calculer la solution en vitesse en convoluant la force à la dérivée de la fonction de Green. En effet, l'égalité 3.9 multipliée par $i\omega$ peut s'écrire :

$$i\omega Y = (i\omega G) F \quad (3.13)$$

D'où, en temporel :

$$\dot{\mathcal{Y}} = \dot{\mathcal{G}} * \mathcal{F} \quad (3.14)$$

3.3 Un banc d'oscillateurs

3.3.1 Calcul de la position

Nous avons vu que pour obtenir la position $y(t)$ d'un nœud d'une structure à N nœuds en réponse à une force $f(t)$ en un autre nœud, il suffit de convoluer la

force à une réponse impulsionnelle pouvant s'écrire comme une somme de sinusoides amorties. Or une sinusoides amortie étant elle-même la réponse impulsionnelle d'un passe-bande d'ordre 2, la position cherchée peut s'obtenir en sommant les sorties du filtrage de la force par un banc de filtres résonnants.

Voici la démonstration de cette implémentation à l'aide de filtres numériques :

Une réponse impulsionnelle de la corde peut s'écrire comme la partie imaginaire de $\sum_{n=1}^N a_n e^{i\Omega_n t} Heav(t)$ où $\Omega_n = \omega_n + id_n$.

$y(t)$ est donc la partie imaginaire de $u(t)$:

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^N a_n e^{i\Omega_n(t-s)} Heav(t-s) f(s) \right) ds \quad (3.15)$$

Nous discrétisons ensuite le temps à une fréquence d'échantillonnage F_e et obtenons pour un instant k correspondant à $t_k = \frac{k}{F_e}$ l'expression suivante :

$$u(k) = \sum_{l=0}^k \sum_{n=1}^N a_n e^{i\frac{\Omega_n}{F_e}(k-l)} f(l)/F_e \quad (3.16)$$

En échangeant les deux signes somme, $u(k)$ s'exprime comme une somme de contributions modales $u_n(k)$:

$$u(k) = \sum_{n=1}^N \sum_{l=0}^k a_n e^{i\frac{\Omega_n}{F_e}(k-l)} f(l)/F_e = \sum_{n=1}^N u_n(k) \quad (3.17)$$

Nous remarquons que chaque partiel $u_n(k)$ vérifie la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_n(0) = a_n f(0) \\ u_n(k) = e^{i\frac{\Omega_n}{F_e}} u_n(k-1) + a_n f(k) \end{cases} \quad (3.18)$$

A partir des parties réelles et imaginaires de la relation 3.18, nous pouvons obtenir, comme l'a montré Van den Doel ([17]), une relation de récurrence sur la partie imaginaire qui nous intéresse :

$$\begin{cases} y_n(k) = 0 & \text{pour } k = -1, 0 \\ y_n(k) = \alpha_n y_n(k-1) - \beta_n y_n(k-2) + \gamma_n f(k-1) & \text{pour } k > 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

où

$$\begin{cases} \alpha_n = 2e^{-\frac{d_n}{F_e}} \cos \frac{\omega_n}{F_e} \\ \beta_n = e^{-\frac{2d_n}{F_e}} \\ \gamma_n = a_n e^{-\frac{d_n}{F_e}} \sin \frac{\omega_n}{F_e} \end{cases} \quad (3.20)$$

Ainsi nous décomposons la structure vibrante en une somme d'oscillateurs harmoniques excités par la force. Nous l'implémentons comme un banc de filtres numériques résonnants. Cette méthode a été proposée et implémentée par Van Den Doel ([17]) dans le cadre de la synthèse par modèle physique en temps réel pour jeux vidéo et réalité virtuelle.

3.3.2 Calcul de la vitesse

Comme c'est le cas dans *Modalys*, nous préférons écouter la vitesse. Nous avons donc utilisé la même méthode pour décomposer la dérivée de la fonction de Green en un banc d'oscillateurs. Nous avons alors trouvé que la vitesse $y'(k)$ est la somme des vitesses partielles $y'_n(k)$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\begin{cases} y'_n(k) = 0 & \text{pour } k = -1, 0 \\ y'_n(k) = \alpha'_n y'_n(k-1) - \beta'_n y'_n(k-2) - \gamma'_n f(k) + \delta'_n f(k-1) & \text{pour } k > 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

où

$$\begin{cases} \alpha'_n = 2e^{-\frac{d_n}{F_e}} \cos \frac{\omega_n}{F_e} \\ \beta'_n = e^{-\frac{2d_n}{F_e}} \\ \gamma'_n = a_n \frac{\omega_n}{\sqrt{\omega_n^2 + d_n^2}} \\ \delta'_n = \frac{a_n e^{-\frac{d_n}{F_e}}}{\sqrt{\omega_n^2 + d_n^2}} (d_n \sin \frac{\omega_n}{F_e} + \omega_n \cos \frac{\omega_n}{F_e}) \end{cases} \quad (3.22)$$

Nous constatons sans surprise que, contrairement à la position, la vitesse à l'instant k dépend de la force à ce même instant. Cela est gênant si le modèle calculant la force d'interaction à un instant donné fait intervenir la vitesse à ce même instant. Ce n'est pas le cas dans le modèle de Stulov, qui ne dépend que de la position. Par contre, c'est le cas dans le modèle de Hunt-Crossley.

Alors que nous avons déjà un programme de simulation sous *Matlab* résolvant l'équation modale par schéma d'Euler explicite modifié, nous avons choisi d'utiliser finalement la méthode des bancs de filtres, car elle présente, selon nous, plus d'avantages pour l'implémentation en temps réel et pour une évolution future vers un modèle de piano plus complet.

3.4 Le calcul de la force d'interaction

Nous avons choisi de calculer la force soit selon le modèle de Stulov soit selon celui de Hunt-Crossley. Ces deux modèles étant à comparer, ils ont tout deux été implémentés dans notre programme de simulation *Matlab*.

3.4.1 Implémentation du modèle de Stulov

Rappelons l'expression 2.5 de la force selon ce modèle :

$$F(u(t)) = F_0 \left[u(t)^\alpha - \frac{\epsilon}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^t u(\xi)^\alpha \exp\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi \right]$$

Stulov ne proposant pas d'implémentation numérique de son modèle, nous avons dû trouver notre propre méthode de calcul.

Nous introduisons le terme mémoire : $mem(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^t u(\xi)^\alpha \exp\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi$ La compression u n'étant calculée qu'aux instants d'échantillonnage, il nous faut approcher l'intégrale par une somme discrète et nous choisissons pour plus de précision

la méthode des trapèzes. Ainsi :

$$mem(k) = \exp\left(-\frac{k\Delta t}{\tau}\right) \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \left[u(l)^\alpha \exp\left(\frac{l\Delta t}{\tau}\right) + u(l+1)^\alpha \exp\left(\frac{(l+1)\Delta t}{\tau}\right) \right] \Delta t \quad (3.23)$$

Nous cherchons à pouvoir calculer $mem(k)$ par récurrence et le calcul de $mem(k+1)$ nous conduit à la relation :

$$mem(k+1) = \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) mem(k) + \frac{1}{2} \left[u(k)^\alpha \exp\left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) + u(k+1)^\alpha \right] \quad (3.24)$$

Sachant aussi que $mem(0) = 0$, nous obtenons une très pratique relation de récurrence.

3.4.2 Implémentation du modèle de Hunt-Crossley

Rappelons l'expression 2.6 de la force selon ce modèle :

$$F(u, \dot{u}) = F_0 u^\alpha (1 + \mu \dot{u})$$

Selon cette loi il faut connaître la position à l'instant t et la vitesse à l'instant t pour déterminer la force à l'instant t . D'après l'expression 3.19, le calcul par la méthode du banc de filtres de la position à l'instant t ne dépend que de la force à l'instant $t-1$. Par contre, cette même méthode utilisée pour calculer la vitesse à l'instant t nécessite selon l'expression 3.21 la connaissance supplémentaire de la force à l'instant t . Comme c'est justement cette dernière que l'on cherche, le calcul ne peut se faire simplement.

Nous avons donc choisi de calculer la vitesse du point de contact en dérivant sa position par un schéma d'Euler explicite et l'expression de la force devient :

$$F(k) = F_0 u(k)^\alpha \left(1 + \mu \frac{u(k) - u(k-1)}{\Delta t} \right) \quad (3.25)$$

Ce choix permet également un calcul plus rapide.

3.5 Architecture du calcul

La figure 3.1 décrit l'ensemble de l'algorithme de calcul sous forme d'un schéma bloc. La partie supérieure du schéma (au dessus de la ligne pointillée) sert au calcul de la force de contact et les calculs arrêtent donc d'y être effectués à partir de la fin du contact. Dans la partie inférieure, la force de contact est utilisée pour calculer la vitesse de la corde au point d'écoute. Ces calculs sont effectués pendant la durée désirée du son (temps où la touche du piano serait enfoncée).

La ligne pointillée peut-être aussi vue comme un démarcation spatiale :

- la partie supérieure décrit les grandeurs associées au contact (positions de la corde et du marteau et force d'interaction) donc localisées au niveau du point p de la corde.
- la partie inférieure décrit le mouvement résultant de la corde au niveau du point d'écoute e .

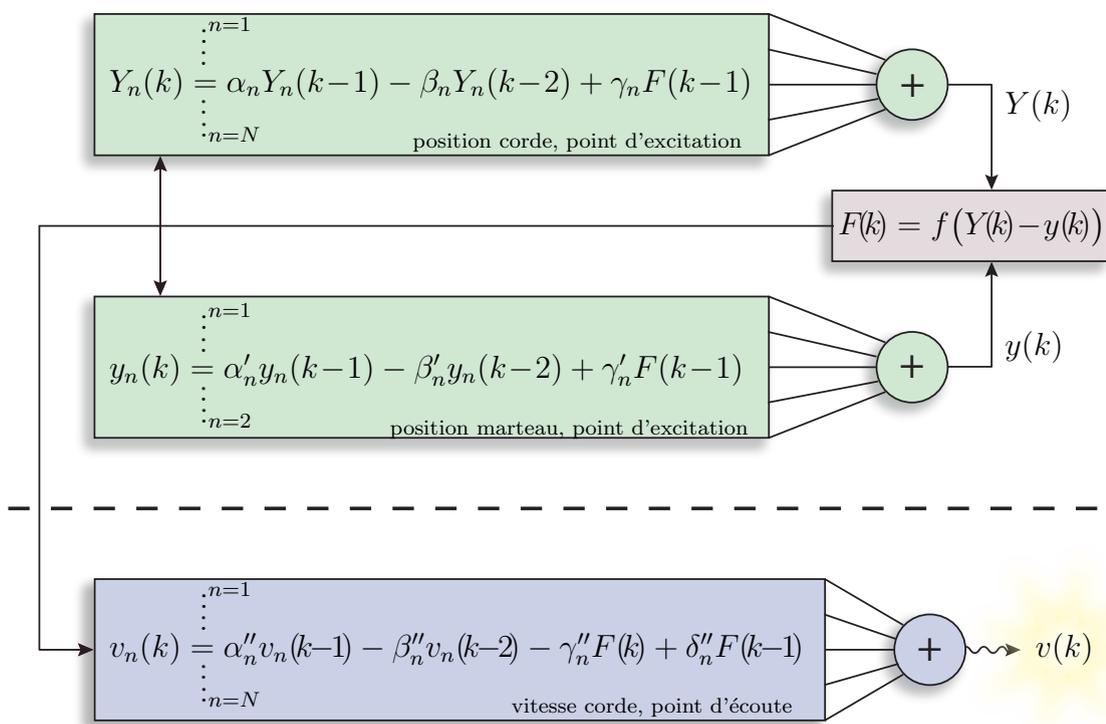


FIG. 3.1 – Schéma du calcul

Chapitre 4

Résultat des simulations

4.1 Comparaison avec les mesures de la littérature

Nous comparons ici les simulations d'un marteau frappant une corde rigide, car c'est dans cet unique contexte que les mesures de la littérature ont été réalisées, et nous les comparons aux mesures, après ajustement des paramètres du modèle de feutre. Ce dernier pouvant être le modèle de Stulov ou celui de Hunt-Crossley. Pour simuler un impact sur une corde rigide avec notre programme de simulation, il a suffi de mettre à zéro les déformées modales de notre modèle de corde, ce qui revient à mettre à zéro les coefficients de récurrence α , β et γ des filtres.

4.1.1 Le modèle de Stulov

Le modèle de Stulov a été étudié en partie l'année dernière dans le cadre du projet mentionné en introduction. Les conclusions de cette étude sont qu'il est très difficile, voire impossible de se faire une idée de la contribution de chacun des paramètres $F0$, α , ϵ et τ sur la forme du diagramme force-compression. En conséquence, l'estimation des paramètres est hasardeuse et laborieuse. Des fonctions *Matlab* nous permettent de tracer plusieurs cycles simultanément en faisant varier un paramètre du modèle, mais l'interdépendance des paramètres complique le travail. Ce que déclare Stulov nous semble vrai : ce modèle permet d'approcher n'importe quel cycle de compression avec une précision donnée. Malheureusement la recherche manuelle du meilleur jeu de paramètres peut être très longue et un programme de recherche automatique de paramètres par minimisation de l'erreur serait nécessaire pour étudier plus en détail la modèle. Avant de se lancer dans une telle entreprise, il nous a semblé plus judicieux de vérifier qu'un jeu de paramètres "collant" au cycle mesuré d'un feutre dans une situation donnée de compression donne d'aussi bons résultats par rapport aux cycles de ce même feutre dans d'autres situations de compression. C'est à cette condition que nous pouvons espérer que le modèle se comportera comme le feutre au contact d'une corde mobile.

Un autre inconvénient du modèle est que la forme du cycle pour un jeu de paramètres donné dépend de la fréquence d'échantillonnage et de la méthode de calcul de l'intégrale. Ainsi, les paramètres sont intimement liés à une simulation et les paramètres identifiés par un auteur, comme Stulov, ne sont pas réutilisables si l'on

ignore la méthode de calcul employée.

Sur la figure 4.1 sont représentés les points de mesures de Yanagisawa et Nakamura ([1]) pour quatre impacts du même marteau avec des vitesses initiales différentes. Les traits pleins ont été obtenus par simulation d'impacts aux mêmes vitesses et pour un unique jeu de paramètres (sensé décrire le marteau en question).

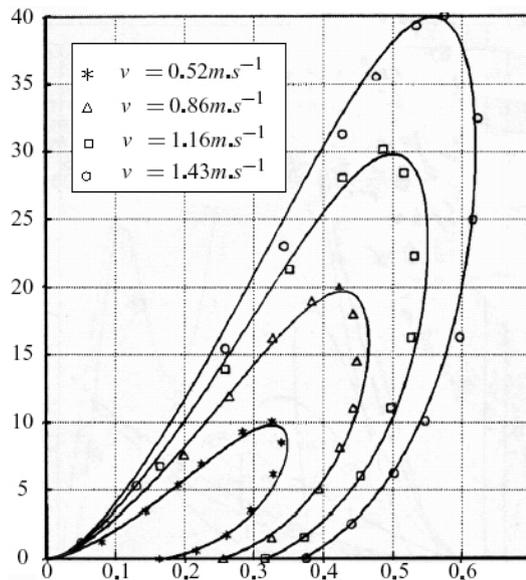


FIG. 4.1 – Les points sont les mesures de Yanagisawa ([1]) et les courbes sont les courbes simulées pour les mêmes vitesses dont les paramètres F_0 , α , τ et ϵ ont été déterminés pour approcher au mieux les points de mesures

La partie gauche de la figure 4.2 donne un exemple de recherche de paramètres à partir de mesures fournies par Stulov.

4.1.2 Le modèle de Hunt-Crossley

Etant données les difficultés rencontrées lors de l'ajustement des paramètres du modèle de Stulov, nous avons tout de suite été séduits par le modèle de Hunt-Crossley car il comporte un paramètre de moins. C'est aussi l'unique alternative réelle au modèle de Stulov pour modéliser le comportement hystérétique du feutre (le modèle de Boutillon donnant des résultats trop éloignés de la réalité). Les simulations obtenues avec ce modèle par Avanzini et Rocchesso ([14]) dans le cadre d'une synthèse de sons percussifs nous ont semblé très encourageantes. Les auteurs font remarquer que les diagrammes force-compression obtenus rappellent ceux du feutre du marteau de piano, mais personne n'a encore déterminé si ce modèle pouvait effectivement rendre compte des mesures du comportement du feutre. C'est ce que nous avons cherché à faire en tentant d'ajuster les paramètres du modèle aux mesures que nous avons obtenues de la littérature, puis de Stulov lui-même.

Nous avons alors remarqué une propriété très intéressante du modèle qui facilite grandement l'estimation des paramètres. En observant l'expression 2.6 de la force

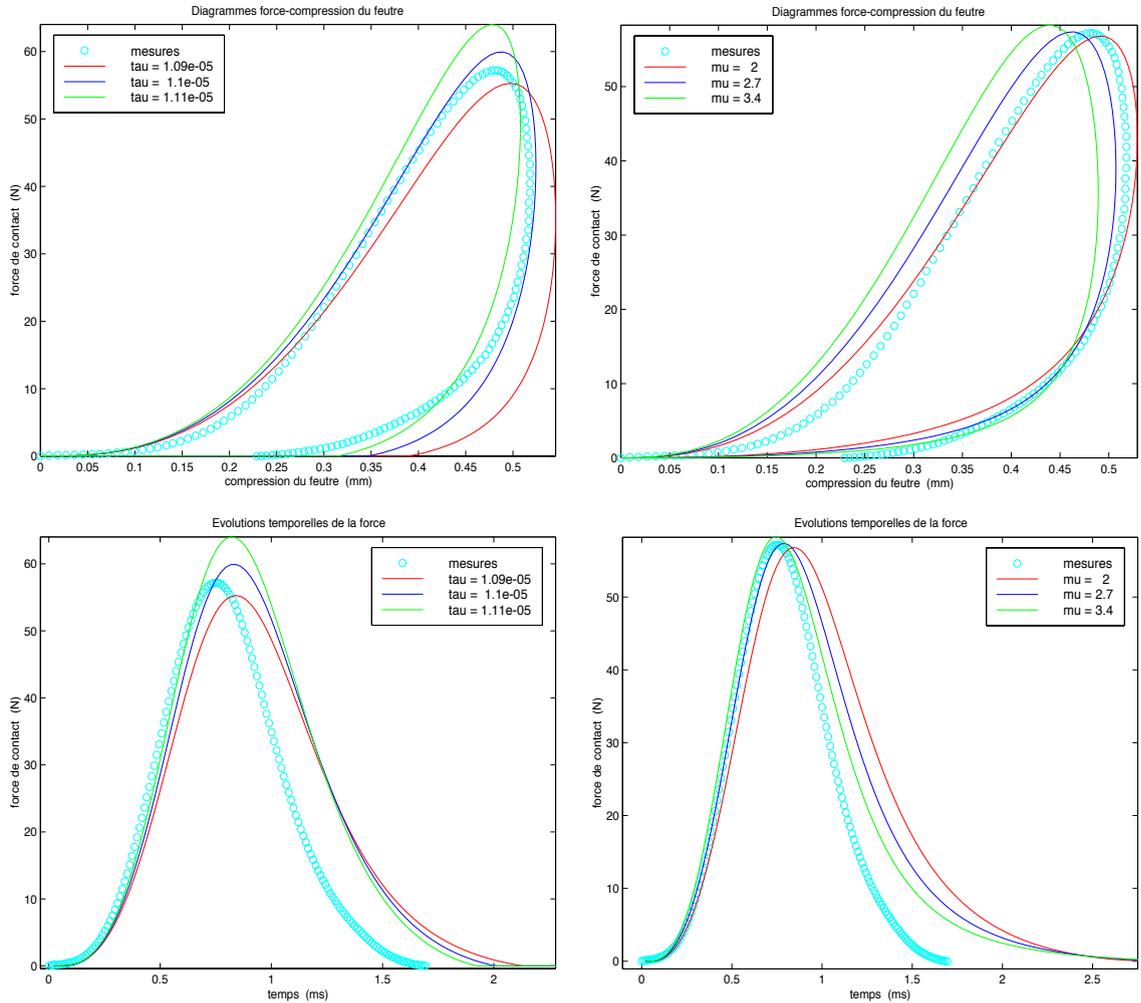


FIG. 4.2 – Les cercles sont les points de mesure que nous a envoyés Stulov pour le marteau $n^{\circ}32$. Les mesures sont approchées par simulation d’impact d’un marteau de même masse avec la même vitesse initiale. A gauche, nous utilisons le modèle de feutre de Stulov et à droite, celui de Hunt-Crossley.

selon le modèle de Hunt-Crossley, nous constatons que lorsque la vitesse de compression est nulle, la force vaut $F(u, 0) = F_0 u^\alpha$. Sur le diagramme force-compression, cette propriété évidente se traduit par le fait que tout point de la courbe ayant une tangente verticale est situé sur la courbe $y = F_0 x^\alpha$. C’est le cas en particulier du point de compression maximum, à l’extrême droite du diagramme. Comme nous voulons approcher au plus près un cycle mesuré donné, ayant pour maximum de compression le point (c_m, f_m) , la relation $f_m = F_0 c_m^\alpha$ nous libère encore d’un paramètre. La recherche se limite donc par exemple au meilleur couple (α, μ) .

La courbe $y = F_0 x^\alpha$ est aussi la limite du diagramme force-compression quand μ tend vers zéro et μ est donc le paramètre déterminant l’importance de l’effet d’hystérésis : il est directement lié à la largeur du cycle.

Connaissant ces propriétés, la détermination des jeux de paramètres correspondant

à une mesure donnée devient très rapide. Le rôle de chacun des paramètres étant clairement défini, nous savons aussi quand nous avons atteint le jeu optimum de paramètres, contrairement au modèle de Stulov avec lequel nous ne sommes jamais sûr de ne pas pouvoir trouver mieux.

Enfin, une mesure présentant plusieurs cycles compression/détente permettrait immédiatement de voir s'il existe une courbe de la forme $y = F_0 x^\alpha$ passant par tout les maximums locaux de compression, et donc de valider ou non le modèle.

Nous avons aussi constaté que, contrairement au modèle de Stulov, les valeurs des paramètres pour approcher une mesure donnée ne dépendent pas de la fréquence d'échantillonnage.

Sur la figure 4.3 sont représentés les points de mesures de Stulov ([6]) pour trois impacts du même marteau avec des vitesses initiales différentes. Les traits pleins ont été obtenus par simulation d'impacts aux mêmes vitesses et pour un unique jeu de paramètres (sensé décrire le marteau en question).

La partie gauche de la figure 4.2 donne un exemple de recherche de paramètres à partir de mesures fournies par Stulov. Ces estimations sont commentées dans la partie suivante.

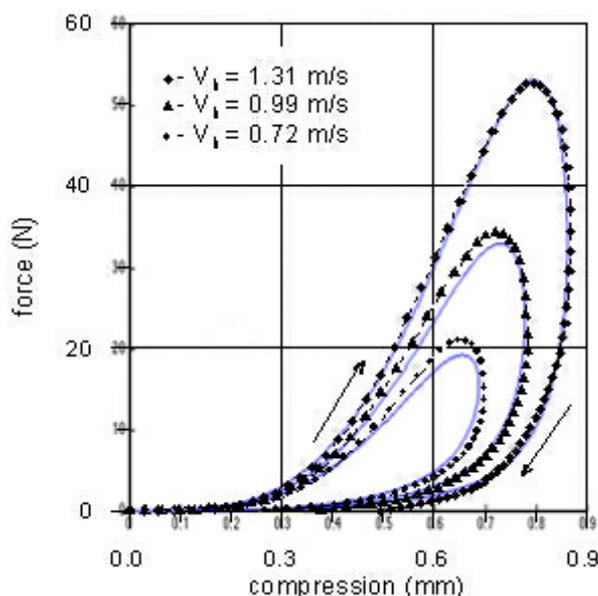


FIG. 4.3 – Les courbes pointées sont les mesures de Stulov ([6]) et les courbes en trait plein sont les courbes simulées pour les mêmes vitesses dont les paramètres F_0 , α et μ ont été déterminés pour approcher au mieux les points de mesures

4.1.3 Conclusions

Aux vus des figures 4.1 et 4.3, les deux modèles semblent aptes à décrire le comportement du feutre. Pourtant, il manquait toujours dans les articles sources des mesures un paramètre essentiel pour simuler l'impact : la masse effective du marteau et du système qui lui est solidaire (accéléromètre ou dispositif optique).

Cette masse a donc été un paramètre en plus à ajuster, et les résultats obtenus doivent être considérés avec prudence.

Par contre, les mesures ayant servi aux ajustement de la figure 4.2 nous ont été fourni par Stulov avec la masse effective du marteau. Nous voyons que nous ne pouvons obtenir de très bons résultats avec l'un ou l'autre des modèles. Nous avons aussi les évolutions temporelles de la force et de la compression et nous pouvons voir que les deux modèles donnent un temps de contact plus long qu'en réalité, et qu'un rapprochement vers les mesures sur le diagramme force-compression entraîne parfois un éloignement de celles-ci sur le diagramme temporel. Ainsi, soit les deux modèles sont insatisfaisants, soit la masse effective a mal été évaluée (elle serait en réalité plus faible).

Cela nous a poussé à réaliser des mesures où la compression du marteau contre le capteur est contrôlée. Nous n'avons alors pas à simuler le lancé du marteau vers le capteur et éliminons ainsi le risque d'erreur sur le calcul de la masse effective du marteau.

4.2 Confrontation des simulations et de nos mesures

Nos mesures sont échantillonnées à la même fréquence que nos simulations. Nous pouvons donc directement utiliser la compression mesurée comme entrée d'une simulation et comparer sa sortie, la force simulée, à la force mesurée. Ainsi, la simulation se réduit dans notre cas au calcul de la force à partir de la compression, calcul qui a été détaillé pour les deux modèles de feutre dans les parties 3.4.1 et 3.4.2.

4.2.1 Comparaison des deux modèles de feutre

Nous présentons ici des forces simulées obtenues à partir de compressions mesurées et essayons de les rendre les plus proches possibles des forces mesurées correspondantes en ajustant les paramètres de chacun des modèles. Bien que toutes les mesures aient été faites avec le même marteau (Steinway n°12 poncé et piqué), différents jeux de paramètres ont été nécessaires pour approcher chaque mesure, pour des raisons qui seront détaillées dans la partie suivante. Pour ces mêmes raisons, les cycles mesurés ne sont jamais tracés simultanément.

Les figures 4.4 et 4.5 font apparaître (en noir) deux series de mesures, la première pour une compression très lente (0,5s) et la seconde pour une compression d'une dizaine de millisecondes. Sont présentes également sur ces figures différentes simulations obtenues avec le modèle de Hunt-Crossley, en plus de celle la plus satisfaisante, pour montrer l'influence du paramètre μ . Nous notons que ces simulations ne sont pas très satisfaisantes au début de la compression mais nous verrons dans la partie suivante qu'il ne faut pas y attacher une importance trop grande. Par curiosité, nous avons aussi fait des simulations avec le modèle de Hunt-Crossley mais où le terme de vitesse est élevé au carré. Nous notons que cela rend le diagramme plus pointu.

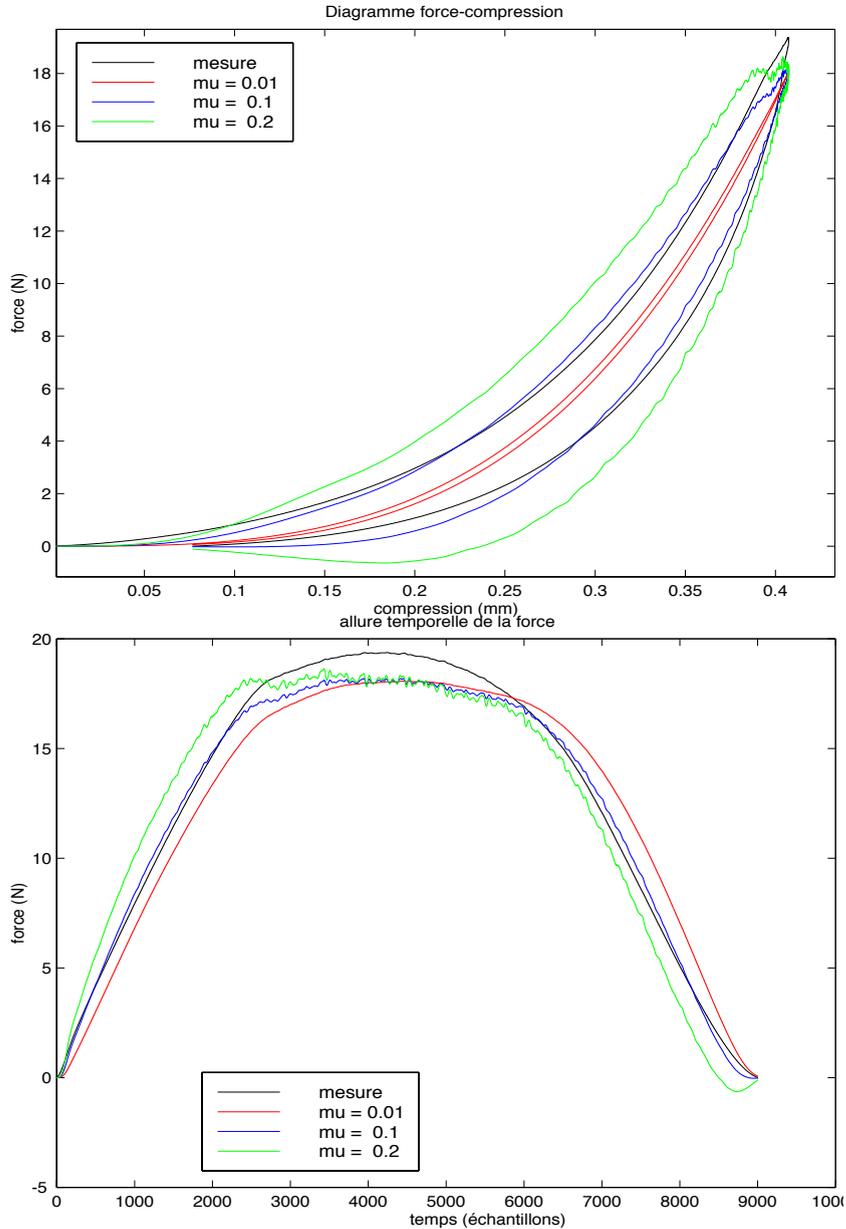


FIG. 4.4 – comparaison de la force mesurée lors d’une lente compression et de la force calculée avec le modèle de Hunt-Crossley pour différentes valeurs de μ . La simulation la plus ressemblante que nous ayons pu obtenir est la courbe bleue.

Il nous a aussi semblé intéressant d’utiliser une mesure où le cycle présente une boucle secondaire due à une faible recompression pendant la détente. Nous avons en effet obtenu de telles mesures pour une compression d’une durée d’environ $40ms$ car à la fréquence correspondante le pot vibrant s’est avéré réagir de la sorte (celui-ci est soumis à rude épreuve et nous ne pouvons empêcher certaines résonances propres de son système mobile). Les figures 4.6 et 4.7 présentent les simulations correspondantes pour le modèle de Hunt-Crossley puis Stulov. La figure 4.7 prouve qu’il est possible avec le modèle de Stulov de trouver différents jeux de paramètres pour s’approcher

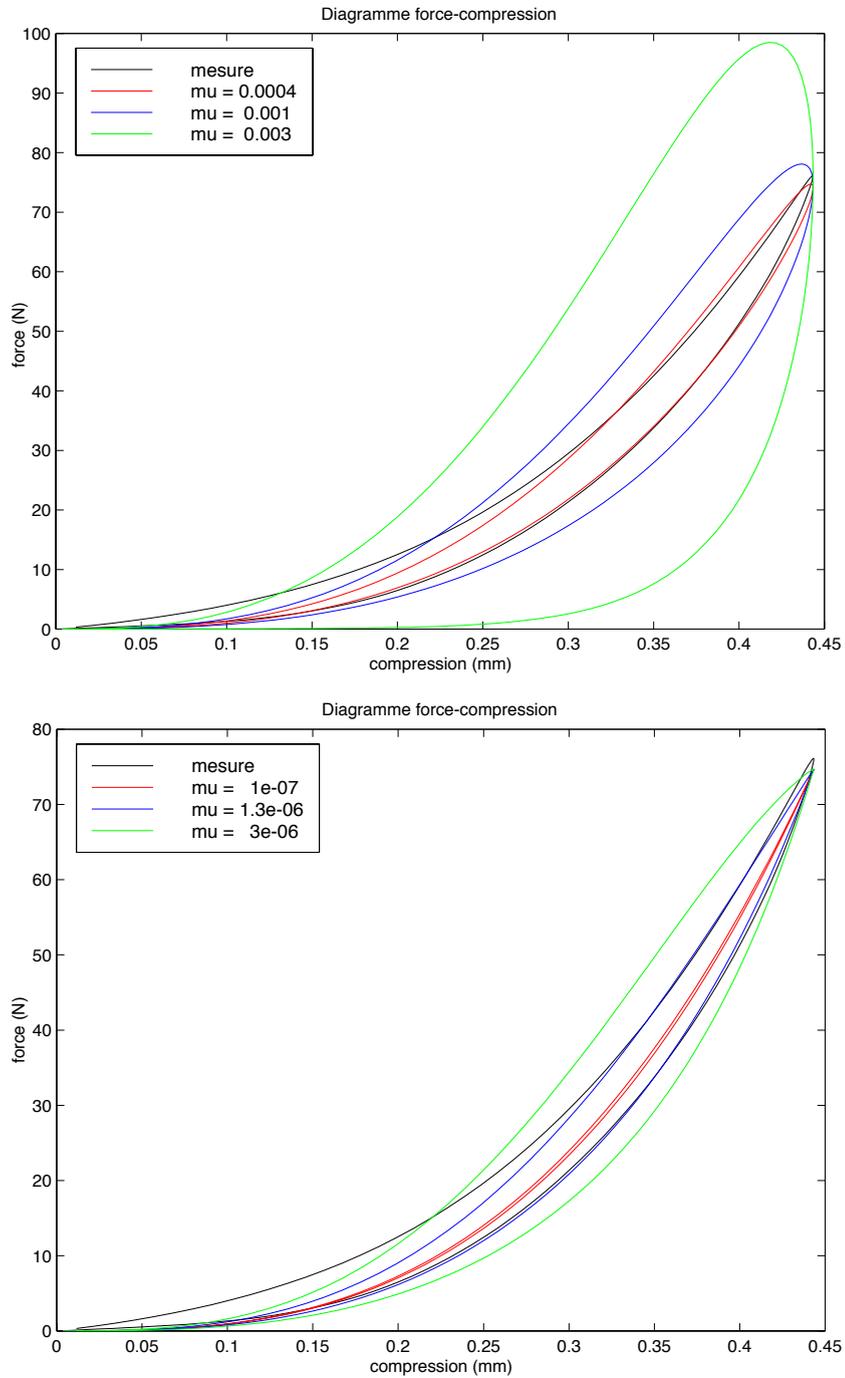


FIG. 4.5 – Estimation des paramètres du modèle de Hunt-Crossley pour une compression mesurée de l'ordre de $10ms$. Le cadran du haut présente des simulations avec la loi classique, tandis que le cadran du bas présente un essai avec la loi où le terme de vitesse est au carré.

du cycle simple, mais que la boucle secondaire permet de discriminer. La figure 4.6 fait apparaître le côté plus limité du modèle de Hunt-Crossley : le diagramme simulé

représenté est celui qui approche le mieux la boucle secondaire, mais il a fallu pour cela sacrifier la ressemblance avec le début de la compression. Nous notons toutefois que cet écart se remarque beaucoup moins sur l'allure temporelle de la force, courbe qui est très proche de celle mesurée.

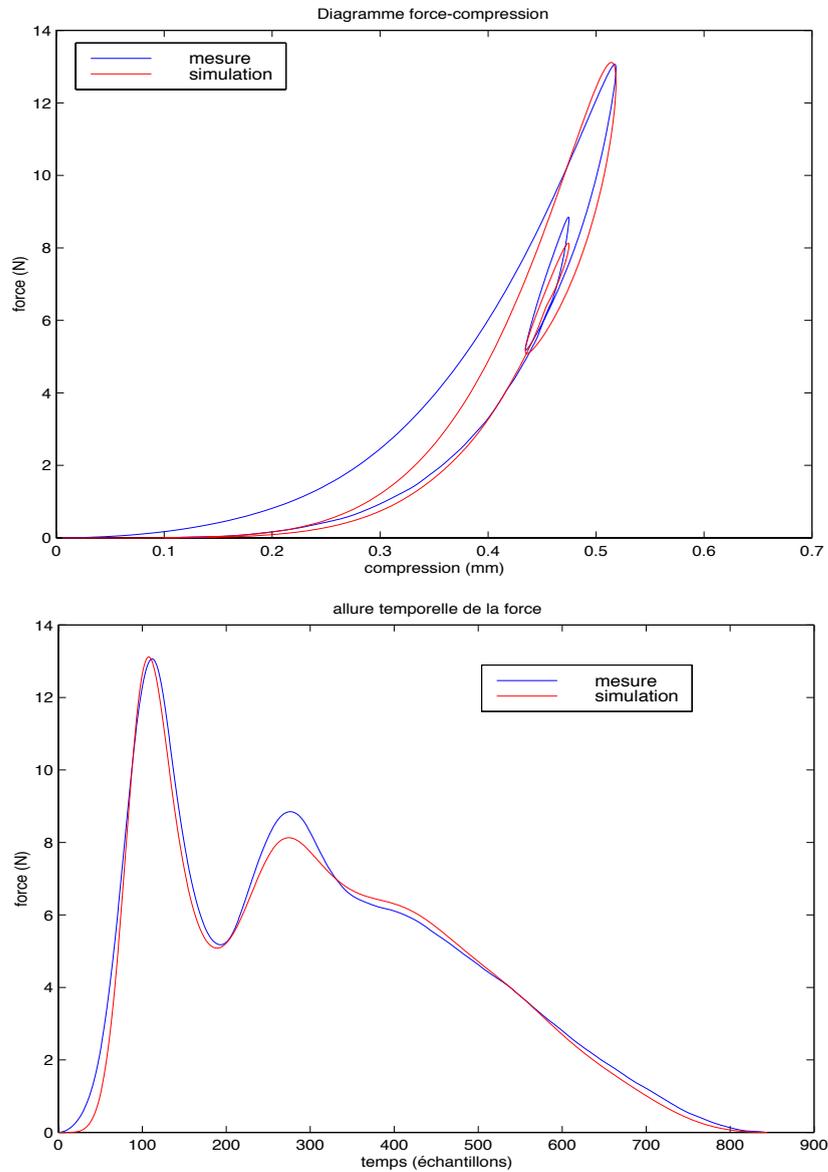


FIG. 4.6 – Un ajustement avec le modèle de Hunt-Crossley pour une compression en deux temps

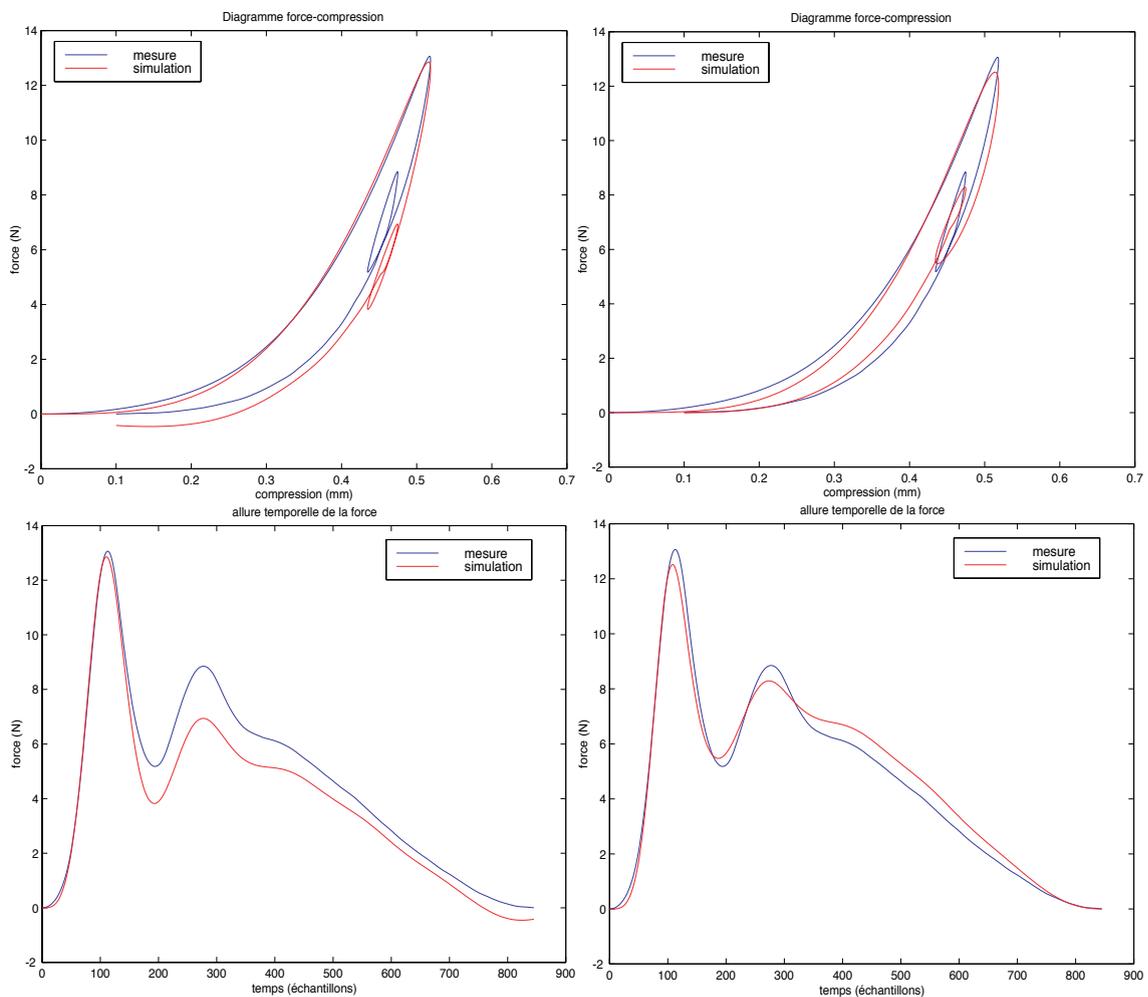


FIG. 4.7 – Deux ajustements possibles avec le modèle de Stulov pour une compression en deux temps

4.2.2 Le diagramme force-compression : une caractérisation relative

Les ajustements de simulations réalisés à partir de nos propres mesures ont été très enrichissants et nous mènent à une remise en cause de la méthode d'analyse des mesures effectuées jusqu'à présent. Nous pensons en effet qu'il ne faut pas, comme il a toujours été fait dernièrement, attacher trop d'importance à la forme du cycle. Nous pouvons affirmer cela, car ayant fait désormais nous-même des mesures, nous savons à quoi la forme du cycle tient.

Le problème nous est apparu quand nous avons voulu comparer les différents cycles mesurés avec un même marteau. Nous nous sommes alors aperçus que suivant l'instant que nous déterminions comme début du contact pour chacun des cycles, leurs positions relatives sur le même diagramme étaient différentes.

Nous rappelons que le début du contact, duquel nous déduisons la constante d'intégration de la vitesse, est déterminé à partir du signal de force : c'est l'instant à partir duquel

la force n'est plus nulle. Or justement la force suit un loi en puissance et démarre très lentement. De plus le signal de force est alors à un très faible niveau et présente un certain bruit. Même si le lissage nous a permis d'atténuer numériquement le bruit et de mieux discerner le début du contact, le choix d'un instant précis où nous considérons que le contact commence reste arbitraire. Le problème vient du fait que, en conséquence des très faibles valeurs initiales de la force, la position varie très vite au moment du contact. Comme l'instant du début de contact détermine le zéro de la position c'est à dire le début de la compression, différents choix de celui-ci, même très proches, vont aboutir à des cycles différemment positionnés par rapport à l'axe des abscisses. Le cycle peut donc rester plus ou moins longtemps tangent au départ à l'axe des abscisses, et donc correspondre à un choix tout à fait différent de l'exposant α de l'un ou l'autre des modèles.

Cela pourrait peut-être expliquer qu'aucune évolution nette de α le long de la gamme n'ait jamais pu être exhibée, alors qu'en théorie ce paramètre devrait être lié au rayon de courbure des marteaux, rayon qui diminue du grave vers l'aigu.

En conséquence, nous avons cherché un critère plus objectif pour déterminer le début du contact : nous avons essayé d'utiliser un seuil de force relatif au niveau de bruit du signal hors contact ou un seuil de pente à l'origine du diagramme force-compression. Cette seconde méthode nous a donné des résultats satisfaisants pour comparer les cycles du marteau plus ou moins piqué (figure 1.8) mais ne semble pas correcte pour comparer des cycles d'échelles de force trop différentes.

Ainsi, il n'y a pas dans la partie précédente de diagramme où se superposent plusieurs cycles mesurés, et il faut garder à l'esprit que les formes à l'origine des diagrammes auraient pu être différentes avec d'autres choix de début de contact et s'attacher plus à la forme globale du cycle, et à l'aptitude qu'a un modèle à reproduire cette forme, à une translation près suivant l'axe des abscisses.

4.3 Nos simulations avec une corde vibrante

Les modèles de feutre doivent finalement servir à la simulation de l'interaction marteau-corde, simulations que nous effectuons déjà sous *Matlab* et que nous implémenterons par la suite dans *jMax* pour une synthèse temps-réel. Les simulations dans *Matlab* utilisent l'une ou l'autre des méthodes de calcul détaillées dans le **chapitre 3**.

4.3.1 Comparaison des deux méthodes de calcul

Les deux méthodes donnent des résultats comparables, mais nous préférons la méthode faisant intervenir les fonctions de Green, car elle présente des avantages pour l'implémentation d'un modèle temps-réel.

Cette méthode permet en effet de rester dans une logique modale puisque les réponses de chacun des modes sont calculées séparément. Ainsi, le nombre de modes calculés peut changer au cours de la synthèse pour mieux s'adapter aux ressources disponibles (activité du processeur et encombrement de la mémoire). Nous pouvons par exemple imaginer les comportements suivants :

- Le calcul d'un oscillateur arrête de s'effectuer lorsque la contribution de celui-ci devient négligeable. C'est le cas pour toute note tenue et en commençant par les modes élevés, qui sont les plus amortis et qui ne rayonnent généralement de l'énergie que pendant l'attaque (nous parlons bien sûr du son du piano, instrument à oscillations libres).
- Lorsque les ressources deviennent insuffisantes, par exemple à cause d'autres programmes comme des effets ou parce que trop de notes sont jouées en même temps, au lieu de pénaliser la dernière note jouée, nous arrêtons les oscillateurs dont les contributions au son global sont les plus faibles, c'est à dire ceux qui ont les plus faibles amplitudes instantanées pondérées par la sensibilité de l'oreille. Des effets de masquage pourrait également être pris en compte.
- Dans le cadre d'un modèle plus complet de piano, nous pouvons modéliser le couplage entre les différentes cordes à partir des rapports en fréquence de leurs modes. Des couplages entre les différents oscillateurs de l'ensemble des cordes peuvent être déterminés à l'avance et stockés dans une matrice.

Toutes ces techniques permettent de calculer uniquement ce qui est important.

4.3.2 Synthèse sonore

Nous avons synthétisé avec les deux modèles de feutre des sons présentant les caractéristiques désirées :

- une attaque "feutrée"
- un son plus riche en hautes fréquences lorsque le marteau est lancé avec une vitesse initiale plus importante.

Ce ne sont bien sûr pas encore des sons de piano. C'est ce que produirait l'écoute de la vitesse d'un point d'une corde de piano tendue entre deux blocs de béton et frappée par un marteau de piano.

Conclusion et perspectives

Les recherches bibliographiques et théoriques effectuées durant le stage nous ont permis de mettre au point un modèle numérique de l'interaction marteau-corde du piano adapté aux exigences du temps-réel.

La conception et la réalisation du dispositif de mesure du comportement du feutre nous ont fait prendre conscience des difficultés d'une telle entreprise et nous ont appris à appréhender différemment les mesures de la littérature et leur analyse. Nous savons désormais qu'un diagramme force-compression est à considérer avec prudence et qu'il ne faut pas négliger l'allure temporelle de la force.

Les mesures obtenues sont encourageantes mais laissent entrevoir leur limite : nous ne pouvons pour l'instant comparer plusieurs diagrammes. Ces limites sont en train d'être contournées par l'utilisation d'un nouveau système d'acquisition permettant d'enregistrer des séquences de mesures sans limite de durée. Cela nous permet de procéder à de longues acquisitions pendant lesquelles le feutre est soumis à différentes situations de compression. Nous commandons le pot vibrant avec un sinus glissant généré par le logiciel audio Max sur un ordinateur Apple et acquérons les mesures avec ce même ordinateur par l'intermédiaire d'une interface audio 24 bits de MOTU d'excellente qualité et toujours sous Max. Une unique mesure comprend donc une série de compressions de durée décrivant une large gamme et l'intégration de la vitesse donne une compression toujours cohérente. Tous les cycles apparaissent donc sur un même diagramme et sont comparables car ont la même origine de compression. Nous avons déjà commencé ces mesures et allons les poursuivre puisque nous continuons notre stage à l'Ircam pendant encore deux mois.

Nous allons aussi écrire un objet marteau-corde dans jMax reprenant le modèle numérique codé dans Matlab et qui permettra de juger en temps réel l'effet des paramètres physiques du modèle et de faire des tests perceptifs sur les deux modèles de feutre.

Nous tenons à remercier nos encadrants M. René Caussé et M. Christophe Vergez pour leur aide et collaboration attentive, pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail et la liberté qu'ils nous ont laissée pour l'organiser et l'orienter. Nous remercions également toute l'équipe "Acoustique Instrumentale" de l'Ircam et en particulier M. Joël Bensoam pour nos fructueuses discussions sur la théorie modale, M. Nicolas Misdariis pour son aide avec Modalys et Max et M. Alain Terrier (Atelier mécanique) pour la réalisation des pièces du dispositif expérimental.

Annexe A

Résolution numérique des équations modales par le schéma d'Euler implicite

Selon ce schéma :

$$\ddot{\mathcal{Y}}_m^k(t) = \frac{\dot{\mathcal{Y}}_m^k(t+1) - \dot{\mathcal{Y}}_m^k(t)}{\Delta t} \quad (\text{A.1})$$

Ce qui, substitué dans l'équation 2.15, permet directement d'obtenir :

$$\forall k = 1 \dots N, \quad \dot{\mathcal{Y}}_m^k(t+1) = \Delta t \left((\phi^t \mathcal{F})^k(t) - \left(2\omega_k \zeta_k - \frac{1}{\Delta t} \right) - \omega_k^2 \mathcal{Y}_m^k(t) \right) \quad (\text{A.2})$$

Et nous calculons la position avec le même schéma :

$$\mathcal{Y}_m^k(t+1) = \Delta t \dot{\mathcal{Y}}_m^k(t) + \mathcal{Y}_m^k(t) \quad (\text{A.3})$$

L'avantage de ce Schéma est que, d'après l'égalité A.2, nous n'avons besoin que de la force à l'instant t pour calculer la vitesse et donc la position à l'instant $t+1$.

Annexe B

L'importance du choix des constantes d'intégration

Le dispositif expérimental consistant à fixer un accéléromètre sur la tête du marteau pour ensuite accéder à la position par double intégration a été souvent utilisé. Pourtant nous nous demandons comment se fait le choix des deux constantes d'intégration. Giordano et Winans ([3]) nous livrent leurs secrets sur ces deux constantes : la première constante d'intégration est déterminée par le fait que la vitesse est nulle au moment où la compression est maximum c'est-à-dire au moment où la force de compression est maximum. Etant données les formes des cycles mesurés par leurs prédécesseurs, le fait que le maximum de compression coïncide avec le maximum de la force nous semble être une supposition hasardeuse. Nous voyons en effet sur la plupart des diagrammes du présent rapport, qu'ils proviennent de nos mesures ou de celles de Yanagisawa et Nakamura ([1]) ou Stulov ([6]), que le maximum de force et le maximum de compression sont atteints à deux instants distincts, le second étant atteint après le premier. Cette erreur d'une constante sur la vitesse se répercute par un décalage progressif de la position par rapport à sa valeur réelle (en positif ou négatif suivant le signe de l'erreur), décalage qui lui-même fausse la détermination de la deuxième constante d'intégration qui s'obtient pourtant cette fois suivant le raisonnement valide suivant : la position (compression) est nulle dès le commencement de la force de contact. Les auteurs obtiennent donc des diagrammes erronés où la courbe de détente est parfois au dessus de la courbe de compression.

Bibliographie

- [1] T. Yanagisawa and K. Nakamura. Trans. Musical Acoust. Techn. Group. In *Meeting Acoust. Soc. Jpn.*, volume 1, pages 14–18, 1982.
- [2] X. Boutillon. Model for piano hammers : Experimental determination and digital simulation. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 83(2) :746–754, February 1988.
- [3] N. Giordano and J. P. Winans. Piano hammers and their force compression characteristics : Does a power law make sense ? *J. Acoust. Soc. Amer.*, 107(4) :2248–2254, April 2000.
- [4] N. Giordano and J. P. Millis. Hysteretic Behavior of Piano Hammers. In *Proceedings of ISMA '2001*, pages 237–240, 2001.
- [5] A. Stulov. Hysteretic model of the grand piano hammer felt. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 97(4) :2577–2585, 1995.
- [6] A. Stulov and A. Mägi. Piano Hammer : Theory and Experiment. In *Proceedings of ISMA '2001*, pages 215–220, 2001.
- [7] H. L. F. Helmholtz. "On the sensation of tone". Masson, 1877. Reprinted by Dover, from the first edition in 1954.
- [8] W. Kaufmann. Uber die Bewegungen geschlagener Klaviersaiten. *Ann. Phys.*, 54 :675–712, 1895.
- [9] D. E. Hall. Piano string excitation II, general solution for a hard narrow hammer. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 81(2) :535–46, 1987.
- [10] D. E. Hall. Piano string excitation II, general solution for a soft narrow hammer. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 81(2) :547–55, 1987.
- [11] H. Suzuki and I. Nakamura. Acoustics of pianos. *Applied Acoustics*, 30 :147 :205, 1990.
- [12] D. E. Hall. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 92 :95–105, 1992.
- [13] H. Suzuki. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 82 :1145–1151, 1997.
- [14] F. Avanzini and D. Rocchesso. Modelling Collision Sounds : Non-linear Contact Force. In *Proceedings of the COST G6 Conference on Digital Audio Effects*, December 2001.
- [15] K. H. Hunt and F. R. E. Crossley. Coefficient of restitution interpreted as damping in vibroimpact. *ASME J. Appl. Mech.*, pages 440–445, June 1975.
- [16] M. Bruneau. *Introduction aux théories de l'acoustique*. Université du Maine, 1983.
- [17] K. van den Doel and D. K. Pai. Modal synthesis for resonating objects. 2001.